ก ๑๕

คณิตวิทยา

กรมศึกษาธิการ

ยุคลิด

สำหรับมัธยมศึกษา

ของ พระโพธิวงศาจารย

ป
๕๑๓
พ

พิมพ์ครั้งที่ ๔ จำนวน ๓,๐๐๐ ฉบับ

ร. ศ. ๑๒๔

ราคาปกผ้าเล่มละ ๔๓ อัฐ

พิมพ์จำหน่าย ที่โรงพิมพ์อักษรนิติ์

บางขุนพรหม

ก 02658

คณนา วิทยา

กรม ศึกษา ธิการ

ยุคลิด

สำหรับ มัธยม ศึกษา

ของ พระโพธิสาร ศิลปสาตร

พิมพ์ ครั้ง ที่ ๑ ๓,๐๐๐ ฉบับ

ร. ศ. ๑๒๔

ราคา ปก ผ้า เล่ม ละ ๔๓ อัฐ

พิมพ์ จำหน่าย ที่ โรง พิมพ์ อักษร นิติ์

บาง ขุน พรหม

ก02658 ฉ.1

คำนำ

ยุคลิด หรือ ยี่ออเมตรี เป็น สาขา หนึ่ง ของ คณนาวิทยา มี ประโยชน์ ใน ที่ ใช้ คือ สำหรับ เป็น เครื่อง มือ คิด ใน วิทยา สูง ๆ ที่ จะ เรียน ต่อ ขึ้นไป อีก กับ มี ประโยชน์ ที่ จะ นำ มาใช้ ได้ เป็น ความ รู้ สามัญ สำหรับ การวัด ขนาด และให้ ทราบ ลักษณ ของ รูป ต่าง ๆ ได้ อย่าง เดียว กับ สาขา อื่น ๆ ของ คณนาวิทยา เช่น พีชคณิต เลข และ เม็น สุเรชัน เป็น ต้น แต่ ประโยชน์ อัน สำคัญ ที่ สุด ของ ยุคลิด หรือ ยี่ออเมตรี ที่ วิทยา อื่น ๆ (นอก จาก ศรรก วิทยา และ วิชา ชนิด นั้น) ไม่ มี เหมือน ก็ คือ การ ฝึก หัด ให้ อ้าง ผล ตรง กับ เหตุ, ให้ อ้าง เหตุ ที่ เป็น เหตุ จริง ของ ผล, ให้ พูด แต่ ที่ มี หลัก ฐาน ที่ อ้าง เสมอ ไป สิ่ง ใด ที่ไม่ มี ที่ อ้าง เป็น หลัก ฐาน ห้ามไม่ให้ ใช้ เป็น อัน ขาด ให้ เชื่อ แต่ สิ่ง ที่ มี หลัก ฐาน (พิสูตร) เป็น สำคัญ แล้ว นอก นั้น ถึง จะ ปรากฏ อยู่ แก่ ตา ก็ ยังไม่ให้ เชื่อ ตา จน กว่า จะได้ ค้น หา หลัก ฐาน เป็น พิสูตรได้ แน่ แท้ แล้ว การ ฝึก หัด อย่าง นี้ใคร จะ กล่าวได้ ว่าไม่ มี ประโยชน์ หรือ ว่า มี ประโยชน์ น้อย ใน มนุษย์ อะไร จะ สำคัญ กว่า ความ คิด คำ พูด คือ อะไร ก็ คือ ความ คิด นั้น เอง แต่ แสดง ออก มา เป็น

คำนำ

ถ้อยคำ หรือ เขียน ลง เป็น ลาย ลักษณ อักษร ความ คิด เป็น เครื่อง หมาย วัด ความ ฉลาด ของ มนุษย์ ถ้า ผู้ใด ทราบ เหตุ แล้ว อาจจะ ทาย ผลได้ ถูก ต้อง (อย่าง ที่ เรียก กันว่า คาด ล่วง หน้า) หรือ เมื่อ ทราบ ผล แล้ว อาจ คิด หา เหตุได้ ถูก ต้อง ผู้นั้น ก็ ย่อม ได้ชื่อ ว่า ฉลาด มาก กว่า ผู้ ที่ ไม่ อาจ สามารถ ทำได้ ดังนั้น อยู่ เอง เป็น ธรรมดา หรือ พูด อีก นัย หนึ่ง ก็คือ ผู้ ที่ รู้จัก คิด หา เหตุ ผลได้ ดี และ ถูก ต้อง น้อย หรือ มาก เพียงใด ก็ ฉลาด น้อย หรือ ฉลาด มาก เพียง นั้น

การ ที่ คน เรา อาจ มี ความ รู้ และ ฉลาด ขึ้นได้ โดย ทำ การไป แต่ เด็ก จน อายุ มาก นั้น ก็ จริง อยู่ แต่ ถ้า มี บท เรียน ที่ อาจ ฝึก ความ คิด ให้ เป็น ต้น ทุน สำหรับ เกิด ความ ฉลาดได้ ดัง กล่าว มา แล้วนั้น ตั้ง แต่ เมื่อ ยัง เป็น เด็ก อยู่ ใน โรง เรียน จะไม่ เรียก ว่า เป็น หนทาง ถัด และ เป็น ทาง แน่ สำหรับ ฝึก หัด ให้ เกิด ความ ฉลาด หรือ บท เรียน อะไร ใน โรง เรียน เดี๋ยวนี้ ที่ หัดให้ ผู้ เรียน คิด ถูก ตาม เหตุ ผล, ให้ ระวัง ภาษา ที่ ตัวใช้ ไม่ให้ มาก หรือ น้อย หรือ ล่วง เกินไป, ให้ เชื่อ แต่ สิ่ง ที่ มี หลัก ฐาน เป็น จริง แล้ว ทั้งนั้น ถึง จะ เห็น ปรากฏ อยู่ แก่ ตา ถ้า ยัง ไม่ มี หลัก ฐาน ที่ พิสูตร

คำนำ

ให้เห็น ว่า จริงได้ ก็ ยังไม่ให้เชื่อ การ อ่าน ก็ไม่สอนให้ เป็น ดังนี้ได้ การ เขียน ลายมือ หรือเขียน ตาม คำ บอก หรือไวยากรณ์ ก็ไม่สอนได้ เลย ถ้า สอน ถูก ก็ จะสอนได้ ย่าง นิดหน่อย แต่ เป็น ตำรา ที่ กว้าง นัก จะใช้ ให้ เป็น ประโยชน์ ใน เฉพาะ สิ่ง นี้ไม่ ได้ ตรรก วิทยา ก็ เป็น ตำรา ที่ เกี่ยว กับ ภาษา มาก เกินไป ผู้ เรียน จำ เป็น จะ ต้อง รู้ ภาษาให้ พอ เสีย ก่อน จึง จะ เรียนได้ เพราะ ฉะนั้นในโรง เรียน ต่ำ ๆ ที่ สอน เพียง ประโยค ๒ จะมี อะไร เป็น เครื่อง สำ หรับ ผึก ความ คิด ที่ เป็น ต้น เหตุ แห่ง ความ ฉลาด นัก เรียนในโรง เรียน เหล่า นี้ จะ มี ต้องไป เดิน ทาง ย้อม โดย เรียน คิด เรียน พูด เรียน แต่ง ให้ ถูก ต้อง ตาม เหตุ ผล ใน เมื่อไป ลง มือ ทำ งาน หรือ นี่ เป็น สิ่ง ไม่ สม ควร เลย เพราะ ฉะนั้น ตำ รา ยุคลิด ควร มี ส่วน เป็น บท เรียน อย่าง หนึ่งในโรง เรียน สามัญ สิ่ง จะ ยังให้ เรียนใน ชั้น ต่ำๆ ไม่ได้ เพราะ ยัง เป็น ของใหม่ อยู่ และ ยังไม่ มี ครู ที่ สอนได้ พอ จะให้เรียน แต่ ชั้น ที่ สุด ซึ่ง เป็น ชั้น ประโยค ๒ ไป ก่อน ก็ได้ ครู ประ กาศ นียบัตร ที่ จำ หน่าย ออกไป ก็ ควร มี สอน พอ ตัว กัน อยู่ แล้ว เมื่อ ต่อไป ภาย หน้า ถึง เวลา อัน ควร จึง ค่อยโ

คำนำ

หลักสูตรให้มียออเมตริคลอดลงไปถึงชั้นต่ำ ๆ เป็นลำดับ ผู้ที่ได้เรียนแปรักติกตยออเมตริแล้วนั้น ย่อมจะเรียนตำราดุริยดนตรีได้ง่ายขึ้น แต่ครูจะต้องคอยระวังให้นักเรียนใช้ภาษากวดขันเข้มงวดขึ้นอีก เพราะในตำราแปรักติกตยออเมตรินั้น ความประสงค์เพียงแต่จะให้รู้จักวิธีเขียนรูปต่าง ๆ เหล่านั้นได้เท่านั้น ไม่ต้องการให้พิสูตรอาศัยตาและความจำเป็นสำคัญก็พอ แต่ในตำราดุริยดนตรีนี้ แม้แต่ตาเห็นก็ไม่เชื่อ ต้องอาศัยเหตุเป็นจริงเป็นประมาณ เพราะฉะนั้นในส่วนที่เรียกว่า 'สร้าง' หรือ 'วิธีทำ' นั้น ถ้าประสงค์เพียงไรให้บอกเพียงนั้น ประสงค์อย่างไรให้บอกอย่างนั้น ถ้านักเรียนบอกขาดหรือเกินหรือไขว้เขวไปจากที่ต้องการจะให้ทำครูจงแกล้งทำตามที่บอก ให้นักเรียนแลเห็นว่าตัวผิด นักเรียนจึงจะได้รับประโยชน์อันสมควรจากการเรียนวิชานี้

พระไพศาลศิลปศาสตร

ยุคลิด

เล่ม ๑

เครื่องมือที่อนุญาตให้ใช้

ในการที่จะเขียนรูปสำหรับวิชาสิ่งนี้ ท่านนักปราชญ์ยุคลิดผู้แต่ง ห้ามมิให้ใช้เครื่องมือสิ่งอื่นนอกจากไม้บรรทัดตรงที่ไม่มีขีดเครื่องหมายวัด ๑ กับวงเวียน ๑ รวมเป็นสองสิ่งเท่านั้น ท่านกล่าวว่าเป็นพอสำหรับที่จะทำให้ถูกต้องได้ทุกอย่าง และท่านได้ให้อนุญาตไว้ ๓ ข้อดังมีแจ้งอยู่ต่อไปนี้ นอกจากนี้จะแผลงทำเป็นอย่างอื่นไปไม่ได้เลยเป็นอันขาด

ข้ออนุญาต

๑ ตั้งแต่จุดหนึ่งจุดใด จะลากเส้นตรงไปติดต่อกับจุดหนึ่งจุดใดก็ได้

๒ เส้นตรงที่กำหนดให้ คือเส้นตรงที่มีที่สุดปลายแล้ว จะลากให้ตรงต่อออกไปจนยาวเท่าใดๆ ก็ได้

๓ จะเอาจุดหนึ่งจุดใดเป็นศูนย์กลาง แล้วเขียนวงให้เส้นรอบวงห่างจากศูนย์กลางเท่าใด ๆ ก็ได้

คือจะให้เส้นรัศมีของวงนั้นยาวเท่าใด ๆ ก็ได้

☞ เมื่อท่านอ่านคำอธิบายที่ข้างบนนี้ จะแลเห็นได้ว่าท่านยุคลิดหาได้อนุญาตให้วัดเส้นยาวด้วยไม้บรรทัดหรือด้วยวงเวียนไม่ เพราะฉะนั้นให้เข้าใจไว้ว่า ในวิชายุคลิดนี้ จะใช้วัดด้วยสิ่งใด ๆ ไม่ได้เลย

สิ่งที่เห็นจริงแล้ว

ตำรายุคลิดที่จะทำต่อไปนี้ อาศัยด้วยความที่เป็นจริงอยู่แล้วที่เห็นจริงแล้ว ๑๒ ข้อด้วยกัน เป็นต้นเค้าสำหรับประกอบก่อความเป็นจริงอื่น ๆ ที่ลำดับที่ยังเคลือบแฝงอยู่ กระทำให้แจ่มแจ้งเห็นจริงได้ สิ่งที่เห็นจริงแล้วทั้ง ๑๒ ข้อนี้ คือ

๑. สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เท่ากับสิ่งอันเดียวกัน สิ่งเหล่านั้นย่อมเท่ากันหมด

มีอุทาหรณ์ คือ นายมา, นายมี, นายสี, นายสา ต่างก็มีอายุเท่ากับท่องเกิด เพราะฉะนั้นนายมา, นายมี, นายสี, นายสา มีอายุเท่ากันหมด

๒. สิ่งทั้งหลายที่เท่ากันอยู่แล้ว ถ้าเอาอะไรมาบวกเข้าอีกเท่า ๆ กัน ผลบวกเหล่านั้นก็ย่อมเท่ากันหมด

มีอุทาหรณ์ คือ นายมา, นายมี, นายสี, นายสา มีเงินเท่ากัน เอาเงินมาเติมให้คนละ ๔ บี อีกคนละ ๔ บาท ทรัพย์สมบัติของคนทั้ง ๔ นี้ก็คงยังเท่ากันนั่นเอง ไม่มากน้อยกว่ากัน

๓. สิ่งทั้งหลาย ที่เท่า กัน ถ้า หัก ออก เสีย เท่า ๆ กัน ที่เหลือ อยู่ ก็ คง เท่า กัน

๔. สิ่ง ทั้งหลาย ที่ ไม่ เท่า กัน ถ้าเอาอะไรมาบวกเข้า อีก เท่า ๆ กัน ผล บวก ก็ คงไม่ เท่า กัน

๕. สิ่ง ทั้ง หลาย ที่ ไม่ เท่า กัน ถ้า หัก ออก เสีย เท่า ๆ กัน ที่ เหลือ อยู่ ก็ คง ไม่ เท่า กัน

๖. สิ่ง ทั้งหลาย ที่ต่าง ก็เป็น สองเท่า ของสิ่ง อันเดียว กัน หรือ ของ สิ่ง ที่ เท่า กัน สิ่ง ทั้ง หลาย เหล่า นั้น ก็ เท่า กัน เหมือน กัน

มี อุทาหรณ์ คือ อายุ ของ นาย มา เป็น สองเท่า ของ อายุ พ่อ เกิด คือ นาย มา แก่ กว่า พ่อ เกิด เท่า ตัว อายุ นาย มี ที่ เป็น สองเท่า อายุ พ่อ เกิด ดัง นี้ อายุ นาย มา กับ นาย มี ก็ คง เท่า กัน อีก ข้อ หนึ่ง คือ อายุ นาย มา เป็น ๒ เท่า ของ อายุ พ่อ เกิด อายุ นาย มี เป็น ๒ เท่า ของ อายุ พ่อ แก้ว แต่ พ่อ เกิด กับ พ่อ แก้ว มี อายุ เท่า กัน ดัง นี้ อายุ นาย มา กับ นาย มี ก็ คง เท่า กัน อยู่ นั่น เอง

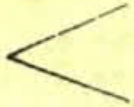
๗. สิ่ง ทั้งหลาย ที่ต่าง ก็เป็น ครึ่งหนึ่ง ของสิ่ง อันเดียว กัน หรือ ของ สิ่ง ที่ เท่า กัน สิ่ง ทั้ง หลาย เหล่า นั้น ก็ เท่า กัน เหมือน กัน

๘. จำ นวน เต็ม ต้อง ใหญ่ กว่า ส่วน ของ มัน เสมอ ไป

มี อุทาหรณ์ คือ เรือน ถึง หลัง ต้อง ใหญ่ กว่า ห้อง ๆ เดียว ของ เรือน นั้น หรือ ถูก กว่า วิธี เศษ ส่วน ตัว จำนวน ที่ ต้อง มาก กว่า เศษ ของ มัน ที่ ยก เอา ข้อ ๘ ขึ้น มา ไว้ เหนือ ข้อ ๘ นี้ เพื่อ จะ ให้ ความ กลัว กลืน อยู่ หมวด เดียว กัน ดู เรือน จะ ได้ จำง่าย

๙. สิ่งทั้งหลายที่ประกับเสมอกันสนิท สิ่งเหล่านั้นย่อมเท่ากัน

๑๐. เส้นตรงสองเส้นจะล้อมที่ว่างให้มิดไม่ได้



มีอุทาหรณ์ดังรูปนี้ ต่อสามเส้นจึงจะล้อม

ที่ว่างให้มิดได้ดังรูปนี้

๑๑. มุมฉากทั้งหลายย่อมเท่ากันหมด

๑๒. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงอีก ๒ เส้น กระทำให้มุมภายในบนข้างหนึ่งทั้ง ๒ มุมแคบกว่ามุมฉาก ๒ มุม ถ้าต่อปลายเส้นตรงทั้ง ๒ ทางมุมภายใน ๒ มุมที่แคบกว่ามุมฉาก ๒ มุม เส้นตรงทั้ง ๒ นี้จะพบกัน

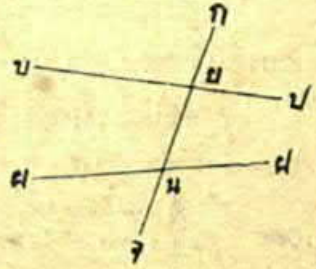
คือถ้าเส้นตรง ก ง ตัด

เส้นตรง บ ป และเส้น

ตรง ฝ ฟ ที่จุด ย และ น

กระทำให้มุม ป ย น +

มุม ฝ น ย แคบกว่ามุมฉาก



ᴗ มุม แล้ว เส้น ตรง บ ป และ ผ ฝ มี ถ้า ต่อ ตรง
ออก ไป ทาง จุด ป และ ฝ ก็ จะ ทบ กัน

คำ ไข

ในการที่จะเรียน ตำรายุคลิดนี้ ผู้เรียน จำเปนจะต้องเข้าใจว่า ถ้อย คำ ที่ จะ นำ มาใช้ต่อไป ข้าง หน้านี้แปล ว่า อะไร และ หมาย ความ เพียง ใด ให้เปน ที่ แน่ นอน แม่น ยำเสีย ก่อน ได้ ยก ไป รวมไข ไว้ ข้าง ท้าย หนังสือ นี้ โดย สั้น เชิง แล้ว แต่ ในที่นี้ จะ ยก มา กล่าว เปน ตอน ๆ ตาม ความ ต้อง การ ของ บท เรียน ให้ผู้เรียน พยายาม ศึก ตรอง จน เข้าใจได้ แท้ จริง ทั้ง สิ้น แล้ว จำ ให้ ได้ ขึ้น ใจ ไว้ กับ ต้อง จำ นำเบอร์ ให้แม่น ยำ ด้วย เพราะ เปน ของ สำคัญ อยู่

ภาค ที่ ๑

๑ จุด คือ สิ่ง ซึ่ง ไม่ มี กำ หนด กว้าง ยาวใหญ่ เล็ก มี กำ หนด แต่ที่ เท่า นั้น

คือ เรา ไม่ อาจ รัก จุด ได้ ว่า มัน ใหญ่ โต เพียง ใด เรา อาจ ทราบ ได้ แต่ ว่า มัน อยู่ ตรง นั้น เท่า นั้น

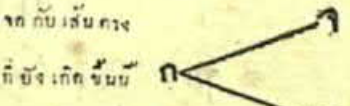
๒ เส้น คือสิ่งซึ่งมีแต่กำหนดยาว ไม่มีกำหนดกว้าง ปลายเส้นทั้ง ๒ ย่อมเป็นจุด และถ้าเส้น ๒ เส้นใช้ควักกัน ที่ ๆ เส้นทั้ง ๒ ใช้ควักกันนั้นก็นับว่าเป็นจุดเหมือนกัน

