

กรมศึกษาธิการ

ตำรายุคคลิธิ

เล่ม ๑

พิมพ์โดย ร.ม.ส.

พระเจ้าลูกยาเธอ พระองค์เจ้ากิตติยากรวรลักษณ

อธิบดี กรมศึกษาธิการ

ราคาเล่มละ ๕ สตางค์

โรงพิมพ์อักษรวิจิตร

พิมพ์ครั้งแรก ๒๐๐๐ ฉบับ

รัตนโกสินทร์ ๒๔๖๓

กรุงเทพฯ

๕.๑๓
ก



กรมศึกษาธิการ

ตำรายุคคลิิต

เล่ม ๑

ราคาเล่ม ละ ๕ สตึง

โรงพิมพ์อักษรภัก

พิมพ์ครั้งที่ ๒ ๓๐๐๐ ฉบับ

รัตนโกสินทร์ ศก ๒๔๖๐



คำนำ

ยุคคิด หรือยี่ห้อเมคส์ เป็นสาขาหนึ่งของคณนาวิทยา มีประโยชน์
ในที่ ใช้ คือ สำหรับเป็น เครื่อง มือ คิด ใ้ วิชาสูง ๆ ที่ จะ เรียน ค่อย
ขึ้น ไป อีก กับ มี ประโยชน์ที่จะนำ มา ใช้ ได้ เป็น ความ รู้ ตาม ญ
สำหรับ วัด แด ให้ ทราบ ลักษณะ ของ รูปต่าง ๆ ได้ อย่าง เดียว
กับ สาขาอื่น ๆ ของ คณ นา วิทยา เช่น พีชคณิต เจอ แด เส้น
หน้า ไม่ เป็น คณ แต่ ประโยชน์ อัน สำคัญ ที่ สุด ของ ยุคคิด หรือ
ยี่ห้อเมคส์ ที่ วิชาอื่น ๆ (นอกจาก วาจา วิเคราะห์) ไม่มี เหมือน
ก็คือ การ ผูก หัด ให้ อ้าง ผล ตรง กับ เหตุ ให้ อ้าง เหตุ แค ที่ เป็น เหตุ
จริง ของ ผล ให้ พุค แต่ ที่มี หลั กถา น ที่ อ้าง เสมอ ไป สิ่ง ไต
ที่ ไม่ มี ที่ อ้าง เป็น หลั กถา น ห้าม ไม่ ให้ ใช้ เป็น อัน ขาด,
ให้ เชื่อ แค สิ่ง ที่ มี หลั กถา น (ปรุฟ) เป็น สำคัญ แล้ว นอก นั้น
ถึง จะ ปรากฏ อยู่ แก่ ภา ก็ ยัง ไม่ ให้ เชื่อ ตา จม กว่า จะ ได้ กัน หา
หลั กถา น เป็น ปรุฟ ไ้ แน่ นแท้ แล้ว, การ ผูก หัด อย่าง นี้ ใคร จะ ถ้าว
ไ้ ว่า ไม่มี ประโยชน์ หรือ ว่า มี ประโยชน์ น้อย ๆ . ใน มนุษย์
อะไร จะ สำคัญ กว่า ความ คิด ? คำ พุค คือ อะไร ? ก็ คือ ความ

คำนำ

คิดนั่นเอง แต่อาจ ออก มา เป็น ถ้อยคำ หรือ เขียน ลง เป็น ตาม
ลักษณะอักษร ความ คิด เป็น เครื่องหมาย วัดความฉลาด ของมนุษย์
ถ้า ผู้ใดทราบ เหตุ แล้ว อาจ หา เหตุ ผล ได้ ถูกต้อง (อย่าง ที่ เรียก
กัน ว่า คณิตว่า หน้า) หรือ เมื่อทราบผลแล้ว อาจ คิด หา เหตุ ได้
ถูกต้อง ผู้ นั้น ก็ ย่อม ได้ ชื่อ ว่า ฉลาด มากกว่า ผู้ ที่ ไม่ อาจ ดำเนินการ
ทำ ได้ ดังนั้น อยู่ เอง เป็น ขรรพตา หรือ พูด อีก นัย หนึ่ง ก็ คือ ผู้ ที่
มีความ คิด หา เหตุผล ได้ ดี แต่ ถูก ต้อง น้อย หรือ มาก เพียง ใด
ก็ ฉลาด น้อย หรือ ฉลาด มาก เพียง นั้น

การ ที่ คน เรา อาจ มีความรู้ แล ฉลาด ขึ้น ได้ โดย ทำ การ ไป
แต่เด็ก จน ใหญ่ มาก นั้น ก็ จริ่ง อยู่ แต่ ถ้า มี บทเรียน ที่ อาจ ผิด ความ
คิด ให้ เป็น ต้นทุน สำหรับ เกิด ความ ฉลาด ดัง กล่าว มา แล้ว นี้ ได้ ตั้ง แต่
เมื่อ ยัง เป็น เด็ก อยู่ ใน โรงเรียน จะ ไม่ เรียก ว่า เป็น หนทาง ดี แต่
หนทาง นี้ สำหรับ ผิด หัก ให้ เกิด ความ ฉลาด หรือ ?

บทเรียน อะไร ใน โรงเรียน เลียน ว่า ที่ หัก ให้ ผู้ เรียน คิด ถูก
ตาม เหตุผล, ให้ ระมัดระวัง ภาษา ที่ ใช้ ไม่ ให้ มาก หรือน้อย หรือ ด้อย
เกินไป, ให้ เชื่อม แต่ สิ่ง ที่มี หัก ถูกลาน เป็น จริง แล้ว ทั้ง นั้น ถึง จะ เห็น

คำนำ

ปรากฏอยู่แต่ตา ถ้ายังไม่ชัดนัก ตามที่ปรุฟให้เห็นว่าจริงได้
ก็ยังไม่ให้เชื่อ? ข่านก็ไม่สอนให้เขียนด้วยมือ
หรือเขียนตามคำบอก หรือไวยากรณ์ก็ไม่สอนได้ เดชะ ถ้า
สอนถูกก็จะสอนได้ บ้างนิดหน่อย แต่แปลคำวาทที่กว้างนัก
จะใช้ให้แปลประโยชน์ในเฉพาะสิ่งนี้ไม่ได้ วาจาวิเคราะห์
ก็แปลคำวาทที่เกี่ยวกับภาษามากเกินไป จำแปลจะต้องรู้ภาษา
ให้พอเสียก่อน จึงจะเรียนได้ เพราะฉะนั้นในโรงเรียนคำๆ ที่สอน
เพียงประโยค ๒ จะมีอะไรแปลเครื่องสำหรับฝึกความคิดที่แปล
กันเหตุแห่งความฉลาด? นักเรียนในโรงเรียนเหล่านี้จะไม่ต้อง
ไปเดินทางฮ้อมโดยเรียนคิด เรียนพูด เรียนแต่ง ให้ถูกต้องตาม
เหตุผล ในเมื่อไปลงมือทำงานหรือ? นี่แปลสิ่งไม่สมควรเลย
เพราะฉะนั้นคำวาทยุคถัดควรมีส่วนแปลบทเรียนอย่างหนึ่ง ในโรงเรียน
สามัญ ถึงจะยังให้เรียนในชั้นคำๆ ไม่ได้ เพราะยังแปลของ
ใหม่อยู่ แต่ยังไม่มีการที่สอนแปลพอ จะให้เรียนแต่ชั้น ๖ ซึ่งเป็น
ชั้นประโยค ๒ ไปก่อนก็ได้ ครูประกาศนียบัตรที่จำหน้าออกไป
ก็ควรมีส่วนพอตัวกันอยู่แล้ว เมื่อต่อไปภายหน้าถึงเวลาอันควร

คำนำ

จึงขอยุ่ให้หลักสูตรให้ มี ยี่สิบ เมตร คดออก ลง ไป ถึง ชั้น ต่ำ ๆ เป็น
ลำดับ แต่ไม่ควรต่ำกว่า ชั้น ๕ เป็น อันขาด เพราะ ความรู้ นักเรียน
ยังน้อยนัก จะ ไม่มี ใจหาว่า ความเข้าใจ พอ ที่จะ เรียน ยี่สิบ เมตร
ให้เป็นประโยชน์ ได้

หลวงไพศาลศิลปศาสตร์

นายตรวจ ฝ่าย การ ศึกษา



บอกแก้คำผิด

ก่อนที่จะใช้ตำราเล่มนี้ ขอให้ผู้เรียน ชัดแก่ คำผิดทั้งหลายดังมีแจ้งต่อไปนี้ เสียให้หมดจด เพราะเป็นการสำคัญอยู่ ถ้าปล่อยไว้ให้ผิดดังนั้น จะทำให้เข้าใจผิด แลจะทำให้เกิดความขึ้นตาในสิ่งที่ผิดด้วย ข้าพเจ้าผู้เรียบเรียงต้องขออภัยโทษ ในการที่หนังสือเล่มนี้ยังมีผิดมากนัก เพราะหาได้ตรวจให้ละเอียดแล้วจึงพิมพ์ไม่ได้ผอนเรียงไป พิมพ์ไป เป็นการหุงเข้าครอกหม้ออยู่ เมื่อพิมพ์ครั้งที่ ๒ จึงจะได้แก้ไขให้ดียิ่งขึ้น.

หน้า	บรรทัด	คำผิด	คำแก้
๒	๓๒	ทั้ง ๒๓ ข้อ	ทั้ง ๓๒ ข้อ
๓	๓๗	พน เอง	พน เอง
๕	๑๖	แท้จริง	แท้จริง
๖	๓๓	คตัง	คตัง
๗	๓	ที	ที
๓๒	๕	ข้อ ๓๓	ข้อ ๓๐
๓๔	รูป		ได้อักษร ๒ ที่ข้าง วงนอก ของรูป ที่ตรงเส้น ๓ ก ค่อ ตรง ออก มา ถึง

บอก แก้วแก้ว

หน้า	บรรทัด	คำผิด	คำแก้
๓๕	๗	ไว้ ๓๓	ไว้ ๓๐
๓๕	๘		
๓๖	๑๒		
๒๒	๓	ด้วงจุ	กำหนดจุ
๒๖	๘	ไว้ ๘	ไว้ ๘
๒๗	๓๓		
๓๓	๕		
๓๗	๗	ท. ท. ป.	ท. ท. ท.
๔๘	๕	๓๐ ๓๐.	๓๐ ๓๓.
๓๐๒	๘	๓๒. ๘	๓๐ ๒๘.
			ตั้งแต่หน้า ๖๖ ถึงหน้า ๘๖ คำว่า "สมมติ" ตก ให้ได้เสียให้เต็ม

การวาง กรรมการ

ตำรายุคคติ

เล่ม ๑

สิ่งที่ อนุญาตให้ทำ

ในการที่จะเขียน รูป สำหรับวิชา สิ่งนี้ ท่าน นักปราชญ์ยุคคติ
ผู้แต่ง ห้ามมิให้ ใช้เครื่อง มือ สิ่งอื่น นอกจากไม้บรรทัดตรงที่ไม่มีขีด
เรื้อง หมายถึง วัด ๓ กับ มงเวียน ๓ รวมเป็นสองสิ่งเท่านั้น ท่าน
กล่าวว่า เป็น พอ สำหรับ ที่จะทำให้ถูกต้อง ได้ทุกอย่าง และ ท่าน
ได้ ให้อนุญาตไว้ ๓ ข้อดังนี้ อยู่ต่อไปนี้ นอกจากนั้นจะผิด
ทำเป็น อย่าง อื่นไปไม่ได้เลย เป็นอัน ขาด

ข้อ อนุญาต

๑. ตั้งแต่จุดหนึ่ง จุด ใดจะลากเส้นตรงต่อไปถึงจุดหนึ่ง จุดใดก็ได้
๒. เส้น ตรงที่กำหนดไว้, คือ เส้น ตรง ที่มีที่ สุดปลาย แล้ว
จะลากให้ตรง ค่อย ออกไปจนยาว เท่า ใด ๆ ก็ได้

คำร่ายบุคคลิก

๓. จะเอาจุดหนึ่ง จุดใด เป็นศูนย์กลาง แล้วเขียน วงให้เส้น
รอบวง ห่างจากศูนย์กลางเท่าใด ๆ ก็ได้ (คือ จะให้เส้น รัศมี
ของวงนั้นยาวเท่าใด ๆ ก็ได้)

เมื่อพิจารณาข้ออนุญาตข้างบนนี้ จะแลเห็นได้
ว่าท่านบุคคลิกหาได้อนุญาตให้วัดเส้นยาวด้วยไม้บรรทัด
หรือด้วยมือ เว้นไม่ เพราะฉะนั้นให้เข้าใจไว้ว่าในวิชา
บุคคลิกนี้จะใช้วัดด้วยสิ่งใด ๆ ไม่ได้เลย

สิ่งที่เห็นจริง แล้ว

คำร่ายบุคคลิกที่จะทำต่อไปนี้อาศัยด้วยความที่เป็นจริงอยู่แล้ว ที่
เห็นจริงแล้ว ๒๒ ข้อด้วยกัน เป็นพื้นฐานสำหรับประกอบก่อความเปน
จริงอื่น ๆ ที่ติดต่อกันที่ยังเคลือบแฝงอยู่ กระทำให้แจ่มแจ้งเห็นจริงได้
สิ่งที่เห็นจริงแล้วทั้ง ๒๒ ข้อนี้ คือ

๑. สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เท่ากับสิ่งอันเดียวกันสิ่งเหล่านั้น เท่ากันหมด
(มีผู้ชายหนึ่ง คือ นายมา, นายมี, นายสี, นายสา,
ต่างก็มีอายุเท่ากับพ่อเกิด เพราะฉะนั้น นายมา, นาย
มี, นายสี, นายสา, มีอายุเท่ากันหมด)

๒. สิ่งทั้งหลายที่เท่ากัน ถ้าเอามาบวกเข้าเท่า ๆ กัน ผล
บวกเหล่านั้นก็เท่ากันหมด

(มีอุทาหรณ์ คือ นายมอ, นายมี, นายสี, นายสา, มีเงินเท่ากัน เอาเงินมาเพิ่มให้คนทั้ง ๔ นี้ อีกคนละ ๘ บาท ทรัพย์สินสมบัติของคนทั้ง ๔ นี้ก็คงยังเท่ากัน อยู่ นั่นเอง ไม่มากนักดีกว่ากัน)

๓. สิ่งทั้งหลายที่เท่ากันถ้าหักออกเสียเท่า ๆ กันที่เหลืออยู่ก็คงเท่ากัน

๔. สิ่งทั้งหลายที่ไม่เท่ากัน ถ้าเอาอะไรมาบวกเข้าเท่า ๆ กัน ผลบวกก็คงไม่เท่ากัน

๕. สิ่งทั้งหลายที่ไม่เท่ากัน ถ้าหักออกเสียเท่า ๆ กันที่เหลืออยู่ก็คงไม่เท่ากัน

๖. สิ่งทั้งหลายที่ต่างกันเป็นสองเท่าของสิ่งอันเดียวกัน หรือของสิ่ง
ที่เท่ากัน สิ่งทั้งหลายเหล่านั้นก็เท่ากันเหมือนกัน

(มีอุทาหรณ์ คือ อายุของนายมาเป็นสองเท่าของ
• อายุพ่อเถิก (คือ นายมาแก่กว่าพ่อเถิกเท่าตัว)
อายุนายมีก็เป็น ๒ เท่าอายุพ่อเถิก ดังนั้น อายุนายมา
กับนายมีก็คงเท่ากัน อีกในข้อหนึ่ง คือ อายุนายมาเป็น
๒ เท่าของอายุพ่อเถิก อายุนายมีเป็น ๒ เท่าของ
อายุพ่อเถิก แต่พ่อเถิกกับพ่อเถิกมีอายุเท่ากัน จึง
มีอายุนายมากับนายมีก็คงเท่ากันอยู่นั่นเอง)

๗. สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของสิ่งอื่นเดียวกัน หรือของสิ่งที่เท่ากัน สิ่งทั้งหลายเหล่านั้นก็เท่ากันเหมือนกัน

๘. จำนวนเต็มต้องใหญ่กว่าส่วนของมันเสมอไป

(มีอุทาหรณ์ คือ เรือนทั้งหลังต้องใหญ่กว่าห้อง ๆ ใดๆ ของเรือนนั้น หรือ พูก ตาม วิถี เศษส่วน ทั่วจำนวน ต้องใหญ่กว่าเศษ ส่วน)

ทบทวนข้อ ๘ ขึ้นมาไว้ เห็นข้อ ๘ นี้ เพื่อให้ความคล้ายคลึงอยู่หมัดเดียวกัน ผู้เรียบจะไ้จำง่าย

๙. สิ่งทั้งหลายที่ทับกันสนิท สิ่งเหล่านั้นเท่ากัน

๑๐. เส้นตรง ๒ เส้นจะปิดที่ว่างให้ มิได้

(มีอุทาหรณ์ ดังรูปนี้  ข้อสามเส้นจึงจะปิดที่

ว่างให้มิได้ ดังรูปนี้ )

๑๑. มุมฉากทั้งหลายย่อมเท่ากันหมด

๑๒. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงอีก ๒ เส้น

กระทำให้มุม

ภายในบนข้างหนึ่งทั้ง ๒ มุม แคบกว่ามุมฉาก ๒ มุม

ถ้าต่อปลายเส้น

แสดงคำใช้

๕

ตรงทั้ง ๒ ทางมุมภายใน ๒ มุมที่เล็กกว่ามุมฉาก ๒ มุม เส้นตรง
ทั้ง ๒ นี้จะพบกัน

(คือถ้าเส้นตรง ก จ ตัด

เส้นตรง บ ป แลเส้น

ตรง ผ ผ ที่จุด ย แล น

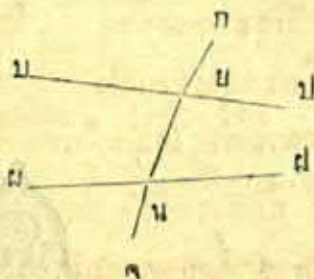
กระทำมุม ป ย น +

มุม ผ น ย แลบอกว่ามุม

ฉาก ๒ มุมแล้ว เส้น

ตรง บ ป แล ผ ผ นี้ ถ้าต่อตรงออกไปทาง ก ป

แล ผ ก็จะพบกัน)



แสดงคำใช้

ในการที่จะเรียน ตำรายุคตินี้ ผู้เรียนจำเป็นที่จะต้องเข้าใจว่า
ถ้อยคำที่จะนำมาใช้ต่อไปข้างหน้านี้แปลว่าอะไร แลหมายความว่าเพียงใด
ให้เป็นที่น่าเชื่อถือแนบแน่นเสียก่อน ได้ยกไปรวมอธิบายไว้ข้างท้ายหนังสือ
โดยสิ้นเชิงแล้ว แต่ในที่นี้จะยกมากล่าวเป็นตอน ๆ ตามความต้องการ
ของบทเรียน ให้ผู้เรียน พยายามตรึกตรองจน เข้าใจได้แท้จริงทั้งสิ้น

แล้วทำให้ได้จิตใจไว้ กับต้องจำนำเบอร์ให้แม่นยำด้วย เพราะเป็น
ของสำคัญอยู่

ตอนที่ ๑

๑ จุด เป็นสิ่งซึ่งไม่มีกำหนดกว้างยาวใหญ่เล็ก มี
กำหนดแต่ที่เท่านั้น

(คือเราไม่อาจวัดจุดได้ว่ามีใหญ่โตเพียงใด เรา
อาจรวมได้แต่ว่ามีอยู่ตรงนั้น ๆ เท่านั้น)

๒ เส้น เป็นสิ่งซึ่งมีแต่กำหนดยาว ไม่มีกำหนดกว้าง.
ปลายเส้นทั้ง ๒ ข้อมเป็นจุด แต่ถ้าเส้น ๒ เส้นไขว้กัน ที่ ๆ เส้น
ทั้ง ๒ ไขว้กันนั้นกันันว่าเปนจุดเหมือนกัน

(เมื่อกล่าวถึงเส้นไม่หมายความว่าเส้นหนา หรือเส้น
บาง เพราะฉะนั้นจึงอ้างว่าเส้น มีแต่กำหนดยาว ไม่
กำหนดกว้าง โดยที่สุกรอยที่น้ำในแม่น้ำจะกบยกลง
ก็เรียกว่าเส้น แต่เส้นนี้อาจวัดได้แต่โดยยาวเท่านั้น
โดยกว้างไม่มี.)

๓ เส้นตรง

คือ เส้น ซึ่ง ตั้ง อยู่ใน ระหว่าง

จุดปลายทั้ง ๒ ข้าง

(คือถ้าจะสมมุติเอาจุดสองจุดเป็นปลายเส้น แล้ว
ซึ่งเส้นนั้นผูกกับจุดทั้ง ๒ ได้ตั้งเกรียบก เส้นนั้นก็จะเป็น
เส้นตรง ถ้าซึ่งไม่ตั้งเส้นก็จะห่อขึ้นเทียบทาบแลโค้ง
กไปมา เส้นนี้หมายความว่าไม่ใช่เส้นตรง ฉะนั้นก็ถ้า เส้นที่
เราเขียนบนกระดาษ ก็หมายความว่าเส้นตรงเส้นไม่ตรง
ในการทำนองเดียวกัน)

๖ มุม คือที่เส้นตรง ๒ เส้นเขนจดกัน แต่ไม่ติด

หรือค่อเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

- (ในรูปนี้ เส้นตรง ก ก เขนจด
กับเส้นตรง ก น ที่จุด ก เพราะ ก
ฉนั้นมุมที่ยังเกิดขึ้นนี้ จึงเรียกว่ามุม
ก ก น หรือมุม น ก ก ก็เรียกได้ แต่ต้องเรียก
ให้ทั่วอักษรที่อยู่ตรงยอดมุมอยู่กลางเสมอ ก็นั้นตัว
ก ในที่นี้ จะไปขึ้นกับตัว ก เรียกว่ามุม ก ก น

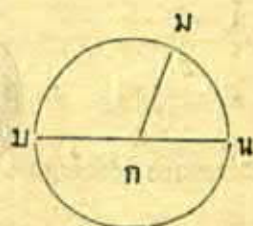
คำอธิบาย

หรือมุม ก น จ ไม่ได้เป็นอันขาด. อนึ่งให้นักเรียน
สังเกตไว้ว่า ถ้าจะต่อเส้นตรงทั้ง ๒ เส้นของมุมให้ยาว
ออกไปหรือตัดให้สั้นเข้ามา มุมนี้จะไม่ใหญ่ขึ้นหรือ
เล็กลงเลย เพราะว่ายังกางอยู่เท่าเดิม แลการที่
นับมุมว่าใหญ่หรือเล็กนั้น นับว่ามากกางมากน้อย
เท่านั้น)

๑๐ วงกลม คือรูปที่มีเส้น ๆ หนึ่งล้อมรอบ เส้นนี้

เรียกว่า เส้นรอบวง และมีจุด ๆ

หนึ่งอยู่ตรงกลางภายใน, ซึ่งถ้าเรา
ลากเส้นตรง ตั้งแต่จุดนี้ไป ถึงเส้นรอบวง



เส้นตรงที่เราลากนี้ ไม่ว่าที่เส้น ๆ ก็ยาวเท่ากันหมด เส้นตรง

เหล่านี้เรียกว่า รัศมี ของวงกลม แลจุดที่อยู่ตรงกลางนั้น

เรียกว่า ศูนย์กลาง ของวงกลม

(รูป บ น ม ข้างบนนี้เป็นวงกลม มีจุด ก เป็น

ศูนย์กลาง มีเส้น บ น ม เป็นเส้นรอบวง และมี

แสดงคำใช้

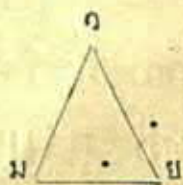
เส้น ก ม กับเส้น ก น กับเส้น ก บ เป็นรัศมี
วงกลมวงหนึ่งจะได้มีรัศมีสักกี่เส้น ๆ ก็ได้ เพราะ
เส้นตรงที่ลากจากศูนย์กลางไปถึงเส้นรอบวง ก็เป็น
รัศมีทั้งนั้น)

๑๑ เส้น ศูนย์กลาง ของวงกลม คือเส้นที่ลาก
ผ่านศูนย์กลางของวงกลม และมีที่ตัดปลายทั้ง ๒ ข้างที่เส้นรอบวง
(ในรูปข้างบนนี้ เส้น บ น เป็นเส้นศูนย์กลาง
ของวงกลม บ ม น)

๑๒ รูปเหลี่ยม คือรูปซึ่งมีเส้นอาณาเขตเป็น
เส้นตรงทั้งนั้น

(เส้นตรงเหล่านี้เรียกว่า ด้าน ของรูปนี้)

๑๕ รูปสามเหลี่ยม เป็นรูปซึ่งมีด้าน ๓ ด้าน
เป็นเส้นตรงทั้งนั้น



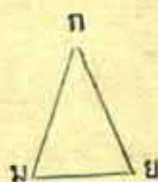
(แม้มุมหนึ่งมุมใดของรูปสามเหลี่ยม เราสมมุติ
 เรียกว่า มุมยอด ก้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมยอดนี้
 ก็เรียกว่า ถาน ในรูป ม ย ว ถ้าเราสมมุติว่ามุม
 ม ว ย เป่มุมยอดก้าน ม ย ก็ต้องเป็นถาน.)

๑๘ สามเหลี่ยมด้านเท่า คือรูปสาม

เหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้งสามด้าน

๑๙ สามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือรูปสามเหลี่ยม

ซึ่งมีด้านเท่ากันแต่ ๒ ด้าน



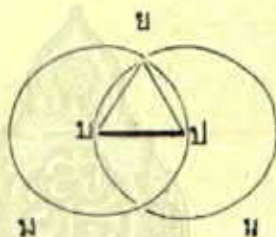
(ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ก้านที่เท่ากันเรียกว่า
 ด้านตั้ง เช่นด้าน ก ม กับด้าน ก ย ในรูปนี้. อีก
 ก้านหนึ่งเรียกว่า ถาน คือด้าน ม ย. มุมที่อยู่
 ตรงถานข้ามเรียกว่า มุมยอด เช่นมุม ม ก ย)

๒๐ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า คือรูป

สามเหลี่ยม ซึ่งมีด้านไม่เท่ากันทั้งสามด้าน.

บทที่ ๑

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า บนเส้นตรงที่กำหนด
ให้ (คือเส้นตรงที่มีที่สลับที่ปลายทั้ง ๒ ข้างแล้ว)



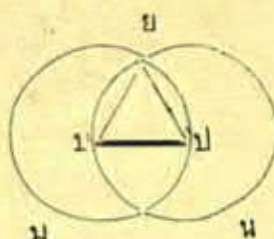
สมมุติให้เส้น บ ป เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ จะต้องสร้าง
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนเส้นตรง บ ป นี้

•วิธีทำ. เอาจุด บ เป็นศูนย์กลาง บ ป เป็นรัศมี, เขียนวง
กลม ย บ ป (ทำโดยอนุภาคข้อ ๓)

เอาจุด ป เป็นศูนย์กลาง, บ ป เป็นรัศมี, เขียน
วงกลม ย บ น. (ทำโดยอนุภาคข้อ ๓)

ตั้งแต่จุด ย ที่วงทั้ง ๒ ไขว้กัน ตากเส้นตรงมาถึงจุด บ
แถ ป, คือเส้น ย บ แถ ย ป (ทำโดยอนุภาคข้อ ๑)

การวากยลิก



รูปตามเหลี่ยม $ย ป ป$ จะเป็นรูปตามเหลี่ยมด้านเท่าที่ต้อง
ประสงค์.

ปฎิพ* เพราะว่าจุด $ป$ เป็นศูนย์กลางของวงกลม $ย ม ป$
เพราะฉะนั้นเส้น $ป ย$ เท่ากับเส้น $ป ป$
(กังแจ้งอยู่ในแสดงคำใช้ข้อ ๑๑)

แต่เพราะว่าจุด $ป$ เป็นศูนย์กลางของวงกลม $ย ป น$
เพราะฉะนั้นเส้น $ป ย$ เท่ากับเส้น $ป น$ (แสดงคำใช้ข้อ ๑๑)
แต่ได้แสดงแล้วว่าเส้น $ป, ย$ เท่ากับเส้น $ป ป$

เพราะฉะนั้นเส้น $ป ย$ แต่ $ป ย$ ต่างก็เท่ากับเส้น $ป ป$
สิ่งทั้งหยาบที่ต่างก็เท่ากับสิ่งอันเดียวกัน สิ่งเหล่านั้นเท่ากันหมด
(สิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อ ๑)

เพราะฉะนั้นเส้น $ป ย$ จึงเท่ากับเส้น $ป ย$ ด้วย

เพราะฉะนั้น ป ย, แด บ ย, แด บ ป เท่ากันหมด.
 เพราะฉะนั้นรูป บ ป ย จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
 แดได้สร้างขึ้นบนเส้น บ ป ที่กำหนดให้แล้วด้วย

ข. ท. ท.

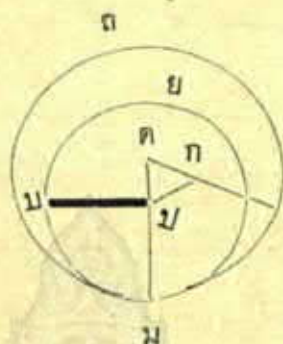
ปรูฟ* แปลว่าแสดงให้เห็นโดยมีหลักฐาน ว่าสิ่ง
 ที่อ้างมาแล้วนั้นเป็นความจริง.

ข. ท. ท. แปลว่า “ซึ่งต้องทำ”

ในข้างบนนี้ผู้เรียบจะเห็นได้ว่า สิ่งใดที่ท่านนักปราชญ์
 บุคคลอ้างว่าเป็นอย่างไรแล้ว ท่านก็ปรูฟให้เห็นว่าเป็น
 อย่างนั้นจริงจริงโดยหลักฐาน. ถักรูปสามเหลี่ยมนี้, ท่าน
 ทำขึ้นแล้ว ท่านก็ปรูฟว่ามันเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าจริง
 เพราะฉะนั้นในตำรายุคตินี้ตลอดไป ถ้าสิ่งใดปรูฟให้
 เห็นว่าถูกไม่ไ้ ก็ยังไม่เป็นที่เชื่อ แลยังรับว่าเป็น
 จริงไม่ไ้

บทที่ ๒

จงลากเส้นตรงตั้งแต่จุดที่กำหนดให้ ให้เส้นนั้นยาว
เท่ากับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้



สมมุติให้จุด ก เป็นจุดที่กำหนดให้ แดให้เส้น ป ป เป็น
เส้นตรงที่กำหนดให้

จะต้องลากเส้นตรงตั้งแต่จุด ก ให้ยาวเท่ากับเส้น ป ป
ที่กำหนดให้.