เมื่อกล่าวถึงเส้นไม่หมายความว่าเส้นหยาบหรือเส้นบาง เพราะฉะนั้นจึงรู้ว่าเส้นมีแต่กำหนดยาว ไม่มีกำหนดกว้าง ไกลที่สุดรอบที่ย้ายในแม่น้ำจดกับสิ่งก็เรียกว่าเส้น และเส้นนี้ยาวรู้ได้แต่ไกลยาวเท่านั้น ไกลกว้างไม่มี

๓ เส้นตรง คือเส้นซึ่งยืดเหยียดอยู่ในระหว่างจุดปลายทั้ง ๒ ข้าง

คือฉันจะสมมุติเอาจุดสองจุดเป็นปลายเส้น แล้วยืดเส้นนี้ออกกับจุดทั้ง ๒ ให้ตึงเรียก เส้นนี้ก็จะเป็นเส้นตรง ถ้ายืดไม่ตรงเส้นก็จะหย่อนเทียบทายและโค้งคดไปมา เส้นนี้นับว่าไม่ใช่เส้นตรง อันใกล้ก็คือเส้นที่เราเขียนบนกระดาษก็นับว่าเป็นเส้นตรง เส้นไม่ตรงในทำนองเดียวกัน

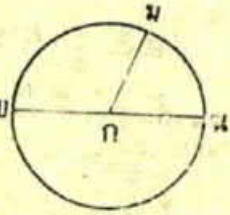
๔ มุม คือที่เส้นตรง ๒ เส้นเอนจดกัน แต่ไม่ติดหรือต่อเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน



ในรูปนี้ เส้นตรง ก จ เอนจดกับเส้นตรง ก ฉ ที่จุด ก เพราะฉะนั้นมุมที่ยังเกิดขึ้นนี้จึงเรียกว่ามุม จ ก ฉ หรือมุม ฉ ก จ ก็เรียกได้ แต่ต้องเรียกให้ตัวอักษรที่อยู่ตรงยอดมุมอยู่กลางเสมอ ดังเช่นตัว ก ในที่นี้ จะไปวิ่งกันด้วย ก เรียกว่ามุม ก จ ฉ

หรือมุม ก ฉ ๆ ไม่ได้เป็นอันขาด อนึ่งให้นักเรียนสังเกตไว้ว่า ถ้าจะต่อเส้นตรงถึง ๒ เส้น ของมุมให้ยาวออกไปหรือตัดให้สั้นเข้ามา มุมนั้นจะไม่กว้างขึ้นหรือแบลงเลย เพราะว่าอังกางอยู่เท่าเดิม และการที่นับมุมว่ากว้างหรือแบนั้น ก็ยับว่ามันกาง มากกางน้อยเท่าใดเท่านั้น

๑๐ วงกลม คือรูปที่มีเส้น ๆ หนึ่งล้อมรอบ เส้นนี้เรียกว่า เส้นรอบวง และมีจุด ๆ หนึ่งอยู่ตรงกลางภายใน ถ้าเราลากเส้นตรงตั้งแต่จุดนี้เปถึงเส้นรอบวง เส้นตรงที่เราลากนี้ไม่ว่าก็เส้น ๆ ก็ยาวเท่ากันหมด เส้นตรงเหล่านี้เรียกว่า รัศมี ของวงกลม และจุดที่อยู่ตรงกลางวงนั้นเรียกว่า ศูนย์กลาง ของวงกลม



รูป บ น ม ข้างบนนี้เป็นวงกลม มีจุด ก เป็นศูนย์กลาง มีเส้น บ น ม เป็นเส้นรอบวง และมีเส้น ก ม กับเส้น ก น กับเส้น ก บ เป็นรัศมี วงกลมวงหนึ่งจะให้มีรัศมีสักกี่เส้นก็ได้ เพราะเส้นตรงที่ลากจากศูนย์กลางไปถึงเส้นรอบวง ก็ล้วนเป็นรัศมีทั้งนั้น

๑๑ เส้นอัฒจักร ของวงกลม คือเส้นที่ลากผ่า

ศูนย์กลาง ของวงกลม และมีที่สุดปลายทั้ง ๒ ข้าง ที่เส้นรอบวง

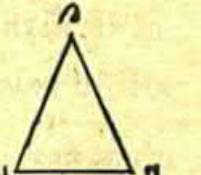
ในรูปข้างบนนี้ เส้น บ น เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม บ ม น

๑๔ รูปเหลี่ยม คือรูปซึ่งมีเส้นอาณาเขตร์เป็นเส้นตรงทั้งนั้น

เส้นตรงเหล่านี้เรียกว่า ด้าน ของรูปนั้น

๑๕ รูปสามเหลี่ยม คือรูปซึ่งมี ด้าน ๓ ด้าน เป็นเส้นตรงทั้งนั้น

แม้มุมหนึ่งมุมใดของรูปสามเหลี่ยม เราสมมุติเรียกว่า มุมยอด ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมยอดนี้ก็เรียกว่า ฐาน ในรูป ม ย ว ถ้าเราสมมุติว่ามุม ม ว ย เป็นมุมยอด ด้าน ม ย ก็ต้องเป็นฐาน



๑๘ สามเหลี่ยมด้านเท่า คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้งสามด้าน

๑๙ สามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านเท่ากันแต่ ๒ ด้าน

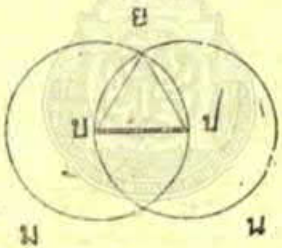
ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ด้านที่เท่ากันเรียกว่า ด้านคู่ เช่น ด้าน ก ม กับด้าน ก ย ในรูปนี้ อีกด้านหนึ่งเรียกว่า ฐาน คือ

ด้าน ม ย มุมที่อยู่ตรงข้ามเรียกว่า มุม ยอด เช่น มุม ม ก ย

๒๐ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า คือ รูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีด้านไม่เท่ากันเลย

บทที่ ๑

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนเส้นตรงที่กำหนดให้ คือเส้นตรงที่มีที่สุดที่ปลายทั้ง ๒ ข้างแล้ว



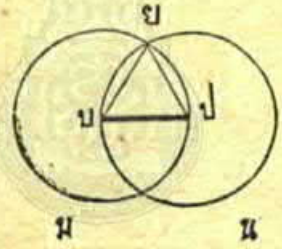
สมมุติให้เส้น บ ป เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ จะต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนเส้นตรง บ ป นี้

วิธีทำ. เอาจุด บ เป็นศูนย์กลาง บ ป เป็นรัศมี เขียนวงกลม ย ม ป ทำได้ตามข้อ ๓

เอา จุด ป เป็น ศูนย์กลาง บ ป เป็น รัศมี เขียน วง กดม ย บ น ทำได้ โดย อนุญาต ข้อ ๓

ตั้งแต่จุด ย ที่ วง ทั้ง ๒ ไขว้กัน ลากเส้น ตรง มา ถึง จุด ป และ ป ก็อเส้น ย บ และ ย ป ทำได้ โดย อนุญาต ข้อ ๑

รูป สาม เหลี่ยม ย บ ป จะ เป็น รูป สามเหลี่ยม ด้านเท่า ที่ ต้อง ประสงค์



พิสูจน์ เพราะว่า จุด บ เป็น ศูนย์กลาง ของ วง กดม ย ม ป เพราะฉะนั้น เส้น บ ย เท่ากับ เส้น บ ป ดังแจ้งในคำไขข้อ ๑๕

และ เพราะว่า จุด ป เป็น ศูนย์กลาง ของ วง กดม ย บ น เพราะฉะนั้น เส้น ป ย เท่ากับ เส้น ป บ คำไขข้อ ๑๕

แต่ได้แสดงแล้วว่า เส้น บ ย เท่ากับ เส้น บ ป

เพราะฉะนั้น เส้น ป ย และ บ ย ต่างก็เท่ากับเส้น บ ป สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เท่ากับสิ่งอันเดียวกัน สิ่งเหล่านั้นเท่ากันหมด สิ่งที่เห็นจริงแล้วชัด .

เพราะฉะนั้น เส้น ป ย จึงเท่ากับเส้น บ ย ด้วย

เพราะฉะนั้น เส้น ป ย และ บ ย และ บ ป เท่ากันหมด

เพราะฉะนั้น รูป บ ป ย จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และได้สร้างขึ้นบนเส้น บ ป ที่กำหนดให้แล้วด้วย

ซ.ต.ท.

บทที่ ๒๒

จงลากเส้นตรงตั้งแต่จุดที่กำหนดให้ ให้เส้นนั้นยาวเท่ากับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้

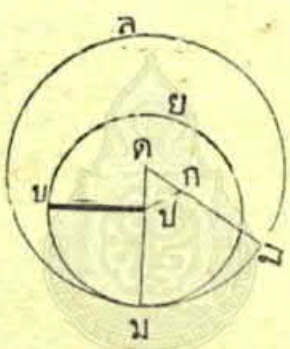
พิสูตร* หมายความว่าแสดงให้เห็นโดยมีหลักฐาน ว่าสิ่งที่อ้างมาแล้วนั้นเป็นของจริง

ซ. ต. ท. หมายความว่า "ซึ่งต้องทำ"

ในข้างบนนี้ผู้เรียนจะเห็นได้ว่าสิ่งใดที่ท่านนักปราชญ์อุกลิดอ้างว่าเป็นอย่างไรแล้ว ท่านก็พิสูตรให้เห็นว่าเป็นอย่างนั้นจริง ๆ โดยมีหลักฐาน อย่างรูปสามเหลี่ยมนี้ ท่านทำขึ้นแล้ว ท่านก็พิสูตรว่าเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าจริง เพราะฉะนั้นในตำราอุกลิดนี้ตลอดไป ถ้าสิ่งใดพิสูตรให้เห็นไม่ได้ก็อย่าไม่เป็นที่เชื่อ และอย่ารับว่าเป็นจริงไม่ได้

สมมุติ ให้จุด ก เป็นจุดที่กำหนดให้ และให้เส้น บ ป เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้

จะต้องลากเส้นตรงตั้งแต่จุด ก ให้ยาวเท่ากับเส้น บ ป ที่กำหนดให้.



วิธีทำ. ลากเส้นตรงแต่จุด ป ถึงจุด ก โดยอนุญาต ๑

บนเส้นตรง ก ป นี้ สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือรูป ป ก ด ทำตามวิธีในบทที่ ๑ ของเล่ม ๑ นี้

เอาจุด ป เป็นศูนย์กลาง ป บ เป็นรัศมี เขียนวงกลม บ ม ย โดยอนุญาต ๓

ต่อเส้น ด ป ให้ยาวตรงมาถึงเส้นรอบวง ย บ ม ที่จุด ม โดยอนุญาต ๒

เอา ค เป็นสูนย์กลาง ค ม เป็นรัศมี เขียน
วง กลม ม ล น อนุญาต ๓

ต่อเส้น ค ก ให้ยาวตรงมาถึงเส้นรอบวง ล ม น
ที่จุด น อนุญาต ๖

เส้นตรง ก น นี้จะยาวเท่ากับเส้นตรง บ ป ที่
กำหนดให้

พิสูตร. เพราะว่าจุด ป เป็นสูนย์กลางของวง กลม ยบม
เหตุฉะนั้นเส้น บ ป เท่ากับเส้น ป ม คำไขข้อ ๑๕

เพราะว่าจุด ค เป็นสูนย์กลางของวง กลม ล ม น
เพราะฉะนั้นเส้น ค ม เท่ากับเส้น ค น คำไขข้อ ๑๕

แต่เส้น ค ป เท่ากับเส้น ก ค คำไขข้อ ๑๕

เพราะฉะนั้นส่วนที่เหลืออยู่คือ ป ม เท่ากับส่วนที่
เหลืออยู่คือ ก น สิ่งที่เท่ากับของสิ่งเดียวกันแล้วย่อมเท่ากัน

แต่ได้แสดงแล้วว่าเส้น ป บ เท่ากับเส้น ป ม
เหตุฉะนั้นเส้น ก น และ ป บ ต่างก็เท่ากับเส้น ป ม
สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เท่ากับสิ่งอันเดียวกัน สิ่งเหล่า
นั้นเท่ากันหมด สิ่งที่เท่ากับของสิ่งเดียวกันแล้วย่อมเท่ากัน

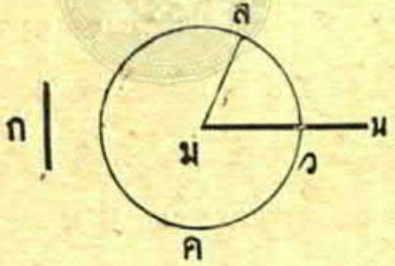
เหตุฉะนั้น เส้น ก น และเส้น ป บ เท่ากัน.

และเส้น ก น นี้ได้ลากไปแต่จุด ก ที่กำหนดให้

ซ.ต.ท.

บทที่ ๓

จง ตัดเส้นยาวที่กำหนดให้ เอาแต่ส่วนหนึ่งให้ยาวเท่ากับเส้นสั้นที่กำหนดให้



สมมุติให้ ก เป็นเส้นสั้นที่กำหนดให้ และให้ ม น เป็นเส้นยาวที่กำหนดให้

จะต้องตัดเส้น ม น เอาแต่ส่วนหนึ่งให้ยาวเท่ากับเส้น ก

วิธีทำ. ตั้งแต่จุด ม ลากเส้น มฉ ให้ยาวเท่ากับเส้น ก

ทำตามสมมุติ ๑ บทที่ ๖

เอาจุด ม เป็นศูนย์กลาง มฉ เป็นรัศมี เขียนวงกลม ฉวค ให้เส้นรอบวงตัดเส้น มน ที่จุด ว. จินญากข้อ ๑

เส้น มว จะยาวเท่ากับเส้น ก.

พิสูจน์ เพราะว่า ม เป็นศูนย์กลางของวงกลม ฉวค

เหตุฉะนั้นเส้น มฉ เท่ากับเส้น มว คำไขข้อ ๑๐

แต่เส้น มฉ ได้ทำให้เท่ากับเส้น ก ตามที่ได้สร้างขึ้น

เหตุฉะนั้นเส้น มว กับเส้น ก ต่างก็เท่ากับเส้น มฉ

เหตุฉะนั้น เส้น มว กับเส้น ก จึงเท่ากัน

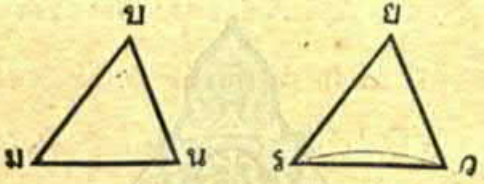
สิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อ ๑

และเส้น มว นี้ ได้ตัดออกจากเส้น มน ตามประสงค์แล้ว

ฮ.ต.ท.

บทที่ ๔

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากัน ๒ ด้าน ๆ ต่อด้าน และมีมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้เท่ากัน จงพิสูตรให้เห็นว่าด้านที่สามของรูปทั้งสองนี้เท่ากัน และพื้นที่ของรูปทั้งสองก็เท่ากัน โดยสนิท ทั้งมุมยักสองมุมก็เท่ากันมุมต่อมุมด้วย



สมมุติให้รูปสามเหลี่ยม บมน กับ ยรว มีด้าน บม เท่ากับด้าน ยร, มีด้าน บน เท่ากับด้าน ยว, กับมีมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้คือมุม มบน เท่ากับมุม ร ยว

จะต้องพิสูตรว่าด้าน มน เท่ากับด้าน รว, ว่ารูป บมน มีพื้นที่เท่ากับรูป รยว โดยสนิท, และว่ามุมที่ยังเหลืออยู่ก็เท่ากันมุมต่อมุม คือมุม บมน เท่ากับมุม ยรว, และมุม บนม ก็เท่ากับมุม ยวร

วิธีพิสูตร เอารูปสามเหลี่ยม บมน วางทับรูป ยรว ให้จุด บ ทับจุด ย และให้เส้น บม ทับเส้น ยร

เพราะว่าด้าน บม เท่ากับด้าน ยร แจ้งอยู่ในโจทย์

เหตุฉะนั้นจุด ม ก็ต้องตกที่จุด ร

อนึ่งมุม มบน เท่ากับมุม รยว แจ้งในโจทย์

เหตุฉะนั้นด้าน บน ก็ต้องตกที่ด้าน ยว เหมือนกัน

และด้าน บน นี้เท่ากับด้าน ยว แจ้งในโจทย์

เหตุฉะนั้นจุด น ก็ต้องตกที่จุด ว พอดี

ในที่นี้ได้พิสูตรแล้วว่าจุด ม ทับจุด ร และจุด น ทับจุด ว

เพราะฉะนั้นเส้น มน จะต้องทับเส้น รว ถ้าไม่ทับจะโค้งตกไป เช่นที่ขีดไว้ในรูป ยรว แล้ว เส้นตรงสองเส้นก็จะบีดช่องว่างให้มิดได้ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เลย เป็นอันขาด

สิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อ ..

เพราะฉะนั้นเส้น มน ต้องทับเส้น รว โดยสนิท

เพราะฉะนั้นเส้น มน เท่ากับเส้น รว สิ่งเห็นจริงแล้วข้อ ๙

เพราะฉะนั้น รูป บมน ประกับกับ รูป ยรว โดยสนิท

เพราะฉะนั้น รูป บมน เท่ากับรูป ยรว

สิ่งเห็นจริงแล้วข้อ ๘

เพราะฉะนั้น มุมอื่น ๆ ก็เท่ากันมุมคือมุม คือมุม บมน เท่ากับมุม ยรว และมุม บนม เท่ากับมุม ยวร

สิ่งเห็นจริงแล้วข้อ ๘

ช.ค.พ.

ช. ค. พ. แปลว่า "ซึ่งต้องพิสูจน์."

ในที่นี้นักเรียนจะสังเกตได้ว่าบทนี้แปลกกว่าบทก่อน ๆ เพราะในข้างท้ายมีอักษร ช. ค. พ. ไม่ใช่ ช. ค. ท. ทั้งนี้เป็นเพราะในบทนี้เราไม่ต้องทำหรือสร้างสิ่งอันใด เป็นแต่ต้องพิสูจน์ว่าสิ่งที่เขากล่าวในเนื้อไขทย์นั้นเป็นจริงแท้เท่านั้น และบทต่อ ๆ ไปในตำราอุลิดนี้ก็ต่างกันเป็น ๒ ชนิด ๆ หนึ่งไขทย์เขาบอกให้เราสร้างหรือทำสิ่งใด ๆ ซึ่งในที่สุดเมื่อเราทำแล้ว และได้พิสูจน์ให้เห็นว่าเป็นจริงดังนั้นแล้ว เราลงอักษร ช. ค. ท. ข้างท้าย. อีกชนิดหนึ่งไขทย์ไม่ได้บอกให้เราสร้างหรือทำสิ่งใด เป็นแต่อ้างว่าสิ่งนั้น ๆ เป็นอย่างนั้น ๆ แล้วให้เราพิสูจน์ให้เห็นว่าจริงดังนั้นจนสิ้นข้อสงสัย เมื่อเราพิสูจน์แล้วในที่สุดเราก็ลงอักษร ช. ค. พ.