วิธีทำ. ลากเส้นตรงตั้งแต่จุด ป ถึงจุด ก (โดยอนุญาต ๑)
บนเส้นตรง ป ก นี้ สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
คือรูป ป ก ต (ทำโดยเส้น ๑ บทที่ ๑).

เอาจุด ป เป็นศูนย์กลาง, ป ป เป็นรัศมี, เขียน
วงกลม ป ม ย. (อนุญาต ๓)

ต่อเส้น ต ป ให้ยาวตรงมาถึงเส้นรอบวง ย บ ม
ที่จุด ม. (อนุญาต ๒)

เอา, ที เป็นศูนย์กลาง, ที ม เป็นรัศมี, เขียนวงกลม
ม ถ น. (อนุญาต ๓)

ต่อเส้น ที ก ให้ยาวตรงมาถึงเส้นรอบวง ถ ม น
ที่จุด น (อนุญาต ๒)

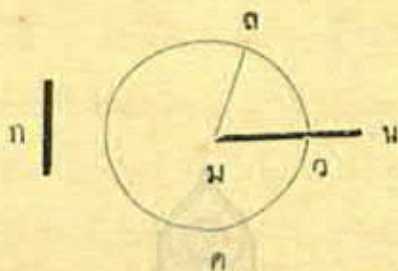
เส้นตรง ก น นี้จะยาวเท่ากับเส้นตรง บ ป ที่กำหนดให้
ป ว ฟ. เพราะว่าจุด ป เป็นศูนย์กลางของวงกลม บ บ ม
เหตุฉะนั้นเส้น บ ป เท่ากับเส้น ป ม (แสดงคำใช้ข้อ ๑๑)
เพราะว่าจุด ที เป็นศูนย์กลางของวงกลม ถ ม น
เพราะฉะนั้นเส้น ที ม เท่ากับเส้น ที น (แสดงคำใช้ข้อ ๑๑)
แต่เส้น ที ป เท่ากับเส้น ก ที (แสดงคำใช้ข้อ ๑๔)
เพราะฉะนั้นส่วนที่เหลืออยู่ คือ ป ม เท่ากับส่วนที่เหลืออยู่
คือ ก น (สิ่งที่เห็นจริงแล้ว ข้อ ๓)

แต่ได้แสดงแล้วว่าเส้น บ บ เท่ากับเส้น ป ม
เหตุฉะนั้นเส้น ก น แด บ บ ต่างก็เท่ากับเส้น ป ม
สิ่งทั้งหลายที่ต่างกันเท่ากับสิ่งอันเดียวกัน สิ่งเหล่านั้นเท่ากันหมด
(สิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อ ๑)

เหตุฉะนั้นเส้น ก น แดเส้น บ บ เท่ากัน.
แດเส้น ก น นี้ ได้ลากไปแต่จุด ก ที่กำหนดให้
ข. ก. ท.

บทที่ ๓

รังนกเส้นยาวที่กำหนดให้ เอาแค่ส่วนหนึ่งให้ยาว
เท่ากับเส้นสั้นที่กำหนดให้



สมมุติให้ ก เป็นเส้นสั้นที่กำหนดให้, เอาให้ ม น เป็นเส้นยาว
ที่กำหนดให้

จะคัดเส้น ม น เอาแค่ส่วนหนึ่งให้ยาวเท่ากับเส้น ก
วิธีทำ. ตั้งเข็สด ม ตากเส้น ม ด ให้ยาวเท่ากับเส้น ก.
(ทำโดยเส้น ๑ ขยักที่ ๒)

เข็สด ม เป็นศูนย์กลาง, ม ด เป็นรัศมี, เขียนวงกลม
ด ว ค ให้เส้นรอบวงตัดเส้น ม น ที่จุด ว. (อนุญาตข้อ ๓)
เส้น ม ว จะยาวเท่ากับเส้น ก.

สรุป เพราะว่า ม เป็นศูนย์กลางของวงกลม ด ว ค
เหตุฉะนั้นเส้น ม ด เท่ากับเส้น ม ว (แสดงการใช้ข้อ ๑)

เล่ม ๑, บทที่ ๓.

๓๗

แต่เส้น ม ๑ ได้ทำให้เท่ากับเส้น ก (ตามที่ได้อ้างขึ้น)

เหตุฉะนั้นเส้น ม ๑ กับเส้น ก ต่างก็เท่ากับเส้น ม ๑

เหตุฉะนั้นเส้น ม ๑ กับเส้น ก จึงเท่ากัน

(สิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อ ๑)

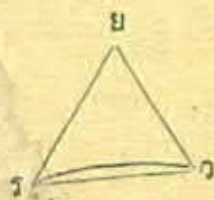
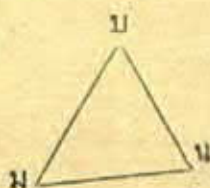
แต่เส้น ม ๑ นี้ ได้ตัดออกจากเส้น ม ๒ ตามประสงค์แล้ว

ท. ท. ท.



บทที่ ๕

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากัน ๒ ด้าน ๆ คู่
กัน, และมีมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้เท่ากัน, รูป
ให้เห็นว่าด้านที่สามของรูปทั้งสองนี้เท่ากัน, และพื้นที่
ของรูปทั้งสองก็เท่ากันโดยสนิท, ทั้งมุมอีกสองมุมก็เท่า
กันมุมต่อมุมด้วย.



สมมุติให้รูปสามเหลี่ยม บ ม น กับ ย ร ว มีด้าน
บ ม เท่ากับด้าน ย ร, มีด้าน บ น เท่ากับด้าน ย ว,
กันก็มีมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้คือมุม บ ม น เท่ากับมุม ร ย ว.

จะต้องพิสูจน์ว่า ด้าน ม น เท่ากับด้าน ร ว, ว่ารูป
บ ม น มีพื้นที่เท่ากับรูป ย ร ว โดยสนิท, แต่ว่ามุมที่ยังเหลือ
อยู่ที่เท่ากันมุมต่อมุม คือมุม บ ม น เท่ากับมุม ย ร ว, แต่
มุม บ น ม ก็เท่ากับมุม ย ว ร.

วิธีพิสูจน์. เปรูรูปสามเหลี่ยม บ ม น วางทับรูป ย ร ว
ให้จุด บ ทับจุด ย, แต่ให้เส้น บ ม ทับเส้น ย ร.

เพราะว่าด้าน บ ม เท่ากับด้าน ย ว (แฉงอยู่ในใจหัย)

เหตุณนั้นจุด ม ต้องทบัจุด ว.

อนึ่งมุม ม บ น เท่ากับมุม ว ย ว (แฉงในใจหัย)

เหตุณนั้นด้าน บ น ก็ต้องทบัด้าน ย ว เหมือนกัน

แถด้าน บ น นั้นเท่ากับด้าน ย ว (แฉงในใจหัย)

เหตุณนั้นจุด น ก็ต้องทบับนจุด ว พอด.

ในที่นี้ได้ปรุพแถ้วว่าจุด ม ทบัจุด ว, แถจุด น ทบัจุด ว.

เพราะณนั้นเส้น ม น จะต้องทบัเส้น ว ว. ถ้าไม่ทบัจะโค้งคด

ไปมาเช่นที่ขีดไว้ ในรูป ย ว ว แถว เส้นตรงสองเส้นก็จะบีดช่องว่าง
ให้มิดได้ซึ่งเปนไปไม่ได้โดยเปนอันขาด (สิ่งที่ได้แฉงไว้แถ้วข้อ๑๐)

เพราะณนั้นเส้น ม น ต้องทบัเส้น ว ว โดยสนิท.

เพราะณนั้นเส้น ม น เท่ากับเส้น ว ว. (สิ่งได้เห็นจริงแถ้วข้อ๑๑)

เพราะณนั้นรูป บ ม น ทับรูป ย ว ว โดยสนิท.

เพราะณนั้นรูป บ ม น เท่ากับรูป ย ว ว.

(สิ่งได้เห็นจริงแถ้วข้อ ๑๒)

เพราะณนั้นมุมอื่น ๆ ก็เท่ากับมุมต่อมุม

คือมุม บ ม น เท่ากับมุม ย ว ว

แถมุม บ น ม เท่ากับมุม ย ว ว (สิ่งได้เห็นจริงแถ้วข้อ๑๓)

ข. ต. ป. แปลว่า “ซึ่งต้องปรุฟ.”

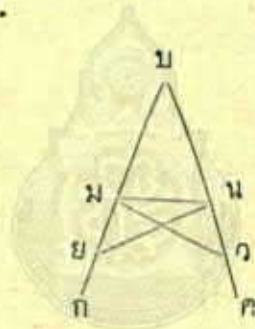
ในที่นี้^๕นักเขียนจะสังเกตได้ว่าบทนี้แปลตกกว่าบทก่อน ๆ, เพราะในข้างท้ายใส่อักษร ข. ต. ป. ไม่ใส่ ข. ต. ท. ทั้งนี้ เป็น เพราะในบทนี้เราไม่^๕ต้อง ทำหรือสร้างสิ่งอื่นใด, เป็นแต่ต้องปรุฟว่าสิ่งที่เขากล่าวใน เนื้อหา^๕บทนี้^๕นั้น เป็นจริงแท้เท่านั้น. แลบทต่อ ๆ ไปในตำราบุคลิกล^๕นี้ก็ต่างกัน เป็นสอง ๒ ชนิด ๆ หนึ่งใน^๕เนื้อหา^๕เขาบอกให้เราสร้างหรือทำสิ่งใด ๆ, ซึ่งในที่สุดเมื่อเราทำแล้ว, แลได้ปรุฟ^๕ให้เห็นว่า^๕เป็นจริงทั้งนั้นแล้ว, เราใส่อักษร ข. ต. ท. ข้างท้าย. อีกชนิดหนึ่งใน^๕เนื้อหา^๕ไม่ได้บอกให้เราสร้างหรือทำสิ่งใด, เป็นแต่อ้างว่าสิ่งนี้ ๆ เป็นอย่างนั้น ๆ, แล้วให้เราปรุฟ^๕ให้เห็นว่า^๕จริงทั้งนั้นจนสิ้นข้อสงสัย, เมื่อเราปรุฟแล้วในที่สุดเราก็ใส่อักษร ข. ต. ป.

เพราะฉะนั้นในการที่จะเรียบกลบททั้ง ๒ ชนิด^๕นี้ให้^๕แปลตกกัน, เพื่อความสะดวกแก่ผู้เรียบ, จะเรียบกลบทชนิดหนึ่งว่า “บท ข. ต. ท.” กับบทอีกชนิดหนึ่งว่า “บท ข. ต. ป.”

บทที่ ๕

(บท ช.ต.ป.)

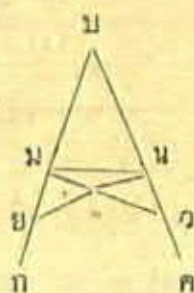
มุมที่ด้านของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากัน, แลถ้า
ต่อด้านตั้งให้ยาวออกไปทางด้าน, มุมภายนอกด้านที่
ยังเกิดขึ้นก็เท่ากันเหมือนกัน. ให้รูปให้เห็นว่าความ
จริงเป็นดังนี้เสมอไป.



สมมุติให้ บ ม น เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, ซึ่งมีด้าน
ตั้ง บ ม เท่ากับด้านตั้ง บ น.

(๑) จะต้องปรูฟว่ามุมที่ฐานเท่ากัน, คือมุม บ ม น
เท่ากับมุม บ น ม.

ต่อด้านตั้งทั้งสองให้ยาวออกไปทางจุด ม แต่ น จนถึงจุด ก
แต่ ค (ขมูญาคข้อ ๒)



(๒) จะต้องปรุฟว่ามุม ก ม น กับมุม ค น ม
ภายนอกกันที่มันเกิดขึ้นนี้เท่ากัน.

วิธีทำ. สร้างจุด ย ขึ้นในเส้น ม ก

ตัดเส้น บ ค ซึ่งเป็นเส้นยาวเขาแต่ส่วน บ ว ให้ยาวเท่ากับ
เส้น บ ย ซึ่งเป็นเส้นสั้น. (ทำโดยเล่ม ๑ บทที่ ๓.)

ลากเส้นตรง ย น แล ม ว (อนุญาตข้อ ๑.)

วิธีปรุฟ. รูปสามเหลี่ยมสองรูป, คือรูป บ ย น
กับรูป บ ม ว, มีด้าน บ ย เท่ากับด้าน บ ว
(โดยที่ไค้สร้างขึ้น.)

กับมีด้าน บ น เท่ากับด้าน บ น. (แดงกคำใช้ ๑๔)

แต่มุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนั้นทับกันอยู่สนิทเป็นมุมเดียวกัน คือมุม
ย บ ว. เพราะฉะนั้นก็เท่ากัน (สิ่งเห็นจริงแล้วข้อ ๘)

เพราะฉะนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่นี้มีด้านเท่ากัน ๒ ด้าน ๆ คือด้าน
แถมมุมในระหว่างด้านที่เท่ากัน เท่ากัน

เพราะฉะนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ นี้เท่ากันโดยสนิท.

(เล่ม ๑ บทที่ ๔)

เพราะฉะนั้นด้านที่สามก็เท่ากัน, คือด้าน บ ฝ เท่ากับด้าน ม ว.

แถมมุมก็เท่ากันมุมต่อมุม. มุม บ ย ฝ เท่ากับมุม บ ว ม,

มุม บ ฝ ย เท่ากับมุม บ ม ว (เล่ม ๑ บทที่ ๔)

อนึ่งเส้น บ ย เท่ากับเส้น บ ว (โดยสร้างขึ้น)

แถมเส้น บ ม ก็เท่ากับเส้น บ ฝ (แสดงคำใช้ ๑๑)

หักเส้น บ ม ออกเสียจาก บ ย, แถม บ ฝ ออกเสียจาก บ ว.

เส้น ม ย ที่เหลืออยู่ก็เท่ากับเส้น น ว ที่เหลืออยู่.

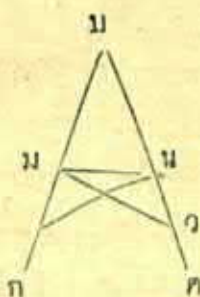
(ถึงเห็นจริงแล้วข้อ ๓)

ในรูปสามเหลี่ยมสองรูป, คือรูป บ ม ฝ กับรูป ว น ม,

ด้าน ม ย ได้แจ้งแล้วว่าเท่ากับด้าน น ว, ด้าน บ ฝ ก็ได้

ประพจน์แล้วว่าเท่ากับด้าน ม ว, แถมมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้

คือมุม ม ย ฝ ก็ได้ประพจน์แล้วว่าเท่ากับมุม น ว ม เหมือนกัน



เพราะฉะนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่อันเท่ากันโดยสนิท แด่มุมก็ค้อง
เท่ากันมุมต่อมุม มุม ย น ม ก็เท่ากับมุม ๑ ม น, แด่มุม
ย ม น ก็เท่ากับมุม ๑ น ม (เล่ม ๔. บทที่ ๔)

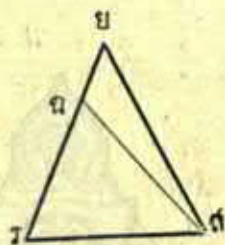
แด่มุม ย ม น กับมุม ๑ น ม นี้ เปนมุมภายนอก
หนึ่งได้ประพจน์แล้วว่ามุม บ ม ๑ เท่ากับมุม บ น ย.
เขามุม ๑ ม น กับมุม ย น ๑ ซึ่งเท่ากัน, หักออกเสียมุมตรงมุม
ที่เหลืออยู่คือมุม บ ม น ก็เท่ากับที่เหลืออยู่คือมุม บ น ม
(สิ่งเห็นจริงแล้วข้อ ๓)

แด่มุม บ ม น กับมุม บ น ม นี้ เปนมุมที่เท่ากัน.
เพราะฉะนั้นได้ประพจน์แล้วว่ามุมที่เท่ากัน, แด่มุมภายนอกของ
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากัน.

บทที่ ๖

(บท ช. ก. ป.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีมุมเท่ากับสองมุม, ด้าน
หนึ่งของมุมทั้งสองก็อยู่ตรงกันข้ามกับเท่ากับทั้งสองด้าน.



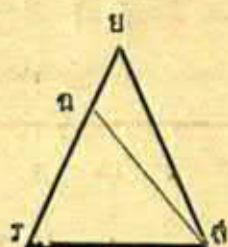
สมมุติให้ ย ว ต เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม ย ว ต เท่า
กับมุม ย ต ว.

ด้าน ย ว จะต้องเท่ากับด้าน ย ต.

วิธีปรุฟ. ถ้าด้าน ย ว ไม่เท่ากับด้าน ย ต, มันก็คง
ยาวกว่ากันอยู่ด้านหนึ่งแน่นอน.

สมมุติว่า ย ว เป็นด้านยาว, ถัดด้าน ย ว เอาแค่ส่วน
ว ณ ให้ยาวเท่ากับ ย ต ซึ่งเป็นด้านสั้น (เล่ม ๑, บทที่ ๓)
ลากเส้น ณ ต.

(อนุญาตข้อ ๑)



ในรูปสามเหลี่ยม ย ร ต กับ ณ ร ต ด้าน ณ ร เท่า
กับด้าน ย ต, (โดยที่สร้างขึ้น) ด้าน ร ต เท่ากัน
เป็นด้านร่วมกันในทั้งสองรูป, แดมุมที่อยู่หว่างกลางด้านทั้งสองคู่
ก็เท่ากัน, คือมุม ณ ร ต เท่ากับมุม ย ต ร (แจ้งอยู่ในโจทย์.)

เพราะฉะนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้มีเนื้อที่เท่ากันโดยสนิท

(เล่ม ๑, บทที่ ๔)

แต่ส่วนจะเท่ากับจำนวนเต็มไม่ได้ เป็นอันขาด

(ถึงเห็นจริงแล้วข้อ ๘)

เพราะฉะนั้นรูปสามเหลี่ยม ณ ร ต จะเท่ากับรูปสามเหลี่ยม
ย ร ต ไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมุติว่าด้าน ย ร ยาวกว่าด้าน ย ต นั้นผิด.

อนึ่งถ้าจะสมมุติว่าด้าน ย ต ยาวกว่าด้าน ย ร ก็จะไม่รูฟได้
ในทำนองเดียวกันว่าผิด, เป็นไปไม่ได้เหมือนกัน.

เพราะฉะนั้นด้าน ย ร กับ ย ต ไม่ยาวไม่สั้นกว่ากัน

เพราะฉะนั้น ย ๗ กับ ย ๘ เท่ากัน.

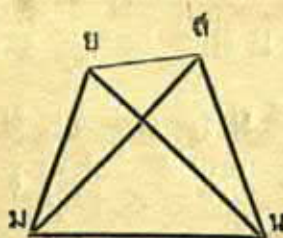
ท. ท. ป.

ต่อไปนี้คำว่า “เพราะว่า”	จะใช้เครื่องหมาย “.” แทน
คำว่า “เพราะฉะนั้น”	“ ” “ ” “ ” “ ”
“เท่ากับ”	“ ” “ ” “ ” “ ”

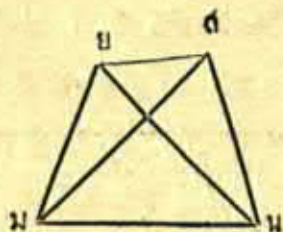
บทที่ ๗

(บท ท. ท. ป.)

บนฐานอันเดียวกัน, และบนข้างเดียวกัน, จะมี
รูปสามเหลี่ยมสองรูป, ซึ่งมีด้านคู่ที่ตกกันที่ปลายฐาน
ข้างหนึ่งเท่ากัน, และอีกคู่หนึ่งก็ตกกันที่ปลายฐานอีกข้าง
หนึ่งก็เท่ากันด้วย, ไม่ได้เป็นอันขาด.



แม้จะเป็นไปได้ดังนี้, สมมุติให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปคือ ย ม น,
กับ ๘ ม น ซึ่งอยู่บนฐานอันเดียวกันคือ ม น, และอยู่บนข้างเดียว



กัน, มีด้าน บ ม กับ ต ม ซึ่งจุดกันที่จุด ม ปลายด้านข้าง
หนึ่งเท่ากัน, แต่มีด้าน ต น กับ บ น ซึ่งจุดกันที่จุด น
ปลายด้านอีกข้างหนึ่งเท่ากันด้วย

จะต้องพบว่าทั้งนี้เป็นไปได้โดยเป็นอันขาด.

ชนิดที่ ๑ ให้ยอดของรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่อยู่บนเดี่ยวยาว.

สร้าง. ลากเส้น บ ต (อนุญาติ ๑)

สรุป. ในรูปสามเหลี่ยม ม บ ต

∴ ด้าน ม บ = ม ต (แย้งในโทบ)

∴ มุม ม บ ต = มุม ม ต บ (แย้ง ๑, บทที่ ๑)

แต่มุม ม บ ต ใหญ่กว่ามุม น บ ต ซึ่งเป็นแต่ละส่วนของ
มันเท่านั้น (สังเกตจริงข้อ ๘)

∴ มุม ม ต บ ก็ใหญ่กว่ามุม น บ ต ด้วย

∴ มุม น ต บ ยิ่งใหญ่กว่ามุม น บ ต อีกมาก

หนึ่งในรูปสามเหลี่ยม น ย ต

∴ ด้าน น ย = ด้าน น ต (แจ้งในโจทย์)

∴ มุม น ต ย = มุม น ย ต (เล่ม ๑, บทที่ ๕)

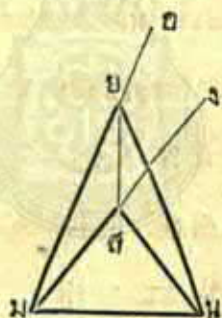
นัยหนึ่งปรูฟได้ว่ามุมทั้ง ๒ นี้ใหญ่กว่ากัน, แต่อีกนัยหนึ่งว่าเท่ากัน.

∴ นัยเขาเป็นถูกไม่ได้เลย.

ชนิดที่ ๒.

ให้ ยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งอยู่ภายใน

สามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง.



สร้าง สามเหลี่ยม ย ต.

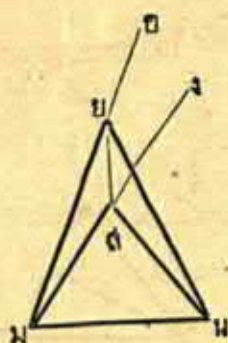
(อนุญาต ๑)

ต่อเส้น ม ย แด ม ต ตรงออกไปถึง ย แด ง.

(อนุญาต ๒)

ปรูฟ. ในรูปสามเหลี่ยม ย ม ต

∴ ด้าน ม ย = ม ต (แจ้งในโจทย์)



∴ มุมภายนอกถ้านคือมุม ย ย ต กับ ง ต ย เท่ากัน
(เล่ม ๑, บทที่ ๕)

แต่มุม ย ย ต ใหญ่กว่ามุม น ย ต ซึ่งแปลว่าส่วนของมัน

∴ มุม ง ต ย ก็ใหญ่กว่ามุม น ย ต ด้วย.

∴ มุม น ต ย ยิ่งใหญ่กว่ามุม น ย ต อีกมาก
หนึ่งในรูปสามเหลี่ยม น ย ต

∴ ด้าน น ย = น ต (แรงในใจทย์)

∴ มุม น ต ย = มุม น ย ต (เล่ม ๑, บทที่ ๕)

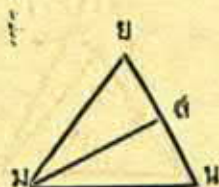
นัยหนึ่งสรุปได้ว่ามุมทั้ง ๒ นี้ใหญ่กว่ากัน, แต่อีกนัยหนึ่งสรุป
ได้ว่าเท่ากัน.

∴ นัยเขาเป็นจริงไม่ได้.

ชนิดที่ ๓.

ตามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง

ให้ยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งอยู่ที่ด้านของ



ชนิดนี้ไม่ต้องการรูป, เพราะด้าน น ต จะเท่ากับ น ย, คือ
ส่วนจะเท่ากับจำนวนเต็มของมันไม่ได้เป็นอัตรา

(สังเกตจริงข้อ ๔)

∴ ที่สมมุติแต่เดิมว่าด้าน ม ย = ม ต, แต่ด้าน
ย น = น ต นั้นเป็นผิด

∴ ม ย จะเท่ากับ ม ต, แต่ น ย จะเท่ากับ น ต
ไม่ได้เป็นอัตรา.

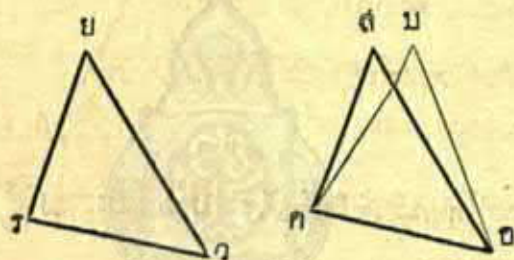
ท. ก. ป.



บทที่ ๘

(บท ช. ท. ป.)

ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านทั้งทั้งคู่ เท่ากัน ด้านต่อ
ด้าน, และมีด้านเท่ากันด้วย, มุมยอดของรูปสามเหลี่ยมทั้ง
สองนี้ก็ต้องเท่ากันเหมือนกัน, และมุมอื่นก็จะเท่ากันมุมต่อมุม,



สมมุติให้รูปสามเหลี่ยม ย ว ว กับ ย ค อ มีด้านทั้ง ย ว
เท่ากับ ย ค, แต่ ย ว เท่ากับ ย ค, กับให้ด้าน ว ว
กับ ค อ เท่ากันด้วย.

มุม ย ว ว จะเท่ากับมุม ย ค อ, มุม ย ว ว จะเท่า
กับมุม ย ค อ, และมุม ย ว ว จะเท่ากับมุม ย ค ค.

ปัญหา. แม้หารูป ย ว ว วางทับรูป ย ค อ ให้จุด ว
ทับจุด ค, แต่ให้เส้น ว ว ทับเส้น ค อ แล้ว

$\therefore r r = k o$ (แท้จริงในโทษ)

$\therefore$ จุท ว ทับจุท อ.

$\therefore$ ร ว ทับ ค อ สนิท.

เมื่อถาพทับกันเป็นถาพเดียวกันนี้, ด้านตั้งทั้งสองคู่ก็จำเป็นจะต้องทับกันด้วย, คือ ย ร ต้องทับ ฅ ฅ, แถ ย ว ต้องทับ ฅ อ. ถ้าจะไม่ทับ, จะต่างกันออกไปเช่นได้้น บ ฅ แถ บ อ แถว, บนถาพอันเดียวกัน, ถบนบข้างเดียวกัน, ก็จะมีถาพเหมือนกันซึ่งมีด้านตั้งทั้งสองคู่เท่ากันคู่ต่อสู้, แต่จะเป็นดังนี้ไม่ได้ (เล่ม ๑, บทที่ ๘)

$\therefore$ ถาพ ย ร ต้องทับถาพ ฅ ฅ ถาพ ย ว ต้องทับถาพ ฅ อ

$\therefore$ ถาพเหมือนกันทั้งสองทับกันสนิท

$\therefore$ มุมก็เท่ากันมุมต่อมุม, คือมุม ร ย ว = มุม ฅ ฅ อ, มุม ย ร ว = มุม ฅ ค อ, แถมุม ย ว ร = มุม ฅ อ ค. (สังเขปจริงข้อ ๘)

ท. ท. ป.

บทที่ ๔

(บท ข. ก. ก.)

จงใ้สามมุมที่กำหนดให้ ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน.



สมมุติให้ ก ข ค เป็นมุมที่กำหนดให้, จะต้องผ่านมุมนี้ ออก
เป็น ๒ มุมเท่า ๆ กัน

สร้าง. กำหนดจุด ข ขึ้นในเส้น ก ข, ตัดเส้น ข ค
ให้ยาวเท่ากับ ข ก (เล่ม ๑, บทที่ ๑.)
ลากเส้น ข ก, บนเส้น ข ก นี้, สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ
ข ก ง, ให้ยอด ง อยู่ตรงข้ามกับจุด ข, (เล่ม ๑, บทที่ ๑.)
ลากเส้น ก ง.

เส้น ก ง นี้จะผ่านมุม ก ข ค ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน.

ปฐ. ในรูปตามเหลี่ยมทั้งสอง คือ $น ข ง$ กับ $น ก ง$

∴ ด้าน $น ข = น ก$ (โดยสร้าง), ด้าน $ข ง = ก ง$ (แสดงคำใช้ข้อ ๑๘), แด่ด้าน $น ก$ เป็นด้านร่วมกัน

∴ รูปตามเหลี่ยม $น ข ง$ กับ $น ก ง$ ทั้งสองนี้เท่ากัน

โดยสนิท, แต่มุม $ข น ง = มุม ก น ง$

(เล่ม ๑, บทที่ ๘)

∴ ได้ผ่านุม $ว น ย$ ที่กำหนดให้ด้วยเส้น $น ง$ แล้ว

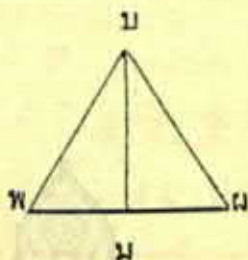
ช. ท. ท.



บทที่ ๑๐

(บท ข. ก. ก.)

จงทักเส้นตรงที่กำหนดให้ ออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กัน.



สมมุติให้ ป ผ เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้, จะต้องทักออก
เป็นสองท่อนเท่า ๆ กัน.

วิธีทำ. บนเส้น ป ผ สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าคือ บ ป ผ
(เล่ม ๑, บทที่ ๑), ผ่านมุม ป บ ผ ทักเส้น บ ม
ให้จุด ม อยู่ในเส้น ป ผ (เล่ม ๑, บทที่ ๑.)