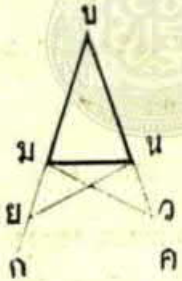
เพราะฉะนั้นในการที่จะเรียกบททั้ง ๒ ชนิดนี้ให้แปลกกัน เพื่อความสดวกแก่ผู้เรียนต่อไป จะเรียกบทชนิดหนึ่งว่า "บท ช. ค. ท." กับบทอีกชนิดหนึ่งว่า "บท ช. ค. พ."

บทที่ ๕

(บท ช. ค. พ.)

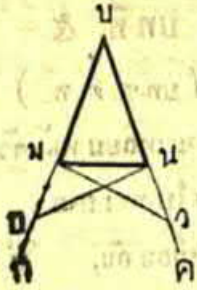
มุม ที่ ฐาน ของรูป สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ด้าง เท่า กัน และ ถ้า ต่อ ด้าน ตั้ง ให้ ยาว ออก ไป ทาง ฐาน มุม ภาย นอก ฐาน ที่ บังเกิด ขึ้น ก็ ย่อม เท่า กัน เหมือน กัน, ให้ พิสูตร ให้ เห็น ว่า ความ จริง เปน ดัง นี้ เสมอ ไป

สมมุติ ให้ บ ม น เปนรูปสาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ซึ่ง มี ด้าน ตั้ง บ ม เท่า กับ ด้าน ตั้ง บ น



(๑) จะ ต้อง ปรูฟ ว่า มุม ที่ ฐาน เท่า กัน คือ มุม บ ม น เท่า กับ มุม บ น ม

ต่อ ด้าน ตั้ง ทั้ง สอง ให้ ยาว ออก ไป ทาง จุด ม และ น จน ถึง จุด ก และ ค



(๒) จะต้องพิสูตรว่า มุม ก ม น กับมุม ค น ม ภายนอกถาน ที่บังเกิดขึ้นนั้นเท่ากัน

วิธีทำ กำหนดจุด ย ขึ้นใน เส้น ม ก

ตัดเส้น บ ค ซึ่งเปนเส้นยาวเอาแต่ส่วน บ ว ให้ยาวเท่ากับเส้น บ ย ซึ่งเปนเส้นสั้น ทำตามเล่ม ๑ บทที่ ๓ อนุญาตข้อ ๓

ลากเส้นตรง ย น และ ม ว

พิสูตร. รูปสามเหลี่ยมสองรูป คือรูป บ ย น กับรูป บ ม ว มีด้าน บ ย เท่ากับด้าน บ ว ได้สร้างขึ้น

กับมีด้าน บ น เท่ากับด้าน บ ม คำไข ๑๗

และมีมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้ทับกันอยู่สนิทเปนมุมเดียวกัน คือมุม ย บ ว เพราะฉะนั้นก็เท่ากัน สิ่งเท่ากับสิ่งแลวยังข้อ ๗

เพราะฉะนั้น รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้มีด้านเท่ากัน ๒ ด้าน ๆ ต่อด้าน และมีมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันเท่ากันด้วย

เพราะฉะนั้น รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ นี้เท่ากันโดยสนิท

เล่ม ๑ บทที่ ๔

เพราะฉะนั้น ด้านที่สามก็เท่ากัน คือด้าน ย น เท่ากับด้าน ม ว และมุมก็เท่ากัน มุมต่อมุม มุม บ ย น เท่ากับมุม บ ว ม มุม บ น ย เท่ากับมุม บ ม ว

เล่ม ๑ บทที่ ๔

อนึ่ง เส้น บ ย เท่ากับเส้น บ ว

ไทยสร้างขึ้น

และเส้น บ ม ก็เท่ากับเส้น บ น

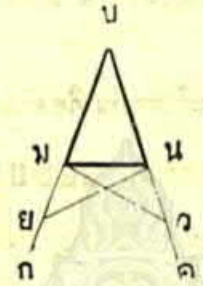
กำไข ๑๙

หักเส้น บ ม ออกเสีย จาก บ ย หักบ น ออกเสีย จาก บ ว เส้น ม ย ที่เหลืออยู่ ก็เท่ากับเส้น น ว ที่เหลืออยู่

สิ่งเท่ากันจริง แล้วข้อ ๓

ในรูปสามเหลี่ยมสองรูป คือรูป ย ม น กับรูป ว น ม ด้าน ม ย ได้พิสูตรแล้วว่าเท่ากับด้าน น ว, ด้าน ย น ก็ได้พิสูตรแล้วว่าเท่ากับด้าน ม ว, และมุมในระหว่างด้านที่เท่ากันนี้ คือมุม ม ย น ก็ได้พิสูตรแล้วว่าเท่ากับมุม น ว ม เหมือนกัน

เพราะฉะนั้น รูปสามเหลี่ยม ทั้งสองนี้ เท่ากันโดยสิทธิ และมุมก็ต้องเท่ากัน มุมคอมุม มุม ยนม ก็เท่ากับมุม วมน, และมุม ยมน ก็เท่ากับมุม วนม เล่ม ๑ บทที่ ๔



คือมุมภายนอกถานเท่ากัน

อนึ่ง ได้พิสูตรแล้วว่ามุม บมว เท่ากับมุม บนย เอามุม วมน กับมุม ยนม ซึ่งเท่ากัน หักออกเสียมุมละมุม ที่เหลืออยู่คือมุม บมน ก็เท่ากับที่เหลืออยู่คือมุม บนม สิ่งเท็นจริงแล้วข้อ ๒

และมุม บมน กับมุม บนม นี้เปนมุมที่ถาน

เพราะฉะนั้นได้พิสูตรแล้วว่ามุมที่ถาน และมุมภายนอกถานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากันจริง

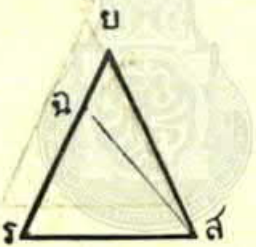
ว.ท.พ.

บทที่ ๖

(บท ซ. ค. พ.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดๆ มีมุมเท่ากับสองมุม ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุมทั้งสองนี้ก็เท่ากันเหมือนกัน

สมมุติให้ ย ร ส เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม ย ร ส เท่ากับมุม ย ส ร



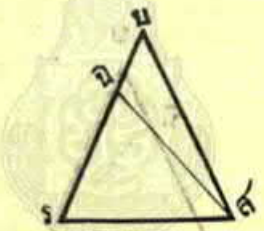
ด้าน ย ร จะต้องเท่ากับด้าน ย ส

พิสูตร ถ้าด้าน ย ร ไม่เท่ากับด้าน ย ส ก็คงต้องยาวกว่ากันอยู่ด้านหนึ่งเป็นแน่

สมมุติว่า ย ร เป็นด้านยาว ตัดด้าน ย ร เอาแต่ส่วน ฉ ร ให้ยาวเท่ากับ ย ส ซึ่งเป็นด้านสั้น เล่ม • บทที่ • ตากเส้น ฉ ส

ในรูปสามเหลี่ยม ยรส กับ ฉรส ด้าน ฉร เท่า กับ ด้าน ยส โดยที่สร้างขึ้น ด้าน รส ทับ กัน เป็น ด้าน ร่วม กันใน ทั้งสองรูป และมุมที่อยู่ ระหว่าง กลาง ด้าน ทั้ง สอง คู่ นี้ ก็ เท่า กัน คือ มุม ฉรส เท่า กับ มุม ยสร แจ้งอยู่ ใน ไพทย์

เพราะฉะนั้น รูปสามเหลี่ยมทั้ง สอง นี้ มี เนื้อ ที่ เท่า กันโดย สนิท เล่ม ๑ บทที่ ๔



แต่ ส่วน จะ เท่า กับ จำนวน เต็ม ของ มัน เองไม่ ได้ เป็น อัน ขาด สิ่งเห็นจริงแล้วข้อ ๘

เพราะ ฉะนั้น รูป สาม เหลี่ยม ฉรส จะ เท่า กับ รูป สามเหลี่ยม ยรส ไม่ ได้

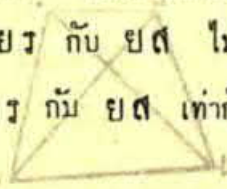
เพราะฉะนั้นที่สมมุติว่าด้าน ยร ยาว กว่า ด้าน ยส นั้นผิด

อนึ่งถ้า จะสม มุติ ว่าด้าน ยส ยาว กว่า ด้าน ยร ก็จะพิสูตร

ได้ ใน ทำนองเดียวกัน ว่าผิด เป็นอันเป็นไปไม่ได้เหมือนกัน.

เพราะฉะนั้นด้าน ย ว กับ ย ส ไม่ยาวไม่สั้นกว่ากัน

เพราะฉะนั้นด้าน ย ว กับ ย ส เท่ากัน



ข.ต.พ.

ต่อไปนี้คำว่า "เพราะว่า" จะใช้เครื่องหมาย "∵" แทน

คำว่า "เพราะฉะนั้น" ,, ,, ∴ ,,

,, "เท่ากับ" ,, ,, = ,,

บทที่ ๗

(ข. ต. พ.)

บนฐานอันเดียวกัน และบนข้างเดียวกัน ก.มี

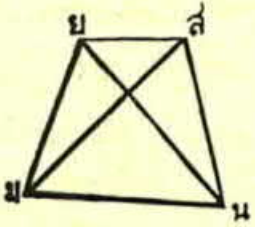
รูปสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีด้านคู่ที่จดกันที่ปลายฐาน

ข้างหนึ่งเท่ากัน ทั้งกับอีกคู่หนึ่งที่จดกันที่ปลายฐานอีก

ข้างหนึ่งก็เท่ากันด้วย ไม่ได้เป็นอันขาด

แม้จะเป็นไปได้ดังนั้น สมมุติให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปคือ

ย ม น กับ ส ม น ซึ่งอยู่บนฐานอันเดียวกันคือ ม น และอยู่



บน ข้าง เดียว กัน มี ด้าน ย ม กับ ส ม ซึ่ง จด กัน ที่ จุด ม ปลาย ถาน ข้าง หนึ่ง เท่า กัน กับ มี ด้าน ส น กับ ย น ซึ่ง จด กัน ที่ จุด น ปลาย ถาน อีก ข้าง หนึ่ง เท่า กัน ด้วย

จะ ต้อง พิสูตร ว่า ทั้ง น เป็น จริง ไม่ ได้ เลย เป็น อัน ขาด

ชนิด ที่ ๑ ให้ยอดของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองต่างอยู่ภายนอกรูป

สร้าง ลาก เส้น ย ส อนุญาต ๑

พิสูตร ใน รูป สาม เหลี่ยม ม ย ส

∴ ด้าน ม ย = ม ส แก้ใน ไพทอ์

∴ มุม ม ย ส = มุม ม ส ย เล่ม ๑ บท ที่ ๕

แต่ มุม ม ย ส ใหญ่ กว่า มุม น ย ส ซึ่ง เป็น แต่ ส่วน ของ มัน เท่า นั้น สิ่ง เต็ม ย่อม ใหญ่ กว่า ส่วน ของ สิ่ง เต็ม ย่อม ๘

∴ มุม มสย ก็ใหญ่กว่า มุม นยส ด้วย

∴ มุม นสย ยิ่งใหญ่กว่า มุม นยส อีกมาก

อนึ่ง ใน รูป สาม เหลี่ยม นยส นั้น

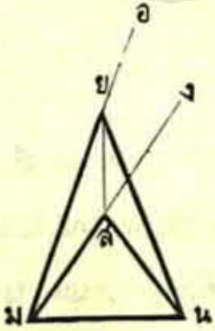
∴ ด้าน นย = ด้าน นส แก้ใน ไพทธ์

∴ มุม นยส = มุม นสย เล่ม ๑ บทที่ ๕

นัยหนึ่ง พิสูตรได้ว่ามุม ทั้ง ๒ นี้ใหญ่กว่า กัน และอีกนัยหนึ่งว่า เท่ากัน

∴ นับ เอา เป็น ถูก ไม่ ได้ เลย

ชนิด ที่ ๒๐ ให้ ยอด ของ สาม เหลี่ยม รูป หนึ่ง อยู่ ภายใน สาม เหลี่ยม อีก รูป หนึ่ง



สร้าง จาก เส้น ยส อนุญาต

ต่อเส้น มย และ มส ตรงออกไปถึง อ และ ง อนุญาต ๒

พิสูตร ในรูปสามเหลี่ยม ย ม ส

∵ ด้าน มย = มส แล้วในไพทย์

∴ มุมภายนอกฉาน คือ มุม อ ย ส กับมุม ง ส ย เท่ากัน
ส่วน • บทที่ ๕

และมุม อ ย ส ใหญ่กว่ามุม น ย ส ซึ่งเป็นแต่ส่วนของมัน

∴ มุม ง ส ย ก็ใหญ่กว่ามุม น ย ส ด้วย

∴ มุม น ส ย ก็ใหญ่กว่ามุม น ย ส อีกมาก

อนึ่งในรูปสามเหลี่ยม น ย ส

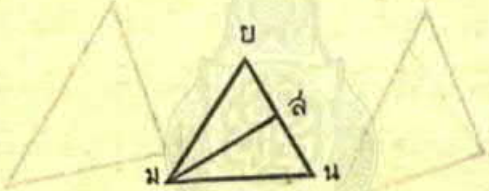
∴ ด้าน น ย = น ส แล้วในไพทย์

∴ มุม น ส ย = มุม น ย ส เล่ม ๑ บทที่ ๔

นัยหนึ่ง พิสูจน์ได้ว่า มุมทั้ง ๒ นี้ ใหญ่กว่ากัน และอีกนัยหนึ่ง พิสูจน์ได้ว่าเท่ากัน

∴ นับเอาเป็นจริงไม่ได้

ชนิดที่ ๓ ให้ยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งอยู่ที่ด้านของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง



ชนิดนี้ไม่ต้องการพิสูจน์ เพราะด้าน น ส จะเท่ากับ น ย คือส่วนจะเท่ากับจำนวนเต็มของมันไม่ได้เป็นอันขาด

สิ่งเท็จจริงข้อ ๘

∴ ที่สมมุติแต่เดิมว่าด้าน ม ย = ม ส และด้าน ย น = น ส นั้นเป็นผิด

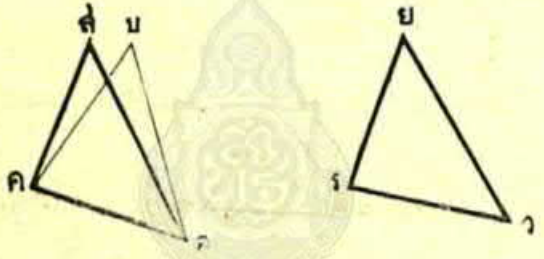
∴ ม ย จะเท่ากับ ม ส และ น ย จะเท่ากับ น ส ไม่ได้เป็นอันขาด

ฮ. ก. พ.

บทที่ ๙

(ช. ด. พ.)

ถ้า สามเหลี่ยม สองรูป มีด้าน ตั้ง ทั้ง คู่ เท่า กัน ด้าน ต่อ ด้าน และ มี ถาน เท่า กัน ด้วย มุม ยอด ของ รูป สามเหลี่ยม ทั้งสอง นี้ ก็ต้อง เท่า กัน เหมือน กัน และ มุม อื่น ๆ ก็ จะ เท่ากัน มุม ต่อมุม



สมมุติ ให้รูป สาม เหลี่ยม ย ร ว กับ ส ค อ มี ด้าน ตั้ง ย ร เท่ากับ ส ค, และ ย ว เท่า กับ ส อ, กับ ให้ ถาน ร ว กับ ค อ เท่า กัน ด้วย

มุม ร ย ว จะเท่า กับ มุม ค ส อ, มุม ย ร ว จะเท่า กับ มุม ส ค อ, และ มุม ย ว ร จะเท่า กับ มุม ส อ ค

พิสูตร แม้เอา รูป ย ร ว วาง ทับ รูป ส ค อ ให้ จุด ร ทับ จุด ค และ ให้ เส้น ร ว ทับ เส้น ค อ แล้ว

$\therefore$ ว ว = ค ย แจ้งใน ไจพ์

$\therefore$ จุด ว ต้องทับจุด ย

$\therefore$ ว ว ประกับกับ ค ย สนิท

เมื่อถานทับกันเปนถานเดียวดังนี้ ด้านตั้งทั้งสองคู่ก็จำเปนต้องทับกันด้วย คือ ย ว ต้องทับ ส ค, และ ย ว ต้องทับ ส ย ถ้าจะไม่ทับจะห่างกันออกไป เช่นเส้น บ ค และ บ ย แล้วบนถานอันเดียวกัน และบนข้างเดียวกัน ก็จะมีสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งมีด้านตั้งทั้งสองคู่เท่ากันคู่ต่อคู่ แต่จะเปนดังนี้ไม่ได้

เล่ม ๑ บทที่ ๗

$\therefore$ ด้าน ย ว ต้องประกับด้าน ส ค ด้าน ย ว ต้องประกับด้าน ส ย

$\therefore$ สามเหลี่ยมทั้งสองประกับกันสนิท

$\therefore$ มุมก็เท่ากันมุมต่อมุม คือมุม ว ย ว = มุม ค ส ย, มุม ย ว ว = มุม ส ค ย, และมุม ย ว ว = มุม ส ย ค สิ่งเท่ากับสิ่ง ข้อ ๘

ซ. ต. พ.

บทที่ ๙

(ช. ค. ท.)

จงผ่ามุมที่กำหนดให้ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน

สมมุติให้ ว ฉ ย เป็นมุมที่กำหนดให้ จะต้องผ่ามุมนี้ออกเป็น ๒ มุมเท่า ๆ กัน

สร้าง. กำหนดจุด ข ขึ้นในเส้น ฉ ว, ตัดเส้น ฉ ย เอาแต่ส่วน ฉ ก ให้ยาวเท่ากับ ฉ ข เล่ม . บทที่ . ๓ ต่อเส้น ข ก, ณเส้น ข ก นี้ สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ ข ก ง ให้ยอด ง อยู่ตรงข้ามกับจุด ฉ เล่ม . บทที่ . ๓ ต่อเส้น ฉ ง

เส้น ฉ ง นี้จะผ่ามุม ว ฉ ย ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน

พิสูตร ในรูปสามเหลี่ยม ทั้งสอง คือ ฉ ข ง กับ ฉ ก ง

∴ ด้าน ฉ ข = ฉ ก ตามที่สร้าง ด้าน ข ง = ก ง คำไขข้อ ๙ และด้าน ฉ ง เป็นด้านร่วมกัน

∴ รูปสามเหลี่ยม ฉ ข ง กับ ฉ ก ง ทั้งสองนี้เท่ากันทุกประการ มุม ข ฉ ง = มุม ก ฉ ง

เล่ม ๑ บทที่ ๘

∴ ได้ผ่ามุม ว ฉ ย ที่กำหนดให้ออกเป็น ๒ มุมเท่า ๆ กัน ด้วยเส้น ฉ ง แล้ว

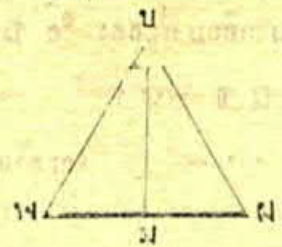
ฮ. ต. ท.

บทที่ ๑๐

(ฮ. ต. ท.)

จงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

สมมุติให้ พ ฝ เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ จะต้องแบ่งเส้นนี้ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



สร้าง บนเส้น พ ฝ สร้างรูปสามเหลี่ยม ด้านเท่าคือ บ พ ฝ เล่ม ๑ บทที่ ๑ ผ่ามุม พ บ ฝ ด้วยเส้น บ ม ให้จุด ม อยู่ในเส้น พ ฝ เล่ม ๑ บทที่ ๙

จุด ม นี้จะแบ่งเส้น พ ฝ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ในรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปคือ บ พ ม กับ บ ฝ ม

∵ ด้าน บ พ = บ ฝ ตำไขข้อ ๑๐

ด้าน บ ม เป็นด้านร่วมกันทั้งสองรูป และมุม พ บ ม = มุม ฝ บ ม โดยสร้าง

∴ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้เท่ากันโดยสนิท ถ้าน พ ม ก็เท่ากับ ฝ ม เล่ม ๑ บทที่ ๔

∴ ได้ตัดเส้นตรง พ ฝ ที่กำหนดให้ออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กันที่จุด ม แล้ว

ว. ต. ท.

แบบฝึกหัด

(สำหรับ ภาค ที่ ๑)

๑) บน เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้ จง สร้าง รูป สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ให้ ด้าน ตั้ง ยาว เท่า เส้น ที่ กำหนด ให้

๒) บน ถาน ที่ กำหนด ให้ จง สร้าง รูป สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ให้ ด้าน ตั้ง ยาว สอง เท่า ของ ถาน ที่ กำหนด ให้ นั้น

๓) ก ข เป็น เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้ ค เป็น จุด ที่ กำหนด ให้ อยู่ ภายนอก เส้น ก ข จง เขียน เส้น ตรง ตั้งแต่ ค ถึง เส้น ก ข ให้ ยาว เท่า กับ เส้น ฉ ที่ กำหนด ให้

๔) กำหนด จุด ก ให้ เป็น ยอด ของ รูป สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว และ จุด ว ให้ เป็น ปลาย ถาน ข้าง หนึ่ง ถาน ของ รูป นี้ ให้ อยู่ บน เส้น ย น ที่ กำหนด ให้ จง หา จุด ปลาย ถาน อีก ข้าง หนึ่ง

๕) ก ข ค ง เป็น เส้น ตรง เส้น หนึ่ง (คือ มี จุด ข และ ค อยู่ ตรง กลาง ระยะ ไม่ เท่า กัน) จง สร้าง รูป สาม เหลี่ยม ก ส ง ให้ ด้าน ก ส เท่า กับ ก ค และ ให้ ด้าน ง ส เท่า กับ ง ข

๖) ในเล่ม ๑ บทที่ ๒ นั้น วิธีเขียนรูปจะลากเส้นตั้งแต่จุด ก ที่กำหนดให้ มาถึงจุด ป หรือ บ ก็ได้ จงทำอย่างลากเส้นมาถึงจุด บ และพิสูตรให้เห็นว่าทำได้เช่นกัน

๗) จงผ่ามุมที่กำหนดให้ออกเป็น ๔ มุมเท่า ๆ กัน

๘) ก เป็นศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมีเส้น กน กับ กว เป็นรัศมี เส้น ก จ ซึ่งผ่ามุม น ก ว ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กันนั้น ตัดเส้น น ว ที่จุด ห ด้วย จงพิสูตรว่า น ห เท่ากับ ห ว

๙) จงพิสูตรให้เห็นว่า เส้นตรงซึ่งผ่ามุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้น ถ้าลากตรงออกมาถึงฐาน จะแบ่งฐานออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กันด้วย

๑๐) ในรูปของเล่ม ๑ บทที่ ๒ นั้น ถ้าเส้น ป ก เท่ากับ ป บ จงชี้ให้เห็นว่ายอด ป ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะอยู่ในเส้นรอบวง บ ย ม

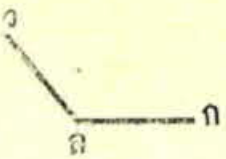
ภาคที่ ๒

คำไข

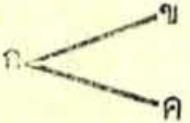
๗ ถ้าเส้นตรง เส้นหนึ่ง ตั้งอยู่บนเส้นตรง อีกเส้นหนึ่ง และตั้งตรงแน่วจนมุมสองมุมที่ประชิดกันนั้นเท่ากัน มุมทั้งสองนี้เรียกว่า **มุมฉาก** ทั้งคู่ และเส้นที่ตั้งตรงอยู่บนอีกเส้นหนึ่งนั้น เรียกว่า **เส้นตั้งได้ฉาก** กับเส้นนั้น

ในรูปนี้ เส้นตรง ล ว เป็นเส้นตั้งได้ฉากกับเส้นตรง ม น เพราะขนาบมุม ม ว ล กับมุม น ว ล ซึ่งเป็นมุมประชิดกัน จึงเท่ากันทั้งสองมุม และเป็นมุมฉากทั้งสองมุมด้วย

๘ **มุมป้าน** คือมุมที่กางมากกว่ามุมฉาก

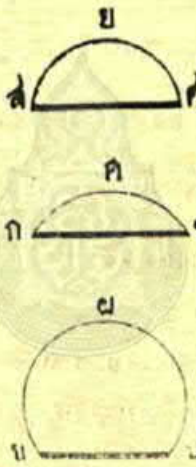


๙ **มุมแหลม** คือมุมที่แคบกว่ามุมฉาก



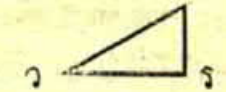
๑๒ **ครึ่ง วง กลม** คือ รูปซึ่งมีเส้นศูนย์กลาง กับส่วน ของเส้นรอบวง ซึ่ง โอบ มา เพียง เส้น ศูนย์ กลาง นี้ เปน อาณาเขตร์

๑๓ **ส่วน ของ วง กลม** คือ รูป ซึ่ง มี เส้น ตรง เส้น หนึ่ง กับส่วนของเส้นรอบวงซึ่งโอบมาเพียงเส้นตรงนั้น เปน อาณา เขตร์

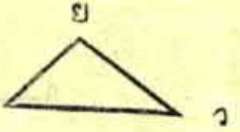


ส่วน ของ วง กลม นี้ บางที เล็ก กว่า ครึ่ง วง กลม เช่น รูป ก ค ข และ บางที ก็ ใหญ่ กว่า ครึ่ง วง กลม เช่น รูป บ ป ฆ จะประมาณว่าเล็กใกล้เคียงใกล้เสมอไปนั้น ไม่ได้ จะ เปน ส่วน ใหญ่ หรือ เล็ก ก็ แล้ว แต่ จะ ตัด วง กลม ด้วย เส้น ตรง ให้ วง กลม นั้น เหลือ อยู่ มาก หรือ น้อย เพียง ใด เท่า นั้น แต่ ให้ สังเกต ให้ รู้ ว่า ถ้า ส่วน ของ วง กลม รูป ไหน มี ศูนย์ กลาง ของ วง กลม อยู่ ภาย ใน ด้วย ส่วน ของ วง กลม รูป นั้น ก็ ใหญ่ กว่า ครึ่ง วง กลม ดัง รูป นี้

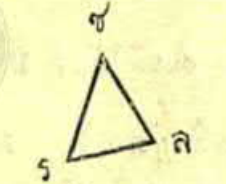
๒๑ สามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก เช่นรูป ร ล ว นี้ มีมุม ว ร ล เป็นมุมฉาก



๒๒ สามเหลี่ยมมุมจัว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมจัว เช่นรูป ม ย ว นี้ มีมุม ม ย ว เป็นมุมจัว



๒๓ สามเหลี่ยมมุมป้าน คือ รูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีมุมเป็นมุมป้านทั้ง ๓ มุม เช่นรูป ช ร ล นี้



ในที่นี้จะแสดงได้ กับจะเข้าใจได้ โดยเล่มบทที่ ๑๗ ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมไม่ว่าชนิดใด ๆ ต้องมีมุมเป็นมุมป้านไม่ต่ำกว่าสองมุมทั้งนั้น

แม้ปลายของเส้นตรงสามเส้นจดกัน สองมุมที่บังเกิดขึ้นเรียกว่า

มุมประชิด

บทที่ ๑๑

(ช. ค. ท.)

จากจุด ๆ หนึ่ง ในเส้นตรงที่กำหนดให้ จงลากเส้นตรงให้ตั้งได้ฉากกับเส้นที่กำหนดให้นี้

สมมุติให้ ภ ม เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้ ห เป็นจุดที่อยู่ภายใน ภ ม

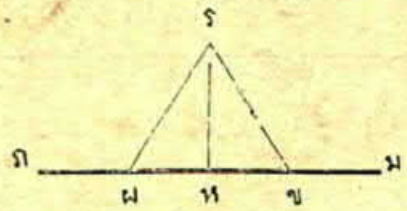
จะต้องลากเส้นตรงตั้งแต่จุด ห ให้ตั้งได้ฉากกับเส้น ม ภ นี้

สร้าง กำหนดจุด ฝ ขึ้นในเส้น ภ ห ตัดเส้น ห ม เอาแต่ส่วน ห ข ให้ยาวเท่ากับ ฝ ห เล่ม ๑ บทที่ ๑

สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนเส้น ฝ ข คือรูป ฝ ร ข เล่ม ๑ บทที่ ๑

ลากเส้น ห ร

เส้น ร ห นี้ จะตั้งได้ฉากกับเส้น ภ ม



พิสูตร. ในรูปสามเหลี่ยม ร ผ ห กับ ร ข ห ทั้งสองนั้น

∴ ด้าน ผ ห = ห ข (สร้าง) ด้าน ห ร

เป็นด้านร่วมกันในทั้งสองรูป และด้าน ผ ร = ข ร

ข้อไข ๑๗

∴ มุม ร ห ผ = มุม ร ห ข

เล่ม ๑ บทที่ ๗

และสองมุมนี้เป็นมุมประชิดกัน

แต่ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง และตั้งตรงแน่วจนมุมสองมุมซึ่งประชิดกันนั้นเท่ากัน มุมทั้งสองนี้เรียกว่ามุมฉากทั้งคู่

ข้อไข ๗

∴ มุม ร ห ผ กับมุม ร ห ข เป็นมุมฉากทั้งคู่

∴ ร ห จึงตั้งได้ฉากกับ ก ม

และได้ฉากเส้น ร ห นี้ไปจากจุด ห ในเส้น ก ม นั้น

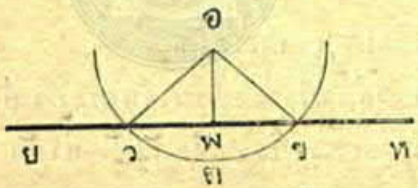
ข. ต. ท.

ต่อไปนี้ คำว่า	"อนุญาต"	จะใช้แต่ย่อๆ ว่า	(อนุ.)
"สิ่งที่เสนอจริงแล้ว"		" "	(จริง)
"คำไขว"		" "	(ไข)
"เล่ม ๑ บทที่ ๑๑"		" "	(๑, ๑๑)
"โจทย์ที่สร้างขึ้น"		" "	(สร้าง)

บทที่ ๑๒

(ช. ค. ท.)

ตั้งแต่จุดที่กำหนดให้ อยู่ภายนอกเส้นตรง ซึ่งไม่มีกำหนดที่สุดที่ปลายทั้งสองข้าง จงลากเส้นตรงให้ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ไม่มีกำหนดปลายนั้น



สมมุติให้ ย ห เป็นเส้นตรง ซึ่งจะต่อให้ยาวตรงออกไปทางปลายข้างไหนก็ได้ไม่มีที่สุด และให้ อ เป็นจุดที่กำหนดให้ อยู่ภายนอกเส้น ย ห นั้น

จะต้องลากเส้นตรงตั้งแต่ อ นั้นให้ตั้งได้ฉากกับเส้น ย ห

วิธีทำ กำหนดจุด ฃ ขึ้นข้างเส้น ย ห ให้อยู่คนละ

ข้างกับจุด อ เอาจุด อ เป็นศูนย์กลาง อ ฑ เป็นรัศมี เขียน วง ว ฑ ฒ ให้เส้นรอบวงตัดเส้น ย ห ที่จุด ว และ ฒ จบ. ตัดเส้น ว ฒ ออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กันที่จุด พ ฉาก เส้น อ พ

เส้น อ พ นี้จะตั้งได้ฉากกับเส้น ย ห ฉากเส้น อ ว และ อ ฒ

พิสูตร ในรูปสามเหลี่ยม อ ว พ กับ อ ฒ พ

∵ ว พ = ฒ พ สร้าง อ ว = อ ฒ ไข

และ อ พ เป็นด้านร่วมกันในทั้งสองรูป

∴ มุม อ พ ว = มุม อ พ ฒ ๑.๘

และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน

∴ มุม อ พ ว กับมุม อ พ ฒ เป็นมุมฉากทั้งคู่ ไข ๗

∴ อ พ ตั้งได้ฉากกับ ห ย ไข ๗

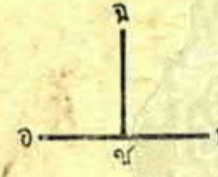
และ อ พ นี้ได้ฉากมาแต่จุด อ ซึ่งกำหนดให้

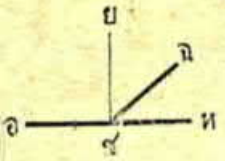
ฃ. ค. ท.

บทที่ ๑๓

(ช. ต. พ.)

ถ้า เส้นตรง เส้นหนึ่ง ตั้งอยู่บน เส้นตรง อีก เส้นหนึ่ง มุมทั้งสอง ที่ ประชิด กัน นั้น คง เป็น มุมฉาก ทั้งคู่ หรือ มิ ฉะนั้น รวม กัน เข้า ทั้งสอง มุม ก็ คง เท่า กับ มุมฉาก สอง มุม





สมมุติให้ เส้นตรง ฉ ช ตั้งอยู่บน เส้นตรง อ ห มุม ฉ ช อ กับ มุม ฉ ช ห จะเป็น มุมฉาก ทั้งคู่ หรือ มิ ฉะนั้น รวม กัน เข้า ทั้งสอง มุม ก็ คง เท่า กับ มุมฉาก สอง มุม

ประการที่ ๑ ถ้า มุม ฉ ช อ เท่า กับ มุม ฉ ช ห มุมทั้งสอง นั้น ก็ เป็น มุมฉาก ทั้งคู่ ไร.

ประการที่ ๒ ถ้า มุม ฉ ช อ ไม่เท่า กับ มุม ฉ ช ห ฉาก เส้นตรง ช ย ให้ ตั้งได้ ฉาก กับ เส้น อ ห

พิสูตร มุม อ ช ฉ = มุม อ ช ย บวกมุม ย ช ฉ เอามุม ฉ ช ห บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ มุม อ ช ฉ บวกมุม ฉ ช ห = มุม อ ช ย บวกมุม ย ช ฉ บวกมุม ฉ ช ห จริง

อนึ่ง มุม ย ช ห = มุม ย ช ฉ บวกมุม ฉ ช ห เอามุม ย ช อ บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ มุม ย ช ห บวกมุม ย ช อ = มุม อ ช ย บวกมุม ย ช ฉ บวกมุม ฉ ช ห จริง

แต่ได้พิสูตรแล้วว่ามุม อ ช ฉ กับมุม ฉ ช ห รวมกันเท่ากับมุมทั้งสามนี้ด้วย

∴ มุม อ ช ฉ บวกมุม ฉ ช ห = มุม ย ช ห บวกมุม ย ช อ จริง

และมุม ย ช ห กับมุม ย ช อ นี้เป็นมุมฉากทั้ง ๒ มุม สร้าง

∴ มุม อ ช ฉ กับมุม ฉ ช ห = มุมฉาก ๒ มุม

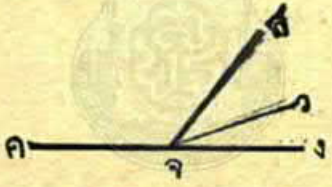
ช. ท. พ.

ต่อไปนี้คำว่า "มุม" จะใช้เครื่องหมาย ∠ แทน คำว่า "เท่ากัน" จะใช้แต่ = ว่า สมมุติ

บทที่ ๑๔

(ช. ต. พ.)

แม้เส้นตรงสองเส้นจดกันที่จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ในเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง คนละข้าง กระทำให้มุมประชิดกันทั้งสองมุม รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก เส้นตรงทั้งสองนี้จะต่อเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน



สมมุติให้เส้นตรง ค จ กับ ง จ จดกันที่จุด จ ซึ่งอยู่ในเส้นตรง จ ฉ และจดกันอยู่คนละข้าง กระทำให้มุมประชิดกันคือ มุม ค จ ฉ กับมุม ง จ ฉ รวมกันเท่ากับมุมฉากสองมุม

เส้นตรง ค จ กับ ง จ นี้จะต่อเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

พิสูตร แม้ ค จ กับ ง จ ไม่ต่อเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน จงต่อเส้น ค จ ตรงออกไปถึงจุด ว ขนฺ.๒

∵ ค ว เป็นเส้นตรง และ ฉ จ ตั้งอยู่บนเส้น ค ว นั้น

∴ ∠ ค จ ฉ บวก ∠ ฉ จ ว = มุมฉาก สองมุม

แต่ ∠ ค จ ฉ บวก ∠ ฉ จ ง = มุมฉาก สองมุม สมมุติ

∴ ∠ ค จ ฉ บวก ∠ ฉ จ ว = ∠ ค จ ฉ บวก ∠ ฉ จ ง

หัก ∠ ค จ ฉ ออกเสียทั้งสองข้าง

∴ ∠ ฉ จ ง = ∠ ฉ จ ว คือส่วนเท่ากับจำนวนเต็มของมันเอง ซึ่งเป็นจริง ไม่ได้เป็นอันขาด จริง

∴ เส้น ค จ ว จะเป็นเส้นตรงไม่ได้

∴ จะมีเส้นที่ต่อตรงเป็นเส้นเดียวได้ก็แต่เส้น จ ง เท่านั้น

ป. ก. พ.

บทที่ ๑๕

(ช. ค. พ.)

ถ้าเส้นตรงสองเส้นไขว้กัน มุมที่อยู่ตรงกันข้ามก็ย่อมเท่ากัน

สมมุติให้เส้น ส ข กับ ผ ห ไขว้กันที่จุด ว มุม ส ว ผ จะเท่ากับมุม ห ว ข และมุม ส ว ห จะเท่ากับมุม ผ ว ข

พิสูตร ∠ ส ว ผ บวก ∠ ส ว ห = สองมุมฉาก ...

และ ∠ ส ว ห บวก ∠ ห ว ข = สอง ∠ ฉาก ...

∴ ∠ ส ว ผ บวก ∠ ส ว ห = ∠ ส ว ห บวก ∠ ห ว ข

หัก ∠ ส ว ห ออกเสียทั้งสองข้าง

∴ ∠ ส ว ผ = ∠ ห ว ข

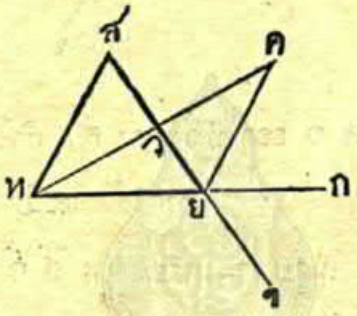
และจะพิสูตรได้ในทำนองเดียวกันว่า ∠ ส ว ห = ∠ ผ ว ข

ช. ค. พ.

บทที่ ๑๖

(ช. ต. พ.)