จุด ม นี้จะทักเส้น ป ผ ออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กัน.

ปฐพ. ในรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปคือ บ ป ม กับ
บ ผ ม.

∴ ด้าน บ ป = บ ผ (แสดงการใช้ข้อ ๑๑.),

ด้าน ป ม เป็นด้านร่วมกันของทั้งสองรูป, แดมุม พ ป ม =
มุม ฅ ป ม (โดยสร้าง)

∴ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้เท่ากันโดยสนิท, ถ้าม พ ม
ก็เท่ากับถ้าม ฅ ม (เดิม ๑, บทที่ ๑)

∴ ได้คัตเส้นตรง พ ฅ ที่กำหนดให้ออกไปสองท่อน
เท่า ๆ กันที่สุด ม แล้ว

ข. ต. ป.

แบบฝึกหัด

(สำหรับข้อที่ ๑)

๑) บนเส้นตรงที่กำหนดให้, จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ให้ด้านตั้งยาวเท่าเส้นที่กำหนดให้

๒) บนถ้ามที่กำหนดให้, จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ให้ด้านตั้งยาวสองเท่าของถ้ามที่กำหนดให้

๓) ก ข เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้, ค เป็นจุดที่กำหนดให้
อยู่ภายนอกเส้น ก ข, จงเขียนเส้นตรงตั้งแต่ ค ถึงเส้น ก ข ให้

ยาวเท่ากับเส้น ๓ ที่กำหนดให้

๔) กำหนดจุด ก ให้เป็นยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, แด จุด ๖ ให้เป็นปลายด้านข้างหนึ่ง, ด้านของรูปนี้ให้อยู่บนเส้น ๒ น ที่กำหนดให้, จงหาจุดปลายด้านอีกข้างหนึ่ง.

๕) ก ข ค ง เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง, (คือมีจุด ข แด ค อยู่ตรงกลาง, ระยะไม่เท่ากัน) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ก ๘ ง, ให้ด้าน ก ๘ เท่ากับ ก ค, แดให้ด้าน ง ๘ เท่ากับ ง ข

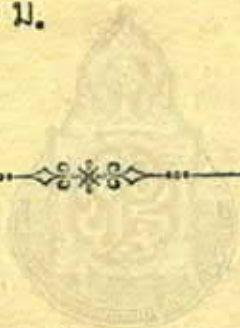
๖) ในเล่ม ๓ บทที่ ๒ นั้น, วิธีเขียนรูปจะลากเส้นตั้งแต่ จุด ก ที่กำหนดให้, มาถึงจุด ๒ หรือ ๒ ก็ได้, จงทำอย่าง ลากเส้นมาถึงจุด ๒, แดปรูฟให้เห็นว่าทำได้เหมือนกัน.

๗) จงผ่านมุมที่กำหนดให้ ออกเป็น ๔ มุมเท่า ๆ กัน

๘) ก เป็นศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีเส้น ก น กับ ก ๖ เป็นรัศมี, เส้น ก ๗, ซึ่งผ่านมุม น ก ๖ ออกเป็นสองมุม เท่า ๆ กันนั้นตัดเส้น น ๖ ที่จุด ห ด้วย, จงปรูฟว่า น ห เท่ากับ ห ๖

๘) จาปรุฟให้เห็นว่า เส้นตรงซึ่งผ่านมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้น, ถ้าลากตรงลงมาถึงฐาน, จะแบ่งฐานออกเป็นสองท่อนเท่ากันด้วย

๓๐) ในรูปของเล่ม ๑ บทที่ ๒ นั้น, ถ้าเส้น ป ก เท่ากับ ป บ จึงจะให้เห็นว่ายอด ๗ ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะอยู่ในเส้นรอบวง บ ย น.

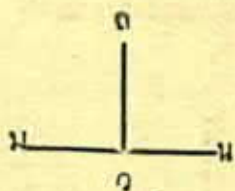


คำวาทกล
ตอนที่ ๒

แสดงคำใช้

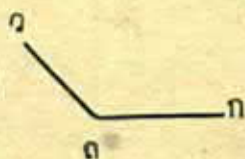
๗ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง, แดง
ตรงแนวจนมุมสองมุมที่ประชิดกันนั้นเท่ากัน, มุมทั้งสองนี้เรียกว่า

มุมฉาก ทั้งคู่, แดงเส้นที่
ตั้งตรงอยู่บนอีกเส้นหนึ่งนั้น เรียกว่า
เส้นที่ตั้งตรงได้ มุมฉาก กับเส้นนั้น.

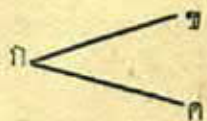


(ในรูปนี้ เส้นตรง ด ว เป็นเส้นที่ตั้งตรงได้มุม
ฉากกับเส้นตรง ม น, เพราะฉะนั้นมุม ม ว ด กับ
มุม น ว ด ซึ่งเป็นมุมประชิดกันจึงเท่ากันทั้งสองมุม
แต่เป็นมุมฉากทั้งสองมุมด้วย)

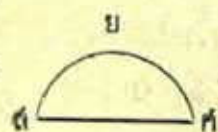
๘ มุมจั่ว คือมุมที่ใหญ่กว่ามุมฉาก



๙ มุมง คือมุมที่เล็กกว่ามุมฉาก



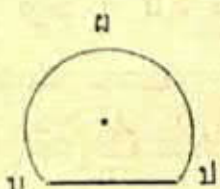
๑๒ ครึ่งวงกลม เป็นรูปที่มีเส้นศูนย์กลาง กับส่วนของเส้นรอบวง ซึ่งโอบมาเพียงเส้นศูนย์กลางนี้ เป็นอาณาเขต



๑๓ ส่วนของวงกลม เป็นรูปที่มีเส้นตรงเส้นหนึ่ง กับส่วนของเส้นรอบวงซึ่งโอบมาเพียงเส้นตรงนั้น, เป็นอาณาเขต



(ส่วนของวงกลมมีบางทีเล็กกว่าครึ่งวงกลมเช่นรูป ก ค ข และบางทีก็ใหญ่กว่าครึ่งวงกลม เช่น



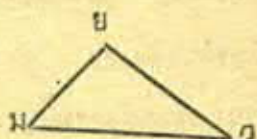
รูป บ ป ฅ, จะประมาณว่าเล็กโตเพียงใดเสมอไปนั้นมิได้, จะเป็นส่วนโตหรือเล็ก ก็แล้วแต่จะดีกว่ากลมกว่าเส้นตรง ให้วงกลมนั้น เหลืออยู่มากหรือน้อยเพียงใดเท่านั้น, แต่ให้สังเกตให้รู้ว่า ถ้าส่วนของวงกลมรูปไหนมีศูนย์กลางของวงกลมอยู่ภายในด้วย ส่วนของวงกลมรูปนั้น ก็ใหญ่กว่าครึ่งวงกลมทั้งรูป

บ ป ฅ ก)

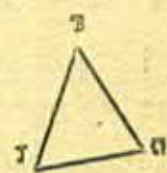
๒๑. สามเหลี่ยมมุมฉาก คือรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม ๑
 หนึ่งเป็นมุมฉาก, เช่นรูป $\triangle ABC$ นี้,
 มีมุม $\angle B$ เป็นมุมฉาก



๒๒. สามเหลี่ยมมุมจั่ว คือ
 รูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ๒ หนึ่งเป็นมุมจั่ว, เช่นรูป
 $\triangle ABC$ นี้ มีมุม $\angle A$ และ $\angle C$ เป็นมุมจั่ว

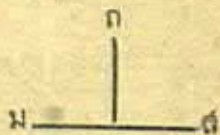


๒๓. สามเหลี่ยมมุมซิก คือ
 รูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุมเป็นมุมของทั้ง ๓ มุม,
 เช่นรูป $\triangle ABC$ นี้



(ในที่นี้จะแสดงให้เห็นได้, และจะแสดงให้เห็นได้โดยเต็ม ๑
 บทที่ ๑๓ ด้วย, ว่ารูปสามเหลี่ยมไม่ว่าชนิดใด ๆ,
 ต้องมีมุมเป็นมุมของไม่ต่ำกว่าสองมุมทั้งนั้น)

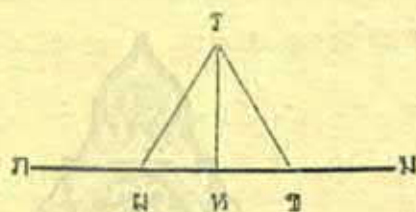
แม้ปลายของเส้นตรงตามเส้นจุดกันสองมุม
 ที่บังเกิดขึ้นเรียกว่า มุมประชิด



บทที่ ๑๑

(บท ช. ค. ท.)

จากจุด ๆ หนึ่งในเส้นตรงที่กำหนดให้, จงลากเส้นตรง
ให้ตั้งฉากกับเส้นที่กำหนดให้.



สมมติให้ Γ Μ เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้, ให้ Η เป็นจุด
ที่อยู่ภายใน Γ Μ.

จะต้องลากเส้นตรงตั้งฉากที่ Η ให้ตั้งได้มุมฉากกับเส้น Μ Γ

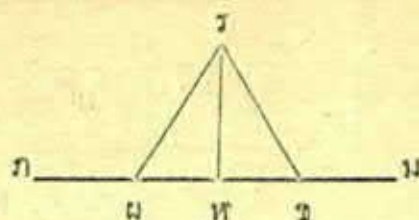
สร้าง. กำหนดจุด Δ ขึ้นในเส้น Γ Η, ตัดเส้น Η Μ
เอาแต่ส่วน Η Θ ให้ยาวเท่ากับ Δ Η (เล่ม ๑, บทที่ ๓)

สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนเส้น Δ Θ คือรูป Δ Γ Θ.

(เล่ม ๑, บทที่ ๑)

ลากเส้น Γ Γ.

เส้น Γ Η นี้จะตั้งฉากกับเส้น Μ Μ.



ปฐ. ในรูปสามเหลี่ยม ว ฦ ห กับ ว ช ห ทั้งสอง
 $\therefore$ ด้าน ฦ ห = ห ช, (สว่าง) ด้าน ห ว
 เป็นด้านร่วมกันของทั้งสองรูป, แดด้าน ฦ ว = ช ว,
 (แดงคำใช้ ๑๘)

$\therefore$ มุม ว ห ฦ = มุม ว ห ช
 (เล่ม ๑, บทที่ ๘.)

แดของมุมนี้เป็นมุมประชิดกัน.

แต่ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง, แดตั้งตรง
 แล้วมุมสองมุมซึ่งประชิด กันนั้น เท่ากัน, มุมทั้งสองนี้เรียกว่ามุม
 ฉากทั้งคู่
 (แดงคำใช้ ๑๙)

$\therefore$ มุม ว ห ฦ กับมุม ว ห ช เป็นมุมฉากทั้งคู่.

$\therefore$ ว ห จึงตั้งตรงได้มุมฉากกับ ภ ม.

แได้ฉากเส้น ว ห นี้ไปจากจุด ห ในเส้น ภ ม นั้น.

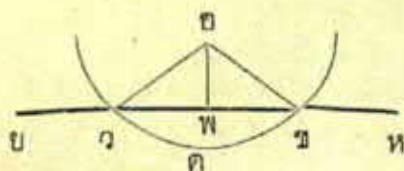
ท. ท. ท.

ต่อไปนี้คำว่า “อนุญาต” จะใช้แต่ข้อ ๆ ว่า	(อนุ)
“สิ่งที่เห็นจริงแล้ว”	“ ” “ ” “ ” (วจิ)
“แสดงคำใช้”	“ ” “ ” “ ” (แสดง)
“เล่ม ๑ บทที่ ๑๐”	“ ” “ ” “ ” (๑, ๑๐)
“แจ้งอยู่ในโทษ”	“ ” “ ” “ ” (ติมนุ)
“โดยที่สร้างขึ้น”	“ ” “ ” “ ” (สร้าง)

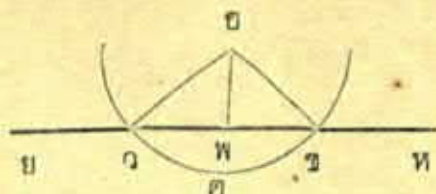
บทที่ ๑๒

(บท ข. ก. ท.)

ตั้งแก่จุดที่กำหนดให้, อยู่ภายนอกเส้นตรงซึ่งไม่มี
กำหนดที่สุกแห่งปลายทั้งสองข้าง, พิจารณาเส้นตรงให้ตั้ง
ได้มุมฉากกับเส้นตรงที่ไม่มีกำหนดปลายนี้.



สมมุติให้ บ ท เป็นเส้นตรงซึ่งจะต่อให้ยาวตรงออกไปทางปลาย
ข้างไหนก็ได้ไม่มีที่สิ้นสุด, แต่ให้ อ เป็นจุดที่กำหนดให้, อยู่ภายนอก
เส้น บ ท นี้.



จะต้องลากเส้นตรงตั้งแต่ O ให้ถึงได้มุมฉากกับเส้น BH.

วิธีทำ. กำหนดจุด P ขึ้นที่ข้างเส้น BH ให้อยู่ตรงข้ามกับจุด O, เอาจุด O เป็นศูนย์กลาง, O P เป็นรัศมี, เขียนวงกลมให้เส้นรอบวงตัดเส้น BH ที่จุด V และ X.

(อนุ. ๓)

ตัดเส้น V X ออกเป็นสองท่อนเท่าๆ กันที่จุด P, (๑, ๑๐.)

ลากเส้น O P.

เส้น O P นี้จะถึงได้มุมฉากกับเส้น BH.

ลากเส้น O V และ O X.

ปรูฟ. ในรูปสามเหลี่ยม O V P กับ O X P

$\therefore OV = XP$ (สร้าง), $OP = OP$
(แสดง ๑๐)

แต่ OP เป็นด้านร่วมกันในทั้งสองรูป

$\therefore \text{มุม } OPV = \text{มุม } OPX$ (เล่ม ๑ บทที่ ๔)

แถมุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน

∴ มุม อ พ จ กับมุม อ พ ข เป็นมุมฉากทั้งคู่
(แสดง ๗.)

∴ อ พ จึงได้มุมฉากกับ ย ท (แสดง ๗.)

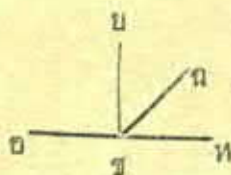
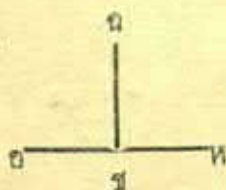
แต่ อ พ นี้ได้ฉากมาแล้วจุด อ ซึ่งกำหนดให้.

ท. ท. ท.

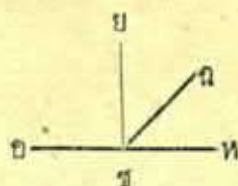
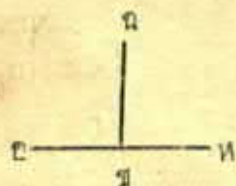
บทที่ ๑๓

(บท ข ค. ป.)

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง, มุม
ทั้งสองที่ประชิดกันนั้นคงเป็นมุมฉากทั้งคู่, หรือมีผล
รวมกันเข้าทั้งสองมุมก็คงเท่ากับมุมฉากสองมุม.



สมมุติให้เส้นตรง น ข ตั้งอยู่บนเส้นตรง อ ท , มุม น ข อ
กับมุม น ข ท จะเป็นมุมฉากทั้งคู่, หรือมีผลนั้นรวมกันเข้าทั้ง
สองมุมก็คงเท่ากับมุมฉากสองมุม



ประการที่ ๑ ถ้ามุม ณ ช อ เท่ากับมุม ณ ช ท,
มุมทั้งสองนี้เท่ากับมุมฉากทั้งคู่ (แสดง ๓)

ประการที่ ๒ แต่ถ้ามุม ณ ช อ ไม่เท่ากับมุม ณ ช ท
ฉากเส้นตรง ช ย ให้ตั้งได้มุมฉากกับเส้น อ ท
(๑, ๑๑)

ปฐพ. มุม อ ช ณ = มุม อ ย ช บวกมุม ย ช ณ
แอมุม ณ ช ท บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ มุม อ ช ณ บวกมุม ณ ช ท = มุม อ ช ย
บวกมุม ย ช ณ บวกมุม ณ ช ท (จริง ๑)

อนึ่งมุม ย ช ท = มุม ย ช ณ บวกมุม ณ ช ท
แอมุม ย ช อ บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ มุม ย ช ท บวกมุม ย ช อ = มุม ย ช อ
บวกมุม ย ช ณ บวกมุม ณ ช ท (จริง ๒)

แต่ได้ปฐพ.แล้วว่ามุม อ ช ณ กับมุม ณ ช ท รวมกัน
เท่ากับมุมทั้งสองนี้ด้วย

∴ มุม อ ช น บวกมุม น ช ห = มุม บ ช ห
บวกมุม บ ช อ (สิ่งเห็นจริง ๑)

แถมมุม บ ช ห กับมุม บ ช อ ^{ได้}เป็นมุมฉากทั้ง ๒ มุม (สร้าง)

∴ มุม อ ช น กับมุม น ช ห = มุมฉาก ๒ มุม

ท. ท. ป.

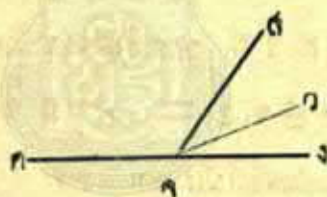
ต่อไปนี้คำว่า “มุม” จะใช้เครื่องหมาย < แทน
คำว่า “โดยสิ่งที่อนุญาตให้ทำข้อ-” จะใช้แต่ย่อว่า (อนุ-)
,, ,, “สิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อ-” ,, ,, ,, ,, (จริง-)
,, ,, “แสดงคำใช้ข้อ-” ,, ,, ,, ,, (แสดง-)
,, ,, “ความที่ใกล้เคียงข้อ-” ,, ,, ,, ,, (สร้าง)
,, ,, “แจ้งอยู่ในโจทย์” ,, ,, ,, ,, (สมมุติ)



บทที่ ๑๔

บท ช. ท. ป.

แม้ถ้าเส้นตรงสองเส้นจากจุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ใน
เส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง, ตัดขวาง, กระทำให้มุมประชิดกัน
ทั้งสองมุม รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก, เส้นตรงทั้ง
สองนี้ จะต่อเนื่องเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน.



สมมุติให้เส้นตรง KA กับ AG จากกันที่จุด A , ซึ่งอยู่ใน
เส้นตรง AD , แดจากกันอยู่คนละข้าง กระทำให้มุมประชิดกันคือ
มุม KA กับมุม AG รวมกันเท่ากับมุมฉากสองมุม.

เส้นตรง KA กับ AG นี้จะต่อเนื่องเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน.

ปฐพ. แม้ KA กับ AG ไม่ต่อเนื่องเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน.

จงถือเส้น KA ตรงออกไปถึงจุด B

(อนุ. ๒)

∴ ก ว เป็นเส้นตรง, แต่ ต จ ตั้งอยู่บนเส้น ก ว นั้น

∴ ∠ ก จ ต บวก ∠ ต จ ว = มุมฉากสองมุม
(๑. ๑๓)

แต่ ∠ ก จ ต บวก ∠ ต จ ง = มุมฉากสองมุม
(สมมุติ)

∴ ∠ ก จ ต บวก ∠ ต จ ว = ∠ ก จ ต
บวก ∠ ต จ ง

เอา ∠ ก จ ต ออกเสียทั้งสองข้าง

∴ ∠ ต จ ง = ∠ ต จ ว, คือส่วนเท่ากับจำนวน
เต็มของมันซึ่งเป็นจริงไม่ได้เป็นอันขาด (iving ๑)

∴ เส้น ก จ ว จะเป็นเส้นตรงไม่ได้

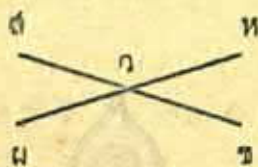
∴ จะมีเส้นที่ต่อตรงเป็นเส้นเดียวได้ก็แต่เส้น จ ง เท่านั้น

ข. ก. ๒.

บทที่ ๑๕

(บท ช. ท. ป.)

ถ้าเส้นตรงสองเส้นไขว้กัน, มุมที่อยู่ตรงกันข้ามก็เท่ากัน



สมมุติให้เส้น ๑ ๒ กับ ๓ ๔ ไขว้กันที่จุด ก, มุม ๑ ๓
จะเท่ากับมุม ๒ ๔, และมุม ๑ ๒ จะเท่ากับมุม ๓ ๔.

ปรูฟ. $\angle ๑ ๓$ มุม $\angle ๑ ๒ =$ สองมุมฉาก
(๑. ๑๓)

และ $\angle ๑ ๒$ มุม $\angle ๒ ๔ =$ สอง $\angle$ ฉาก (๑. ๑๓)

$\therefore \angle ๑ ๓$ มุม $\angle ๑ ๒ = \angle ๒ ๔$
มุม $\angle ๒ ๔$

เขา $\angle ๑ ๒$ ออกเสียทั้งสองข้าง

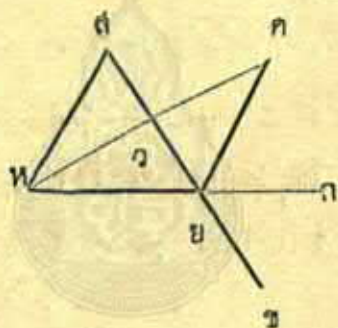
$\therefore \angle ๑ ๓ = \angle ๒ ๔$

และจะปรูฟได้ในทำนองเดียวกันว่า $\angle ๑ ๒ = \angle ๓ ๔$

บทที่ ๑๖

(บท ซ ค. ป.)

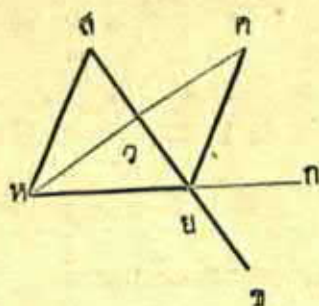
ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยม, มุมภายใน
นอกที่บังเกิดขึ้นนั้นย่อมใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม



ให้ ข ค ก เป็นรูปสามเหลี่ยม, ต่อด้าน ค ข ออกไป
ถึงจุด ก.

มุมภายนอก ข ก ก ที่บังเกิดขึ้นจะใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม
คือมุม ค ข ข กับมุม ค ก ข.

ถ้าให้ ข ค ก เป็นรูปสามเหลี่ยม, ต่อด้าน ค ข ออกไปสองส่วนเท่า ๆ กันที่จุด ก
(๑. ๑๐), ตากเส้น ข ก (๑๑. ๑), ต่อเส้น ข ก



ออกไปถึงจุด ค, ทำให้เส้น ว ค ยาวเท่ากับ ห ว (๑, ๓),
จากเส้น ค ย.

สรุป. ในรูปสามเหลี่ยม ห ว กับ ว ค ย

∴ ด้าน ห ว = ว ค แต่ ว ค = ว ย
(สร้าง),

แต่ $\angle ห ว ค = \angle ย ว ค$ (๑, ๓๕)

∴ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองอันเท่ากันโดยสนิท, $\angle ห ว ค$
ก็เท่ากับ $\angle ว ย ค$ (๑, ๔.)

$\angle ว ย ค$ เป็นแค่ส่วนของ $\angle ค ย ก$

∴ $\angle ค ย ก$ ใหญ่กว่า $\angle ห ค ย$. มาก คือมุมภายใน
นอกใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม.

ถ้าจากเส้น ค ย ต่อดอกมาถึงจุด ข, แดสร้างอย่างทำของ

ข้างบนนั้น, ก็จะสรุปได้เช่นเดียวกันว่า $\surd$ ห ย ข ใหญ่กว่า
 $\surd$ ต ห ย.

แต่ $\surd$ ห ย ข = $\surd$ ต ย ก (๔, ๑๕.)

∴ $\surd$ ต ย ก ก็ใหญ่กว่า $\surd$ ต ห ย ด้วย, คือใหญ่กว่ามุนภายในที่อยู่ตรงข้ามอีกมุนหนึ่ง

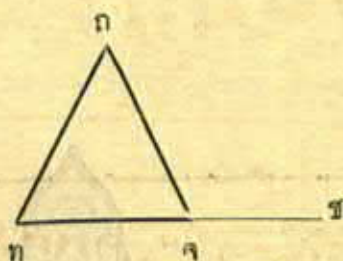
ข ท. ป.

นักเรียนจะสังเกตเห็นได้ว่า ในโจทย์หรือในคำถาม (คือคำถามในโจทย์นี้) เราไม่ใช่เครื่องหมายแทนคำพูด เช่น ($\surd$) หรือ (=) เลยเป็นอันขาด, เราใช้คำเสริมที่เกี่ยว. เครื่องหมายเหล่านี้ ใช้แต่ในเวลาสรุปเท่านั้น



(บท ช. ค. ป.)

รูปสามเหลี่ยมใด ๆ, มุมสองมุมรวมกันคงเล็กกว่า
มุมฉากเสมอ.



ให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม, มุมใด ๆ ของรูปนี้รวมกัน
เข้าสองมุมก็คงเล็กกว่ามุมฉากเสมอ

จากเส้น ข ค ต่อออกไปถึง ง (ช. ๒.)

ปฐ. $\angle$ ภายนอก ก ข ง ใหญ่กว่า $\angle$ ภายในที่ตรงข้าม,
คือ $\angle$ ก ข ค (จ. ๑๖)

เขา $\angle$ ก ข ค มวกเข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \angle$ ก ข ค มวก $\angle$ ก ข ค เล็กกว่า $\angle$ ก ข ง

มวก $\angle$ ก ข ค,

แต่ $\angle$ ก ข ง มวก $\angle$ ก ข ค = สอง $\angle$ จาก
(ค. ๑๓)

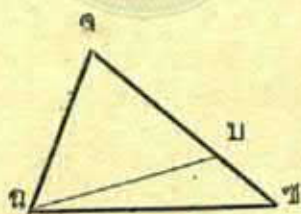
.∴ √ ถ ท จ บวก / ถ จ ท เล็กกว่า / ฉากสอง √
 แต่ถ้าวัดด้านอื่น ๆ ก็จะได้ผลเหมือนกันว่า √ ท ถ จ
 บวก / ถ จ ท, หรือ √ จ ท ถ บวก / ท ถ จ เล็กกว่า
 √ ฉากสอง √ .

ท. ท. ๑.

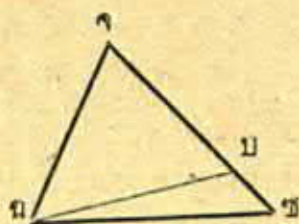
บทที่ ๑๘

(บท ท. ท. ๑.)

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ, มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาว
 เป็นมุมใหญ่กว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านสั้น.



สมมติให้ จ ข ข เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน จ ข ยาว
 กว่าด้าน จ ค



มุม กคข จะใหญ่กว่ามุม คขก.

สร้าง. ตัดเส้น กข เอาแต่ส่วน กบ ให้ยาวเท่ากับ
เส้น กค (๑. ๓) ตากเส้น คบ.

ปฐพ. ในรูปสามเหลี่ยม กคบ,

$\therefore$ ด้าน กค = กบ (สร้าง)

$\therefore \angle กคบ = \angle กบค$ (๑. ๖.)

$\therefore \angle กคข$ ใหญ่กว่า $\angle กบค$ ด้วย.

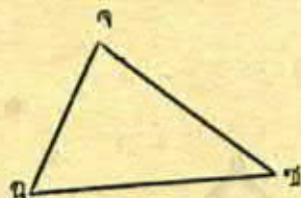
แต่ $\angle กบค$ เป็น $\angle$ ภายนอกก็ใหญ่กว่า $\angle คขบ$ ซึ่ง
เป็น $\angle$ ภายในและอยู่ตรงข้าม (๑. ๑๖.)

$\therefore \angle กคข$ ยังใหญ่กว่า $\angle คขก$ อีกมาก

ข. ท. ป.

(บท ช. ค. ป.)

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ, ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ยาวกว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก.



สมมุติให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ก ข ค ใหญ่กว่ามุม ค ข ค.

ด้าน ก ข จะยาวกว่าด้าน ก ค.

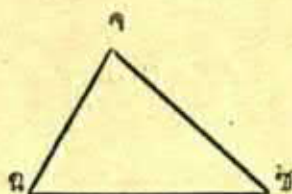
ปฐ. ถ้าด้าน ก ข ไม่ยาวกว่าด้าน ก ค ก็คงสั้นกว่าหรือเท่ากับด้าน ก ค.

แม้ด้าน ก ข สั้นกว่าด้าน ก ค $\angle$ ก ข ค คงใหญ่กว่า $\angle$ ค ข ค (๑, ๑๘)

แต่หาเป็นดังนี้ไม่ (สมมุติ)

$\therefore$ ด้าน ก ข ไม่สั้นกว่าด้าน ก ค.

แม้ด้าน ก ข เท่ากับด้าน ก ค, $\angle$ ก ข ค คงเท่ากับ $\angle$ ค ข ค (๑, ๕).



แต่หาเป็นดังนี้ไม่

(สมมุติ)

∴ ด้าน ก ข ไม่เท่ากับด้าน ก ค.

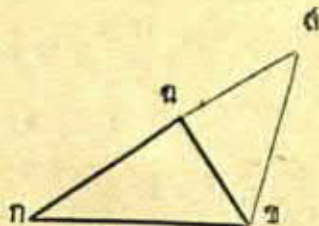
∴ ก ข ต้องยาวกว่าด้าน ก ค.

ข. ท. ป.

บทที่ ๒๐

(บท ข. ท. ป.)