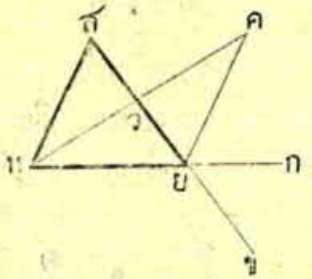
ถ้า ต่อ ด้าน หนึ่ง ด้านใด ของ รูป สาม เหลี่ยม มุม ภาย นอก ที่ บัง เกิด ขึ้น นั้น ย่อม ใหญ่ กว่า มุม ภาย ใน ที่ อยู่ ตรง ข้าม



ให้ ย ส ห เปน รูป สาม เหลี่ยม ต่อ ด้าน ห ย ออก ไป ถึง จุด ก

มุม ภาย นอก ส ย ก ที่ บัง เกิด ขึ้น จะ ใหญ่ กว่า มุม ภาย ใน ที่ อยู่ ตรง ข้าม คือ มุม ส ห ย กับ มุม ห ส ย

สร้าง ตัด เส้น ส ย ออก เปน สอง ส่วน เท่า ๆ กัน ที่ จุด ว ..... ลาก เส้น ห ว จบ.



ต่อเส้น หว ออกไปถึงจุด ค ทำให้เส้น คว ยาวเท่ากับ หว ... ลากเส้น คย

พิสูตร ในรูปสามเหลี่ยม หสว กับ วยค

∵ ด้าน หว = วค และ วส = วย

และ ∠สวห = ∠ยวค ...๔

∴ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้เท่ากันโดยสนิท ∠หสว ก็เท่ากับ ∠วยค ...

∠วยค เป็นแค่ส่วนของ ∠สยก

∴ ∠สยก ใหญ่กว่า ∠หสย มาก คือมุมภายนอกใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

ถ้า ลาก เส้น ส ย ต่อ ออกมาถึง จุด ช และสร้าง อย่าง ทำนอง ข้าง บน นั้น ก็ จะ พิสูตร ได้ เช่น เดียว กัน ว่า √ห ย ช ใหญ่ กว่า √ส ห ย

แต่ √ห ย ช = √ส ย ก

∴ √ส ย ก ก็ใหญ่ กว่า √ส ห ย ด้วย คือ ใหญ่ กว่า มุม ภายใน ที่ อยู่ตรง ข้าม อีก มุม หนึ่ง

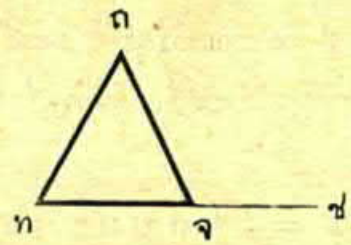
ช. ต. พ.

บทที่ ๑๗

(ช. ต. พ.)

รูป สาม เหลี่ยม ใด ๆ มุม สอง มุม รวม กัน ลง เล็ก กว่า มุม ฉาก สอง มุม

นัก เรียน จะ สังเกต เห็น ได้ ว่า ใน โจทย์ หรือ ใน คำ นำ (คือ คำ เฉลย โจทย์ นั่น) เรา ไม่ใช้ เครื่อง หมาย แทน คำ พูด เช่น √ หรือ = เลย เป็น อัน ขาด เรา ใช้ คำ เต็ม ที เดียว เครื่อง หมาย เหล่า นี้ ใช้ แต่ ใน เวลา พิสูตร เท่า นั้น



ให้ ท ถ จ เปน รูป สาม เหลี่ยม มุมใด ๆ ของ รูป นี้ รวม กัน เข้า สอง มุม ก็ คง เล็ก กว่า มุม ฉาก สอง มุม

ลาก เส้น ท จ ต่อ ออก ไป ถึง ช ขบ. ๒

พิสูตร √ ภาย นอก ถ จ ช ใหญ่ กว่า √ ภาย ใน ที่ ตรง ข้าม คือ √ ถ ท จ ขบ. ๑๖

เอา √ ถ จ ท บวก เข้า ทั้ง สอง ข้าง

∴ √ ถ ท จ บวก √ ถ จ ท เล็ก กว่า √ ถ จ ช บวก √ ถ ท จ

แต่ √ ถ จ ช บวก √ ถ จ ท = สอง √ ฉาก ขบ. ๑๓

∴ √ ถ ท จ บวก √ ถ จ ท เล็ก กว่า สอง √ ฉาก

และ ถ้า ต่อ ด้าน อื่น ๆ ก็ จะ พิสูตร ได้ ใน ทำนอง เดียว กัน ว่า

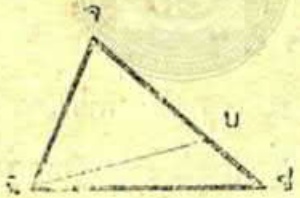
√ ท ถ จ บวก √ ถ จ ท หรือ √ จ ท ถ บวก √ ท ถ จ เล็กกว่าสอง √ ฉาก

ซ. ต. พ.

บทที่ ๑๘

(ซ. ต. พ.)

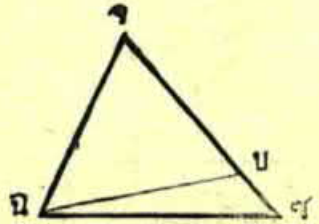
ใน รูป สาม เหลี่ยมใด ๆ มุม ที่ อยู่ตรง ข้าม กับ ด้าน ยาว เป็น มุมใหญ่ กว่า มุม ที่ อยู่ตรง ข้าม กับ ด้าน สั้น



สมมุติ ให้ จ ฉ ซ เป็น รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มี ด้าน จ ซ ยาว กว่า ด้าน จ ฉ

มุม จ ฉ ซ จะใหญ่ กว่า มุม ฉ ซ จ

สร้าง ตัด เส้น จ ซ เอา แต่ ส่วน จ บ ให้ ยาว เท่า กับ



เส้น จ ฉ ... ลากเส้น ฉ ช

พิสูตร ใน รูป สาม เหลี่ยม จ ฉ ช

∵ ด้าน จ ฉ = จ ช สร้าง

∴ ∠ จ ฉ ช = ∠ จ ช ฉ ๕.๔

∴ ∠ จ ฉ ช ใหญ่ กว่า ∠ จ ช ฉ ด้วย

แต่ ∠ จ ช ฉ เป็น ∠ ภาย นอก และใหญ่ กว่า

ฉ ช ช ซึ่ง เป็น ∠ ภายใน และ อยู่ ตรง ข้าม ๑, ๑๖

∴ ∠ จ ฉ ช ยังใหญ่ กว่า ∠ ฉ ช จ อีก มาก

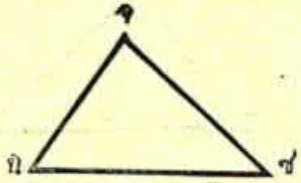
ช. ต. พ.

บท ที่ ๑๙

(ช. ต. พ.)

ใน รูป สาม เหลี่ยม ใด ๆ ด้าน ที่ อยู่ ตรง ข้าม กับ มุม ใหญ่

ย่อม ยาว กว่า ด้าน ที่ อยู่ตรง ข้าม กับ มุม เล็ก



สมมุติให้ จ ณ ช เปน รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มี มุม จ ณ ช ใหญ่ กว่า มุม จ ช ณ

ด้าน จ ช จะ ยาว กว่า ด้าน จ ณ

พิสูตร ถ้า ด้าน จ ช ไม่ ยาว กว่า ด้าน จ ณ ก็ คง สั้น กว่า หรือ เท่า กับ ด้าน จ ณ

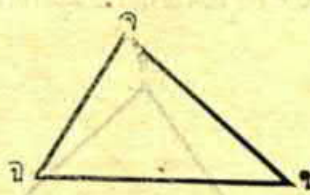
แม้ ด้าน จ ช สั้น กว่า ด้าน จ ณ √ ณ ช จ คง ใหญ่ กว่า √ จ ณ ช ๑,๑๙

แต่ หา เปน ดัง นั้น ไม่ สมมุติ

∴ ด้าน จ ช ไม่ สั้น กว่า ด้าน จ ณ

แม้ ด้าน จ ช เท่า กับ ด้าน จ ณ √ จ ช ณ คง เท่า กับ √ จ ณ ช ๑,๔

แต่ หา เปน ดัง นั้น ไม่ สมมุติ



∴ ด้าน จ ช ไม่เท่ากับด้าน จ ฉ

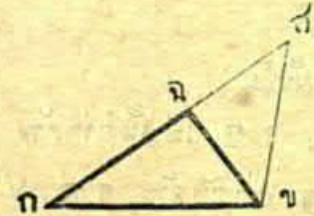
∴ จ ช ต้องยาวกว่าด้าน จ ฉ

ช. ต. พ.

บทที่ ๒๐

(ช. ต. พ.)

ด้านคู่ใด ของรูปสามเหลี่ยม รูปหนึ่ง รวมกัน ย่อมยาวกว่าด้านที่สาม



สมมุติให้ ก ฉ ช เป็นรูปสามเหลี่ยม ด้านคู่ใด ๆ รวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม คือด้าน ก ฉ บวก ฉ ช ย่อมยาว

กว่า ก ข, ฉ ข บวก ข ก ตง ยาวกว่า ฉ ก, และ

ข ก บวก ก ฉ ตง ยาวกว่า ฉ ข

สร้าง. ต่อเส้น ก ฉ ตรงออกไปถึง ส ขอ. ๖

ให้ ฉ ส ยาวเท่า ฉ ข ขอ. ๓ ลากเส้น ส ข ขอ. ๑

พิสูตร ใน รูป สาม เหลี่ยม ฉ ส ข

∴ ฉ ส = ฉ ข สร้าง

∴ √ ฉ ส ข = √ ฉ ข ส ข. ๔

∴ √ ก ข ส ใหญ่กว่า √ ฉ ส ข

และใน รูป สาม เหลี่ยม ก ส ข

∴ √ ก ข ส ใหญ่กว่า √ ก ส ข

∴ ด้าน ก ส ยาวกว่าด้าน ก ข ข. ๗

แต่ ก ส = ก ฉ บวก ฉ ข .

∴ ก ฉ บวก ข ฉ ยาวกว่า ก ข

และจะพิสูตรได้ใน ทำนองเดียวกัน ว่า ข ฉ บวก ข ก

ยาวกว่า ก ฎ ฉ และ ก ฎ มุม ก ฎ ยาวกว่า ฉ ฎ

ฮ. ต. พ.

บท ที่ ๒๑

(ฮ. ต. พ.)

ถ้า ลากเส้น ตรง ตั้งแต่ ปลาย ทั้ง สอง ของ ด้าน หนึ่ง แห่ง รูป สาม เหลี่ยม ไป สู่ จุด หนึ่ง ภายใน รูป สาม เหลี่ยม นั้น เส้น ตรง ทั้ง สอง นั้น รวม กัน ย่อม สั้น กว่า ด้าน อีก ๒ ด้าน รวม กัน แต่ มุม ที่ บัง เกิด ขึ้น ย่อม กว้าง กว่า มุม แห่ง ด้าน ทั้ง ๒ นั้น

สมมุติให้ ก ฉ ห เป็น รูป สาม เหลี่ยม ให้ ฎ เป็น จุด อยู่ ภายใน รูป นี้ ลาก เส้น ตรง ฉ ฎ และ ห ฎ

(๑) เส้น ฉ ฎ กับ ห ฎ รวม กัน จะ สั้น กว่า ฉ ก กับ ห ก รวม กัน

(๒) มุม ฉ ข ห จะกว้างกว่ามุม ฉ ก ห ลากเส้น ฉ ข ต่อไปถึงจุด ส ในเส้น ก ห

พิสูตร (๑) ในรูปสามเหลี่ยม ก ฉ ส ด้าน ฉ ก บวก ก ส ยาวกว่าด้าน ฉ ส ..๒..

บวกด้าน ส ห เข้าทั้งสองข้าง

∴ ฉ ก บวก ก ห ยาวกว่า ฉ ส บวก ส ห

กับในรูปสามเหลี่ยม ข ส ห ด้าน ข ส บวก ส ห ยาวกว่าด้าน ข ห ..๓..

บวก ข ฉ เข้าทั้งสองข้าง

∴ ฉ ส บวก ส ห ยาวกว่า ข ฉ บวก ข ห

แต่ได้พิสูตรแล้วว่า ฉ ก บวก ก ห ยาวกว่า ฉ ส บวก ส ห

∴ ฉ ก บวก ก ห ยังยาวกว่า ข ฉ บวก ข ห อีกมาก

(๒) ∨ ภายนอก ฉ ข ห ของรูปสามเหลี่ยม ข ส ห ใหญ่กว่า ∨ ภายใน ข ส ห ที่อยู่ตรงข้าม ..๔..

แต่ $\triangle$ ภายนอก ข ฉ ห ของรูปสามเหลี่ยม ฉ ก ส ก็ใหญ่กว่า $\triangle$ ภายใน ฉ ก ส ที่อยู่ตรงข้ามเหมือนกัน ...

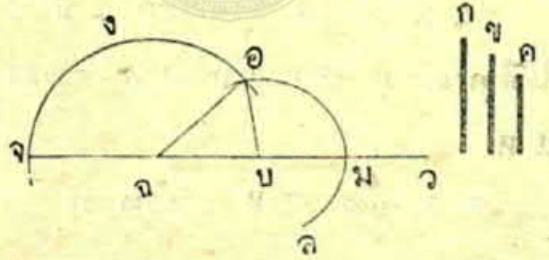
$\therefore$ $\triangle$ ฉ ข ห กลับใหญ่กว่า $\triangle$ ฉ ก ห อีกมาก

ข. ต. พ.

บทที่ ๒๒

(ข. ค. ท.)

ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม ให้มีด้านทั้งสามเท่ากับเส้นตรงสามเส้นที่กำหนดให้ ซึ่งรวมกันเข้าคู่ใด ๆ ย่อมยาวกว่าเส้นที่สามเสมอไป



สมมุติให้ ก, ข, ค, เปนเส้นตรงสามเส้นที่กำหนดให้ ซึ่งรวมกันเข้าคู่ใด ๆ คงยาวกว่าเส้นที่สามเสมอไป

จะต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีด้านทั้งสามเท่ากับเส้นทั้ง

ตามที่กำหนดให้นั้น

วิธีทำ ลากเส้น จ ว ให้มีที่สุดปลายที่จุด จ แต่ไม่มีที่สุดปลายทางจุด ว

ในเส้น จ ว ตัดเส้น จ ฉ ให้เท่ากับเส้น ก, ฉ ป ให้เท่ากับเส้น ข, และ ป ม ให้เท่ากับเส้น ค ...

เอา ฉ เป็นศูนย์กลาง ฉ จ เป็นรัศมี เขียนวงกลม จ ง อ, เอา ป เป็นศูนย์กลาง ป ม เป็นรัศมี เขียนวงกลม อ ม ล ให้ไขว้วง จ ง อ ที่จุด อ ...

ลากเส้น อ ฉ และ อ ป ...

รูปสามเหลี่ยม ฉ อ ป นี้จะมีด้านทั้งสามเท่ากับ ก, ข, และ ค

พิสูจน์ ∵ ฉ เป็นศูนย์ของวงกลม จ ง อ

∴ จ ฉ = ฉ อ ...นิยาม

∴ ฉ อ = ก ...จริง

∵ ป เป็นศูนย์กลางของวงกลม อ ม ล

∴ ป อ = ป ม ...นิยาม

∴ บ ข = ก

และ ฉ บ = ข

∴ รูปสามเหลี่ยม ฉ บ ข มีด้าน ฉ ข, ฉ บ, ข บ เท่ากับเส้นตรง ก, ข, ค ตามลำดับ

ข. ต. ท.

บทที่ ๒๓

(ข. ต. ท.)

ตรงจุดหนึ่งภายในเส้นตรงที่กำหนดให้ จงลากเส้นตรงทำมุมให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้

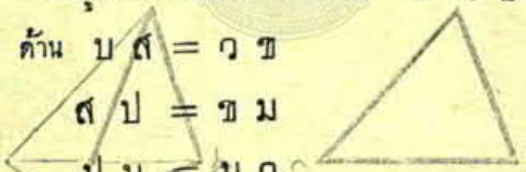
สมมุติให้ ก ข เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้ ว เป็นจุดที่กำหนดให้อยู่ในเส้น ก ข และให้ บ ส ป เป็นมุมที่กำหนดให้

จะต้องลากเส้นตรงจากจุด ข ให้ทำมุมกับเส้น ก ข
ทางเท่ากับมุม บ ส ป ที่กำหนดให้นั้น

วิธีทำ กำหนดจุด บ อันในเส้น บ ส, และจุด ป
อันในเส้น ป ส, ลากเส้น บ ป

ตัดเส้น ข ก เอาแต่ส่วน ข ว ให้ยาวเท่ากับ บ ส
บนเส้น ว ข สร้างรูปสามเหลี่ยม ว ข ม ให้ด้าน ข ม
เท่ากับ ส ป และ ม ว เท่ากับ ป บ
มุม ว ข ม จะเท่ากับมุม บ ส ป

พิสูตร ในรูปสามเหลี่ยม บ ส ป กับ ว ข ม



∴ ด้าน บ ส = ว ข สร้าง
ส ป = ข ม สร้าง
ป บ = ม ว สร้าง
∴ √ ว ข ม = √ บ ส ป

ดังนั้น ข ม ทำมุมกับ ก ข ให้กว้างเท่ากับมุม บ ส ป
ที่กำหนดให้นั้นแล้ว

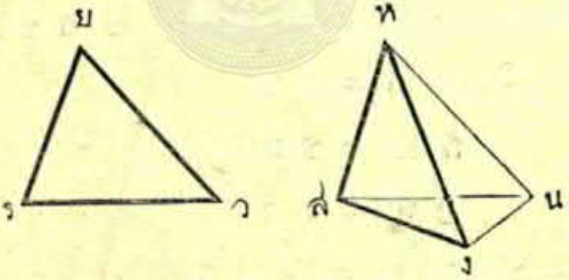
ข. ต. ท.

ต่อไปนี้คำว่า "รูปสามเหลี่ยม" จะใช้สัญลักษณ์ △ แทน และคำว่า "วงกลม" จะใช้สัญลักษณ์ ⊙ แทน

บทที่ ๒๓

(ช. ค. พ.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านสองด้านเท่ากันด้านต่อด้านแต่มีมุมในระหว่างด้านคู่ของรูปหนึ่งใหญ่กว่ามุมในระหว่างด้านคู่ของอีกรูปหนึ่ง ฐานของรูปที่มีมุมใหญ่จะยาวกว่าฐานของรูปที่มีมุมเล็ก



สมมุติให้ ย ร ว กับ ห ส ง เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีด้าน ย ร เท่ากับ ห ส, ด้าน ย ว เท่ากับ ห ง, แต่มุม ร ย ว ใหญ่กว่ามุม ส ห ง

ถาน ร ว จะยาวกว่า ถาน ส ง

ต้องสมมุติให้เส้น ห ส สั้นกว่า ห ง ด้วย

สร้าง ลากเส้น ห น จากจุด ห ในเส้น ห ส และลากไปทางข้างเดียวกับเส้น ห ง ให้มุม ส ห น กางเท่ากับมุม ร ย ว ๐,๖๐ ตัดเส้น ห น ให้เท่ากับ ห ง หรือ ย ว ๐,๑ ลากเส้น ส น กับ ง น

พิสูจน์ ใน △ ย ร ว กับ ห ส น

∵ ย ร = ส ห สมมุติ

ย ว = ห น สร้าง

∨ ร ย ว = ∨ ส ห น สร้าง

∴ △ ทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ ๐,๑

∴ ถาน ร ว = ถาน ส น

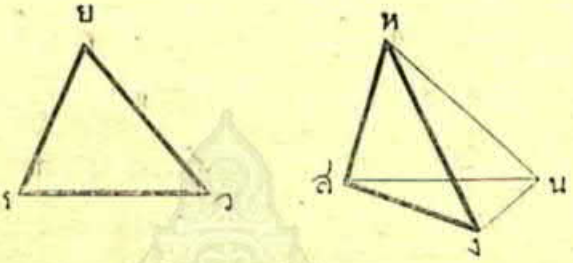
อนึ่งใน △ ห ง น

∵ ห ง = ห น สร้าง

∴ ∨ ห ง น = ∨ ห น ง ๐,๔

แต่ $\angle$ ห น ง ใหญ่กว่า $\angle$ ส น ง

$\therefore$ $\angle$ ห ง น ก็ใหญ่กว่า $\angle$ ส น ง ด้วย



$\therefore$ $\angle$ ส ง น ยังใหญ่กว่า $\angle$ ส น ง อีกมาก

ใน $\triangle$ ส ง น

$\therefore$ $\angle$ ส ง น ใหญ่กว่า $\angle$ ส น ง

$\therefore$ ส น ยาวกว่า ส ง

แต่ได้พิสูตรแล้วว่า ส น = ร ว

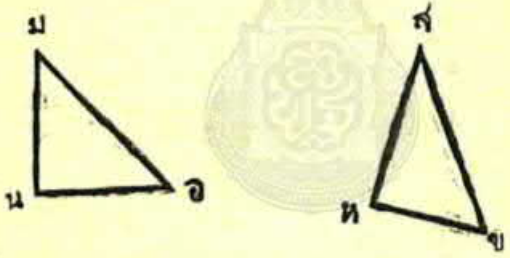
$\therefore$ ร ว ก็ยาวกว่า ส ง

ช. ก. พ.