ถ้าเส้นคู่ใดของรูปสามเหลี่ยมมุมรูปหนึ่ง รวมกัน คงยาวกว่า
ด้านที่สาม



สมมุติให้ ก ค ข เป็นรูปสามเหลี่ยม ด้านคู่ใด ๆ รวมกัน
คงยาวกว่าด้านที่สาม, คือ ด้าน ก ค บวก ค ข คงยาวกว่า

ก ข, ฉ ข บวก ข ก คงยาวกว่า ฉ ก, แด ข ก บวก
ก ฉ คงยาวกว่า ฉ ข,

สร้าง. คอเส้น ก ฉ ตรงออกไปถึง ๕, (อนุ ๒)

ให้ ฉ ๕ ยาวเท่า ฉ ข (จ. ๓) ตามเส้น ๕ ข (อนุ ๑)

สรุป. ในรูปสามเหลี่ยม ฉ ๕ ข

$$\therefore \text{ฉ ๕} = \text{ฉ ข}$$

$$\therefore \sqrt{\text{ฉ ๕ ข}} = \sqrt{\text{ฉ ข ๕}} \quad (๔, ๕)$$

$$\therefore \sqrt{\text{ก ข ๕}} \text{ ใหญ่กว่า } \sqrt{\text{ฉ ๕ ข}}$$

แต่ในรูปสามเหลี่ยม ก ๕ ข

$$\therefore \sqrt{\text{ก ข ๕}} \text{ ใหญ่กว่า } \sqrt{\text{ก ๕ ข}}$$

$$\therefore \text{ด้าน ก ๕ ยาวกว่าด้าน ก ข} \quad (๑, ๑๔.)$$

$$\text{แต่ } \text{ก ๕} = \text{ก ฉ บวก ฉ ข}$$

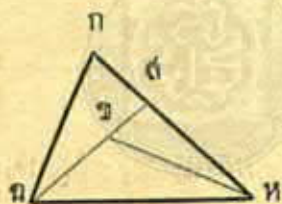
$$\therefore \text{ก ฉ บวก ฉ ข ยาวกว่า ก ข}$$

และสรุปได้ในทำนองเดียวกันว่า ข ฉ บวก ข ก ยาว
กว่า ก ฉ แด ข ก บวก ก ฉ ยาวกว่า ฉ ข

บทที่ ๒๑

(บท ช. ท.ป.)

ถ้าลากเส้นตรง ตั้งแต่ ปลาย ทั้งสองของ ด้านหนึ่ง แห่ง
รูปสามเหลี่ยม ไปสู่ จุดหนึ่ง ภายใน รูปสามเหลี่ยมนั้น, เส้น
ตรงทั้งสองนี้รวมกันสั้นกว่าด้านอีก ๒ ด้านรวมกัน, แต่
ทำมุมใหญ่กว่ามุมที่ด้านทั้ง ๒ นั้น



สมมุติให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม, ให้ ง เป็นจุดอยู่ภายใน
รูปนี้, ลากเส้นตรง ข ง และ ค ง

(๑) เส้น ข ง กับ ค ง รวมกันจะสั้นกว่า ข ค
กับ ค ก รวมกัน.

(๒) มุม ข ง ค จะใหญ่กว่ามุม ข ก ค.

ลากเส้น ข ง ต่อไปถึงจุด ค ในเส้น ก ค (อนุ ๒ .)

สรุป. (๓) ในรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$, ด้าน BC
 มากกว่า BC ยาวกว่าด้าน BC (๑, ๕๐)

บวกด้าน AC เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \triangle ABC$ มากกว่า $\triangle ABC$ ยาวกว่า BC มากกว่า BC
 กับในรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$, ด้าน AB มากกว่า BC
 ยาวกว่าด้าน BC (๑, ๕๐)

บวก AB เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \triangle ABC$ มากกว่า $\triangle ABC$ ยาวกว่า AB มากกว่า BC
 แต่ได้สรุปแล้วว่า $\triangle ABC$ มากกว่า $\triangle ABC$ ยาวกว่า BC มากกว่า
 BC

$\therefore \triangle ABC$ มากกว่า $\triangle ABC$ ยาวกว่า AB มากกว่า BC มากกว่า

(๒) $\checkmark$ ภายนอก $\triangle ABC$ ของรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$
 ใหญ่กว่า $\checkmark$ ภายใน $\triangle ABC$ ที่อยู่ตรงข้าม (๑, ๑๖.)

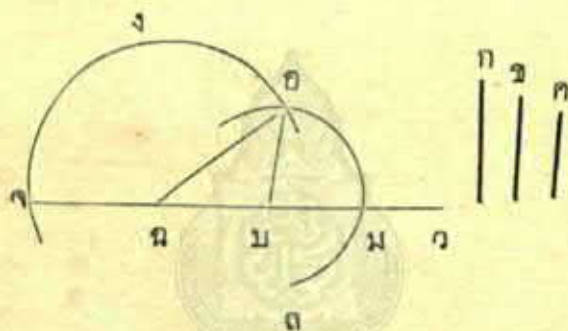
แต่ $\checkmark$ ภายนอก $\triangle ABC$ ของรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ก็ใหญ่
 กว่า $\checkmark$ ภายใน $\triangle ABC$ ที่อยู่ตรงข้ามเหมือนกัน (๑, ๑๖.)

$\therefore \checkmark \triangle ABC$ กลับใหญ่กว่า $\checkmark \triangle ABC$ มากกว่า.

ท. ท. ป.

(บท ช. ค. ท.)

ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม ให้มีด้านทั้งสามเท่ากับเส้นตรง
ตามเส้นที่กำหนดให้ ซึ่งรวมกันเข้าสองเส้นคงยาวกว่า
เส้นที่สามเสมอไป.



สมมุติให้ ก, ข, ค, เป็นเส้นตรงตามเส้นที่กำหนดให้, [ซึ่ง
รวมกันเข้าสองเส้นคงยาว กว่าเส้นที่สามเสมอไป.

จะต้องสร้างรูปสามเหลี่ยม ให้มีด้านทั้งสามเท่ากับเส้นทั้งสามที่
กำหนดให้.

วิธีทำ ลากเส้น จง ให้มีที่จุดปลายที่จุด จ, แต่ไม่
มีที่จุดปลายทางจุด ง

ในเส้น จง นี้, ตัดเส้น จค ให้เท่ากับเส้น ก, ข ข
ให้เท่ากับเส้น ข และ ข ม ให้เท่ากับเส้น ค, (ค. ๓)

เอา $\mathcal{D}$ เป็นศูนย์กลาง, $\mathcal{D} \mathcal{J}$ เป็นรัศมี, เขียนวงกลม
 $\mathcal{J} \mathcal{G} \mathcal{O}$; เอา $\mathcal{B}$ เป็นศูนย์กลาง, $\mathcal{B} \mathcal{M}$ เป็นรัศมี, เขียนวงกลม
 $\mathcal{O} \mathcal{M} \mathcal{L}$, ให้ไขว้วง $\mathcal{J} \mathcal{G} \mathcal{O}$ ที่จุด $\mathcal{O}$. (อนุ ๓.)

ลากเส้น $\mathcal{O} \mathcal{D}$, แต่ $\mathcal{O} \mathcal{B}$ (อนุ ๑.)

รูปสามเหลี่ยม $\mathcal{D} \mathcal{O} \mathcal{B}$ นี้จะมีด้านทั้งสามเท่า กับ
 $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, แต่ $\mathcal{K}$

สรุป $\therefore \mathcal{D}$ เป็นศูนย์กลางของวงกลม $\mathcal{J} \mathcal{G} \mathcal{O}$
 $\therefore \mathcal{D} \mathcal{J} = \mathcal{D} \mathcal{O}$ (แสดง ๑.)

$\therefore \mathcal{D} \mathcal{O} = \mathcal{P}$ (จริง ๑.)

$\therefore \mathcal{B}$ เป็นศูนย์กลางของวงกลม $\mathcal{O} \mathcal{M} \mathcal{L}$

$\therefore \mathcal{B} \mathcal{O} = \mathcal{B} \mathcal{M}$ (แสดง ๑๐.)

$\therefore \mathcal{B} \mathcal{O} = \mathcal{K}$ (จริง ๓.)

แต่ $\mathcal{D} \mathcal{B} = \mathcal{T}$ (สร้าง)

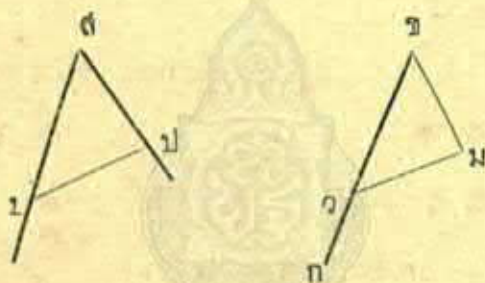
$\therefore$ รูปสามเหลี่ยม $\mathcal{D} \mathcal{B} \mathcal{O}$ มีด้าน $\mathcal{D} \mathcal{O}$, $\mathcal{D} \mathcal{B}$, $\mathcal{O} \mathcal{B}$
 เท่ากับเส้น $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{K}$ ด้านต่อเส้น

๑. ๓. ๓.

บทที่ ๒๓

(บท ข. ค. ท.)

ตรงจุดหนึ่งมาภายใน เส้นตรง ที่ กำหนด ให้, หนึ่ง ด้าน
เส้นตรง ทำมุมให้ เท่ากับ มุม ที่ กำหนด ให้.



สมมุติให้ ก ข เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้,
ให้ ๑ เป็นจุดที่กำหนดให้ อยู่ในเส้น ก ข, แต่ให้ ๒ ๓
เป็นมุมที่กำหนดให้.

จะต้องลากเส้นตรงจากจุด ๓ ให้ทำมุมกับเส้น ก ข
ทางเท่ากับมุม ๒ ๓ ที่กำหนดให้

วิธีทำ กำหนดจุด ๒ ขึ้นในเส้น ๒ ๓, แต่จุด ๑
ขึ้นในเส้น ๑ ๓, ลากเส้น ๑ ๑

ตัดเส้น ข ๓ เอาแต่ส่วน ข ๑ ให้ยาวเท่ากับ บ ๘ (๓.๑)

บนเส้น ๑ ข สร้างรูปสามเหลี่ยม ๑ ข ม ให้ด้าน ข ม
เท่ากับ ๘ ๒ เติ ม ๑ เท่ากับ ๒ ๒ (๓.๒๒)

มุม ๑ ข ม จะเท่ากับมุม บ ๘ ๒

สรุป ในรูปสามเหลี่ยม บ ๘ ๒ กับ ๑ ข ม

∴ ด้าน บ ๘ = ๑ ข (สร้าง)

๘ ๒ = ข ม (สร้าง)

๒ ๒ = ม ๑ (สร้าง)

∴ $\angle ๑ ข ม = \angle บ ๘ ๒$ (๓.๔)

คือเส้น ข ม ทำมุมกับ ๑ ข ให้ยาวเท่ากับมุม บ ๘ ๒
ที่กำหนดให้

จ. ท. ท.

ต่อไปนี้จะถือว่า “รูปสามเหลี่ยม” จะใช้เครื่องหมาย

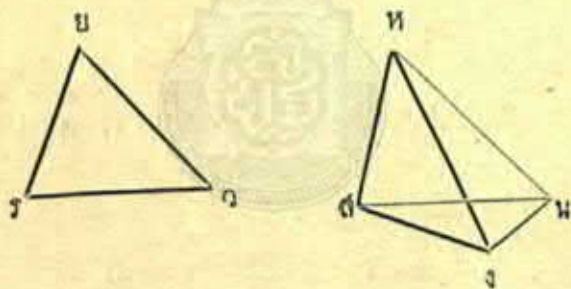
△ แทน และคำว่า “วงกลม” จะใช้เครื่องหมาย

○ แทน

บท ที่ ๒๔

(บท ช. ค. ป.)

ถ้า รูปสาม เหลี่ยมสอง รูปมี ด้านสองด้าน เท่ากัน
 ด้าน ซ้ำด้าน, แต่มี มุม ในระหว่าง ด้านคู่ ของรูปหนึ่ง
 ใหญ่กว่า มุมใน ระหว่าง ด้านคู่ ของอีก รูปหนึ่ง ฉะนั้น
 ของ รูปที่มี มุมใหญ่จะ ยาวกว่า ฉะนั้น ของรูปที่มีมุม เล็ก



สมมุติให้ บ ว จ คับ ท ด ง เป็นรูปสามเหลี่ยม
 สองรูป, ซึ่งมีด้าน บ ว เท่ากับ ท ด, ด้าน บ จ
 เท่ากับ ท ง, แต่มุม ว บ จ ใหญ่กว่ามุม ด ท ง
 ฉะนั้น ว จ จะยาวกว่าด้าน ด ง

ต้องสมมุติให้เส้น ท ด สั้นกว่า ท ง ด้วย

สร้าง ตากเส้น h น จากจุด h ในเส้น h ต
แต่ตากไปทางข้างเดียวกับเส้น h ง ให้มุม θ h น ทาง
เท่ากับมุม γ ย ว (๓, ๒๓) ตัดเส้น h น ให้เท่ากับ
 h ง หรือ ย ว (๓, ๓) ตากเส้น θ น กับ g น
ปรุฟ, ใน Δ ย ว กับ h น

$$\therefore \text{ย ว} = h \theta \quad (\text{สมมุติ})$$

$$\text{ย ว} = h \theta \quad (\text{สร้าง})$$

$$\sqrt{\text{ย ว}} = \sqrt{h \theta} \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore \Delta \text{ ทั้งสอง รูปเท่ากัน สนิท (๓, ๕)}$$

$$\therefore \text{ถน ว} = \text{ถน } \theta \text{ น}$$

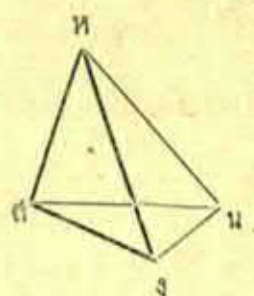
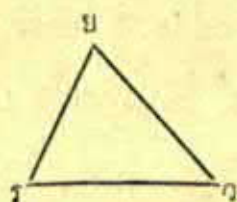
$$\text{หนึ่งใน } \Delta \text{ หง น}$$

$$\therefore h \theta = h \theta, \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore \sqrt{h \theta} = \sqrt{h \theta} \quad (๓, ๕)$$

$$\text{แต่ } \sqrt{h \theta} > \sqrt{h \theta}$$

$$\therefore \sqrt{h \theta} > \sqrt{h \theta} \quad \text{ด้วย}$$



$\therefore \angle \text{ต ง น}$ ยั้ใหญ่กว่า $\angle \text{ต น ง}$ อีกมาก
ใน $\triangle \text{ต ง น}$

$\therefore \angle \text{ต ง น}$ ใหญ่กว่า $\angle \text{ต น ง}$

$\therefore \text{ต น}$ ยาวกว่า ต ง (๓, ๓๘)

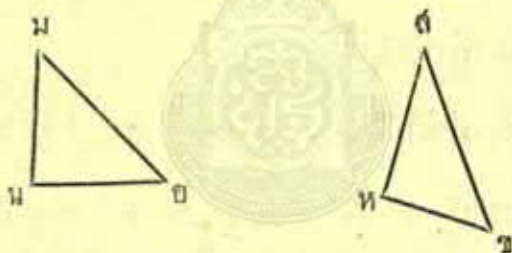
แต่ได้ประพจน์ว่า $\text{ต น} = \text{ร ง}$

$\therefore \text{ร ง}$ ก็ยาวกว่า ต ง

ข. ท. ป.

(ข. ท. ป.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูป มี ด้านสองด้าน เท่ากัน
ด้านต่อด้าน, แต่ด้านของรูปหนึ่งยาวกว่าด้านของ
อีกรูปหนึ่ง, มุมในระหว่างด้านคู่ของรูปที่มีด้านยาว
จะใหญ่กว่ามุมในระหว่างด้านคู่ของรูปที่มีด้านสั้น

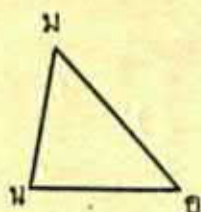


ดังนั้นให้ ม น อ กับ ป ท ร เป็นรูปสามเหลี่ยม
สองรูป, ที่มีด้าน ม น เท่ากับ ป ท, ด้าน ม อ เท่า
กับ ป ร, แต่ด้าน น อ ยาวกว่า ท ร

มุม น ม อ จะใหญ่กว่ามุม ท ป ร

สรุป ถ้า $\angle$ น ม อ ไม่ใหญ่กว่า $\angle$ ท ป ร
มันก็จะเท่ากัน หรือเล็กกว่า

ทำรายบุคคล



แต่ถ้า เท่ากัน แล้ว, ถาน น อ ก็ จะ เท่า กับ ห ข (๓, ๔)

แต่ หา เบน เช่น นั้น ไม่ (สมมุติ)

∴ จะ เท่า กัน ไม่ได้

ที่จะ เล็ก กว่า ก็ ไม่ได้, เพราะ ถ้า $\checkmark$ น ม อ เล็ก กว่า

$\checkmark$ ห ส ข แล้ว, ถาน น อ ก็ จะ เล็ก กว่า ถาน

ห ข (๓, ๔)

แต่ หา เบน เช่น นั้น ไม่ (สมมุติ)

∴ $\checkmark$ น ม อ ไม่ เท่า กับ หรือ เล็ก กว่า $\checkmark$ ห ส ข

∴ $\checkmark$ น ม อ ต้อง ใหญ่ กว่า $\checkmark$ ห ส ข

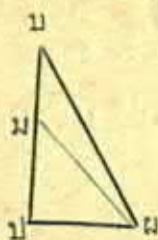
บทที่ ๒๖

๗๓

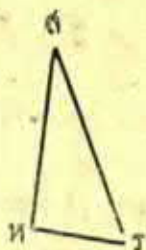
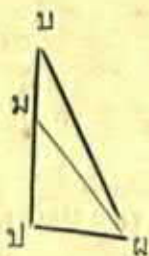
(ข. ค. ป.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูป มี มุมสองมุม เท่ากันมุม
คือมุม และมีด้าน เท่า กับด้านหนึ่ง, จะ เป็น ด้าน
ใน ระหว่าง มุม หรือด้าน ที่ ตรงข้ามกับมุมก็ได้, รูป
สามเหลี่ยมทั้ง สอง นี้ จะเท่ากันสนิท

ประการที่ ๑ อย่าง ที่ด้าน เท่า เป็น ด้าน ใน ระหว่าง มุมเท่า.



สามเหลี่ยม บ ม ผ กับ ต ห ว เป็น สามเหลี่ยมสองรูป,
ที่มีมุม บ ม ผ เท่ากับมุม ต ห ว, แต่มุม บ ผ ม
เท่ากับมุม ต ว ห ก็มีด้าน บ ผ เท่ากับด้าน ห ว ,



รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้จะเท่ากันสนิท, คือ $\triangle BPD$ จะเท่ากับ $\triangle SHR$, $\triangle BDP$ จะเท่ากับ $\triangle SHR$, และมุม $\angle BPD$ จะเท่ากับมุม $\angle SHR$

ถ้า $\triangle BPD$ ไม่เท่ากับ $\triangle SHR$, มันก็จะยาวกว่า, หรือสั้นกว่า ถ้าจะแปลไปได้อีกสมมุติว่า $\triangle BPD$ ยาวกว่า $\triangle SHR$,

สร้าง, ตัด $\triangle BPD$ เอาแต่ส่วน PD ให้ยาวเท่ากับ HR (๓.๓) ดังเส้น DM

สรุป, ใน $\triangle BPD$ กับ $\triangle SHR$

$$\therefore BP = SH \quad (\text{สร้าง})$$

$$PD = HR \quad (\text{สมมุติ})$$

$$\angle BPD = \angle SHR \quad (\text{สมมุติ})$$

$$\therefore \triangle \text{ ทั้งสองนี้เท่ากันสนิท} \quad (๓.๔)$$

$\vee$ ม ฅ ป ก็เท่ากับ $\vee$ ฅ ร ท

แต่ $\vee$ บ ฅ ป = $\vee$ ฅ ร ท (สมมุติ)

$\therefore \vee$ บ ฅ ป = $\vee$ ม ฅ ป (จริง ๆ)

คือ ส่วน เท่ากับ จำนวน เต็ม ของ มัน ซึ่ง จะเป็น จริงไม่ได้

ถ้าจะ สมมุติ ให้ บ ป สัน ทว่า ฅ ท ก็ จะ ปรุ ฟ ได้
ใน ทำนอง เดียว กัน ว่า นิติ

$\therefore$ บ ป จะ ไม่ เท่ากับ ฅ ท ไม่ ได้.

$\therefore$ บ ป ต้อง เท่ากับ ฅ ท

ใน Δ บ ป ฅ กับ ฅ ร ท

$\therefore$ บ ป = ฅ ท (ปรุ ฟ)

ป ฅ = ร ท (สมมุติ)

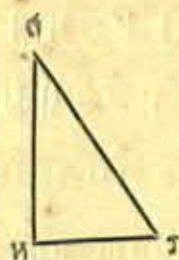
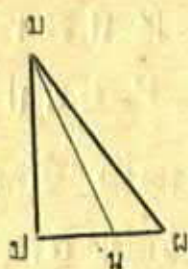
แต่ $\vee$ บ ป ฅ = $\vee$ ฅ ร ท (สมมุติ)

$\therefore \Delta$ ทั้ง สอง เท่ากัน นิติ (๓.๔)

ด้าน บ ฅ = ฅ ร

แต่ $\vee$ บ บ ฅ = $\vee$ ท ฅ ร

ประการที่ ๒ : อย่างที่ คำน เทำ เบน ต้าน ตรง มุม เทำ ข้าม



คราวนี้ สมมุติ ให้สามเหลี่ยม ทั้ง สอง คือ บ ป ฅ กับ
 ฅ ห ว นี้มีมุม บ ป ฅ กับมุม บ ฅ ป เท่ากับมุม
 ฅ ห ว แต่มุม ฅ ว ห มุมต่อมุม แต่มิฉะนั้น บ ป
 เท่ากับด้าน ฅ ห

รูปสามเหลี่ยม ทั้ง สอง นี้ก็จะเท่ากันโดยสนิท, คือ บ ฅ
 จะเท่ากับ ห ว, บ ฅ จะเท่ากับ ฅ ว, แต่มุม
 ป บ ฅ จะเท่ากับมุม ห ฅ ว

ถ้า ป ฅ ไม่เท่ากับ ห ว, มันก็ต้องยาวกว่า หรือ
 สั้นกว่า, สมมุติว่ายาวกว่า

สร้าง ตัด ป ฅ เอาแต่ส่วน ป น ให้ยาวเท่ากับ
ท ว (๓.๓) จากเส้น บ น

ป ว, ใน Δ บ ป น กับ ส ท ร

$\therefore$ บ ป = ส ท (สมมุติ)

ป น = ท ร (สร้าง)

$\vee$ บ ป น = $\vee$ ส ท ร (สมมุติ)

$\therefore \Delta$ ทั้ง สอง เท่ากันสนิท (๓.๔)

$\vee$ บ น ป = $\vee$ ส ร ท

แต่ $\vee$ บ ฅ ป = $\vee$ ส ร ท (สมมุติ)

$\therefore \vee$ บ น ป = $\vee$ บ ฅ ป (สร้าง๓)

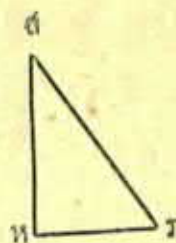
คือ มุม ภายนอกเท่ากับมุม ภายใน ที่ อยู่ตรงข้าม ซึ่ง เป็น

: ไม่ไม่ได้ (๓.๑๖)

$\therefore$ ป ฅ จะไม่เท่า ท ร ไม่ได้

$\therefore$ ป ฅ ต้องเท่ากับ ท ร

ใน Δ บ ป ฅ กับ ส ท ร



$$\therefore ปผ = หร \quad (\text{ปฐพี})$$

$$บบ = สห \quad (\text{สมมุติ})$$

$$\checkmark บปผ = \checkmark สหร \quad (\text{สมมุติ})$$

$$\therefore \Delta \text{ ทั้งสองเท่ากัน สนิท} \quad (๓.๔)$$

$$\text{ด้าน บผ} = สร$$

$$\text{แต่ } \checkmark บปผ = \checkmark หสร$$

ท. ท. ป.

ไม้ต

เมื่อ ถึง ที่ สุด ตอน นี้ แล้ว

ควร ตั้ง เกต บท ที่ ๔ , ๘ ,

แต่ ๒๖ ให้เข้า ใจ ดี ไว้ เพราะ เปน บท มี ลักษณะ คล้าย กัน ที่ ว่า
ด้วย รูป สาม เหลี่ยม สอง รูป เท่า กัน

เปรียบ เทียบ โดย ย่อ ก็ จง ตั้ง เกต จำ ไว้ แต่ เพียง เท่า นี้

รูป สาม เหลี่ยม สอง รูป จะ เท่า กัน สนิท , ด้าน ทั้ง สาม

จะ เท่า กัน ด้าน คอ ด้าน , แต่ มุม ทั้ง สาม จะ เท่า กัน มุม ต่อ มุม ถ้า

(ก) มี ด้าน เท่า กัน สอง ด้าน มุม เท่า กัน มุม หนึ่งใน สาม มุม

ใน ระหว่าง ด้าน เท่า (บท ที่ ๔)

(ข) มี ด้าน เท่า กัน ทั้ง สาม ด้าน (บท ที่ ๘)

(๓) ๓ , มี มุม เท่า กัน สอง มุม แต่ มี ด้าน ใน ระหว่าง

มุม เท่า ๆ กัน

๒ , มี มุม เท่า กัน สอง มุม แต่ มี ด้าน ที่ ตรง ข้าม

กับ มุม เท่า ๆ กัน (บท ที่ ๒๖)

บท ทั้ง สาม ที่ กล่าว มา แล้ว นี้ ใช้ มาก ใน การ ทำ โจทย์ แต่ ผู้

แรก เขียน มัก หลง ผิด ได้ บ่อย ๆ ตั้ง จะ ชัก อูทาหรณ์ มา ไว้

พอ เปน เครื่อง ห้าม

อย่าว่า สาม เหลี่ยม ของ รูป เท่า กัน สนิท เมื่อ

(๑) มี มุม สาม มุม เท่า กัน

(๒) มี ด้าน เท่า กัน สอง ด้าน มี มุม เท่า กัน มุม หนึ่ง

แต่หาใช้ มุม ใน ระหว่าง ด้าน เท่า ไม่

แบบ ผก หัด

(สำหรับบทที่ ๕)

๑) ถ้า $\triangle ABC$ เป็นเส้นผ่านมุมที่ภายใน $\angle B$ ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $\triangle ABC$, แล้วต่อออกไปพบด้านที่ตรงข้ามกับมุมที่จุด E บน AC , จะพบว่ารูปสามเหลี่ยม $\triangle ABE$ กับ $\triangle ABC$ เท่ากันโดยสนิท

๒) จะพบว่าเส้นตรงทั้งสอง, ที่ลากตั้งแต่ปลายด้านของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, ให้ตั้งได้มุมฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้าม, ยาวเท่ากัน

๓) จุดหนึ่งจุดใดในเส้นที่ผ่านมุม มีระยะทางจากเส้นทั้งสองของมุม, เท่ากัน เสมอ .

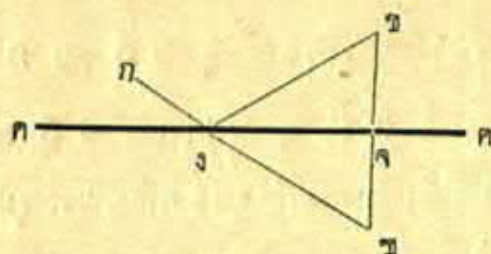
๔) จากจุด P , ซึ่งเป็นศูนย์กลางของเส้น BC , ดากละเส้นตรงใด ๆ ก็ได้; แล้วลากเส้น BC กับ CI ให้ตรงได้มุมฉากกับเส้น CI , จึงสรุปว่าเส้น BC เท่ากับ CI

๕) ถ้าเส้นผ่านมุมยอดตั้งได้มุมฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยม
นี้เป็นหน้าจั่ว

๖) บรรดาเส้นตรงที่จะลากจากจุดที่กำหนดไว้ มาสู่เส้นตรงที่กำหนดไว้, เส้นที่ตั้งได้มุมฉากเป็นเส้นสั้นที่สุด, เส้นอื่นที่ลากเส้นนี้สั้นกว่าเส้นที่ลากออกไป, และจะมีเส้นที่เท่ากันได้แต่เป็นคู่ ๆ คือที่อยู่คนละข้างของเส้นตั้งตรงได้มุมฉาก.

๗) จากจุดที่กำหนดไว้สองจุด, อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตรงที่กำหนดให้อีกเส้นหนึ่ง, จึงลากเส้นตรงสองเส้นถึงจุดหนึ่ง ในเส้นตรงที่กำหนดให้ นี้ ให้บังเกิดมุมสองมุมเท่ากัน.

การวัดมุม



วิธีทำ สมมุติให้ ค ค เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ ๆ

ก และ ข เป็นจุดสองจุดที่กำหนดให้ อยู่ข้างเดียวกัน ของเส้น
ค ค

จะต้องลากเส้นตรงจาก ก และ ข ถึงจุด ง ในเส้นตรง
ค ค, ให้มุม ก ง ค เท่ากับมุม ข ง ค

เสร็จ, ลากเส้น ข จ ให้ตั้งตรงได้มุมฉากกับเส้น
ค ค (๓.๑๒) แลให้ จ อยู่ในเส้น ค ค, ต่อ ข จ
ลงไปถึง ข ทำให้ จ ข ยาวเท่ากับ ข จ (๓.๓)
ลากเส้น ก ข ตัดเส้น ค ค ที่จุด ง, ลากเส้น ข ง

ก ก กับ ข ง นี้จะเป็นเส้น ตรงที่ ต้อง การที่จะ กระ ทำ
มุม ก ง ค ให้เท่ากับมุม ข ง ค

(ต่อไปนี้ไปจง ปรุฟให้ สำ เสร็จ)

๑) จง ตาก เส้น ตรง ผ่าน จุด ที่กำหนด ให้เส้น หนึ่ง, ให้เส้น
ตรง สอง เส้น ที่ จะ ตาก มาจาก จุด ที่กำหนด ให้ อีก สอง จุด, ให้
คึง ได้ มุม ตาก กับ เส้น ตรง อัน เดิม. เท่า กัน ทั้ง สอง เส้น. แด การ
ทั้งนี้จะทำ ไม่ได้ เมื่อ จุด ทั้ง สาม เป็น ประ การ ใด ?



ตอนที่ ๓

เส้น ขนาน แด รูป เส้น ขนาน



แสดงคำใช้

๔ พัน เปน สิ่ง ซึ่ง มี กำหนด กว้าง ขาว แต่ไม่มีกำหนด หนา
รอบ ของ พัน โดย รอบ นับ ว่า เปน เส้น

(เมื่อกล่าวถึงพณของทีใด ๆ เช่น พณดิน หรือ พณ
กรรม หรือ พณกรรม ก็หมายเอาแต่ที ๆ มี
อาณาเขตร้อย ะวัดโดยกว้างก็ได้ หรือโดย
ยาวก็ได้ แต่ไม่ตั้งไปถึงส่วนหน้าหรือส่วนลึก ถึง
เอาแต่ผืนหน้า ๆ ข้างบนเท่านั้น อาณาเขตของพณ
โดยร้อยก็ย่อมแปลถึงความจรณา)

๕ พัน ราม เสมอ เป็น พัน , ซึ่ง หากโดย จะ สมมุติ ตั้ง จุด
 ๒ จุด ใน ที่ใด ๆ ใน พัน นั้น เห็น ตรง ใน ระหว่าง ๒ จุด นั้น
 จะ คิด เรียบ อยู่ กับ พัน ตลอด ทั้ง เส้น

(อุทาหรณ์ของพญาวายเสนธคช พญะเจด" พญ
ที่ไม่ร้ายเสนธคช "พญกิมขร, ขะสูง ๆ ต่ำ ๆ"
ถ้าจะตั้งยุคเข้า ๒ ยุคแล้วเขาเขมือกขิงใด ทั้งอย่างวิธี ที่

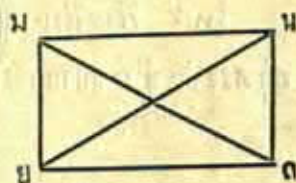
เจ้าพุนดินน เชือกหนึ่งคึงคิกคินข้างคินข้าง ถึง
 ดินนระพุนเรือบแล้ว แต่เมื่อมาซึ่งเชือกขวางดินน
 เข้า เชือกหนึ่งคึงจะไม่เป็นเส้นตรงได้ เพราะพุนดินน
 มุมกลาง ไม่เป็นพื้นราบเสมอ)

๑๖ รูปสี่เหลี่ยม คือรูปซึ่งมีด้านสี่ด้าน เป็นเส้นตรง
 ทั้งนั้น

(เส้นตรงที่ผ่ากลางแต่โยงมุมสองมุม ที่อยู่ตรงกัน
 ข้าม ของรูปสี่เหลี่ยม เรียกว่า

เส้น แทะยมุม,
 เช่นในรูปสี่เหลี่ยม

ม น ต ย ห เส้น



มี ต กับ ย น เป็นเส้นทะยมุม)

๑๗ รูปหลายเหลี่ยม คือรูปซึ่งมีด้านมากกว่า
 สี่ด้านขึ้นไป แต่เป็นเส้นตรงทั้งนั้น

๒๔ เส้นขนานตรง คือเส้นตรงสองเส้นที่อยู่เรียง
 เป็นคู่กัน อยู่บนพื้นราบอันเดียวกัน แต่มี

ระยะห่าง เท่ากัน เสมอ คั่น เสมอ ปลาย . ม _____ น
 ถ้า จะลาก เส้น ทั้ง สองนี้ ต่อ ออกไป ทาง ย _____ ด
 ปลาย ข้าง หนึ่ง ข้าง ใด เส้น ทั้ง สองนี้ ก็ จะ ไม่ ฐ จัก พบ กัน เลย

ตั้งเส้น ม น กับเส้น ย ด นี้.

(เส้นขนานตรงนี้จะตั้ง หรือนอน หรือเอียงเอียงอย่างไรก็ได้ สุดแต่ถ้าลากเส้นทั้งสองตรงต่อออกไปทางปลายข้างหนึ่งข้างใด แล้วเส้นทั้งสองนี้ไม่เข้าพบกันแล้ว เส้นทั้งสองนี้ก็เป็นเส้นขนานตรง แต่เราจะพบว่าเส้นหนึ่งขนานกับอีกเส้นหนึ่ง หรือพูดว่าเส้นทั้งสองขนานกันก็ได้)

๒๕ ที่เหลี่ยม เส้น ขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้าน

อยู่ ตรง กัน ข้าม ขนาน กัน เช่น กู๋ ๆ

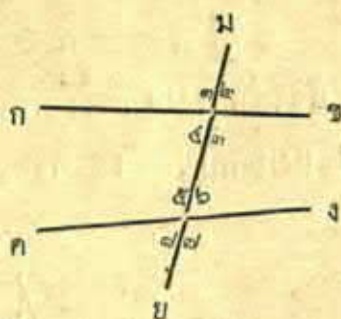


คำนิยาม

ใน ตอนนั้น ยังมี ชื่อ ที่ ท่าน อาจารย์ ยุคติดไม่ได้ รวมไว้ ใน แต่งคำ ใช้ อีก หาย อย่าง จะ ต้อง ชัก อูหาหรณ์ มา ให้ ทราบ ไว้.

ถ้า เส้น ม ย คัดเส้น ก ข กับ คี ง ก็ บัง เกิด มุม ขึ้นถึง แปด มุม ๆ เหล่านี้ จำ เบน ต้อง มี ชื่อ มุม นั้น จะ เรียก ไม่ ถูก แต่ คำ ว่านี้ ท่าน ห้าม ไม่ ให้ ใช้ จะ เรียก ถึง ใด ต้อง ใช้ คำ พูด อย่าง

เดียว. มุมที่แปดนี้
ในที่นี้จะลงหน้าเบอร์เดียว
ให้เป็นมุม ๓, มุม ๒,
มุม ๓ ๑๑ ๑๑
มุม ๓, มุม ๒,



มุม ๗, มุม ๘, เรียกว่า มุม นอก

มุม ๓, มุม ๔, มุม ๕, มุม ๖ เรียกว่า มุม ใน

มุม ๔ กับ มุม ๖ เป็น มุม แแย้ง กัน, มุม ๓ กับ มุม ๕
ก็ เป็น มุม แแย้ง กัน เหมือนกัน

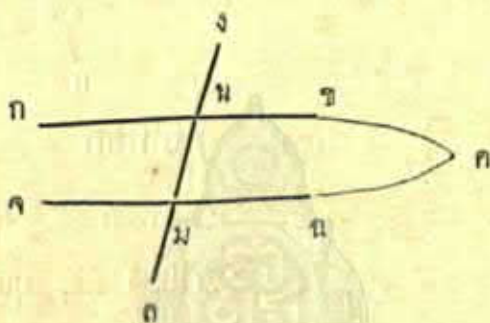
มุม ๒ กับ มุม ๖ นั้น มุม ๒ เรียกว่า มุม นอก มุม ๖
ก็ เรียกว่า มุม ใน ที่ตรงข้าม ในข้างเดียวกัน ของเส้น ม ย

อันใดมุม ๓ กับ ๗, หรือ ๔ กับ ๕, หรือ ๕ กับ ๘
ก็ เหมือนกัน. แต่ผู้เขียน ต้องไม่หลงหรือเอาไปปนกับ มุม นอก
แต่ มุม ใน ที่ตรงข้ามของ รูป สามเหลี่ยม ในเล่ม ๓ บทที่ ๓๖
เพราะ ไม่เหมือนกัน

แต่ต้องไม่ลืมว่า มุม ๓ กับ ๒, หรือ ๔ กับ ๕, หรือ ๕
กับ ๖, หรือ ๗ กับ ๘ เป็น มุม ประชิด กัน, เป็นคู่ๆ
ไปทั้งนั้น

บทที่ ๒๗

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้น, กระทำให้
มุมแย้งเท่ากัน, เส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน



สมมุติให้เส้นตรง ง ต ตัดเส้นตรง ก ข, กับ จ ฉ,
ที่จุด ข, และ ฉ, กระทำให้มุมแย้ง ก ข ก กับ ฉ ฉ จ
เท่ากัน

เส้น ก ข กับ จ ฉ จะขนานกัน.

ปฐพ. ถ้า ก ข กับ จ ฉ ไม่ขนานกัน. แล้วต่อตรง

ออกไปทางจุด ข, ฉ, หรือ ก, จ, ก็คงจะพบกัน

ถ้าจะแปลได้ดังนี้, ก็ให้ต่อออกไปพบกัน ทางจุด

ข, ฉ, ที่จุด ก

รูป น ค ม ก็เป็นรูปสามเหลี่ยม (แสดง ๑๕)

∴ $\vee$ นอก ก น ม ก็ใหญ่กว่า $\vee$ ใน

น ม ค ที่อยู่ตรงข้าม (๑.๑๖.)

แต่ $\vee$ ก น ม = $\vee$ น ม ค (สมมุติ)

∴ $\vee$ ก น ม กับ $\vee$ น ม ค เป็นทั้งเท่ากัน

แต่ไม่เท่ากัน ซึ่งเป็นไปได้

∴ น ค ม จะเป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ได้

∴ ก ข กับ จ ฉ เมื่อต่อตรงออกไปทางจุด ข, ฉ จะไม่พบกันเป็นอันขาด.

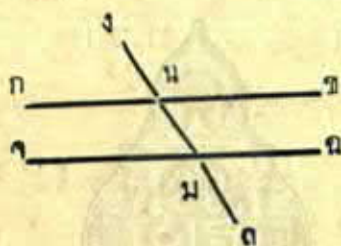
แต่จะสรุปได้ ในทำนองเดียวกันว่าจะไม่พบกัน เมื่อต่อตรงออกไปทางจุด ก, จ.

∴ ก ข กับ จ ฉ ก็ต้องขนานกัน. (แสดง ๒๔)

ข. ท. ป.

บทที่ ๒๘

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงสองเส้น, กระทำให้
มุมนอกเท่ากับมุมในที่ตรงข้าม, บนข้างเดียวกันของเส้น.
หรือถ้ามุมในสองมุม, บนข้างเดียวกันของเส้น, รวมกัน
เท่ากับมุมฉากสองมุม, เส้นสองเส้นนี้จะเป็เส้นขนาน,



สมมุติให้เส้นตรง ง ด ตัดเส้นตรง ก ข กับ จ ฉ
ที่จุด น และ ม

ประการที่ ๑ สมมุติให้มุมนอก ง น ข เท่ากับมุม
ใน น ม ฉ ที่ตรงข้าม, บนข้างเดียวกันของเส้น ง ด
ก ข กับ จ ฉ จะขนานกัน.

ปฐ. $\therefore \angle \text{งนข} = \angle \text{นมฉ}$ (สมมุติ)

แถม $\therefore \angle \text{งนข} = \angle \text{กนม}$ (๑.๑๕.)

$\therefore \vee \text{ น ม น } = \vee \text{ ก น ม } \quad (\text{จริง } .)$

แต่เป็น มุมแย้ง

$\therefore$ เส้น ก ข ขนาน กับ จ ฅ (ก. ๒๗.)

ข. ท. ป.

ประ การ ที่ ๒. สม มุต ให้มุมใน ข น ม

กับ ฅ ม น, บน ข้าง เดียวกัน ของ เส้น ง ฅ, รวม
ทั้ง สอง มุม เท่า กับ มุม ฉาก สอง มุม

เส้น ก ข ก็ จะ ขนาน กับ จ ฅ,

ปฐพ, $\therefore \vee \text{ ข น ม } \text{ รวมกับ } \vee \text{ ฅ ม น}$
 $=$ มุม ฉาก สอง มุม (สม มุต)

แต่ $\therefore$ มุม ประ สัต ก น ม กับ ข น ม
รวมกัน, ก็ เท่า กับ มุม ฉาก สอง มุม (ก. ๑๓.)

$\therefore \vee \text{ ข น ม } \text{ กับ } \vee \text{ ฅ ม น}$
 $= \vee \text{ ก น ม } \text{ กับ } \vee \text{ ข น ม } \quad (\text{จริง } .)$

หัก $\vee \text{ ข น ม } \text{ ออกเสียทั้ง สอง ข้าง}$

$\therefore \vee \text{ ฅ ม น } = \vee \text{ ก น ม } \text{ ที่ เหลือ อยู่}$
แต่ มุม ทั้ง สอง นี้ เป็น มุมแย้ง

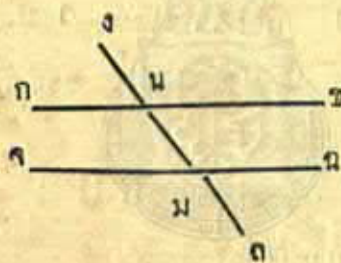
$\therefore$ เส้น ก ข กับ จ ฅ ก็ ขนาน กัน (ก. ๒๗.)

ข. ท. ป.

บทที่ ๒๔



ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานตรงสองเส้น, มุม
 แฉกก็จะเท่ากัน. มุมนอกกับมุมในที่ตรงข้าม, บนข้าง
 เดียวกันของเส้น, ก็เท่ากัน, แต่มุมในสองมุม,
 บนข้างเดียวกันของเส้น, รวมกันจะเท่ากับมุมฉาก
 สองมุม



สมมุติ ให้เส้นตรง ง ด ตัดเส้นตรง ก ข
 กับ จ ฉ ที่จุด น แด ม
 (๑) มุมแย้ง ก น ม กับ น ม ฉ จะเท่ากัน
 (๒) มุมนอก ง น ข จะเท่ากับมุมใน น ม ฉ
 ที่ตรงข้าม, บนข้าง เดียว กัน ของเส้น ง ด

(๓) มุมใน ข น ม กับ ด ม น ทั้งสอง
บนข้างเดียวกันของเส้น ง ล, รวม กัน จะ เท่า กับ มุม ฉาก สอง มุม.

สรุป (๓) ถ้า $\angle$ ก น ม ไม่เท่ากับ
 $\angle$ น ม ด, มันก็คงใหญ่ กว่ากัน อยู่ มุม หนึ่ง
ถ้าจะ เปรียบ ได้ ตั้ง นั้น, ก็ สมมุติ ให้ $\angle$ ก น ม
เป็น มุม ใหญ่ กว่า, แล้ว บอก $\angle$ ข น ม เข้า ทั้ง
สอง ฝ่าย

$\therefore \angle$ ก น ม บอก $\angle$ ข น ม ใหญ่ กว่า
 $\angle$ น ม ด บอก $\angle$ ข น ม (จริง ๔)

แต่ $\angle$ ประชิด ก น ม กับ ข น ม รวม กัน

= มุม ฉาก สอง มุม (๓.๓๓.)

$\therefore \angle$ น ม ด กับ $\angle$ ข น ม รวม กัน เล็ก กว่า

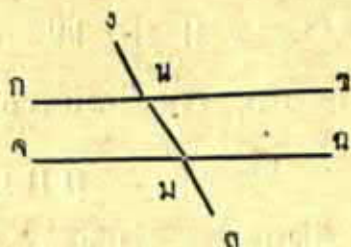
มุม ฉาก สอง มุม

$\therefore$ ก ข กับ จ ด ถ้า ต่อ ตรง ออก ไป ทาง

จุด ข แด ด ก็ จะ พบ กัน (จริง ๑๒)

แต่ ก ข กับ จ ด ขนาน กัน (สมมุติ)

$\therefore$ จะ ไม่ พบ กัน เลย



$\therefore \angle กนม$ จะไม่เท่ากับ $\angle นมด$ ไม่ได้

$\therefore \angle กนม$ ต้องเท่ากับ $\angle นมด$

(๒) อื่น $\therefore \angle กนม = \angle งนข$ (๓.๓๕)

แต่ $\therefore \angle กนม = \angle นมด$ (ปรัฟ)

$\therefore \angle นอก งนข = \angle ใน นมด$ ที่ตรง

ข้าม บนข้างเดียวกัน ของเส้น $ก ด$

(๓) กับ $\angle งนข = \angle นมด$ (ปรัฟ)

บวก $\angle ขนม$ เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \angle งนข$ บวก $\angle ขนม = \angle นมด$

บวก $\angle ขนม$

แต่ $\angle ประชิด งนข$ กับ $ขนม$ รวมกัน

เท่ากับมุมฉากสองมุม

(๓.๓๓)

$\therefore \angle นมด$ บวก $\angle ขนม =$ มุมฉากสองมุม

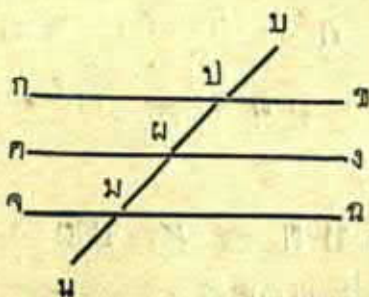
ท. ท. ป.

ไฉน ให้สังเกตไว้ว่าบทที่ ๒๙ นี้เป็นบทสรุปผลของ
บทที่ ๒๗ กับ ๒๘ รวมกัน แต่ให้จำใส่ใจไว้ด้วยว่า

บท ๒๗ } นี้ทราบมุม, ต้องรู้ว่าเส้นขนานกัน, แต่
บท ๒๘ } นี้ทราบว่าเส้นขนานกันแล้ว แต่ต้องสรุป
ลักษณะของมุมเหล่านี้. กลับกันอยู่ดังนี้

บทที่ ๓๐

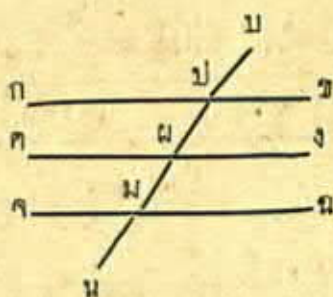
เส้นตรงซึ่งต่างก็ขนานกับเส้นเดียวกัน, เส้นตรง
เหล่านี้ขนานกันหมด



สมมุติให้เส้นตรง ก ข กับ ค ง ต่างก็ขนาน

กับเส้นตรง จ น

คำขวัญกลิต



ก ข กับ ค ง ก็จะมีขนาดกันด้วย.

สร้าง. ตากเส้น บ น ให้ตัดเส้น ก ข.

ค ง แด จ ฉ ที่จุด ป ผ แด ม

ปฏพ. $\therefore$ ก ข มีขนาดกันกับ จ ฉ (สมมุติ)

$\therefore \sphericalangle$ แด ก ป ม = $\sphericalangle$ แด ป ม ฉ (๓.๒๘.)

แด $\therefore$ ค ง มีขนาดกันกับ จ ฉ (สมมุติ)

$\therefore \sphericalangle$ นอก ป ผ ง = $\sphericalangle$ ใน ผ ม ฉ ที่ตรง

ข้าม (๓.๒๘.)

$\therefore \sphericalangle$ ก ป ผ = $\sphericalangle$ ป ผ ง (จริง ๑.)

แถมมุมทั้ง สองนี้ เป็นมุม แด

$\therefore$ เส้น ก ข กับ ค ง มีขนาดกัน (๓.๒๘.)

ข. ค. ป.

จากจุดที่กำหนดให้ ๆ ลากเส้นตรง ให้ขนาน
กับเส้นตรงที่กำหนดให้



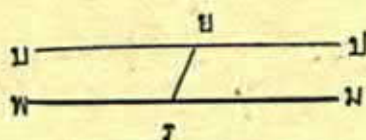
สมมุติให้ ย เป็น จุด ที่ กำหนด ให้, แดให้
พ ม เป็น เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้.

ต้อง ประสงค์ จะ ลาก เส้น ตรง ตั้ง แต่ ย ให้ ขนาน กับ พ ม
สร้าง. กำหนด จุด ว ขึ้น ใน เส้น พ ม,

ลากเส้น ย ว, สร้างมุม ว ย ม ให้เท่ากับ
มุม ย ว ม, แดให้แย้งกัน (๓, ๒๓)

ลากเส้น บ ย ตรง ออก ไป ถึง ป.
ย ป จะ ขนาน กับ พ ม.

การวัดผล



ปฎิพ. ∴ $\angle$ ย บ ย ร = $\angle$ ย ร ม (ตรง)

∴ บ ป ขนาน กับ พ ม (๑. ๒๗)

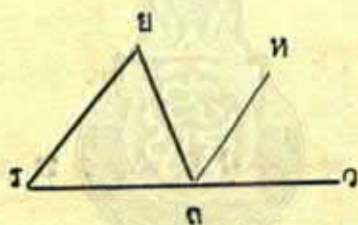
แต่เส้นนี้ได้อากผ่านจุด ย ที่กำหนดให้

๒. ๓. ๓.

บทที่ ๓๒

๘๘

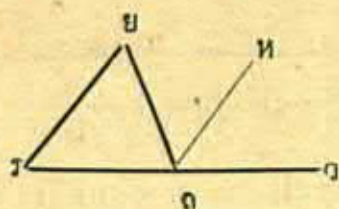
ถ้าท่อกำหนดหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมให้ตรงออกไป, มุม
นอกที่ยังเกิดขึ้นจะใหญ่เท่ากับมุมในที่ตรงข้าม, ทั้งสอง
มุมรวมกัน, แต่มุมใน ทั้งสามมุมรวมกันย่อมเท่ากับมุม
ฉากสองมุม.



สมมุติให้ ย ร ด เป็นรูปสามเหลี่ยม, ท่อกำหนด
ร ด ตรงออกไปถึง ว

(๑) มุมนอก ย ด ว จะเท่ากับ มุมใน ย ร ด
แต่ ร ย ด ที่ตรงข้าม, รวมกัน

(๒) มุมใน ทั้งสาม คือ ย ร ด, ร ด ย แต่
ด ย ร รวมกัน จะเท่ากับมุมฉากสองมุม.



สร้าง. จาก $\triangle$ ดากเส้น $\triangle$ ห ให้ ขนาน
กับ $\triangle$ ย (๓. ๓๓)

ปฐพ. (๓) $\therefore$ $\triangle$ ย ขนานกับ $\triangle$ ห (สร้าง)

$\therefore \angle$ ย $\triangle$ ห กับ $\triangle$ ย $\triangle$ เท่ากัน (๓. ๒๙)

แต่ $\angle$ นอก $\triangle$ $\triangle$ $= \angle$ ใน $\triangle$ $\triangle$ ที่ตรง
ข้าม (๓. ๒๘)

$\therefore \angle$ ย $\triangle$ $\triangle$ ทั้งหมด $= \angle$ $\triangle$ ย $\triangle$ กับ
 $\angle$ ย $\triangle$ รวมกัน, ซึ่งเป็นมุมในที่ตรงข้ามของมุม
นอก $\triangle$ $\triangle$ ทั้งสองมุม.

(๔) $\angle$ ย $\triangle$ $= \angle$ $\triangle$ ยนอก $\angle$ ย $\triangle$ (ปฐพ)

แต่ $\angle$ ย $\triangle$ $=$ มุมเข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \checkmark$ ร ย ติ บวก $\checkmark$ ย ร ติ บวก $\checkmark$ ย ติ ร ซึ่ง
 เป็น มุม ใน ทั้ง สาม มุม ของ $\text{ย ร ติ} = \checkmark \text{ย ติ ร}$
 บวก $\checkmark$ ย ติ ร, ซึ่ง รวม กัน เท่า กับ มุม ฉาก สอง
 มุม (๑, ๑๓)

$\therefore$ มุม ใน ทั้ง สาม มุม ของ $\Delta \text{ย ร ติ}$
 $=$ มุม ฉาก สอง มุม.

ท. ท. ป.

|| เครื่องหมายนี้ ใช้ บอก คำว่า “จบ”

บทที่ ๓๓

เส้นตรง, คู่ที่ตัดหัวท้าย, ข้างต่อ, ข้าง, ของเส้นขนาน
ตรง, ที่ยาวเท่ากัน, จะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย



สมมุติให้ ม น กับ บ ป เป็นเส้นตรงขนาน
กัน, แดยาวเท่ากัน, ตากเส้น ม บ กับ น ป.

เส้น ม บ กับ น ป นี้จะเท่ากันและขนานกัน,
ตากเส้น บ น.

สรุป $\therefore$ ม น $\parallel$ บ ป (สมมุติ)

$\therefore \angle$ ม น บ กับ น บ ป เท่ากัน (๓๒.๔)

ใน Δ ม น บ กับ น บ ป

$\therefore$ ม น = บ ป (สมมุติ)

บ น เป็นเส้นร่วม

$\angle$ ม น บ = $\angle$ น บ ป (สรุป)

∴ Δ ทั้งสองเท่ากันสนิท

(๑.๔.)

ถน บ ม = ถน น ป

✓ ม บ น = ✓ บ น ป

แต่ มุม ทั้ง สองนี้ เปรียบ มุม แฉก

∴ ม บ กับ น ป ซ้อนกัน

(๑.๒๗)

แต่ได้ ปรุฟ แล้ว ว่า เท่า กัน ด้วย

๒. ท. ป.

บทที่ ๓๔

ด้านแถมที่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
เท่ากัน, แดเส้นทแยงมุมทั้งคู่ต่างก็ผ่ารูป
สี่เหลี่ยมด้านขนาน ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.



สมบัติให้ ก ข ง ค เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
แถมให้ ค ข เป็นเส้นทแยงมุม

ด้านแถมที่ตรงข้ามของรูปนี้จะเท่ากัน แด ค ข
จะแบ่งรูปนี้ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

สรุป $\therefore$ ก ข $\parallel$ ค ง (แสดง ๒๕)

$\therefore \angle$ ขกค = $\angle$ ขคง (๓, ๒๙)

$\therefore$ กค $\parallel$ ขง (แสดง ๒๕)

$\therefore \angle$ ขคก = $\angle$ ขกข (๓, ๒๙)

ใน Δ ก ข ค กับ ข ค ง

$\therefore \angle$ กขค = $\angle$ ขคง (สรุป)

$$\vee ก ค ข = \vee ค ข ง \quad (\text{ปรุฟ})$$

แต่ด้าน ค ข เป็นด้านร่วม

$$\therefore \Delta \text{ ทั้งสองนี้ เท่ากันสนิท} \quad (\text{๑.๒๖.})$$

$$ก ข = ค ง, \text{ แต่ } ก ค = ข ง$$

$$\text{แต่ } \vee ข ก ค = \vee ข ง ค$$

$$\text{หนึ่งได้ปรุฟแล้วว่า } \vee ก ข ค = \vee ข ค ง$$

$$\text{แต่ } \vee ก ค ข = \vee ค ข ง$$

$$\therefore \vee ก ข ง \text{ ทั้งหมด} = \vee ก ค ง$$

ทั้งหมด

$$\text{แต่ได้ปรุฟแล้วว่า } \Delta ก ข ค \text{ แต่ } ข ค ง$$

เท่ากันสนิท

$$\therefore ข ค$$

ก็ แบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า

$$ก ข ง ค$$

ออก เป็นสอง ส่วนเท่าๆ กัน .. :

ข. ท. ป.

แบบฝึกหัด

(สำหรับตอนที่ ๒)

๑. เส้นสอง เส้น, ที่ ผ่านมุม ที่ ยอด จากกัน ตรงข้าม,
ตัด ตรง เป็นเส้นเดียวกัน
๒. ใน รูปของบทที่ ๑๖, ถ้าลากเส้น ๓ ค,
ให้ปรัฟว่า ๓ ค เท่ากับ ๓ ย.
๓. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มีมุมที่ ข
เป็นมุมฉาก, ถ้าต่อด้าน ข ค ยาวออกไปถึงจุด ย, ให้
ปรัฟว่ามุม ก ค ย เป็นมุมจั่ว.
๔. มุม, ที่บังเกิด ขึ้น โดย เส้น ผ่าน มุม ที่ ถาน ของรูป
สามเหลี่ยม บรรจบกัน, ใหญ่ เท่า มุม ยอด นอก ครั้ง หนึ่ง ของ
สองมุม ที่ ถาน รวม กันเสมอไป, ไม่ว่าใน รูปสามเหลี่ยม ชนิดใด ๆ
๕. มุม, ที่บังเกิด ขึ้นโดยเส้น ผ่าน มุม นอกสอง มุม
ของรูปสามเหลี่ยม ไต ๆ บรรจบ กัน, มุม นั้น
ทางเท่ากับ ครั้ง หนึ่ง ของ สอง มุมภายในที่ ยัน กัน, รวม กัน
๖. ถ้าเส้นตรง สองเส้น ไขว้ กัน, จากจุด หนึ่ง ใน ระหว่าง
สอง เส้นนั้น, ให้ลากเส้นตรงให้ตั้ง ได้ มุมฉาก กับ เส้นทั้งสอง

นั้น เส้นตะ เส้น, เส้นผ่านมุมที่บัง เกิดจาก เส้น ทั้ง ได้ มุม ฉากนี้, จ
 ฆานกับ, หรือ เป็น เส้น เดียว กับ, เส้นผ่าน มุม ที่บังเกิด จาก
 เส้นไขว้

๗. ใน ด้านเท่า ของ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ก ข ค, ก็
 ด้าน ก ข กับ ด้าน ก ค, ถ้าจะกำหนดจุด ย แด ว
 ขึ้น, ให้ ย ข กับ ว ค เท่ากัน, จึงชี้ให้เห็นว่า
 ว ย ฆานกับ ข ค

๘. ก ข ค กับ ย ว ฎ เป็นรูปสามเหลี่ยม
 สองรูป, ซึ่งมีด้าน ก ข กับ ข ค เท่ากับ ฆานกับด้าน
 ย ว แด ว ฎ ด้านต่อ ด้าน, จึงสรุปว่า ก ค
 กับ ย ฎ เท่ากัน ฆานกัน กันด้วย

๙. ถ้าสอง ด้านของ รูป สี่ เหลี่ยม ฆานกัน, แล้วอีกสองด้าน
 เท่ากันแต่ ไม่ ฆานกัน, จึง สรุปว่ามุม ตรงข้าม รวมกัน เท่ากับ
 สอง มุมฉาก, แดเส้น แขนงมุม ทั้ง คู่ นั้นยาว เท่ากัน

๓๐. ถ้าด้านตรงข้ามของ รูปสี่เหลี่ยม ยาวเท่ากัน,

รูปนี้ เป็นรูปด้านขนาน

๓๑. ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากัน, รูปนั้นก็

เป็นรูปด้านขนาน

๓๒. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน ผ่ากลาง ซึ่ง

กัน

๓๓. ถ้าเส้น ทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ผ่าซึ่งกัน แยกกัน รูปนั้น

ก็เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๓๔. เส้นตรงที่ลากผ่านจุด, ที่เส้นทแยงมุม ของรูปสี่เหลี่ยม

ด้านขนาน ไขว้กัน, และมีที่ สลับปลายที่ด้านตรงข้าม ของรูปนั้น,

เส้นตรงนี้จะ มี ศูนย์ กลาง อยู่ที่จุดนั้น.