บทที่ ๒๕

(ช. ค. พ.)

ถ้า รูป สาม เหลี่ยม สอง รูป มี ด้าน สอง ด้าน เท่า กัน ด้าน ต่อ ด้าน แต่ ถาน ของ รูป หนึ่ง ยาว กว่า ถาน ของ อีก รูป หนึ่ง มุม ใน ระหว่าง ด้าน คู่ ของ รูป ที่ มี ถาน ยาว จะใหญ่ กว่า มุม ใน ระหว่าง ด้าน คู่ ของ รูป ที่ มี ถาน สั้น

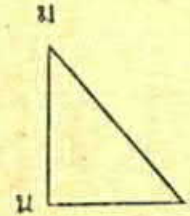


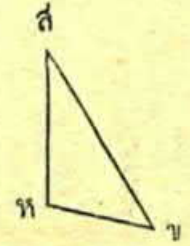
สมมุติให้ ม น อ กับ ส ห ข เปน รูป สาม เหลี่ยม สอง รูป ที่ มี ด้าน ม น เท่า กับ ส ห ด้าน ม อ เท่า กับ ส ข แต่ ถาน น อ ยาว กว่า ห ข

มุม น ม อ จะใหญ่ กว่า มุม ห ส ข

พิสูตร ถ้า √ น ม อ ไม่ใหญ่ กว่า √ ห ส ข

ก็ คง เท่า กัน หรือ เล็ก กว่า





ถ้า เท่า กัน แล้ว ถาน น จ ก็จะเท่า กับ ห ข ...

แต่ หา เป็น เช่น นั้น ไม่ สมมุติ

∴ จะ เท่า กัน ไม่ ได้

ที่ จะ เล็ก กว่า ก็ไม่ได้ เพราะ ถ้า ∠ น ม จ เล็ก กว่า ∠ ห ส ข แล้ว ถาน น จ ก็จะสั้นกว่าถาน ห ข ...

แต่ หา เป็น เช่น นั้น ไม่ สมมุติ

∴ ∠ น ม จ ไม่ เท่า กับ หรือ เล็ก กว่า ∠ ห ส ข

∴ ∠ น ม จ ต้องใหญ่ กว่า ∠ ห ส ข

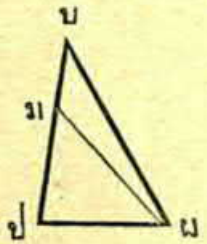
ป. ก. พ.

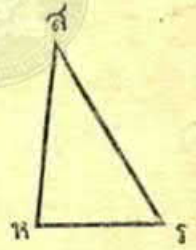
บทที่ ๒๖

(ช. ค. พ.)

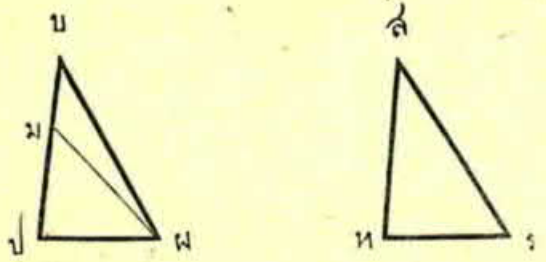
ถ้า รูป สาม เหลี่ยม สอง รูป มี มุม สอง มุม เท่า กัน มุม ต่อ มุม และ มี ด้าน เท่า กัน ด้าน หนึ่ง จะ เปน ด้าน ใน ระหว่าง มุม หรือ ด้าน ที่ ตรง ข้าม กับ มุม ก็ ได้ รูป สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง นั้น จะ เท่า กัน สนิท

ประการ ที่ ๑ อย่าง ที่ ด้าน เท่า เปน ด้าน ใน ระหว่าง มุม





สมมุติ ให้ บ ป ผ กับ ส ห ร เปน สาม เหลี่ยม สอง รูป ที่ มี มุม บ ป ผ เท่า กับ มุม ส ห ร และ มุม บ ผ ป เท่า กับ มุม ส ร ห กับ มี ด้าน ป ผ เท่า ด้าน ห ร



รูป สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง นั้น จะ เท่า กัน สนิท คือ บ ป จะ เท่า กับ ส ห, บ ผ จะ เท่า กับ ส ร, และ มุม ป บ ผ จะ เท่า กับ มุม ห ส ร

ถ้า บ ป ไม่ เท่า กับ ส ห ก็ คง ยาว กว่า หรือ สั้น กว่า ถ้า จะ เป็น ไป ได้ ก็ สมมุติ ว่า บ ป ยาว กว่า ส ห

สร้าง ตัด บ ป เอา แต่ ส่วน ป ม ให้ ยาว เท่า กับ ห ส ฯ ลาก เส้น ม ผ

พิสูตร ใน △ ม ป ผ กับ ส ห ร

∵ ม ป = ส ห สร้าง

ป ผ = ห ร สมมุติ

∠ ม ป ผ = ∠ ส ห ร สมมุติ

∴ △ ทั้งสองนี้ เท่ากันสนิท ๑, ๔

∠ ม ผ ป ก็เท่ากับ ∠ ส ร ห

แต่ ∠ บ ผ ป = ∠ ส ร ห สมมุติ

∴ ∠ บ ผ ป = ม ผ ป จริง

คือส่วนเท่ากับจำนวนเต็มของมัน ซึ่งจะเป็นจริงไม่ได้

ถ้าจะสมมุติให้ บ ป สั้นกว่า ส ห ก็จะพิสูตรได้

ในทำนองเดียวกันว่าผิด

∴ ที่ บ ป จะไม่เท่ากับ ส ห นั้นไม่ได้

∴ บ ป ต้องเท่ากับ ส ห

ใน △ บ ป ผ กับ ส ห ร

∴ บ ป = ส ห พิสูตร

ป ผ = ห ร สมมุติ

และ ∠ บ ป ผ = ∠ ส ห ร สมมุติ

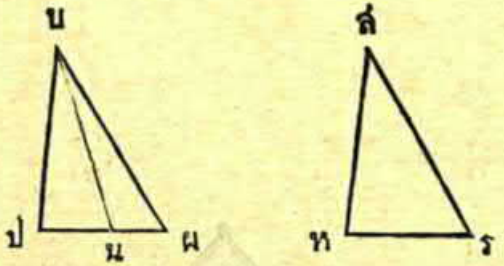
∴ △ ทั้งสองเท่ากันสนิท ๑, ๔

ด้าน บ ผ = ส ร

และ ∠ ป บ ผ = ∠ ห ส ร

ป. ต. พ.

ประการที่ ๒๖ อย่างที่ ด้าน เท่า เปน ด้าน ตรง มุม เท่า ข้าม



คราวนี้ สมมุติให้ สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง คือ บ ป ผ กับ ส ห ร นี้มี มุม บ ป ผ กับมุม บ ผ ป เท่ากับมุม ส ห ร และมุม ส ร ห มุม ต่อ มุม และมี ด้าน บ ป เท่ากับ ด้าน ส ห

รูป สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง นี้ ก็ จะ เท่ากันโดย สนิท คือ ป ผ จะ เท่ากับ ห ร, บ ผ จะ เท่ากับ ส ร, และมุม ป บ ผ จะ เท่ากับมุม ห ส ร

ถ้า ป ผ ไม่ เท่ากับ ห ร ก็ ต้อง ยาว กว่า หรือ สั้น กว่า สมมุติว่า ยาว กว่า

สร้าง ตัด ป ผ เอาแต่ส่วน ป น ให้ยาวเท่ากับ ห ร (๑. ๓) ลากเส้น บ น

พิสูตร ใน △ บ ป น กับ ส ห ร

∵ บ ป = ส ห สมมุติ

ป น = ห ร สร้าง

√ บ ป น = √ ส ห ร สมมุติ

∴ △ ทั้งสองเท่ากันสนิท ...

√ บ น ป = √ ส ร ห

แต่ √ บ ผ ป = √ ส ร ห สมมุติ

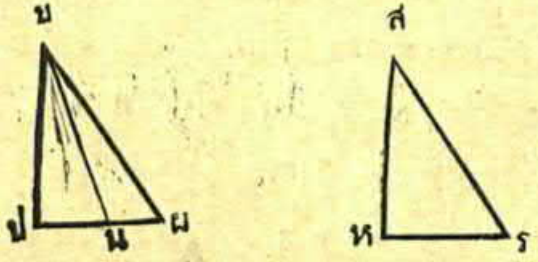
∴ √ บ น ป = √ บ ผ ป จริง

คือ มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม ซึ่งเป็นจริงไม่ได้ ...

∴ ป ผ จะไม่เท่า ห ร ไม่ได้

∴ ป ผ ต้องเท่ากับ ห ร

ใน △ บ ป ผ กับ ส ห ร



∴ ป ผ = ห ร

บ ป = ส ห

√ บ ป ผ = √ ส ห ร

∴ △ ทั้ง สอง เท่า กัน สนิท

ด้วย บ ผ = ส ร

และ √ ป บ ผ = √ ห ส ร

ป. ท. พ.

เมื่อถึงที่สุดตอนนี้แล้ว ครูจะสั่งเกต บทที่ ๑, ๗, และ ๒๖ ให้เข้าใจดีไว้ เพราะเป็นบทมีลักษณะคล้ายกัน ที่ว่าด้วย รูปสามเหลี่ยมสอง รูปเท่ากัน

เปรียบเทียบโดยย่อก็จะสังเกตจำไว้แต่เพียงเท่านี้ คือ

รูปสามเหลี่ยม สองรูปจะเท่ากันสนิท ด้านทั้งสามจะเท่ากันด้านต่อด้าน และมุมทั้งสามจะเท่ากันมุมต่อมุม ต่อเมื่อ

(๑) มีด้านเท่ากันสองด้าน มุมเท่ากันมุมหนึ่งที่อยู่ในมุมในระหว่างด้านที่เท่ากัน (บทที่ ๔)

(๒) มีด้านเท่ากันทั้งสามด้าน (บทที่ ๘)

(๓) ก. มีมุมเท่ากันสองมุม และมีด้านในระหว่างมุมที่เท่ากันด้วย

ข. มีมุมเท่ากันสองมุมและมีด้านที่ตรงข้ามกับมุมที่เท่ากันด้วย (บทที่ ๒๖)

ทั้งสามบทที่กล่าวมาแล้วนี้ใช้ในการพิจารณาบ่อยมาก และผู้แรกเรียนมักหลงลืมได้บ่อยๆ ดังจะชักอุทาหรณ์มาไว้ทบทวนเรื่องข้างบ้าง

อย่าว่าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันสนิท เมื่อ

(๑) มีมุมสามมุมเท่ากัน

(๒) มีด้านเท่ากันสองด้าน มีมุมเท่ากันมุมหนึ่ง แต่หาใช่มุมในระหว่างด้านที่เท่ากันไม่

แบบฝึกหัด

(สำหรับภาคที่ ๒)

๑) ถ้า บ ส และ ค ย เป็นเส้นผ่านมุมที่ถาน บ ค

ของ รูป สาม เหลี่ยม น่า จั่ว อ บ ค และ ต่อ ออก ไป พบ ด้าน ที่ ตรง ข้าม กับ มุม ที่ จุด ส และ ย จง พิสูตร ว่า รูป สาม เหลี่ยม ย บ ค กับ ส ค บ เท่า กัน โดย สนิท

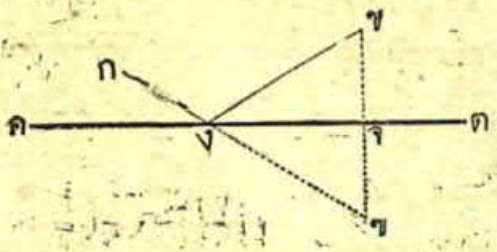
๒) จง พิสูตร ว่า เส้น ตรง ทั้ง สอง ที่ ลาก ตั้ง แต่ ปลาย ถาน ของ รูป สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ให้ ตั้ง ได้ ฉาก กับ ด้าน ที่ อยู่ ตรง ข้าม นั้น ยาว เท่า กัน

๓) จุด หนึ่ง จุด ใด ใน เส้น ที่ ผ่า มุม ย่อม มี ระยะ ทาง จาก เส้น ทั้ง สอง ของ มุม นั้น เท่า กัน เสมอ

๔) ถ้า เส้น ผ่า มุม ยอด ตั้ง ได้ ฉาก กับ ถาน ของ รูป สาม เหลี่ยม ๆ นั้น เปน หน้า จั่ว

๕) บรรดา เส้น ตรง ที่ จะ ลาก จาก จุด ที่ กำหนด ไว้ มา สู่ เส้น ตรง ที่ กำหนด ไว้ เส้น ที่ ตั้ง ได้ ฉาก เปน เส้น สั้น ที่ สุด เส้น อื่น ที่ ใกล้ เส้น นั้น สั้น กว่า เส้น ที่ ไกล ออก ไป และ จะ มี เส้น ที่ เท่า กัน ได้ แต่ เปน คู่ ๆ คือ ที่ อยู่ คน ละ ข้าง ของ เส้น ตั้ง ได้ ฉาก

๖) จาก จุด ที่ กำหนด ให้ สอง จุด อยู่ ข้าง เดียว กัน ของ เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้ อีก เส้น หนึ่ง จง ลาก เส้น ตรง สอง เส้น ถึง จุด หนึ่ง ใน เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้ นั้น ให้ บัง เกิด มุม สอง มุม เท่า กัน



วิธีทำ สมมุติให้ ค ต เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ ๆ ก และ ข เป็นจุดสองจุดที่กำหนดให้ อยู่ข้างเดียวกันของเส้น ค ต

จะต้องลากเส้นตรงจาก ก และ ข ถึงจุด ง ในเส้นตรง ค ต ให้มุม ก ง ค เท่ากับมุม ข ง ต

สร้าง ลากเส้น ข จ ให้ตั้งได้ฉากกับเส้น ค ต ๑.๑๒ และให้ จ อยู่ในเส้น ค ต ต่อ ข จ ลงไปถึง ข ทำให้ จ ข ยาวเท่ากับ ข จ ๑.๓ ลากเส้น ก ข ตัดเส้น ค ต ที่จุด ง ลากเส้น ข ง

ก ง กับ ข ง นี้จะเป็นเส้นตรงที่ต้องประสงค์ คือที่จะกระทำมุม ก ง ค ให้เท่ากับมุม ข ง ต

(ต่อไปจึงพิสูจน์ให้สำเร็จ)

๗ จง ลาก เส้น ตรง ผ่า จุด ที่ กำหนดให้ เส้น หนึ่ง เพื่อ ว่า เมื่อ เส้น ตรง สอง เส้น ที่ ได้ ลาก มา จาก จุด ที่ กำหนดให้ อีก สอง จุด จะ ได้ ตั้ง ได้ ฉาก กับ เส้น นั้น และ ทั้ง จะได้ ยาว เท่า กัน ทั้ง สอง เส้น ด้วย ทั้ง นี้ จะ ทำ ไม่ ได้ เมื่อ จุด ทั้ง สาม เป็น ประการใด ?

ภาคที่ ๓

เส้น ขนาน และ รูป เส้น ขนาน

คำไข

๔ พื้น · เป็น สิ่ง ซึ่ง มี กำหนด กว้าง ยาว แต่ ไม่ มี กำหนด หนา ขอบ พื้น ใดๆ รอบ นับ ว่า เป็น เส้น

เมื่อ กล่าว ถึง พื้น ชนิด สิ่งใด ๆ เช่น พื้น กับ หรือ พื้น กระดาน หรือ พื้นกระดาน ก็ หมาย เอา เนื้อ ที่ ๆ มี อาณา เขตร์ รอบ จะ วัด ใดๆ กว้าง ก็ ได้ หรือ ใดๆ ยาว ก็ ได้ แต่ ไม่ เอ็ง ไป ถึง ส่วน หนา หรือ ส่วน ลึก เอา แต่ ผิว หน้า ๆ ข้าง บน เท่า นั้น อาณา เขตร์ ของ พื้น ใดๆ รอบ ก็ ย่อม เป็น เส้น ตาม ธรรมดา

๕ พื้น ราบ เสมอ เป็น พื้น ซึ่ง หาก โดย จะ สมมุติ ตั้ง จุด ขึ้น ๒ จุด ใน ที่ ใด ๆ ใน พื้น นั้น เส้น ตรง ใน ระหว่าง ๒ จุด นี้ ย่อม จะ ติด เรียบ อยู่ กับ พื้น ตลอด ทั้ง เส้น

อุทาหรณ์ ของพื้น ราบเสมอ คือ "พื้นกระจก" พื้นที่ไม่ราบเสมอ คือ "พื้นดินขรุขระ สูงๆต่ำๆ" ถ้าจะถึงจุดเข้าสองจุด แล้วเอาเชือกขึงให้ถึงอย่างวิธีที่จีนพูนถนน เชือกนั้นคงติดดินบ้างห่างดินบ้าง ถึงถนนจะพูนเรียบแล้ว แต่เมื่อมาขึงเชือกขวางถนนเข้า เชือกนั้นก็ไม่เป็นเส้นตรงได้ เพราะพื้นถนนพูนกลาง ไม่เป็นพื้นราบเสมอ

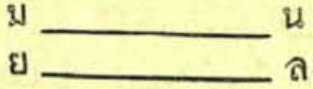
๑๖ รูปสี่เหลี่ยม คือ รูปซึ่งมีด้านสี่ด้าน เปนเส้นตรงทั้งนั้น

เส้นตรงที่อ่ากลาง และโดยมุมสองมุม ที่อยู่ตรงกันข้ามของรูปสี่เหลี่ยม เรียกว่า เส้นแทยงมุม เช่นในรูปสี่เหลี่ยม ม น ล ย มีเส้น ม ล กับ ย น เป็นเส้นแทยงมุม