๓๕. ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นตรงที่ลากจากมุมตรงข้าม

ให้ตัดได้ มุมฉากกับเส้นทแยงมุม เส้นหนึ่งนั้น, ยาวเท่ากัน.

ตอนที่ ๕

๓๐๘

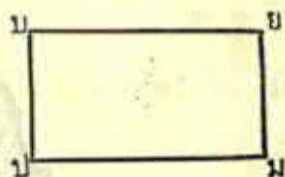
แสดง คำ ใช้

๒๖ สี่เหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน

คือรูป

สี่เหลี่ยมเส้นขนานที่
มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก

(เช่นรูป บ ป ม ย นี้)



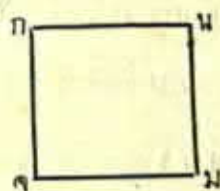
๒๗ สี่เหลี่ยมจัตุรัส

คือรูป

สี่เหลี่ยม ซึ่งมีด้านเท่ากัน

ทั้ง ๔ ด้าน แต่มุมเป็นมุมฉาก

ทั้งสี่มุม (เช่นรูป ก จ ม น นี้)

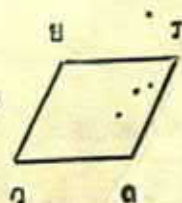


๒๘ รูปขนมเบี่ยงป่วน

เท่ากันทั้งสี่ด้าน แต่ไม่มีมุมเป็น

มุมฉาก (เช่นรูป ย ว ต อ นี้)

เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้าน



คำอธิบาย

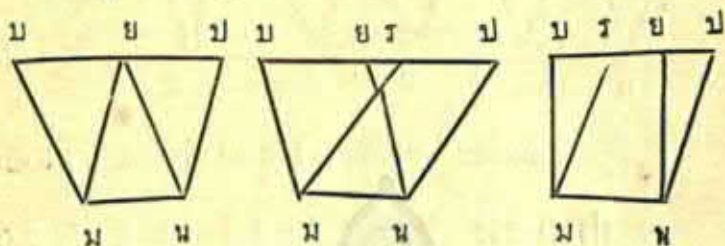
ตั้งแต่ต้น ๆ มาเมื่อพูดว่ารูปสองรูป เท่ากัน สนิท เช่นในบทที่
 ๕, ๖, ๗, ก็หมายความว่า เท่ากันทุกอย่าง, ถ้าเขาจะ
 หนักกัน ก็คงพอดีกัน ไม่เกินไม่ขาดกว่ากัน จึงเรียกว่า เท่ากัน
สนิท.

แต่ใน ตอน ปลาย ของเล่ม นี้ จะกล่าวด้วยรูปสี่เหลี่ยมด้าน
 ขนาน แดงรูปสามเหลี่ยม มีอาณาเขต เท่ากัน ซึ่งไม่จำเป็นจะต้อง
 เป็นรูปอย่างเดียวกัน หรือหนักกันสนิท รูปจะต่างกันก็ได้ แต่มีเนื้อที่
เท่ากันก็จะ เรียกว่าเท่ากัน ฉะนั้น ทั้งคำว่า "สนิท" ออกเสีย,

บทที่ ๓๕

๓๓๓

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่มีฐาน ร่วมกัน แดงคในระหว่าง
เส้นขนานคู่เดียวกัน, ย่อมมีเนื้อที่เท่ากัน



สมมุติ ให้สี่เหลี่ยมด้านขนาน บ ม น ย กับ ร
ม น ป มีฐานร่วมกัน, คือ ม น, แดงคในระหว่าง
เส้นขนาน คู่เดียวกัน คือ บ ป, ม น.

รูป บ ม น ย จะ มีเนื้อที่เท่ากับ รูป
ร ม น ป.

ประการที่ ๑

ถ้าด้าน ที่ ตรง ข้ามกับ ฐาน

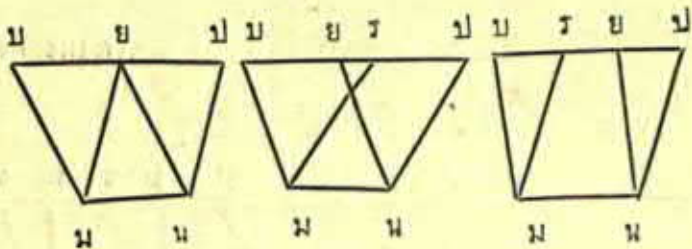
จุดกัน ที่จุด ย

(ซึ่ง รูป ที่ ๓)

แล้ว สี่ เหลี่ยมด้าน ขนานทั้ง คู่ นั้น ต่าง ก็ ไป นต้อง เท่า

ของ Δ ย ม น

(๓.๓๔.)



∴ สี่เหลี่ยม ด้านขนาน ทั้งคู่ นั้น เท่า กันด้วย (จริง๒.)

ประการที่ ๒ แต่ถ้าวัดด้าน บ ย แด ร ป

ที่ตรงข้ามกับ ถาน, ไม่จดกัน (รูป $\left. \begin{matrix} ๒ \\ ๓ \end{matrix} \right\}$)

แล้ว ∴ บ ม น ย เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

∴ บ ย = ม น (๓. ๓๔.)

แด ร ป = ม น โดยเหตุเดียวกัน

∴ บ ย = ร ป (จริง ๓.)

∴ ผลบวก, หรือ ผลลบ, บ ร = ผล

บวก, หรือ ผลลบ, ย ป.

ใน Δ บ ม ร กับ ย น ป

∴ บ ร = ย ป (ปรุฟ)

ย น = บ ม (๓.๓๔.)

แต่ $\sqrt{\text{นอก}}$ ป ย น = $\sqrt{\text{ใน}}$ บ ม (๓.๓๕.)

∴ Δ ทั้งสองนี้ เท่ากันสนิท (๓.๔.)

หัก Δ ย น ป จากรูป บ ม น ป, ได้

กับสามเหลี่ยม บ ม ร จากรูป บ ม น ป

∴ ส่วนที่เหลือ อยู่ ก็เท่ากัน (เรข. ๓)

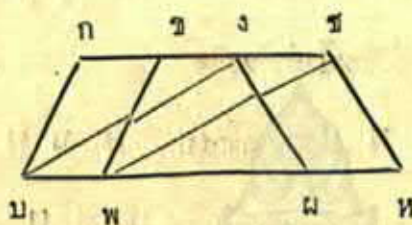
นั่นคือสี่เหลี่ยม ด้านขนาน บ ม น ย กับ

ร ม น ป เท่ากัน

ท. ท. ป.

บทที่ ๓๖

สี่เหลี่ยม ด้านขนานที่อยู่บนฐานเท่ากัน, และ
ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน, มีอาณาเขต เท่ากัน



สมมติให้ ก ข พ บ กับ ง ข ห ค เป็นสี่
เหลี่ยมด้านขนาน, ที่อยู่บนฐานเท่ากัน คือ บ พ กับ ค ห,
และระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ ก ข กับ บ ห
สี่เหลี่ยม ด้านขนาน ทั้งสองนี้ จะเท่ากัน.

สร้าง. ตลากเส้น ง บ กับ ข พ

สรุป, $\therefore$ บ พ = ค ห (สมมุติ)

แต่ ค ห = ง ข (๓.๓๔.)

$\therefore$ บ พ = ง ข (เวียง.)

แต่ก็ขนานกันด้วย

(สมมุติ)

∴ บ ง กับ พ ช, ที่ต่อไปด้วยทั้งสองข้าง, ก็เท่ากัน

แต่ขนานกันเหมือนกัน

(๓.๓๖.)

∴ ง บ พ ช จึงเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

อนึ่ง ∴ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ช พ บ กับ

ง ช พ บ อยู่บนฐานร่วมกัน แลจระหว่งเส้นขนานคู่เดียวกัน

∴ ก ช พ บ = ง ช พ บ (๓.๓๕.)

แต่ ง ช พ บ กับ ง ช ห ฅ ก็เท่ากัน

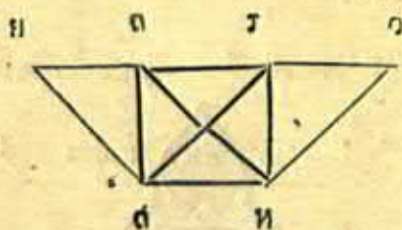
∴ อยู่บนฐานร่วมกัน คือ ง ช แลจระหว่งเส้นขนาน
คู่เดียวกัน คือ ก ช กับ บ ห (๓.๓๕.)

∴ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ช พ บ กับ ง ช ห ฅ
ก็เท่ากัน ∴ (จริง.)

ท. ก. ป,

บทที่ ๓๗

สามเหลี่ยมที่มีด้านร่วมกัน, แดงกในระหว่างเส้นขนาน
คู่เดียวกัน มีเนื้อที่เท่ากัน



สมมติให้ $\triangle$ ด ร ท กับ ด ด ท มีด้านร่วม
กันคือ ด ท, แดงระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกันคือ ร ด
กับ ด ท

$\triangle$ ทั้งสองนี้ จะเท่ากัน

สร้าง, ทั้งแต่จุด ด ลากเส้นตรง ด ย ให้ขนาน
กับ ท ร, แดให้พบกับเส้น ด ร, ที่จุดตรงออกมา,
ที่จุด ย.

ซึ่งแต่ละ h ลากเส้นตรง h v ให้ขนานกับ g h ,
แต่ให้พบกับเส้น g h . ที่ต่อตรงออกมา, ที่จุด g . (๓.๓๓)

สรุป ตามที่สร้างนี้, รูป g h g h กับ g h g h
ก็จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งคู่.

แต่เท่ากัน ด้วย (๓.๓๕)

$\triangle g$ h เป็นครึ่งหนึ่งของ g h g h (๓.๓๔.)

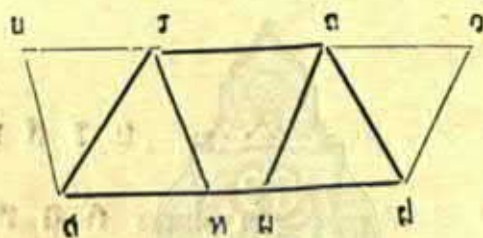
แต่ $\triangle g$ h g h ก็เป็นครึ่งหนึ่งของ g h g h (๓.๓๔.)

$\therefore \triangle g$ h กับ g h g h เท่ากัน (วิธี ๘)

ช. ค. ป.



ตามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากัน, และระหว่างเส้นขนาน
คู่เดียวกัน, มีเนื้อที่เท่ากัน.



สมมุติให้ $\triangle$ ร ท กับ ม ต ฬ, มีด้าน เท่ากันคือ
ร ท กับ ม ฬ, และระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกันคือ ร ต และ ต ฬ

$\triangle$ ร ท จะเท่ากับ ม ต ฬ

สร้าง, แต่จุด ต ดากเส้นตรง ต บ ให้ขนานกับ
ท ร, แล้วให้พบเส้น ต ร ที่ข้อตรงมา, ที่จุด บ. แต่จุด ฬ
ดากเส้นตรง ฬ ว ให้ขนานกับ ม ต, แล้วให้พบเส้น

ว ถ ที่ต่อตรงออกมา, ที่จุด ว (๓.๓๓.)

สรุป ตามที่สร้าง, ย ว ท ๙ กับ ถ ว ๘ ๘ ก็เป็น
สี่เหลี่ยมด้านขนาน ทั้งคู่

แต่เท่ากับ ๖๖ (๓.๓๖.)

Δ ว ๙ ท เป็นครึ่งหนึ่งของ ย ว ท ๙ (๓.๓๔.)

แต่ Δ ถ ๘ ๘ ก็เป็นครึ่งหนึ่งของ ถ ว ๘ ๘ (๓.๓๔.)

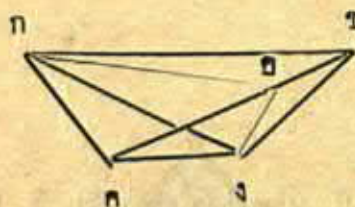
$\therefore \Delta$ ว ๙ ท กับ ถ ๘ ๘ เท่ากัน (จริง๑.)

ท. ป.

—————

บท ที่ ๓๙

สามเหลี่ยม ที่เท่ากัน, ถ้ามีด้านร่วมกัน, และอยู่
บนข้างเดียวกัน, ก็จะกระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน.



สมมุติให้ $\triangle ก ค ง$ กับ $\triangle ข ค ง$ ซึ่งมีฐาน ค ง ร่วมกัน,
แต่อยู่บนข้างเดียวกัน ของ ฐาน นั้น, เท่ากัน

สามเหลี่ยม ทั้งสองนี้ จะกระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน, คือถ้า
ลากเส้น ก ข, ก ข จะขนานกับ ค ง.

สร้าง. แม้ว่า ก ข ไม่ขนานกับ ค ง

ถ้าจะเปนได้ ก็ให้ลากเส้นใหม่ ก อ ให้ขนานกับ ค ง,
แต่ให้พบเส้น ก ข, หรือส่วนของ ก ข, ที่ต่อตรงออกไป.
ที่จุด อ. แล้วลากเส้น อ ง

ปฐพ. $\triangle ก ค ง = \triangle อ ค ง$ (๓.๓๗.)

แต่ $\triangle ก ค ง$ กับ $\triangle ข ค ง$ ก็เท่ากัน (สมมุติ)

$\therefore \triangle อ ค ง$ กับ $\triangle ข ค ง$ ก็เท่ากันด้วย, ส่วนเท่า
กับจำนวนเต็มของ มันเอง, ซึ่งแปลไปไม่ได้

$\therefore ก อ$ ต้องขนานกับ $ค ง$ ไม่ได้อยู่เอง

เราจะปฐพ. ได้ ใน ทำนองเดียวกันว่าไม่มีเส้นอื่นจากจุด $ก$

ที่จะขนานกับ $ค ง$ ได้, นอกจากเส้น $ก ข$

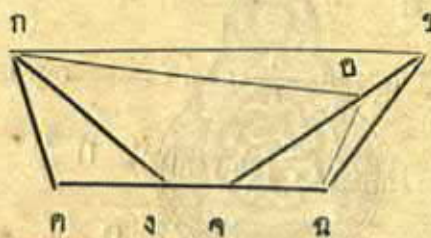
$\therefore ก ข$ ก็ต้องขนานกับ $ค ง$

ข, ค, ป,



บทที่ ๕๐

สามเหลี่ยม ที่เท่ากัน, ถ้ามีด้านเท่ากัน, ด้านต่อ
เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน, แลสามเหลี่ยมอยู่บนข้างเดียวกัน
ของ ด้าน, สามเหลี่ยมเหล่านี้ ถ้าระหว่าง เส้นขนานคู่เดียว
กัน



สมมติให้ $\triangle ก ค ง$ กับ $ข จ ง$,—ซึ่งมีด้าน
เท่ากัน คือ ค ง กับ จ ง, แลด้านเป็นเส้นตรง อันเดียวกัน
คือ ค ง,
สามเหลี่ยม ทั้งสองอยู่บนข้าง เดียวกันของ
ค ง ด้วยนั้น,—เท่ากัน

สามเหลี่ยม ทั้งสอง นี้จะ จด เส้นขนาน คู่เดียวกัน, คือถ้า ด้านเส้น
ก ข, ก ข จะขนานกับ ค ง.

สร้าง แม้ ก ข ไม่ชานกับ ก ฌ ถ้าจะ
 เปนได้, ก็ดากเส้น ก อ ให้ชานกับ ก ฌ, แต่ให้พบเส้น
 ข ๑ หรือส่วนของ ข ๑, ที่ดากตรง ต่อออกไป, ที่จุด
 อ, แล้วดากเส้น อ ฌ.

รูป Δ ก ค ง กับ อ ๑ ฌ เท่ากัน (๑.๓๘.)

แต่ Δ ก ค ง = Δ ข ๑ ฌ (สมมุติ.)

$\therefore \Delta$ อ ๑ ฌ = Δ ข ๑ ฌ, ส่วนเท่ากับ
 จำนวนเต็ม ของมันเอง, ซึ่งเป็นไป ไม่ได้

$\therefore$ ก อ ต้องชานกับ ก ฌ ไม่ได้ด้วยเอง

และจะ รูป ได้ ใน ทำนอง เดียวกันว่าไม่มีเส้นอื่นจากจุด ก
 ที่จะชานกับ ค ง ได้, นอกจากเส้น ก ข

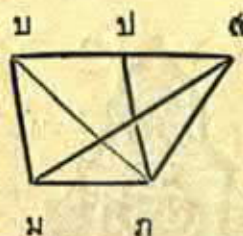
$\therefore$ ก ข ต้องชานกับ ก ฌ

๒. ท. ๗



บทที่ ๔๑

ถ้าสี่เหลี่ยมด้านขนานกับ สามเหลี่ยมอยู่บนฐานร่วมกัน,
 แดงกระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน, สี่เหลี่ยมด้านขนาน
 จะเป็นสองเท่าของสามเหลี่ยม.



สมมุติให้สี่เหลี่ยมด้านขนาน บ ป ก ม

กับสามเหลี่ยม ค ก ม มีฐาน ก ม ร่วมกัน

แดงกระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ บ ค, ก ม

บ ป ก ม จะใหญ่เป็นสองเท่าของ ค ก ม.

สร้าง, ดากระหว่าง บ ก

ปฐ. $\triangle$ บ ภา ม = $\triangle$ ส ภา ม (ค. ๓๗.)

แต่สี่เหลี่ยม ด้านขนาน บ ป ภา ม เป็นสองเท่า

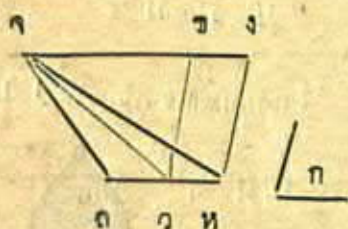
ของ $\triangle$ บ ภา ม (ค. ๓๘.)

$\therefore$ สี่เหลี่ยมด้านขนาน บ ป ภา ม เป็นสองเท่า

ของ $\triangle$ ส ภา ม ด้วย.

ช. ท. ป.

สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้เท่ากับสามเหลี่ยม ที่กำหนด
กำหนดให้, แต่ให้มีมุม ๆ หนึ่งข้างเท่านั้น ที่กำหนดให้



สมมติให้ ก ค ห เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่กำหนดให้

แต่ ก เป็นมุมที่กำหนดให้, จะต้องสร้างรูปสี่เหลี่ยม ด้าน ขนาน,
ให้เท่ากับ ก ค ห, แต่ให้มีมุม ๆ หนึ่งข้างเท่ากับมุม ก

วิธีทำ ตัดกลางเส้น ค ห ที่จุด จ (๓.๓๐.)

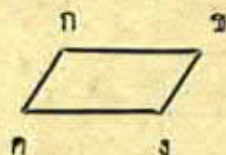
ที่จุด จ, ทำมุม ห จ ข ให้ข้างทำมุม ก (๓.๒๓.)

จากจุด จ, ตากเส้น จ ข ง ให้ขนานกับ ค ห (๓.๓๑.)



รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ข้างที่เขาคมมาบเวียก

เพียงอักษรสองตัว, คือค้วงท้าย
ที่มุมตรงกันข้าม, เช่นในรูปนี้เขาก็
เวียกแต่ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ง,



หรือ ข ค เท่านั้นก็ได้

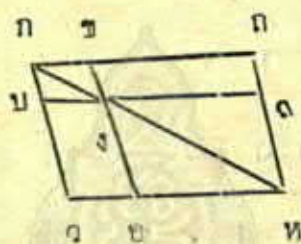
ส่วนขาของรูปใดๆ ที่สำหรับจะทำให้รูปนี้, หรือ

รูปนี้ๆ, เต็มขึ้น, เขาเรียกว่า รูป ถ้าม.

บทที่ ๔๓

๒๓๘

รูปแฉกของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เส้น แทของ มุมของ
รูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน ไต่ๆ, ย่อมเท่ากัน

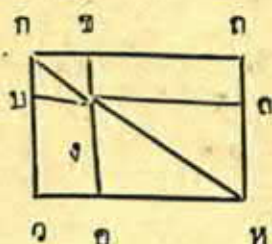


สมมุติ ให้ ก ข ค ง เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน, แด
ให้ ง กับ ง ค เป็นรูปแฉกของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
บ ข กับ ค ค ที่เส้นแทยมุม ก ค

รูปแฉก ง กับ ง ค นี้จะเท่ากัน

เพราะ $\therefore$ ก ง เป็นเส้นแทยมุม

คำขวัญกลไก



ของ □ ด้านขนาน บ ข (สมมติ)

$$\therefore \triangle บ ก ง = \triangle ข ก ง \quad (๓.๓๔.)$$

แต่โดยเหตุอันเดียวกัน $\triangle ข ง ห$ ก็เท่ากับ $\triangle ต ง ห$

$$\therefore \triangle บ ก ง \text{ รวมกับ } \triangle ข ง ห$$

$$= \triangle ข ก ง \text{ รวมกับ } \triangle ต ง ห$$

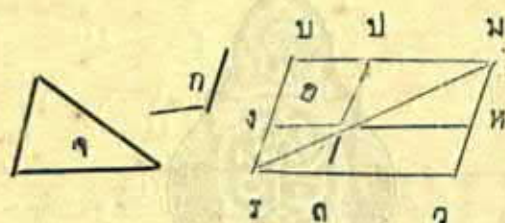
$$\text{แต่ } \triangle ข ก ห \text{ ทั้งหมด} = \triangle ต ก ห$$

$$\text{ทั้งหมด} \quad (๓.๓๕.)$$

$$\therefore \text{ที่เหนืออยู่, คือรูปแฉก ก ง} = \text{รูปแฉก ง ต.}$$

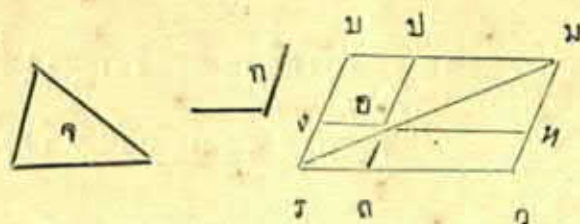
ข. ต. ป.

ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนเส้น
ให้, ให้เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้,
และให้มีมุม ๆ หนึ่งมุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้.



สมมุติให้ อ ก เป็นเส้นตรง, ก เป็น
มุม, จ เป็นรูปสามเหลี่ยม, ที่กำหนดให้

จะต้องสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนเส้น อ ก ให้เท่า
กับสามเหลี่ยม จ, และให้มีมุม ๆ หนึ่งมุมเท่ากับมุม ก.
วิธีทำ บนเส้นต่อของเส้น อ ก,



สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน อ ง บ ป ให้ใหญ่เท่า
สามเหลี่ยม จ, แต่ให้มีมุม ง อ ป เท่ามุม
ก. (๓.๒๒. กับ ๓.๔๒.)

จากจุด ค,ลากเส้นตรง ค ว ให้ขนานกับ อ ง
หรือ บ ป, แต่ให้พบกับเส้น บ ง, ที่ตัดตรง
ชอกมา, ที่จุด ว (๓.๓๓.)

ลากเส้น ว อ

ว ค || บ ป

∴ ค ว บ รวมกับ ∴ ว บ ป

∴ ต้องมุมฉาก

(๓.๒๔.)

∴ < อ ร บ รวมกับมม ร บ ป

เด็กกว่าสองมุมฉาก

∴ บ ป กับ ร อ, ถ้าต่อตรงออกไป

ทางจุด ป แด อ, ก็จะเป็นกัน (วิธี ๒)

ต่อตรง ไป ให้พบกัน ที่จุด ม

ฉากเส้น ม ว ให้ชนา กับ ป ธิ, หรือ บ ร (๑๓๓)

แล้วต่อเส้น ร ธิ กับ ง อ ตรงออกมาพบ ม ว

ที่จุด ว แด ธิ.

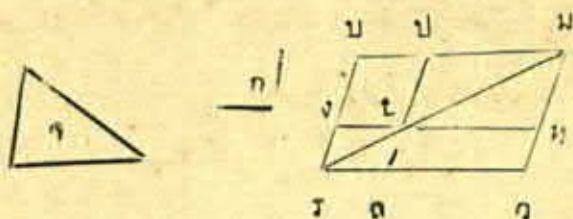
อ ว จะเป็นสี่เหลี่ยม ด้านขนานที่ต้องการ

รูปฟ. รูป บ ม ว ร เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน (ดูวิธี ๑)

แด อ ว กับ อ บ เป็นรูปแฉกของ สี่เหลี่ยม ด้านขนานที่

เส้นทแยงมุม ร ม

∴ อ ว = อ บ (๑. ๔๓.)



แต่ $\triangle ง = \text{อ ป}$ (สรว้าง)

$\therefore \text{อ อ} = \triangle ง$ ด้วย

$\sqrt{\text{ง อ ป}} = \sqrt{\text{อ อ ห}}$ (๑.๓๕.)

$= \sqrt{\text{ก}}$ (สรว้าง)

$\therefore \sqrt{\text{อ อ ห}} = \sqrt{\text{อ}}$

$\therefore$ ได้สร้างสี่เหลี่ยมคางหมู อ ก ให้อยู่บนเส้น

อ ค. ให้ โตเท่า $\triangle ง$, แต่ให้ มีมุม ๆ หนึ่งทางเท่า

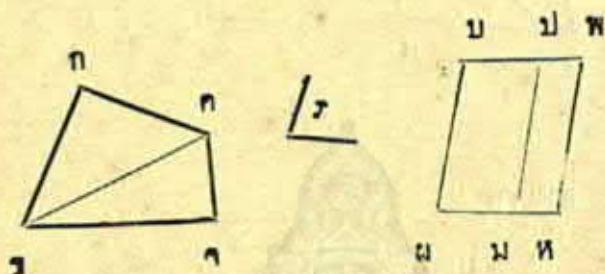
$\therefore \sqrt{\text{ก}}$ ด้วย

ท. ก. ท.

บทที่ ๔๕

๒๒๕

ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมที่
กำหนดให้, แต่ให้มีมุม ๑ หนึ่งทางเท่ากับมุมที่กำหนดให้



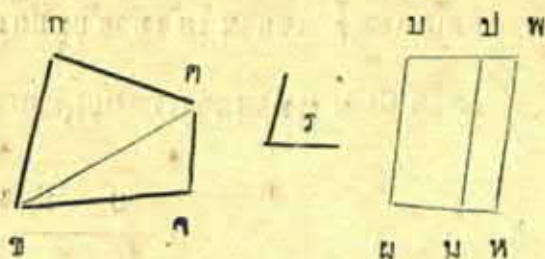
สมมุติให้ ก ข จ ข เป็นรูปสี่เหลี่ยม, แต่ จ เป็น
มุม, ที่กำหนดให้

จะต้องสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้ โตกว่า ก ข จ ข,
แต่ให้มีมุม ๑ หนึ่งทางเท่ากับ จ

สมมุติ ให้รูปที่กำหนด ให้เป็น รูปสี่เหลี่ยม.

วิธีทำ ตากเส้น ข ค, สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้าน

ขนาน บ ม ให้เท่ากับสามเหลี่ยม ก ข ค, แต่ให้มีมุม



บ ผ ม ทางเท่ามุม ข (๓.๔๒)

บนเส้น ป ม, สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ป ห

ให้เท่าด้านเหลี่ยม ข ข ค, แต่ให้มุม ป ม ห

ทางเท่ามุม ข (๓.๔๔)

รูป บ ห สะท้อนรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนานที่ต้องการ

ปรูฟ $\therefore \sphericalangle$ บ ผ ม กับ $\sphericalangle$ ป ม ห ต่าง

ก็เท่ากัน $\sphericalangle$ ข

$\therefore \sphericalangle$ บ ผ ม = $\sphericalangle$ ป ม ห.

นอกจาก $\sphericalangle$ ป ม ผ เข้าทั้งสองข้าง

∴ √ บ ผ ม รวมกับ √ ป น ผ
= √ ป ม ท รวมกับ √ ป น ผ.

แต่ √ บ ผ ม กับ √ ป น ผ รวมกัน
= √ ฉากสองมุม (๓.๒๘.)

∴ √ ป น ผ กับ √ ป ม ท รวมกัน
= √ ฉากสองมุม

∴ ผ ม กับ ม ท เป็นเส้นตรงขึ้น
เดียวกัน (๓.๔.)

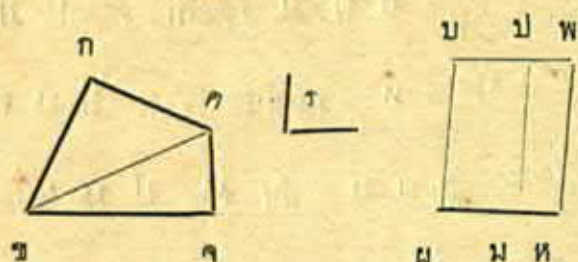
หนึ่ง ∴ บ ป || ผ ท (สร้าง)

∴ √ บ ป น = √ ป น ท. (๓.๒๘.)

บวก √ พ ป น เข้าทั้งสองข้าง

∴ √ บ ป น รวมกับ √ พ ป น

การวางยุคกลิต



= ✓ ป ม ห รวมกับ ✓ พ ป ม

แต่ ✓ ป ม ห รวมกับ ✓ พ ป ม

= ✓ ฉากสองมุม (๓.๒๘.)

∴ ✓ บ ป ม รวมกับ ✓ พ ป ม

= ✓ ฉากสองมุม

∴ บ ป กับ ป พ ที่แปล เส้น ตรง

ขึ้น เดียว กัน (๓.๒๙.)

กับ . . . บ ผ กับ พ ห ต่างก็

ป ป ม (สร้าง)

∴ บ ผ || พ ท (๓.๓๐.)

∴ ผ ท || บ พ (สร้าง)

∴ บ ท เป็นสี่เหลี่ยม ด้านขนาน

แต่ ∴ รูป บ ม = Δ ก ข ค (สร้าง)

รูป ป ท = Δ จ ข ค (สร้าง)

∴ รูป บ ท ทั้งหมด = รูป ก ก จ ข ทั้งหมด

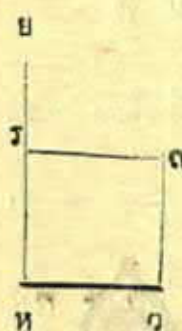
แต่ $\angle$ ป ม ท = $\angle$ ร ด้วย (สร้าง)

โดยวิธีนี้ อาจสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้ โต เท่ารูป
เหลี่ยม ไม่ว่าที่เหลี่ยม ๆ ได้.

ข. ค. ท.

บทที่ ๔๖

ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยม จักรวาล บนเส้นตรงที่กำหนดให้.



สมมุติให้ ท ว เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้, จะต้อง
สร้างรูปสี่เหลี่ยม จักรวาล บนเส้น ท ว นี้.

วิธีทำ. ตั้งแต่จุด ท, ตากเส้น ท ย ให้ตั้งได้มุมฉาก
กับเส้น ท ว (ค. ๓๓.)

จากจุด ท ว ให้ยาวเท่า ท ว (ค. ๓.)

จากเส้น ร ก ให้ขนานกับเส้น ท ว. (ค. ๓๓.)

จากจุด ว, ตากเส้น ว ก ให้ขนานกับ ท ร (ค. ๓๓.)

แต่ให้พบกันเส้น v l ที่จุด l .

v l v h จะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต้องประสงค์.

ปรพ. v l v h เป็น $\square$ ด้านขนาน (สร้าง)

$\therefore v$ $l = h$ v , แต่ h $v = l$ v (๓.๓๔.)

แต่ h $v = h$ v (สร้าง)

$\therefore h$ v , v l , l v , v h ทั้ง ๔ ด้านนี้เท่ากันหมด.

$\therefore v$ l v h - นี้เป็นรูปด้านเท่า

อนึ่ง $\surd v$ h v บวกกับ $\surd h$ v $l =$ สองมุมฉาก (๓.๒๙.)

แต่ $\surd v$ h v เป็นมุมฉาก (สร้าง)

$\therefore \surd h$ v l ก็เป็นมุมฉากด้วย.

แถมุมที่ตรงข้ามของรูป $\square$ ด้านขนานย่อมเท่ากัน (๓.๓๕.)

ทำรายบุคคล



∴ V รต อ, แต่ V ต อ ท ก็เป็นมุมฉาก เหมือนกัน

∴ รูป ร ต อ ท จึงเป็นรูปสี่มุม เป็นมุมฉากทั้งสี่

∴ จึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้ได้ ดังข้าง

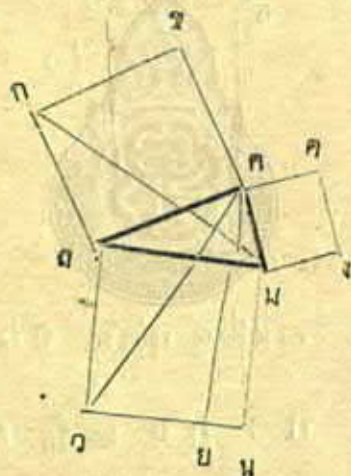
บนเส้น ท อ ที่กำหนดให้ด้วย.

จ. ก. ท.

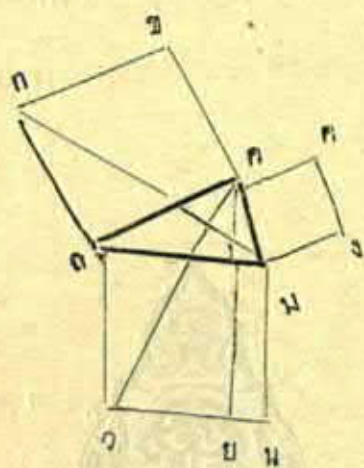
บทที่ ๔๗

๒๐๓

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก, สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ด้านคือ
ด้านที่ตรงมุมฉากข้าม, ใหญ่เท่ากับสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้าง
บนด้านอีกสองด้าน, รวมกัน



สมมติให้ ก ค ม เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้,
มีมุม ม ค ก เป็นมุมฉาก สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน ก ค ม
จะใหญ่เท่ากับสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน ก ค กับ ค ม รวมกัน.



สร้าง. สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก ฅ น ม บนเส้น ก ม.

สี่เหลี่ยมจัตุรัส ก ข ค ฅ บนเส้น ค ฅ, แล้วสี่เหลี่ยม

จัตุรัส ค ค ง ม บนเส้น ค ม (๑. ๔๖.)

๖. แต่ ก, ฉากเส้น ค ย ให้ขนานกับ ก ฅ หรือ น ฅ. แล้ว

ให้พบเส้น ก น ที่จุด ย. (๑. ๔๗.)

ฉากเส้น ก ม แด ค ว.

ปฏพ, $\therefore \checkmark$ ข ค ถ กับ $\checkmark$ ม ค ถ เป็นมุมฉากทั้งคู่

$\therefore$ เส้น ข ค กับ ค ม จึงต่อดตรงเส้นเดียวกัน (๓.๓๔.)

กับ $\checkmark$ ก ถ ค แด $\checkmark$ ว ถ ม ก็เท่ากัน เพราะ

เป็นมุมฉากทั้งคู่

บวก $\checkmark$ ค ถ ม เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \checkmark$ ก ถ ม ทั้งหมด = ค ถ ว ทั้งหมด

ใน $\triangle$ ก ถ ม กับ ค ถ ว

$\therefore$ ถ ค = ถ ก

ถ ว = ถ ม

แด $\checkmark$ ค ถ ว == $\checkmark$ ก ถ ม

$\therefore \triangle$ ทั้งสองเท่ากันสนิท

(๓.๔.)

ก็จะปรุฟ ได้ว่า □ ด้านขวา ม ย = □ จัตุรัส ค ง

∴ □ จัตุรัส ค น ทั้งหมดจึง = □ จัตุรัส ค ค

กับ □ จัตุรัส ค ง รวมกัน.

คือ □ จัตุรัสบนด้าน ค ม เท่ากับ □ จัตุรัสบน

ด้าน ค ค แดบนด้าน ค ม รวมกัน.

ข. ก. ป.

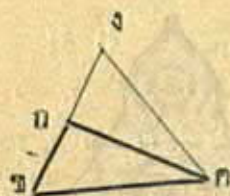
ผู้เรียบเรียงควรสังเกตไว้ว่าคำว่า

“สร้าง”

นั้น ใช้แต่ในบท ข. ก. ป. ถ้าเป็นบท ข. ก. ท.

ต้องใช้คำว่า “วิธีทำ”

ถ้าสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ
สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนอีกสองด้านรวมกัน, มุมในระหว่างด้าน
สองด้านนี้จะเป็นมุมฉาก.



สมมติให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม, ให้
สี่เหลี่ยมจัตุรัสบน ข ค เท่ากับสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน ก ข
กับบน ก ค รวมกัน

มุม ข ก ค จะเป็นมุมฉาก

∴ สร้าง จากจุด ก ตากเส้น ก ง ให้ตั้งได้มุม
ฉากกับเส้น ก ค (ค.ตค.)

แต่ให้ ก ง เท่ากับ ก ข

(๓.๓.)

จากเส้น ง ค.

สรุป. $\therefore$ ก ง = ก ข (สร้าง)

$\therefore$ $\square$ จตุ. บน ก ง = $\square$ จตุ. บน ก ข.

บวก $\square$ จตุ. บน ก ค เข้าทั้งสองฝ่าย

$\therefore$ $\square$ จตุ. บน ก ง กับ ก ค = $\square$ จตุ. บน

ก ข กับ ก ค.

แต่ ง ก ค เป็น $\diagup$ ฉาก (สร้าง)

$\therefore$ $\square$ จตุ. บน ง ค = $\square$ จตุ. บน ก ง

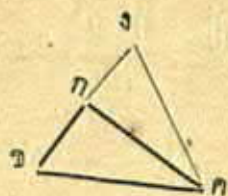
แต่ ก ค รวมกัน

(๓.๔๗.)

แต่ $\square$ จตุ. บน ข ค = $\square$ จตุ. บน ก ข

กับ ก ค รวมกัน

(สมมุติ)



$$\therefore \square \text{ จด. ขน } กค = \square \text{ จด. ขน } ขค.$$

$$\therefore กค = ขค.$$

ใน $\triangle$ กกค กับ กขค

$$\therefore กก = กข$$

(สร้าง)

$$กค = ขค$$

(สรุป)

กค เป็นด้านร่วม

$$\therefore \sphericalangle กกค = \sphericalangle ขกค \quad (ด.ด.)$$

แต่ $\sphericalangle กกค$ เป็นมุมฉาก (สร้าง)

$\therefore \sphericalangle ขกค$ ก็เป็นมุมฉากด้วย

จ. ท. ป.

บทนี้สำคัญตรง สร้าง, ผู้แวกเวียนเมื่อกะผิบบ่อยๆ.

คือไม่ลากเส้น ก ง ให้ตั้งได้มุมฉากกับ ก ค,
แต่ไปต่อเส้น ข ก ถึงจุด ง เส้น, ถ้าทำตั้งได้ไม่
ได้มุม ง ก ค เป็นมุมฉาก, เลยก็, ขงพไม่ ได้
ว่ามุม ข ก ค เป็นมุมฉากด้วย, ต้องจำไว้ให้ถึ.

บทนี้เป็นบทกลับของบทที่ ๔๗ เช่นเดียวกับบท ๔๘
เป็นบทกลับของบท ๔๗, หรือบท ๔๗ เป็นบทกลับ
ของบท ๔๘ และ ๔๗

โจทยฝึกหัดแสดงตัวอย่าง วิธีทำต่าง ๆ

คำ แนะนำ

ด้วยวิธีที่จะทำโจทยต่าง ๆ ของตำรายีออเมตรี

ผู้เรียนควรทราบไว้ ให้แม่นยำว่า ตำราอย่างที่เราเรียน มาแล้ว

เรายังมีต่อไปอีกมาก เราเรียกว่า ยี่ออเมตรี แต่เป็น

สาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์อย่างเดียวกับ เลขหรือพีชคณิต แต่บทที่ทำ

มาแล้วทั้ง ๔๘ บทในเล่มต้นนี้ แล้วยังจะมีต่อไปอีกจนจบสิบสามเล่ม

เป็นบทที่ท่านอาจารย์ ยุคลิตกิตติเรียบ เรียงขึ้นไว้ เพื่อให้เป็นตำรา

สำหรับ เรียนวิชายี่ออเมตรีนี้ เมื่อท่านอาจารย์ยุคลิต กิตติเรียบแล้ว

แต่ปีก่อน คฤศต์ศักราช ๑๒๓๓ ปี อายุของท่านได้ ๖๐ ปีพอดี

นับแต่ที่ท่านถึงแก่กรรมจนถึงบัดนี้ ได้ ๒๒๕ ปี คนอื่น ๆ ผู้ได้

ยี่ออเมตรีของ ท่าน เห็น ว่ามี ประโยชน์ มาก จึงได้ นำมาพิมพ์

ขึ้น แล้วยก หลัง ก็ ได้ แปล ออกเป็นภาษาต่าง ๆ ใช้เป็น

ตำราเรียนของทุก ๆ ชาติ ในโลก ที่ได้นี้มีความรู้เจริญแล้ว แดพา

กัน ให้จำตำรา^{นี้} ตามนามของท่อนว่า ยุคลิทธิ เพื่อ ให้แปลเกียรติยศ

แก่ท่านเจ้า ของ ที่พิมพ์ไว้กับอยู่นั้น มีแต่เล่ม ๓, ๔, ๕, ๖,

๗, ๘ เล่ม ๗, ๘, ๙, ๑๐ ๑๑ และ ๑๓ ไม่สู้มีประโยชน์นัก

เพราะว่าด้วยวิชาเลขต่าง ๆ ซึ่งเป็นของง่าย แต่เรามีตำราเลขเหล่านี้

ไว้อยู่พอกับความ ต้องการแล้ว เราจึงคัดลอกเสียไม่ นานาพิมพ์ให้

เมื่อได้ทราบแล้วว่า ตำรายุคลิทธิ คือยี่สิบเมตรี แต่แปล

ยี่สิบเมตรี ที่ท่านอาจารย์ ยุคลิทธิต่าง คำนวณ ไป จึงจะ ผิดหลัก

วิธีทำโจทย์ต่าง ๆ ของยี่สิบเมตรีทั่วไป โดยใช้ บทยุคลิทธิที่เรีกน

มาแต่ในเล่ม ๑ นี้เป็นหลัก ให้ชำนานาญไว้ ตามความ

สังเกตรของ ผู้ที่ได้ ศึกษามาแล้วก็ เห็นว่า โจทย์ ใน ตำรายี่สิบเมตรี แท้

เป็นของยากสำหรับ ผู้ แรกเรียน มากกว่า โจทย์ ของสาขาอื่น ๆ แห่ง

คณิตวิทยา. ^{๕๕} ทันทัน เหมือนจะ เป็นเพราะ

๑. บทที่เขียนมาด้วยในคำรายบุคคลนั้น จะแปลแต่เข้าใจ

ทั้งหมดไม่ได้ ต้องจำเนื้ออกความได้ทั้งหมดด้วย (ไม่ใช่ท่องปากเปล่า)

จึงจะนำมาใช้เป็นเครื่องมือสำหรับคิดโจทย์นอก ๆ ได้ ถ้าแปลแต่เพียง

เข้าใจแต่จำไม่ได้ ก็นึกไม่ออกว่าจะใช้อันไหน เลยคิดโจทย์ไม่ได้

๒. ชนิดของโจทย์ในตำรานั้น ไม่มีที่ยุติ จะแบ่งออกเป็นพวก ๆ

ด้วยบัญญัติวิธีทำ ว่าพวกนั้นต้องทำทางนี้ พวกนั้นทำทางนั้น

เหมือนอย่างโจทย์เลข หรือโจทย์พีชคณิตไม่ได้

๓. ถ้าแบบบทของท่านอาจารย์บุคคลนั้นดีจริง **พิเศษจริง**

แต่ก็ห้ามออกหรือใช้ให้ผู้เรียน แลเห็นหนทางสำหรับคิดหาวิธีทำ หรือวิธี

“ปฎิพั” ไม่ ๆ ๆ ท่านก็ให้วิธีทำแลวิธีปฎิพัล้าไว้หมด — ความ

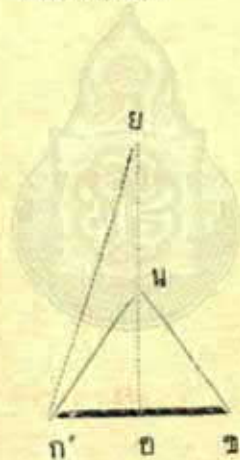
คิดหาวิธีเหล่านี้ของท่านเอง เป็นความลับ อยู่ในใจท่าน

ถ้าบันทึกของท่านอาจารย์ยุคตินั้น ก็ตั้งกันตั้งแต่ — ความ
สมมุติให้ เปนที่ ทราบ แน่ว่าเป็นอย่างนั้น ๆ — แล้ว ก็ มีวิธีทำ
แล้วโดย ปรุฟ เปนชั้น ๆ ก็ทราบความจริงที่ ประสงค์จะหาหรือ
จะ ปรุฟ ใน เบื้องต้นได้ เพราะฉะนั้นจึงจัดว่า “ เริ่มต้นตั้งแต่สิ่งที่
ทราบแล้ว ทำขึ้นไปสู่ ความจริงใหม่ ที่แต่ ก่อนยังไม่ทราบนี่ ”

แต่สิ่งที่นี้ ไม่ใช่หนทางสำหรับค้นหาวิธีทำ แล้ววิธีปรุฟ จึงจะขอ
แนะนำผู้เรียนให้ ทำดังต่อไปนี้ ในการที่จะ คิดแก้ โจทย์ต่าง ๆ.

ให้ตั้งตัว สมมุติประการหนึ่งว่าเราทราบ สิ่งที่เราต้องการแน่ แล้ว ๆ
คิดกลับบ่อยหลัง ว่าถ้ามันเป็นอย่างนั้น อื่น ๆ มันจะเป็นอย่างไรตาม
ความจริงในบทต่าง ๆ ของยุคตินที่เราได้ เรียนมาแล้ว การที่เรา
คิดกลับบ่อยหลังนี้ ไม่มีอะไร ถ้าสำเร็จ, ก็คือวิธีที่เราจะต้องทำต้อง
ปรุฟนั้นเอง แต่ก็นั่นแหละ จะ ต้องหาได้ด้วยความสามารถ แล ความจำ
บทยุคตินได้ ขึ้นใจเปนธรรมดา ถ้าไม่เช่นนั้น ก็คิดไม่ใคร่ออก จะทำ
ตัวอย่างไว้ ให้ดู เปนที่สัง เกต ในข้อต่อไปนี้.

ตัวอย่างที่ ๑ ทรงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว. ตั้ง
ที่กำกับให้ทราบ ถัดจาก, บนเส้นที่ เป็น ผลบวกของ
ด้านทั้งด้านหนึ่ง, ถัดเส้น ตั้งไว้ มุมฉาก ถัดจาก จากยอด
ของรูปนี้ รวมกัน อีกเส้นหนึ่ง



สมมติ ให้ ก ข เป็นด้าน, แต่ ก เป็นเส้นที่ยาวเท่ากับ
ด้าน ก ข ด้านหนึ่ง กับ เส้น ตั้งไว้ มุมฉากกับด้าน จาก ยอด ข ของ รูป
สามเหลี่ยมหน้าจั่วรวมกัน

จะต้องสร้าง รูปสามเหลี่ยม หน้าจั่วนี้

คิดทดลองกลับปลายมาหาต้น เพื่อจะหาวิธีทำ โจทย์อันนี้

เราต้องสมมุติ ใน โจทย์ น ก ข เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว, ที่ต้อง
ประ สงค์, ที่เราได้สร้างขึ้นแล้ว

จาก น ถากเส้น น อ ให้ตั้งได้มุมฉากกับ ก ข

$\therefore$ อ เป็นจุดกลางของเส้น ก ข. (๑.๕๖.)

ถ้าเราต่อเส้น อ น ให้ยาวตรงไปถึง ย, แลทำให้

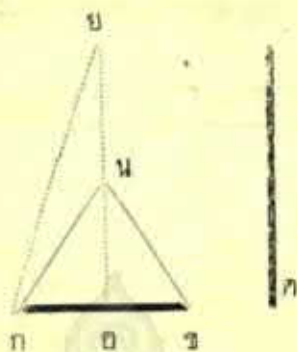
อ ย = ค เราก็เห็นได้ว่า น ย = น ก (ความสมมุติ)

แต่ถ้าถากเส้น ย ก. $\checkmark$ น ก ย

ก็ตั้งเท่ากับ $\checkmark$ น ย ก (๑.๕.)

เส้น ย อ นี้เราอาจถาก ได้ กษ. ที่ จะทราบไว้

จุด น อยู่ที่ใด.



∴ ที่เราจะหาจุด น ก็เป็นอันสำเร็จ ดังจะได้

ทำให้ดูตามวิธี ยุคลีต ใน ค้อยไปนี้

วิธีปักใจทแยงนี้จริง ๆ ตัด ก ข ออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กันที่จุด

ค (๓. ๓๐.) จากจุด ค ตากเส้น ค ป ให้ตั้งได้มุมฉากกับ

ก ข, แล้วให้ ค ป เท่ากับ ค (๓. ๓๓. กับ ๓๐.)

ตากลั่น ค ป, ทำมุม ค ก น ให้เท่ากับมุม

ก ป ค

(๓. ๒๓.)

แต่ให้ น อยู่ในเส้น ย อ, ลากเส้น น ข.

น ก ข จะเปน Δ หน้าจั่วที่ค้องประตงค์

ปรพ. น ก = น ข (๓.๔.)

$\therefore$ น ก ข เปน Δ หน้าจั่ว.

อนึ่ง $\sphericalangle$ น ก ย = $\sphericalangle$ น ย ก (ส่วข้าง)

$\therefore$ น ก = น ย

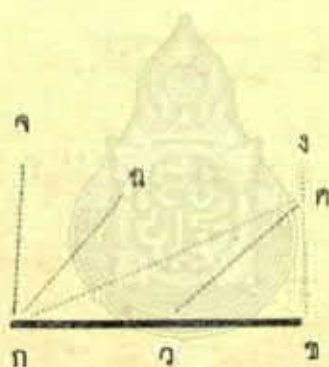
บวก น อ เข้าทั้งสองข้าง.

$\therefore$ น ก กับ น อ = น ย กับ น อ = ย อ

คือ น ก กับ น อ = ค. ตามที่ประตงค์ ในโจทย์.

๗. ๓. ๗.

ตัวอย่าง ที่ ๒. ได้แบ่งเส้นตรงออกเป็นส่วนสองท่อน
ให้ สี่เหลี่ยมจัตุรัส บนท่อนหนึ่ง เป็น สี่เหลี่ยมเท่าของ สี่เหลี่ยม
จัตุรัส บนอีกท่อนหนึ่ง.



สมมติให้ ก ข เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้, จะต้อง
แบ่งเส้น ก ข นี้ ออกเป็นส่วนสองท่อน, ให้ สี่เหลี่ยมจัตุรัส บน ท่อน
หนึ่ง เป็นสี่เหลี่ยมเท่าของ สี่เหลี่ยม จัตุรัส บนอีก ท่อนหนึ่ง

คิดทดสอบ กลับ ปลายมหาตัน

สมมติ ว่า เราได้ แบ่ง

โจทย์ ผักกาดแก้วอย่างวิธีทำ

๒๕๓

เดิน ก ข ตามต้องการที่จุด ว แล้ว, แด $\square$ จัตุรัส
บนเส้น ก ว เป็นสองเท่าของ $\square$ จัตุรัสบนเส้น ว ข.

เราทราบ อยู่ว่าถ้า รูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว มีมุม ยอด เป็นมุมฉาก,
 $\square$ จัตุรัสที่ถาก ก็ เป็นสอง เท่าของ $\square$ จัตุรัส บนด้านตั้งด้าน
ใด ด้าน หนึ่ง ทั้ง สองด้าน (๓. ๔๗.)

$\therefore$ ใน ที่นี้ ทำให้ เราเห็น ทนทาง ได้ว่าเราต้อง ถาก เส้น
ข ค ให้ ตั้ง ได้มุมฉากกับ ก ข, แดให้ยาวเท่า ว ข,
แล้วถากเส้น ว ค

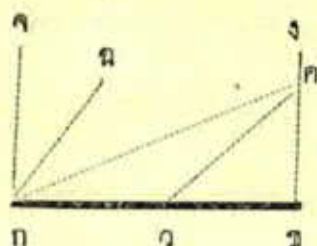
$\square$ จัตุรัส บนเส้น ว ค ก็เป็นสองเท่าของ $\square$ จัตุรัส
บนเส้น ว ข (๓. ๔๗.)

$\therefore$ ว ค ต้องเท่ากับ ว ก ด้วย (สมมุติ)

เมื่อเราถากเส้น ก ค, เราก็ได้เห็นว่

$$\surd \text{ว ค ก} = \surd \text{ว ก ค} \quad (๓. ๕.)$$

ทำรายบุคคล



$\therefore \sqrt{\text{นอก กจข}}$ เป็นสองเท่าของ $\sqrt{\text{ใน คกจ}}$ (๑.๓๒)
 แต่ $\sqrt{\text{คจข}} = \text{ครึ่ง } \sqrt{\text{ฉาก}}$ (๑.๓๓)

$\therefore \sqrt{\text{คกจ}} = \text{เดียว } \sqrt{\text{ฉาก}}$

นี่ก็แปล อัน ชั้หนทาง ให้เราแก้ โจทย์นี้ ได้แล้ว.

วิธีทำจริง ๆ ฉากเส้น ข จ ให้ตั้งได้มุมฉากกับ ก ข, แดฉากเส้น ก จ ให้ตั้งได้มุมฉากกับ ก ข (๑.๓๓) ผ่านมุม จ ก ข ด้วยเส้น ก ฉ, แดผ่านมุม ฉ ก ข ด้วยเส้น ก ค (๑.๔) ให้จุด ค อยู่ในเส้น จ ข, ที่จุด ค สร้างมุม ก ค จ ให้ทางเท่ากับมุม จ ก ค (๑.๒๓) ให้จุด จ อยู่ในเส้น ก ข.

จุด จ จะแบ่งเส้น ก ข ออก ตามต้องการ.

สรุป ดังที่ $\sqrt{\text{คกจ}} = \sqrt{\text{จคก}}$ (สร้าง)

$\therefore \text{กจ} = \text{คจ.}$ (๑.๖.)

$$\therefore \sqrt{ค ก ข} = \sqrt{ค ก} \sqrt{ข} \text{ มวก } \sqrt{ค ก} \text{ (๓.๓๒)}$$

$$\text{แฉ } \sqrt{ค ก ข} \text{ เป็นเสี้ยว } \sqrt{ฉาก} \text{ (สร้าง.)}$$

$$\therefore \sqrt{ค ก ข} = \text{ครึ่ง } \sqrt{ฉาก}$$

$$\sqrt{ค ข ก} \text{ เป็น } \sqrt{ฉาก} \text{ (สร้าง)}$$

$$\therefore \sqrt{ข ค ก} \text{ เป็นครึ่ง } \sqrt{ฉาก} \text{ คำน. (๓.๓๓.)}$$

$$\therefore ข ค = ข ก \text{ (๓.๖.)}$$

$$\therefore \square \text{ จตุรัสบนเส้น } ค ก \text{ เป็นสองเท่าของ}$$

$$\square \text{ จตุรัสบนเส้น } ก ข. \text{ (๓.๕๗.)}$$

$$\therefore \square \text{ จตุรัสบนเส้น } ค ก \text{ เป็นสองเท่าของ}$$

$$\square \text{ จตุรัสบนเส้น } ก ข. \text{ (๓.๕๗.)}$$

$$\therefore \square \text{ จตุรัสบนเส้น } ก ก \text{ เป็นสองเท่าของ}$$

$$\square \text{ จตุรัสบนเส้น } ก ข.$$

(ด้วย สามเหลี่ยมที่มี ส่วนเท่า)

(ให้ ทราบ บทที่ ๔, ๘, กับ ๒๖ ให้ คง เค็ดว)

๑ ถ้า เส้นตรง คง เค็ดว ของ รูปสามเหลี่ยม คัด ภาพ ของ
รูปนั้น ออก เป็น สองท่อนเท่า ๆ กัน รูปนั้นเป็นรูปหน้าจั่ว

๒ ถ้าเส้นผ่านมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมคอดลงมาผ่านด้าน
ด้วย, รูปนั้น เป็น รูปหน้าจั่ว

(ให้ คัดเส้นผ่านมุมยอดลงมา, แล้วทำคล้าย ๆ บทที่ ๓๖ ก็จะได้
สำเร็จได้)

๓ ถ้าเส้นผ่านมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม คัดตรงได้มุม
ฉากกับด้านด้วย, รูปนั้น เป็นรูปหน้าจั่ว,

๔ จากปลายด้านทั้งสองข้างของรูปสามเหลี่ยม, ถ้าลาก
เส้นตรงภายในรูปนั้นให้ จดกัน เป็นมุม, แล้วให้ มุมระหว่างด้าน

โทษ ผักหักแลดว้อย่างวิจิตร

๒๕๕

ตั้งกับเส้นที่ลากนี้ทางเท่ากัน ทั้งสองข้าง, แม้ เส้นที่ลากทั้ง

สองข้างเท่ากัน, รูปนี้ ก็เป็น รูปหน้าจั่ว

๕ ในรูปสามเหลี่ยม, ถ้าเส้น ตรงที่ลากจากปลายด้าน

ทั้งสองข้างให้ ตั้ง ได้มุมฉากกับด้านตั้งที่ตรงข้าม ยาวเท่ากันทั้ง

สองเส้น, รูปนี้ ก็เป็น รูปหน้าจั่ว

๖ รูป สามเหลี่ยม ก ข ค กับ จ ฅ ค ที่รวม

ถานกันคือ ข ค แค้อยู่คนละข้างของถาน, มีด้าน ก ข เท่ากับ

ฅ จ แดด้าน ก ค เท่ากับ ค จ ให้ปรูฟว่าถักจากเส้น

ก จ เส้นนี้จะตั้งได้มุมฉากกับ ข ค.

๗ ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, ถักจากเส้น ตรงจากปลาย

ถาน ทั้งสองข้างให้ตั้งได้ มุมฉากกับด้านที่ตรงข้าม แล้วถาก

เส้นตรงตั้งแค่มุมยอดถักที่เส้นทั้งสองไขว้กัน : เส้นที่ถาก

นี้จะผ่านมุมยอดนั้น

๘ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม เส้นตรง ก ค ผ่านมุม
ยอด ข ก ค, จาก ข ตากเส้นตรง ข ง ให้ตั้งได้มุมฉาก
กับ ก ค แล้วต่อตรงออกไปพบด้าน ก ค หรือส่วนต่อ
ของ ก ค ที่จุด ป, เส้น ข ง จะเท่ากับเส้น ง ป

๙ รูปสี่เหลี่ยม ก ข ค ง มีด้าน ก ข เท่ากับ ก ง
แถม ข ค เท่ากับ ค ง จึงสรุปว่าเส้นทแยงมุม ก ค ผ่าน
มุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยม

๑๐ ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมมีด้าน ก ง เท่ากับ
ด้าน ข ค และมีเส้นทแยงมุม ก ค กับ ข ง ซึ่งใช้ร่วมกัน
ที่จุด ค เท่ากัน, ให้ชี้ให้เห็นว่าสามเหลี่ยม ก ค ข กับ
ง ค ค เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งคู่

๑๑ ถ้ามุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับอีกสองมุมรวมกัน, ด้าน
ยาวที่สุดนั้นเป็นสองเท่าของเส้นตั้งฉากจากจุดกลาง ของด้านนั้น ถึง มุมที่ ตรงข้าม

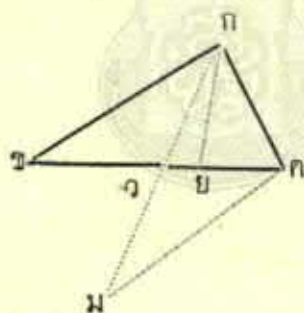
ทวิย สิ่ง ที่ ไม่ เท่า กัน

๒๕๗

(ให้ดูบทที่ ๓๐. ถึง ๒๕.)