๑๗ รูปหลายเหลี่ยม คือ รูปซึ่งมีด้านมากกว่าสี่ด้านขึ้นไป และเปนเส้นตรงทั้งนั้น

๒๔ เส้นขนานตรง คือ เส้นตรงสองเส้นที่อยู่เรียงเปนคู่กัน อยู่บนพื้นราบอันเดียวกัน และมีระยะห่างเท่ากันเสมอต้นเสมอปลาย ถ้าจะลากเส้นทั้งสองนี้ต่อออกไป

ทาง ปลาย ข้าง หนึ่ง ข้าง ใด เส้น ทั้ง สอง นี้ ก็จะไม่ รู้จัก พบ กัน เลย ดังเส้น ม น กับ เส้น ย ล นี้



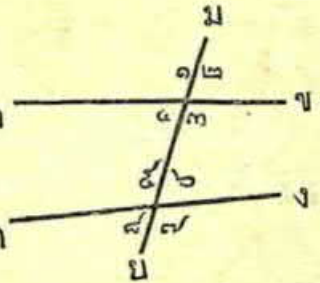
เส้น ขนาน ตรง นี้ จะ ยืด หรือ หด หรือ เอน เอียง อย่าง ไร ก็ ได้ สุด แต่ ล้า ตาก เส้น ทั้ง สอง ตรง ต่อ ออก ไป ทาง ปลาย ข้าง หนึ่ง ข้าง ใด และ เส้น ทั้ง สอง นี้ ไม่ เข้า พบ กัน แล้ว เส้น ทั้ง สอง นี้ ก็ เป็น เส้น ขนาน ตรง และ เรา จะ พูด ว่า เส้น หนึ่ง ขนาน กับ อีก เส้น หนึ่ง หรือ พูด ว่า เส้น ทั้ง สอง ขนาน กัน ก็ ได้

๒๕ สี่ เหลี่ยม เส้น ขนาน คือ รูป สี่ เหลี่ยม ที่ มี ด้าน อยู่ ตรง กัน ข้าม ขนาน กัน เป็น คู่ ๆ

คำ เพิ่ม เติม

ใน ตอน นี้ ยัง จะ มี ศัพท์ ที่ ท่าน อาจารย์ ยุคลิด ไม่ ได้ รวบ รวม ไว้ ใน คำ ไข อีก หลาย อย่าง จะ ต้อง ชัก อุทาหรณ์ มา ให้ ทราบ ไว้

ถ้า เส้น ม ย ตัด เส้น ก ข กับ ค ง ก็ บังเกิด มุม ขึ้น สี่ แปด มุม ๆ เหล่า นี้ จำ เป็น ต้อง มี ชื่อ มิ ฉะนั้น จะ เรียก ไม่ ถูก



และตำรานี้ ท่าน ห้ามไม่ให้ ชี้ จะเรียก สิ่งใด ต้องใช้ คำพูด อย่างเดียว มุม ทั้ง แปด นี้ ใน ที่ นี้ จะ ลง นำเบอร์ เสีย ให้เป็น มุม ๑, มุม ๒, มุม ๓, ฯ ฉ ฯ

มุม ๑, มุม ๒, มุม ๗, มุม ๘, เรียก ว่า มุมนอก

มุม ๓, มุม ๔, มุม ๕, มุม ๖, เรียก ว่า มุมใน

มุม ๔, กับ มุม ๖ เป็น มุมแย้ง กัน, มุม ๓, มุม ๕, ก็ เป็น มุมแย้ง กัน เหมือน กัน

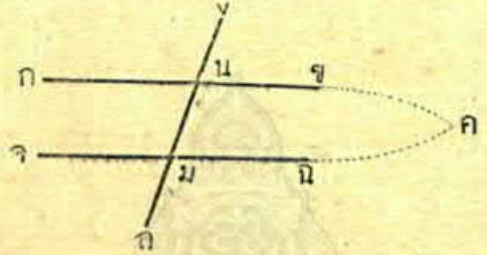
มุม ๒ กับ มุม ๖ นั้น มุม ๒ เรียก ว่า มุมนอก มุม ๖ ก็ เรียก ว่า มุมในที่ ตรง ข้าม ใน ข้างเดียว กัน ของ เส้น ม ย

ฉันใด มุม ๓ กับ ๗, หรือ ๑ กับ ๕, หรือ ๔ กับ ๘ ก็ เหมือน กัน แต่ ผู้เรียน อย่า ฉงน ไป เข้า ใจ ปน เป กับ มุม นอก และ มุม ใน ที่ ตรง ข้าม ของ รูป สาม เหลี่ยม ใน เล่ม ๑ บท ที่ ๑๖ เพราะ ไม่ เหมือน กัน

และ อย่า ลืม ว่า มุม ๑ กับ ๒, หรือ ๔ กับ ๓, หรือ ๕ กับ ๖ หรือ ๗ กับ ๘ เป็น มุม ประชิด กัน เป็น คู่ ๆ ไป ทั้ง นั้น

บทที่ ๒๔๗

ถ้า เส้นตรง เส้นหนึ่ง ตัดเส้นตรง ๒ เส้น กระทำให้มุมแย้ง เท่ากัน เส้นตรง ๒ เส้นนั้น จะขนานกัน



สมมุติให้เส้นตรง ง ฌ ตัดเส้นตรง ก ข กับ จ ฉ ที่จุด น และ ม กระทำให้มุม แย้ง ก น ม กับ น ม ฉ เท่ากัน

เส้น ก ข กับ จ ฉ จะขนานกัน

พิสูตร ถ้า ก ข กับ จ ฉ ไม่ขนานกัน แม้ต่อตรงออกไปทางจุด ข. ฉ. หรือ ก. จ. ก็คงจะพบกัน

ถ้าจะเป็นได้ดังนั้น ก็ให้ต่อออกไปพบกันทางจุด ข. ฉ. ที่จุด ค

รูป น ค ม ก็เป็นรูปสามเหลี่ยม ไข.๔

∴ √ นอก ก น ม ก็ใหญ่กว่า √ ใน

น ม ค ที่อยู่ตรงข้าม ...๖

แต่ √ ก น ม = √ น ม ฉ สมมุติ

∴ √ ก น ม กับ √ น ม ค เป็นทั้งเท่ากัน

และไม่เท่ากัน ซึ่งเป็นไปไม่ได้

∴ น ค ม จะเป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ได้

∴ ก ข กับ จ ฉ เมื่อต่อตรงออกไปทางจุด ข. ฉ.

จะไม่พบกัน เป็นอันขาด

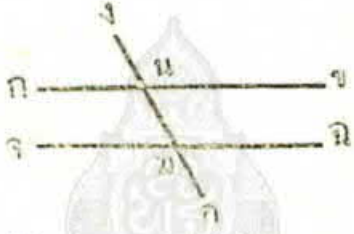
และจะพิสูตรได้ในทำนองเดียวกันว่าเมื่อต่อตรงออกไปทางจุด ก. จ. ก็จะไม่พบกันเหมือนกัน

∴ ก ข กับ จ ฉ ก็ต้องขนานกัน ไข๒๔

ข. ก. พ.

บทที่ ๒๘

ถ้า เส้น ตรง เส้น หนึ่ง ตัด เส้น ตรง สอง เส้น กระ ทำให้ มุม นอก เท่า กับ มุมใน ที่ ตรง ข้าม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น หรือ ถ้า มุมใน สอง มุม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น รวม กัน เท่า กับ มุมฉาก สอง มุม เส้น สอง เส้น นั้น จะ เปน เส้น ขนาน



สมมุติให้ เส้น ตรง ง ล ตัด เส้น ตรง ก ข กับ จ ฉ ที่ จุด น และ ม

ประการ ที่ ๑ สมมุติให้ มุม นอก ง น ข เท่า กับมุม ใน น ม ฉ ที่ ตรง ข้าม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น ง ล ก ข กับ ฉ จ จะ ขนาน กัน

พิสูตร ∴ ∠ ง น ข = ∠ น ม ฉ สมมุติ

และ ∴ ∠ ง น ข = ∠ ก น ม ...๔

∴ ∠ น ม ฉ = ∠ ก น ม จง.

และเป็นมุมแย้ง

$\therefore$ เส้น ก ข ขนานกับ จ ฉ ...(๑)

ประการที่ ๒ สมมุติให้มุมใน ข น ม กับ ฉ ม น บนข้างเดียวกันของเส้น ง ฉ รวมทั้งสองมุมเท่ากับมุมฉากสองมุม

เส้น ก ข ก็จะขนานกับ จ ฉ

พิสูตร $\therefore$ $\sqrt{}$ ข น ม รวมกับ $\sqrt{}$ ฉ ม น

= มุมฉากสองมุม สมมุติ

และ $\therefore$ มุมประชิก ก น ม กับ ข น ม รวมกัน ก็เท่ากับมุมฉากสองมุม ...(๒)

$\therefore$ $\sqrt{}$ ข น ม กับ $\sqrt{}$ ฉ ม น

= $\sqrt{}$ ก น ม กับ $\sqrt{}$ ข น ม

หัก $\sqrt{}$ ข น ม ออกเสียทั้งสองข้าง

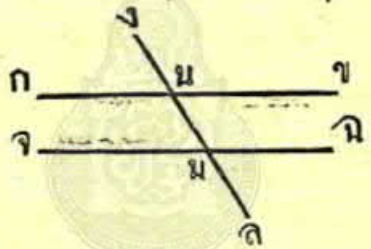
$\therefore$ $\sqrt{}$ ฉ ม น = $\sqrt{}$ ก น ม ที่เหลืออยู่

และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมแย้ง

เส้น ก ข กับ จ ฉ ขนานกัน (๓) ...(๒)

บทที่ ๒๘

ถ้า เส้น ตรง เส้นหนึ่ง ตัด เส้น ขนาน ตรง สอง เส้น มุม แย้ง ก็ จะ เท่า กัน มุม นอก กับ มุมใน ที่ ตรง ข้าม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น ก็ จะ เท่า กัน และ มุมใน สอง มุม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น รวม กัน จะ เท่า กับ มุม ฉาก สอง มุม



สมมุติให้ เส้น ตรง ง ล ตัด เส้น ตรง ก ข กับ จ ฉ ที่จุด น และ ม

(๑) มุม แย้ง ก น ม กับ น ม ฉ จะ เท่ากัน

(๒) มุม นอก ง น ข จะ เท่า กับ มุมใน น ม ฉ ที่ ตรง ข้าม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น ง ล

(๓) มุมใน ข น ม กับ ฉ ม น ทั้ง สองมุม บน ข้าง เดียว กัน ของ เส้น ง ล รวม กัน จะ เท่ากับ มุมฉากสองมุม

พิสูตร (๑) ถ้า $\angle$ ก น ม ไม่เท่ากับ $\angle$ น ม ฉ ก็คงใหญ่กว่ากันอยู่มุมหนึ่ง

ถ้าจะเปนได้ดังนั้น ก็สมมุติให้ $\angle$ ก น ม เปนมุมใหญ่กว่า แล้วบวก $\angle$ ข น ม เข้าทั้งสองฝ่าย

∴ $\angle$ ก น ม บวก $\angle$ ข น ม ใหญ่กว่า $\angle$ น ม ฉ บวก $\angle$ ข น ม ..จริง

แต่ $\angle$ ประชิด ก น ม กับ ข น ม รวมกัน = มุมฉากสองมุม ...

∴ $\angle$ น ม ฉ กับ $\angle$ ข น ม รวมกันเล็กกว่ามุมฉากสองมุม

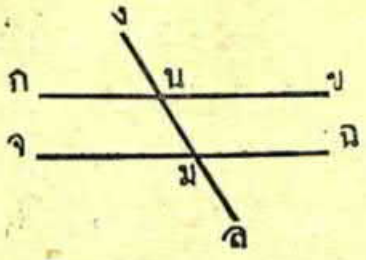
∴ ก ข กับ จ ฉ ถ้าต่อตรงออกไปทางจุด ข และ ฉ ก็จะพบกัน ..จริง

แต่ ก ข กับ จ ฉ ขนานกัน ..สมมุติ

∴ จะไม่พบกันเลย

∴ $\angle$ ก น ม จะไม่เท่ากับ $\angle$ น ม ฉ ไม่ได้

∴ $\angle$ ก น ม ต้องเท่ากับ $\angle$ น ม ฉ



(๒) อนึ่ง $\therefore$ $\angle$ ก น ม = $\angle$ ง น ข ...

และ $\therefore$ $\angle$ ก น ม = น ม ฉ ทิศูตร

$\therefore$ $\angle$ นอก ง น ข = $\angle$ ใน น ม ฉ ที่ตรงข้าม บนข้างเดียวกัน ของเส้น ง ล

(๓) กับ $\angle$ ง น ข = $\angle$ น ม ฉ ทิศูตร

บวก $\angle$ ข น ม เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore$ $\angle$ ง น ข บวก $\angle$ ข น ม = $\angle$ น ม ฉ บวก $\angle$ ข น ม

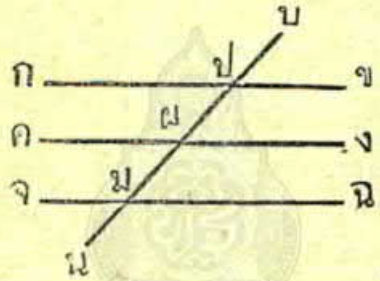
แต่ $\angle$ ประชิด ง น ข กับ ข น ม รวมกันเท่ากับ มุมฉากสองมุม ...

$\therefore$ $\angle$ น ม ฉ บวก $\angle$ ข น ม = มุมฉากสองมุม

ป. ก. พ.

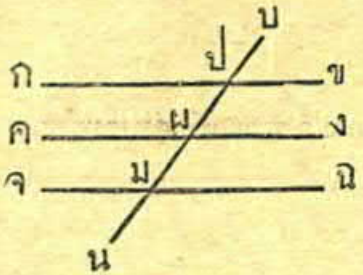
บทที่ ๓๐

เส้นตรง ซึ่งต่างก็ขนานกับเส้นเดียวกัน ย่อมเปนเส้นขนานกันหมด



สมมุติให้เส้นตรง ก ข กับ ค ง ต่างก็ขนานกับเส้นตรง จ ฉ

๏ ให้สังเกตไว้ว่า บทที่ ๒๙ นี้เปนบทกิสูตรกลับของบทที่ ๒๗ กับ ๒๘ รวมกัน แต่ให้จำใส่ใจไว้ด้วยว่าบท ๒๗ ๒๘ นั้นทรายมุมก้องกิสูตรว่าเส้นขนานกัน แต่บท ๒๙ นี้นทรายว่าเส้นขนานกันแล้วแก่ก้องกิสูตรลักษณของมุมเหล่านี้นั้นกลับกันอยู่ดังนี้



ก ข กับ ค ง ก็จะขนานกันด้วย

สร้าง ลากเส้น บ น ให้ตัดเส้น ก ข ค ง และ จ ฉ ที่จุด ป ผ และ ม

พิสูตร ∵ ก ข ขนานกับ จ ฉ สมมุติ

∴ ∨ แย้ง ก ป ม = ∨ แย้ง ป ม ฉ ..๒๘

และ ∵ ค ง ขนานกับ จ ฉ สมมุติ

∴ ∨ นอก ป ผ ง = ∨ ใน ผ ม ฉ ที่ตรงข้าม ..๒๙

∴ ∨ ก ป ผ = ∨ ป ผ ง จริง.

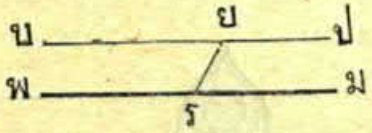
และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมแย้ง

∴ เส้น ก ข กับ ค ง ขนานกัน ..๒๗

ฮ, ต. พ.

บทที่ ๓๑

จาก จุด ที่ กำ หนด ให้ ๆ ลาก เส้น ตรงให้ ขนาน กับ เส้น ตรง ที่ กำ หนดให้



สมมุติให้ ย เปน จุด ที่ กำ หนดให้ และให้ พ ม เปน เส้น ตรง ที่ กำ หนดให้

ต้อง ประสงค์ จะ ลาก เส้น ตรง ตั้ง แต่ ย ให้ ขนาน กับ ม พ

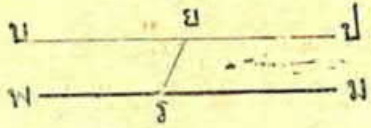
สร้าง กำ หนด จุด ร ขึ้นใน เส้น ม พ ลากเส้น ย ร สร้าง มุม ร ย บ ให้ เท่า กับ มุม ย ร ม และให้ แย้ง กัน

ต่อ เส้น บ ย ตรง ออกไป ถึง ป

ย ป จะ ขนาน กับ พ ม

พิสูตร ∵ √ แย้ง บ ย ร = √ แย้ง ย ร ม สร้าง

∴ บ ป ขนาน กับ พ ม

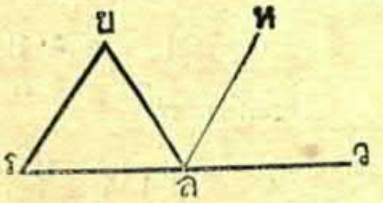


และ เส้น นี้ ได้ ตาก ผ่า จุด ย ที่ กำ หนด ให้

ซ. ท. ท.

บท ที่ ๓๒

ถ้า ต่อ ด้าน หนึ่ง ของ รูป สาม เหลี่ยม ให้ ตรง ออก ไป มุม นอก ที่ บัง เกิด ขึ้น จะ ใหญ่ เท่า กับ มุม ใน ที่ ตรง ข้าม ทั้ง สอง มุม รวม กัน และ มุม ใน ทั้ง สาม มุม รวม กัน ย่อม เท่า กับ มุม ฉาก สอง มุม



สม มุติ ให้ ย ร ล เป็น รูป สาม เหลี่ยม ต่อ ด้าน ร ล ตรง ออก ไป ถึง ว

(๑) มุม นอก ย ล ว จะ เท่า กับ มุม ใน ที่ ตรง ข้าม

คือ ย ร ล กับ ร ย ล รวมกัน

(๒) มุมในทั้งสาม คือ ย ร ล ร ล ย และ ล ย ร รวมกัน จะเท่ากับมุมฉาก สองมุม

สร้าง จาก ล ลาก เส้น ล ห ให้ขนาน กับ ร ย

พิสูตร (๑) ∵ ร ย ขนานกับ ล ห สร้าง

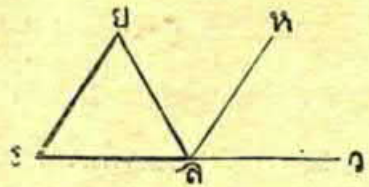
∴ ∠ แย้ง ย ล ห กับ ร ย ล เท่ากัน

และ ∠ นอก ห ล ว = ∠ ใน ย ร ล ที่ตรงข้าม

∴ ∠ ย ล ว ทั้งหมด = ∠ ล ย ร กับ ∠ ย ร ล รวมกัน ซึ่งเป็นมุมในที่ตรงข้ามของมุมนอก ย ล ว ทั้งสองมุม

(๒) ∠ ย ล ว = ∠ ร ย ล บวก ∠ ย ร ล พิสูตร เอา ∠ ย ล ร บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ ∠ ร ย ล บวก ∠ ย ร ล บวก ∠ ย ล ร ซึ่งเป็นมุมในทั้งสามมุมของ △ ย ร ล = ∠ ย ล ว บวก ∠



ยลร ซึ่ง รวม กัน เท่า กับ มุม ฉาก สอง มุม ....

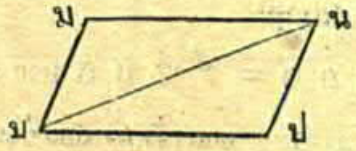
. . มุมใน ทั้ง สาม มุม ของ △ ยรล

= มุม ฉาก สอง มุม

ฮ. ต. พ.