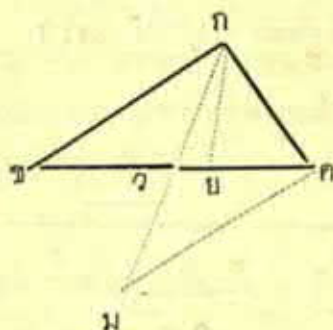
แสดงค่าใช้ เส้นตรงที่ ตากจากมุม ของรูปสามเหลี่ยมถึงศูนย์-
กลาง แห่งด้านที่อยู่ ตรงข้าม เรียกว่า มีเดียน ของรูปสามเหลี่ยมนั้น

ทวิอย่างทำให้ดู ถ้าด้านทั้ง ของรูป สามเหลี่ยม ยาวไม่ เท่ากัน,
แม้ลาก เส้น ผ่านมุมยอด กับ เส้น มีเดียนจากมุม ยอด , เส้นมีเดียน
นี้จะ อยู่ ใน ระหว่าง เส้น ผ่านมุมกับด้านยาว



สมมุติ ให้ ก ข ค เป็น $\triangle$ ที่มีด้าน ก ข ยาวกว่า ก ค,
ให้ ก ง เป็นมีเดียน, แต่ ก ย เป็นเส้นผ่านมุม ข ก, ค
ก ง จะอยู่ ใน ระหว่าง ก ย กับ ก ข.

สรุป ต่อเส้น ก ง ยาวออกไปถึง ม ให้ ก ม



ยาวเท่า ก ว, แล้วลากเส้น ม ค.

$\triangle ข ว ก$ กับ $ม ว ค$ เท่ากันสนิท (๓.๔)

$\therefore ข ก = ม ค$, แต่ $\angle ข ก ว =$
 $ว ม ค$.

แต่ ก ข ยาวกว่า ก ค (สมมุติ)

$\therefore ม ค$ ก็ยาวกว่า ก ค.

$\therefore \angle ม ก ค$ กว้างกว่า $\angle ก ม ค$ (๓.๑๘.)

$\therefore \angle ม ก ค$ กว้างกว่า $\angle ข ก ว$ ด้วย

$\therefore \angle ว ก ค$ ต้องใหญ่กว่าครึ่งของมุมยอด ข ก ค

$\therefore$ $ก ว$ ต้องอยู่ในระหว่าง ก ข กับ ก ย

ที่ไปนเส้นผ่าน ม ข ก ค.

๑. ในรูปสามเหลี่ยม ก ข ค, ถ้า ก ค ไม่ยาว

กว่า ก ข, ให้ปรุฟว่าเส้นตรงใด ๆ ที่ลากจากยอด ก ลงมาถึง ด้าน ข ค, สั้นกว่าเส้น ก ข ทุกเส้น.

๒. บ พ ฬ เป็นรูปสามเหลี่ยม เส้น บ ว ผ่านมุม

พ บ ฬ, แฉกด้าน พ ฬ ที่จุด ว, ให้ปรุฟว่า บ พ ยาวกว่า พ ว แต่ บ ฬ ยาวกว่า ฬ ว.

๓. ถ้า ลากเส้น ตรงจากจุด หนึ่งถึงเส้น ตรง อีกเส้น หนึ่ง,

เส้นที่สั้นที่สุด คือเส้น ตั้ง ได้ มุมฉากกับเส้น ตรง นั้น, เส้นอื่น ๆ,

ที่โก่งกับเส้นตั้ง ได้ มุมฉากนี้ ย่อมสั้นกว่าเส้นที่โก่ง ออกไป แต่จะมี

เส้นที่ ยาวเท่ากัน ได้ เป็นคู่ ๆ คืออยู่คนละ ข้างของเส้นตั้ง

ได้ มุมฉาก

๔. ผลบวกของ เส้นตรงที่ ลากจากจุด ภายนอก รูป สามเหลี่ยม

ถึงจุดที่มุมทั้งสามของ รูป สามเหลี่ยม, ยาวกว่า ครึ่งหนึ่งของผล บวก

แห่งด้านทั้งสามของรูป สามเหลี่ยมนั้น

๕ ผลบวกของเส้นตรง ที่ลากจากจุดภายในรูปสามเหลี่ยม ถึงจุดที่มุมทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยม, นั้นน้อยกว่าผลบวกของด้านทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยมนั้น.

๖ ผลบวกของด้านทั้งสี่แห่งรูปสี่เหลี่ยม, ยาวกว่าผลบวกของเส้นแถมของมุมแห่งรูปนั้น

๗ ผลบวกของเส้นแถมของมุมแห่งรูปสี่เหลี่ยม ยาวกว่าผลบวกของเส้นตรงทั้งสี่ที่ลากจากจุดมุมของรูปนั้น ถึงจุดหนึ่งภายในรูป. ให้ปรัพรนี้, แล้วชี้ให้เห็นว่า มีอยู่อย่างเดียวที่จะเท่ากันได้

๘ ด้านคู่ใด ๆ ของสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกัน, คงยาวกว่าสองเท่าของ มีเตียนที่ด้านเดียว.

(วิธีทำ, ให้ต่อเส้นมีเตียน แล้วทำรูปคล้าย บทที่ ๑๖)

๙ ในสามเหลี่ยมใด ๆ เส้นมีเตียนทั้งสาม รวมกัน, คงสั้นกว่าด้านทั้งสาม รวมกัน

๓๐ เส้นแถมของมุมของรูปขนมเปียกปูนด้านเท่าไม่เท่ากัน.

ทวิยเส้นขนาน

๒๖๓

(ให้ดูบทที่ ๒๗ — ๓๓)

๓ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตัดเส้น ขนาน สอง เส้น, แด ถ้าผ่านมุม
ใน ทั้งสอง ที่อยู่ข้าง เดียวกัน, เส้นผ่านมุมทั้งคู่นี้ จะฉากกัน เป็นมุมฉาก

๒ ง คี พบเส้นตรง ก ข ที่จุด คี, มุมประชิด ที่บังเกิด
ขึ้นนี้ ถ้าผ่าด้วยเส้น คี ดิ แด คี ว, แล้วจากจุด ว
ในที่ใด ๆ ในเส้น ง คี, ตากเส้น ดิ ว ว ให้ขนานกับเส้น
ก ข ให้พบเส้นผ่านมุมที่จุด ดิ แด ว, เส้น ดิ ว จะเท่า
กับเส้น ว ว

๓ ถ้าเส้นตรง สอง เส้นขนาน กับเส้นตรงอีกสอง เส้น, เส้นคี่
เส้น, แม้ ผ่านมุมในระ พว้าง เส้นขนาน ทั้งสอง คู่, เส้นผ่านมุม ทั้งสอง
เส้นนี้จะขนานกัน.

๔ เส้นตรงในระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง ที่มีที่ตัดปลายทั้งสองข้าง
ที่เส้นขนาน คู่นี้, มีจุด ๆ หนึ่ง เป็นศูนย์กลาง. ให้ปรุ ฟว่า เส้น
ตรงใด ๆ ที่ลากผ่านจุดนี้ ไป มีที่ตัดปลายทั้งสอง ข้างที่ เส้นขนานทั้งคู่นี้
จะมีจุด ศูนย์ กลาง ร่วม กับจุดนั้นทุก เส้น

๕ บ ป กับ ม น เป็นเส้นตรงสองเส้น, ว เป็นจุด
ในเส้น บ ป, ให้หาจุด ย ในเส้น บ ป ที่จะให้ ย ว
เท่ากับเส้นที่ลากจาก ย ถึงจุดตั้งได้มุมฉากกับ ม น.

๖ ก ข ค เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว. ให้ลากเส้น
ม น ขนานกับฐาน ข ค. มีที่ตัดปลายที่ด้านตั้งทั้ง คู่,
แต่ให้ ข ม, ม น แล น ค ยาวเท่ากัน ทั้ง หด.

๗ ก ข ค เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, ให้ลากเส้น
ม น ขนานกับฐาน ข ค, มีที่ตัดปลายที่ด้านตั้งทั้ง คู่, แต่ให้
ม น ยาวเท่ากับ ข ม กับ ค น รวมกัน

๘ ก ข ค เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, ให้ลากเส้น
น ม ขนานกับฐาน ข ค, มีที่ตัดปลายที่ด้านตั้งทั้ง คู่, แต่ให้
ม น ยาวเท่ากับผลบวกของ ข ม แล ค น.

ด้วยรูปเส้นขนาน.

๒๖๓

(ให้ดูบท ๓๓ และ ๓๔)

ตัวอย่างที่ ๑

เส้นตรง, ที่ลากจากรูตศูนย์กลาง
ของสามเหลี่ยมทั้งรูปสามเหลี่ยมให้ขนานกับด้าน, หักอีกด้าน
หนึ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆกันด้วย



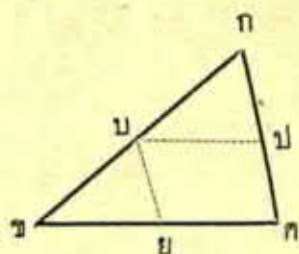
สมมุติให้ ก ข ค เป็น $\triangle$, ป เป็นศูนย์กลางของ ก ข,

เส้น ป ป ได้ลากขนานกับด้าน ข ค, แลจุด ป อยู่ในเส้น ก ค.

ป จะเป็นศูนย์กลางของ ก ค. ด้วย

ลากเส้น ป ย ให้ขนานกับ ก ค ($\therefore$ ๓๓.)

ป รุพ. ใน $\triangle$ ก ป ป กับ ข ป ย



$$\therefore บป \parallel ขค$$

$$\therefore \angle ก บป = \angle ข บ ย \quad (\text{ท. ๒๘.})$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } \angle ข ก ป = \angle ข บ ย \quad (\text{ท. ๒๘.})$$

$$\text{แถม } ข บ = บ ก \quad (\text{สมมติ})$$

$$\therefore \text{ด้าน } ก ป = บ ย \quad (\text{ท. ๒๖.})$$

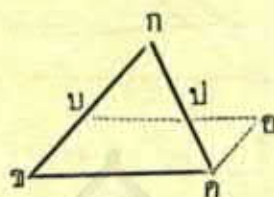
$$\text{แต่ } บ ป \text{ ติ ย เปร } \square \text{ ด้านขนาน} \quad (\text{ส. ๖.})$$

$$\therefore บ ย = ป ค$$

$$\therefore ก ป = ป ค \text{ ด้วย, คือ ป เป็นจุดกึ่งกลางของ } ก ค.$$

$$\text{ท. ท. ป.}$$

ทวอยางที่ ๒๐ เส้นตรงที่ทอจุดศูนย์กลางของท้านสอง
ท้านแตรรูปสามเหลี่ยม, ยอมขนานกับท้านที่สามทวอย



สมมุติให้ ก ข ค เป็น $\triangle$, บ กับ ป เป็น ศูนย์กลาง
ของท้าน ก ข แด ก ค

เส้น บ ป จะขนานกับท้าน ข ค.

สร้าง. ต่อเส้น บ ป ออกไปถึง อ, ให้ ป อ ยาว
เท่ากับ บ ป, ตากเส้น อ ค.

ปรูฟ. ใน $\triangle ก บ ป$ กับ $ป ค อ$

$$\therefore ก ป = ป ค$$

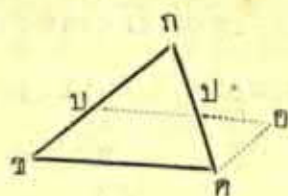
(สมมุติ)

$$บ ป = ป อ$$

(สร้าง)

$$\therefore บ ป ก = ป ค อ$$

(จ.จ.)



$\therefore กข = คอ$, แต่ $\angle ขกป = \angle ปคอ$ (๓.๕.)

$\therefore คอ \parallel กข$ (๓.๒๗.)

แต่ $คอ = กข$, คือเท่ากับ $ปข$ ด้วย (สมมุติ)

$\therefore คอ = เก \parallel ปข$

$\therefore ปอ = เก \parallel ขค$ (๓.๓๓.)

คือ $ปป \parallel ขค$.

ท. ท. ป.

โทษ ผลหัก แล ด้วอย่างวิธีทำ

๒๖๗

๓ เส้นตรง, ที่ต่อจุดศูนย์ กกลางของด้านทั้งสองแห่งรูปสามเหลี่ยม, ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

๒ ให้ ประพจน์ว่า ถ้าจากเส้นตรงต่อจุดศูนย์ กกลางของด้านทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยม, จะแบ่งรูปนั้นออกเป็นสามเหลี่ยมเท่า ๆ กันสี่รูป.

๓ เส้นตรงใด ๆ, ที่ลากจากยอดถึงฐานของรูปสามเหลี่ยม, จะต้อง ถูกตัด ออก เป็น สอง ท่อน เท่า ๆ กัน โดยเส้นที่ต่อจุดศูนย์ กกลาง ของ ด้าน ดัง ทั้ง คู่, ทุก เส้น

๔ กำหนดจุด ศูนย์ กกลาง ของ ด้าน ทั้ง สาม ให้. ให้ สร้าง รูป สาม เหลี่ยม นั้น.

๕ ก ข กับ ค ง ไปเป็น เส้น ตรง สอง เส้น ที่ กำหนด ให้, ป เป็น จุด ที่ กำหนด ให้, อยู่ใน ระหว่าง เส้น ทั้ง สอง นั้น ให้ลากเส้นตรงว่า ป ไปมี ที่ สิ้น ปลาย ที่ เส้น สอง เส้น, แล ให้ ป เป็น ศูนย์ กกลาง ของ เส้น ที่ ลาก ด้วย.

๖ ก ข ค ง เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน, ๗ กับ ย เป็น ศูนย์ กกลาง ของ ด้าน ก ง แล ข ค. ให้ ประพจน์ว่า เส้น ข ค กับ ง ย แบ่ง เส้น ทแยง มุม ก ค ออกเป็น สาม ส่วน เท่า ๆ กัน.

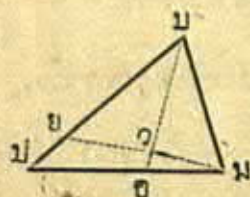
๘ ถ้าต่อจุดศูนย์กลาง กว้าง ของ ด้าน ทั้ง ๓ แห่ง รูป สี่ เหลี่ยม ไม่ว่า ชนิด ไດ ๆ, รูปใหม่ที่เกิดขึ้น ย่อมเป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน.

๙ ให้ปรุฟว่าเส้นตรงที่ต่อจุดศูนย์กลาง กว้าง ของด้าน ตรงกันข้าม แห่ง รูป สี่ เหลี่ยม ไດ ๆ, ย่อมตัดกัน แยกกันออกเป็นสอง ส่วนเท่า ๆ กัน.

โจทย์ ระคน

(ที่ ใช้บท ๓๒ เป็น พื้น)

ตัวอย่าง ในรูป สาม เหลี่ยม, ถ้าลากเส้น ตรงจาก ปลาย กว้าง ข้าง หนึ่ง ให้ถึง ไต้ มุม อีกกับ เส้น ผ่านมุม ยอด ของ รูป นั้น (ก) เส้น ที่ ลาก นี้ กับ ด้าน ตั้ง ไม่ว่า ด้าน ไหน จะ ทำให้ บังเกิด มุม กว้าง เท่า ครึ่ง หนึ่ง ของ มุม ที่ กว้าง รวม กัน, (ข) เส้น ที่ ลาก นี้ กับ กว้าง จะทำให้ บังเกิด มุม กว้าง เท่า กับ ครึ่ง หนึ่ง ของ ผล ธบ แห่ง มุม ที่ กว้าง.



สมมุติ ให้ บ ป ม เป็น $\triangle$. ให้ บ อ เป็นเส้น

ไวยากรณ์ ผักกาด แด่ ตัวอย่าง วิธีทำ

๒๖๘

ผ่านุม ป บ ม, ให้ ม ว ย คัด บ ย ได้มุมฉากที่จุด ว

(ก) มุม บ ย ม หรือ บ ม ย จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกแห่งมุม บ ป ม แด่ บ ม ป.

พิสูจน์. ใน $\triangle$ บ ย ว บ ม ว

$$\therefore \angle บ ย ว = \angle บ ม ว \quad (\text{สมมุติ})$$

$$\angle \text{ฉาก บ ว ย} = \angle \text{ฉาก บ ว ม}$$

บ ว เป็นด้านร่วม

$$\therefore \angle บ ย ว = \angle บ ม ว \quad (\text{ส. ๒๖.})$$

$$\text{หนึ่ง } \angle บ ย ม = \angle บ ม ป \text{ บวก } \angle บ ป ม \quad (\text{ส. ๓๒.})$$

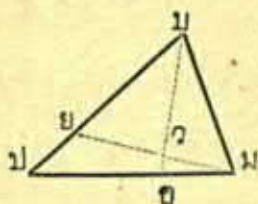
$$\therefore \angle บ ม ย = \angle บ ม ป \text{ บวก } \angle บ ป ม \quad \text{ด้วย}$$

บวก $\angle บ ม ย$ เข้าทั้ง สอง ข้าง

$$\therefore \angle บ ม ย \text{ สอง หน } = \angle บ ม ป \text{ บวก } \angle บ ป ม$$

$$\therefore \angle บ ม ย \text{ ครึ่งหนึ่งของ } \angle บ ม ป \text{ บวก } \angle บ ป ม$$

แต่ $\angle บ ย ม$ ก็เท่านี้เหมือนกัน.



(๒) $\sphericalangle$ ย ม ป จะเท่ากับ ครึ่ง หนึ่งของ ผลลบ แห่ง

มุม บ ม ป แต่ มุม บ ป ม

ปฐพ. ตามที่ประพมาแล้ว $\sphericalangle$ บ ม ย = $\sphericalangle$ ย ม ป

บวก $\sphericalangle$ ย ป ม

บวก $\sphericalangle$ ย ม ป เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \sphericalangle$ บ ม ป = $\sphericalangle$ ย ป ม กับสองเท่า $\sphericalangle$ ย ม ป

$\therefore \sphericalangle$ ย ม ป สองหน = ผลลบของ $\sphericalangle$ บ ม ป กับ

$\sphericalangle$ บ ป ม (ตามความจริง ใน วิธี ถัดไปอีก ขั้น พิสูจน์)

$\therefore \sphericalangle$ ย ม ป = ครึ่ง หนึ่งของ ผลลบ แห่ง $\sphericalangle$ บ ม ป

กับ $\sphericalangle$ บ ป ม

โทษี ผักคัก แดกอย่างวิธีทำ

๕๖๓

๑ ก เป็น ยอดของสาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ก ข ค, ถ้า
ต่อเส้น ข ก ออก ไปถึง ง ให้ ก ง เท่ากับ ก ข, แล้ว

ลากเส้น ง ค, ให้ ปรุฟว่า ง ข ค เป็น สาม เหลี่ยม มุมฉาก

๒ เส้น ตรง, ที่ต่อ จุดศูนย์กลาง แห่ง ถานของ สามเหลี่ยม มุมฉาก,
กับ ยอด มุมฉาก, ยาว เท่ากับ ครึ่ง หนึ่ง ของ ถาน นั้น

๓ จาก ปลาย ถาน ทั้ง สอง ข้าง ของ รูป สามเหลี่ยม, ลากเส้น
ตรง ตั้ง ได้ มุมฉาก กับ ด้านที่ ตรงข้าม (ต่อด้าน ออก ไปถ้าจำเป็น)
ให้ ปรุฟว่าเส้น ตรง, ที่ต่อ จุดศูนย์กลาง ของ ถาน กับ ปลายเส้น ตั้ง ได้
มุมฉาก, ยาว เท่ากัน

๔ ก ง เป็นเส้น ลากจาก ยอด ก ตั้ง ได้ มุมฉากกับ
ถาน ข ค ของสามเหลี่ยม ก ข ค, จ. ถ. ว. เป็น
จุดศูนย์กลางของด้าน ข ค, ค ก แด ก ข ให้ ปรุฟว่า
มุม ว จ ถ กับมุม ว ง ถ ต่างก็เท่ากับมุม ข ก ค.

๕ ในรูปสามเหลี่ยม มุมฉาก ถ้า ลากเส้น ให้ ตั้ง ตรง ได้ มุม
ฉากกับ ถาน จาก ยอด มุมฉาก สามเหลี่ยม ทั้ง สอง ที่เกิด ขึ้น
จะมีมุม เท่ากัน มุมต่อมุม

๖ ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้าลากเส้นตรงสองเส้นจากยอดมุมฉาก, เส้นหนึ่ง ให้ตั้ง ได้มุมฉากกับฐาน, อีกเส้นหนึ่งลากต่อถึงศูนย์กลางแห่งฐาน, ให้ประพัวมุม ในระหว่างสอง เส้นนี้ทาง เท้าผลลบของมุมแหลมสองมุมแห่งรูปสามเหลี่ยม

๗ ในสามเหลี่ยมใด ๆ, มุมที่อยู่ ในระหว่างเส้น ผ่านมุมยอดกับเส้นลากจากมุมยอด ให้ตั้ง ได้มุมฉากกับฐาน, เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลลบแห่งมุมที่ฐาน.

๘ ด้าน ก ค ของสามเหลี่ยม ก ข ค ลากต่อออกไปถึง ค, มุม ข ก ค กับ ข ค ค ถูกผ่าด้วยเส้นตรงสองเส้น, ที่พบกันที่จุด ห. จงชี้ให้เห็นว่ามุม ห. ซึ่งบังเกิดขึ้นทางเท่ากับครึ่งหนึ่งของมุมที่ตัว ข

๙ มุมแหลมทั้งสองแห่งรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้ามุมหนึ่งเป็นสองเท่าของอีกมุมหนึ่ง, ฐานจะแบ่งสองเท่าของด้านที่สั้นที่สุด

๑๐ ถ้ากำหนดจุดสองจุดที่เส้นตรงมุมแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, ให้มีระยะห่างเท่ากันนับแต่ปลายด้านแต่ละข้าง, แล้วต่อจุดนี้กับมุมที่อยู่ตรงข้าม, รูปที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วย

๓๑ บ ป ม เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า. ในด้าน บ ป,
ป ม แล ม บ มีจุด ก, ข แล ค, ซึ่งมีระยะ บ ก,
ป ข แล ม ค เท่ากัน. เส้น ก ม, ค ป แล ข บ
ที่ลากนั้นไขว้กันที่จุด ว, ถ แล ง ให้ ปรุฟว่ารูป ร ถ ง
ที่เกิดขึ้น เป็น สามเหลี่ยม ด้าน เท่า

๓๒ มีเส้นตรงที่กำหนด ให้เส้นหนึ่งกับจุดสองจุด ให้ลากเส้นตรง
สองเส้นผ่านสองจุดนั้น, ให้ บรรจบกับ เส้นที่กำหนด ให้, บังเกิดเป็นรูป
สามเหลี่ยมด้าน เท่า

๓๓ จากจุดที่กำหนดให้ ๓ จุดลากเส้นตรงสองเส้นถึงเส้นขนานคู่หนึ่ง
ให้เส้นที่ลากนั้นเท่ากัน แลจุดกันเองเป็นมุมฉาก

๓๔ เส้นตรงสามเส้นจุดกันที่จุด ๓ จุด, ให้ ลากเส้นตรงตัดเส้น
หนึ่งกับเส้นสามเส้นนั้น ให้ ส่วนทั้งสองของเส้นที่ลากยาวเท่ากัน.

(ข้อที่ ๓๓ กับ ๓๔ นี้ทำได้หลายทาง)

๓๕ ในรูปสามเหลี่ยม, ให้สร้างรูป ~~รูป~~ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ให้เอา
มุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเป็นมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

แสดงคำใช้

๑ จุด เป็น สิ่ง ซึ่ง ไม่มี กำหนด กว้าง ยาว ใหญ่ เล็ก
กำหนด แต่ ที่ เท่านั้น .

๒ เส้น เป็น สิ่ง ซึ่ง มี แต่ กำหนด ยาว ไม่มี กำหนด
กว้าง. ปลาย เส้น ทั้ง สอง ข้าง ย่อม เป็น จุด แต่ ถ้า เส้น สอง เส้น
ไขว้ กัน ที่ ๆ เส้น ทั้ง สอง ไขว้ กัน นั้น ก็ นับ ว่า เป็น จุด เหมือน กัน.

๓ เส้น ตรง คือ เส้น ซึ่ง ซึ่ง ตั้ง อยู่ใน ระหว่าง จุด ปลาย
ทั้ง สอง ข้าง

๔ พื้น เป็น สิ่ง ซึ่ง มี กำหนด กว้าง ยาว แต่ ไม่มี กำหนด หนา.
ขอบ ของ พื้น โดย รอบ นับ ว่า เป็น เส้น .

๕ พื้นราบเสมอ เป็น พื้น ซึ่ง หาก โดย เรา จะ สมมุติ
ตั้ง จุด ขึ้น สอง จุด ใน ที่ใด ๆ ใน พื้น นั้น เส้น ตรง ใน ระหว่าง
สอง จุด นี้ จะ ติด เรียบ อยู่ กับ พื้น ตลอด ทั้ง เส้น

๖ มุม คือ ที่ใด ๆ สอง เส้น เชน จากกัน แต่ ไม่ ติด
หรือ คือ เป็น เส้น ตรง สอง เส้น ติด กัน .

แสดงคำใช้

๒๗๕

๗ ถ้า เส้น ตรง เส้น หนึ่ง ตั้ง อยู่ บน เส้น ตรง อีก เส้น หนึ่ง

และ เส้น ตรง แล้ว จน มุม สอง มุม ที่ ประ ชิด กัน นั้น เท่า กัน รวม

ทั้ง สอง น เรียกว่า มุม ฉาก ทั้ง คู่ แต่ เส้น ที่ ตั้ง ตรง อยู่ บน

อีก เส้น หนึ่ง นั้น เรียกว่า เส้น ตั้ง ตรง ได้ มุม ฉาก กับ เส้น นั้น

๘ มุม จั่ว คือ มุม ที่ ใหญ่ กว่า มุม ฉาก

๙ มุม ขิง คือ มุม ที่ เล็ก กว่า มุม ฉาก

๑๐ วงกลม คือ รูป ที่มี เส้น ๆ หนึ่ง ถัด มรอบ เส้น นั้น

เรียกว่า เส้น รอบ วง และมี จุด ๆ หนึ่ง อยู่ ตรง กลาง ภายใน ที่

ซึ่ง, ถ้า เรา ตาก เส้น ตรง ตั้ง แต่ จุด นั้น ไป ถึง เส้น รอบ วง เส้น ตรง,

เรา ตาก นี้ ไม่ ว่า ก็ เส้น ๆ ก็ ยาว เท่า กัน หหมด เส้น ตรง เหล่า นั้น

เรียกว่า รัศมี ของ วงกลม แต่ จุด ที่ อยู่ ตรง กลาง นั้น เรียกว่า

ศูนย์กลาง ของ วงกลม

๑๑ เส้น ศูนย์ กลาง ของ วงกลม คือ เส้น ที่ ตาก ผ่าน ศูนย์ กลาง

ของ วงกลม และมี ที่ ตัด ปลาย ทั้ง ๒ ที่ เส้น รอบ วง

ตำรา ๒๓

๑๒ ครึ่ง วงกลม เป็นรูป ซึ่งมี เส้น ศูนย์กลาง กับ
 ส่วนของ เส้น รอบวง ซึ่ง โอบมา เพียง เส้น ศูนย์กลางนี้ เป็น
 ฐานาเขตร์

๑๓ ส่วน ของ วงกลม เป็น รูป ซึ่งมี เส้น ตรง เส้น กลึง
 กับ ส่วน ของ เส้น รอบวง ซึ่ง โอบมา เพียง เส้น ตรง นั้น , เป็น
 ฐานาเขตร์

๑๔ รูป เหลี่ยม คือ รูป ซึ่งมี เส้น ฐานาเขตร์ เป็น
 เส้น ตรง ทั้ง นั้น

๑๕ รูป สามเหลี่ยม เป็นรูป ซึ่งมี ด้าน สามด้าน เป็นเส้นตรงทั้งนั้น

๑๖ รูป สี่เหลี่ยม คือ รูป ซึ่งมี ด้าน สี่ด้าน เป็นเส้นตรงทั้งนั้น

๑๗ รูป หกเหลี่ยม คือ รูป ซึ่งมี ด้าน มากกว่า สี่
 ด้าน ขึ้นไป แต่ เป็น เส้นตรง ทั้ง นั้น

๑๘ สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม หกเหลี่ยม คือ รูป สามเหลี่ยม ที่มี ด้าน
 เท่า กัน ทั้ง สามด้าน หรือ ๒ ด้าน

๑๙ สามเหลี่ยม หน้า จั่ว คือ รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มี

ด้านเท่ากัน สอง ด้าน

๒๐ สามเหลี่ยม ด้าน ไม่ เท่า คือ รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง

มี ด้าน ไม่ เท่า กัน ทั้ง สาม ด้าน

๒๑ สามเหลี่ยม มุม ฉาก คือ รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มี มุม ๑

หนึ่ง เป็น มุม ฉาก

๒๒ สามเหลี่ยม มุม จั่ว คือ รูป สาม เหลี่ยม ที่ มี มุม ๑

หนึ่ง เป็น มุม จั่ว

๒๓ สามเหลี่ยม มุม ชง คือ รูป สาม เหลี่ยม ที่ มี มุม

เป็น มุม ชง ทั้ง สาม มุม

๒๔ เส้นขนาน คือ เส้น สอง เส้น ที่ เรียง เป็น คู่ กัน

อยู่บน พื้นราบ อัน เดียวกัน แล มี ระยะ ห่าง เท่า กัน เสมอ กัน เสมอ ปลาย

ถ้า จะ ตาก เส้น ทั้ง สอง นี้ ต่อ ไป ทาง ปลาย อีก หนึ่ง ข้างใด

ทั้ง สอง นี้ ก็ จะ ไม่ พัง จาก พบ กัน

๒๕ สีเขียวเข้มด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่

อยู่ตรงกัน ข้าม ขนาน กัน เป็น คู่ ๆ

๒๖ สีเขียว มุมฉาก ด้าน ขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มี

ขนาน ที่มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก

๒๗ สีเขียว จตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยม ซึ่งมีด้านเท่ากัน

ทั้งสี่ด้าน แต่มุมเป็นมุมฉาก ทั้งสี่มุม

๒๘ รูปขนาน เบี่ยง บิด เป็น รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านเท่า

กันทั้งสี่ด้าน แต่ไม่มีมุมเป็นมุมฉาก

7-3