บทที่ ๓๓

เส้น ตรง คู่่ ที่ ต่อ หัว ท้าย ข้าง ต่อ ข้าง ของ เส้น ขนาน ตรง ซึ่ง ยาว เท่า กัน จะ ขนาน กัน และ ยาว เท่า กัน ด้วย



สมมุติให้ มน กับ บป เปน เส้น ตรง และ ขนาน กัน และ ยาว เท่า กัน ฉาก เส้น มบ กับ นป

เส้น ม บ กับ น ป นี้จะเท่ากัน และ ขนาน กัน ด้วย

ลากเส้น น ม

พิสูตร ∵ ม น ∥* บ ป สมมุติ

∴ √ แย้ง ม น บ กับ น บ ป เท่ากัน ...

ใน △ ม น บ กับ น บ ป

∵ ม น = บ ป สมมุติ

บ น เปนเส้นร่วม

√ ม น บ = √ น บ ป พิสูตร

∴ △ ทั้งสองเท่ากันสนิท ...

ถาน บ ม = ถาน น ป

√ ม บ น = √ บ น ป

และมุมทั้งสองนี้เปนมุมแย้ง

∴ ม บ กับ น ป ขนานกัน ...

และได้พิสูตรแล้วว่าเท่ากันด้วย

ฮ. ต. พ.

---

* เครื่องหมายนี้ใช้แทนคำว่า "ขนาน"

บทที่ ๓๔

ด้าน และมุมที่ ตรงข้าม ของ รูป สี่เหลี่ยม ด้านขนาน เท่า กัน และ เส้น แทยง มุม ทั้ง คู่ ต่าง ก็ ผ่า รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ออก เป็น สอง ส่วน เท่า ๆ กัน

สมมุติ ให้ ก ข ง ค เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน และ ให้ ค ข เป็น เส้น แทยง มุม

ด้าน และ มุม ที่ ตรง ข้าม ของ รูป นี้ จะ เท่า กัน และ ค ข จะ แบ่ง รูป นี้ ออก เป็น สอง ส่วน เท่า ๆ กัน

พิสูตร ∵ ก ข ∥ ค ง

∴ √ แย้ง ก ข ค = √ แย้ง ข ค ง ..ทฤ

∵ ก ค ∥ ข ง

∴ √ แย้ง ก ค ข = √ แย้ง ค ข ง ..ทฤ

ใน △ ก ข ค กับ ข ค ง

$\therefore \sqrt{\text{ก ข ค}} = \sqrt{\text{ข ค ง}}$ พิสูตร

$\sqrt{\text{ก ค ข}} = \sqrt{\text{ค ข ง}}$ พิสูตร

และด้าน ค ข เป็น ด้านร่วม

$\therefore$ $\triangle$ ทั้งสองนี้ เท่ากันสนิท ๑.๖๖

ก ข = ค ง และ ก ค = ข ง

และ $\sqrt{\text{ข ก ค}} = \sqrt{\text{ข ง ค}}$

อนึ่ง ได้พิสูตรแล้วว่า $\sqrt{\text{ก ข ค}} = \sqrt{\text{ข ค ง}}$

และ $\sqrt{\text{ก ข ค}} = \sqrt{\text{ข ค ง}}$

$\therefore \sqrt{\text{ก ข ง}}$ ทั้งหมด $= \sqrt{\text{ก ค ง}}$ ทั้งหมด

และได้พิสูตรแล้วว่า $\triangle$ ก ข ค และ ข ค ง เท่ากันสนิท

$\therefore$ ข ค ก็แบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า ก ข ง ค ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

ข. ต. พ.

แบบฝึกหัด

สำหรับภาคที่ ๒ / ๓

๑. เส้น สอง เส้น ที่ ผ่า มุม ยัน ยอด จด กัน ตรง ข้าม ย่อม ต่อ ตรง เปน เส้น เดียว กัน

๒. ใน รูป ของ บท ที่ ๑๖ ถ้า ลาก เส้น ส ค ให้ พิสูตร ว่า ส ค เท่า กับ ห ย

๓. ก ข ค เปน รูป สาม เหลี่ยม มี มุม ที่ ข เปน มุม ฉาก ถ้า ต่อ ด้าน ข ค ยาว ออก ไป ถึง จุด ย ให้ พิสูตร ว่า มุม ก ค ย เปน มุม ป้าน

๔. จาก จุด ก ซึ่ง เปน ศูนย์ กลาง ของ เส้น ข ค ลาก เส้น ตรง ใด ๆ ก็ ได้ แล้ว ลาก เส้น ข ส กับ ค ย ให้ ตั้ง ได้ ฉาก กับ เส้น ส ย จง พิสูตร์ ว่า เส้น ข ส เท่า กับ ค ย

๕. มุม ซึ่ง บัง เกิด ขึ้น ด้วย เส้น ผ่า มุม ที่ ถาน ของ รูป สาม เหลี่ยม บรรจบ กัน ย่อม ใหญ่ เท่า มุม ยอด บวก ครั้ง หนึ่ง ของ สอง มุม ที่ ถาน รวม กัน เสมอ ไป ไม่ ว่า ใน รูป สาม เหลี่ยม ชนิด ใด ๆ

๖. มุมที่บังเกิดขึ้นด้วยเส้นผ่ามุมนอกสองมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ บรรจบกันย่อมกางเท่ากับครึ่งหนึ่งของสองมุมภายในที่ยันกันรวมกัน

๗. ถ้าเส้นตรงสองเส้นไขว้กันจากจุดหนึ่งในระหว่างสองเส้นนี้ให้ลากเส้นตรงให้ตั้งได้ฉากกับเส้นทั้งสองนั้นเส้นละเส้นเส้นผ่ามุมที่บังเกิดจากเส้นตั้งได้ฉากนี้จะขนานกับหรือเป็นเส้นเดียวกับเส้นผ่ามุมที่บังเกิดจากเส้นไขว้

๘. ในด้านเท่าของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ก ข ค คือด้าน ก ข กับด้าน ก ค ถ้าจะกำหนดจุด ย และ ว ขึ้นให้ ย ข กับ ว ค เท่ากันจงชี้ให้เห็นว่า ว ย ขนานกับ ข ค

๙. ก ข ค กับ ย ว ฉ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งมีด้าน ก ข กับ ข ค เท่ากับและขนานกับด้าน ย ว และ ว ฉ ด้านต่อด้านจงพิสูตรว่า ก ค

กับ ย ถ เท่า กัน และ ขนาน กัน ด้วย

๑๐. ถ้า สองด้าน ของรูป สี่เหลี่ยม ขนาน กัน และ อีก สองด้าน นั้น เท่า กัน แต่ ไม่ ขนาน กัน จง พิสูตร ว่า มุม ตรง ข้าม รวม กัน เท่า กับ สอง มุม ฉาก และ เส้น แทยง มุม ทั้ง คู่ นั้น ก็ ยาว เท่า กัน

๑๑. ถ้า ด้าน ตรง ข้าม ของ รูป สี่ เหลี่ยม ยาว เท่า กัน รูป นั้น เปน รูป ด้าน ขนาน

๑๒. ถ้า มุม ตรง ข้าม ของ รูป สี่ เหลี่ยม กาง เท่า กัน รูป นั้น ก็ เปน รูป ด้าน ขนาน

๑๓. เส้น แทยง มุม ของ รูป สี่เหลี่ยม ด้านขนานย่อม ตัดกลาง ซึ่ง กัน และ กัน

๑๔. ถ้า เส้น แทยง มุม ของ รูปสี่เหลี่ยมตัดกลางซึ่งกันและ กัน รูป นั้น ก็ จะ เปน รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน

๑๕. เส้น ตรง ที่ ลาก ผ่า จุด ที่ เส้น แทยง มุม ของรูป สี่เหลี่ยม ด้าน ขนาน ไขว้ กัน และ มี ที่สุด ปลาย ที่ด้าน ตรง ข้าม ของ รูป นั้น เส้น ตรง นี้ ย่อม มี ศูนย์ กลาง อยู่ ที่ จุด นั้น

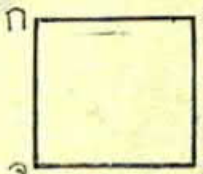
๑๖. ใน รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน เส้น ตรง ที่ลาก จาก มุม ตรง ข้าม ให้ ตั้ง ได้ ฉาก กับ เส้น แทยง มุม เส้น หนึ่ง นั้น ย่อม ยาว เท่า กัน

ภาคที่ ๔

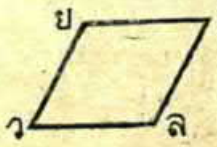
คำไข

๒๖ สี่เหลี่ยมมุมฉากด้านขนาน คือรูป สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมเปนมุมฉาก (เช่นรูป บ ป ม ย นี้)

๒๗ สี่เหลี่ยมจตุรัส คือรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านเท่ากันทั้ง ๔ ด้าน และมีมุมเปนมุมฉากทั้งสี่มุม (เช่นรูป กจมน นี้)



๒๘ รูปขนมเบียกปูน เปนรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน แต่ไม่มีมุมเปนมุมฉาก (เช่นรูป ยลรว นี้)



คำอธิบาย

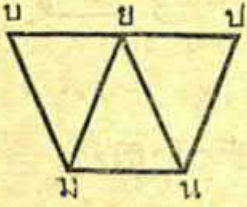
ตั้งแต่ต้น ๆ มา เมื่อพูดว่ารูปสองรูปเท่ากันสนิท เช่นในบทที่๔ ฯ ๓ ๆ ก็หมายความว่าเท่ากันทุกอย่าง ถ้าวางประกับกันก็คงพอดีกันไม่เกินไม่ขาดกว่ากัน จึงเรียกว่า เท่ากันสนิท

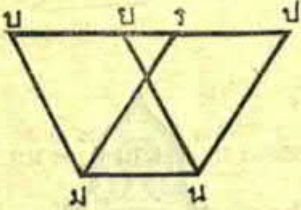
แต่ในตอนปลายของเล่ม ๑ นี้ จะกล่าวด้วยรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีอาณาเขตรเท่ากัน แต่ไม่จำเปนจะต้องเปนรูปอย่างเดียวกัน หรือประกับกันสนิทรูปจะต่างกันก็ได้ แม้ว่ามีเนื้อที่เท่ากันแล้ว ก็จะเรียกว่า เท่ากันเฉย ๆ ทิ้งคำว่า "สนิท" ออกเสีย.

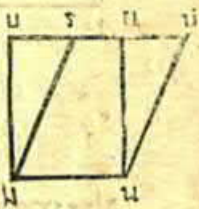
ให้ผู้เรียนสังเกตไว้ว่า ถ้ากล่าวถึง "เท่ากันสนิท" เมื่อใด ก็หมายความว่าเท่ากันทั้งเนื้อที่ ทั้งรูปก็เหมือนกันด้วย หากจะวางซ้อนกันก็คงทับกันสนิทไม่มีเหลือม แต่เมื่อพูดว่า "เท่ากัน" เฉย ๆ แล้ว ก็หมายความแต่เพียงว่ามีเนื้อที่เท่ากัน ส่วนรูปร่างนั้นจะต่างกันเปนคนละอย่างก็ได้

บทที่ ๓๕

รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ที่ มี ถาน ร่วม กัน และ จุด ใน ระหว่าง เส้น ขนาน คู่ เดียว กัน ย่อม มี เนื้อ ที่ เท่า กัน







สมมุติ ให้ สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน บ ม น ย กับ ร ม น ป มี ถาน ร่วม กัน คือ ม น และ จุด ใน ระหว่าง เส้น ขนาน คู่ เดียว กัน คือ บ ป กับ ม น

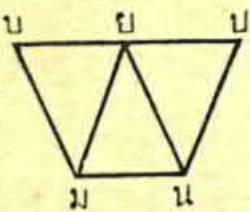
รูป บ ม น ย จะ มี เนื้อ ที่ เท่า กับ รูป ร ม น ป

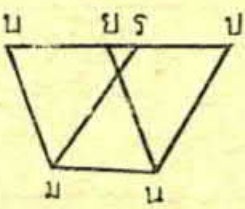
ประการ ที่ ๑ ถ้า ด้าน ที่ ตรง ข้าม กับ ถาน จุด กัน ที่ จุด ย

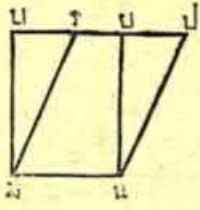
ดู รูป ที่ ๑

∴ สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ทั้ง คู่ นั้น ต่าง ก็ เป็น สอง เท่า ของ

△ ย ม น







$\therefore$ สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ทั้ง คู่ นั้น ก็ ต้อง เท่า กัน ด้วย จริง ฯ

ประการ ที่ ๒ แต่ ถ้า ด้าน บ ย และ ร ป ที่ ตรง ข้าม กับ ถาน ไม่ เท่า กัน รูป ๒๓

$\therefore$ บ ม น ย เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน

$\therefore$ บ ย = ม น ๓๔

และ ร ป = ม น โดย เหตุ เดียว กัน

$\therefore$ บ ย = ร ป จริง ฯ

$\therefore$ ผล บวก หรือ ผล ลบ บ ร = ผล บวก หรือ ผล ลบ ย ป

ใน $\triangle$ บ ม ร กับ ย น ป

$\therefore$ บ ร = ย ป พิสูตร

ย น = บ ม ๓๓

และ $\sqrt{}$ นอก ป ย น = $\sqrt{}$ ใน ร บ ม ๓๔

$\therefore$ $\triangle$ ทั้ง สอง นี้ เท่า กัน สนิท ๓๕

หัก $\triangle$ ย น ป ออก จาก รูป บ ม น ป กับ หัก สาม เหลี่ยม บ ม ร ออก จาก รูป บ ม น ป

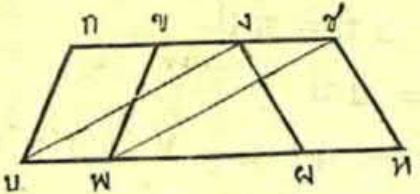
$\therefore$ ส่วน ที่ เหลือ อยู่ ก็ เท่า กัน จริง

นั่น คือ สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน บ ม น ย กับ ร ม น ป เท่า กัน

ป. ต. พ.

บทที่ ๓๖

สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ซึ่ง อยู่ บน ฐาน เท่า กัน และ จด ระหว่าง เส้น ขนาน คู่ เดียว กัน ย่อม มี อาณา เขตร เท่า กัน



สมมุติให้ ก ข พ บ กับ ง ช ห ผ เปนสี่เหลี่ยมด้านขนานที่อยู่บนฐานเท่ากัน คือ บ พ กับ ผ ห และจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ ก ข กับ บ ห สี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งสองนี้จะเท่ากัน

สร้าง. ลากเส้น ง บ กับ ช พ

พิสูตร ∵ บ พ = ผ ห สมมุติ

และ ผ ห = ง ช ๓๔

∴ บ พ = ง ช จริง

และก็ขนานกันด้วย สมมุติ

∴ บ ง กับ พ ช ที่สกัดปลายทั้งสองข้างก็เท่ากัน และขนานกันเหมือนกัน ๓๓

∴ ง บ พ ช จึงเปนสี่เหลี่ยมด้านขนาน

อนึ่ง ∵ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ข พ บ กับ ง ข พ บ อยู่บนฐานร่วมกัน และจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน

∴ ก ข พ บ = ง ข พ บ ..๔

และ ง ข พ บ กับ ง ข ห ผ ก็เท่ากัน

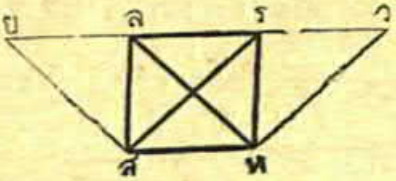
∵ อยู่บนฐานร่วมกันคือ ง ข และจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกันคือ ก ข กับ บ ห ..๕

∴ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ข พ บ กับ ง ข ห ผ ก็เท่ากัน จริง .

ข. ต. พ.

บทที่ ๓๗

สามเหลี่ยมที่มีฐานร่วมกัน และจดในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน ย่อมมีเนื้อที่เท่ากัน



สมมุติให้ △ ส ร ห กับ ส ล ห มี ฐาน ร่วม กัน คือ ส ห และ จด ระหว่าง เส้น ขนาน คู่ เดียว กัน คือ ร ล กับ ส ห

รูป สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง นี้ จะ เท่า กัน

ส ร้าง ตั้ง แต่ จุด ส ลาก เส้น ตรง ส ย ให้ ขนาน กับ ห ล และ ให้ พบ กับ เส้น ร ล ที่ ต่อ ตรง ออก มา ที่ จุด ย ...

ตั้ง แต่ จุด ห ลาก เส้น ตรง ห ว ให้ ขนาน กับ ส ร และ ให้ พบ กับ เส้น ล ร ที่ ต่อ ตรง ออก มา ที่ จุด ว ...

พิสูจน์ ตาม ที่ ส ร้าง นี้ รูป ย ล ห ส กับ ร ว ห ส ก็ เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ทั้ง คู่

และ เท่า กัน ด้วย ...๔

△ ล ส ห เป็น ครึ่ง หนึ่ง ของ ย ล ส ห ...

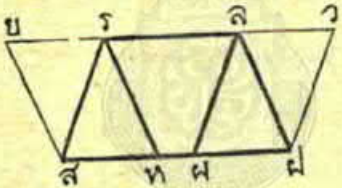
และ $\triangle$ ร ส ห ก็เป็นครึ่งหนึ่งของ ร ว ห ส ... ...

$\therefore$ $\triangle$ ร ส ห กับ $\triangle$ ล ส ห เท่ากัน จริง ๆ

ฮ. ต. พ.

บทที่ ๓๘

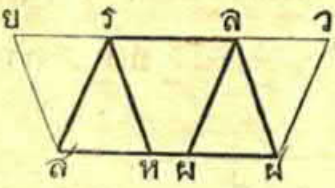
สามเหลี่ยมที่มีฐานเท่ากัน และจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน มีเนื้อที่เท่ากัน



สมมุติให้ $\triangle$ ส ร ห กับ ผ ล ฝ มีฐานเท่ากัน คือ ส ห กับ ผ ฝ และจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ ร ล กับ ส ฝ

$\triangle$ ส ร ห จะเท่ากับ $\triangle$ ผ ล ฝ

สร้าง แต่จุด ส ลากเส้นตรง ส ย ให้ขนานกับ ห ร และให้พบเส้น ล ร ที่ต่อตรงมาที่จุด ย



แต่จุด ฝ ลากเส้นตรง ฝ ว ให้ขนานกับ ผ ล และ
ให้พบเส้น ร ล ที่ต่อตรงออกมา ที่จุด ว ... ...

พิสูตร ตามที่สร้าง ย ร ห ส กับ ล ว ฝ ผ
ก็เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งคู่
และเท่ากันด้วย ... ๑๖

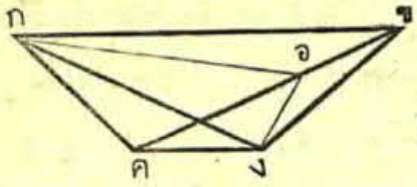
△ ร ส ห เป็นครึ่งหนึ่งของ ย ร ห ส ... ๓๔
และ △ ล ผ ฝ ก็เป็นครึ่งหนึ่งของ ล ว ฝ ผ ... ๓๔

∴ △ ร ส ห กับ △ ล ผ ฝ เท่ากัน จงพ.

ช. ต. พ.

บทที่ ๓๙

สามเหลี่ยมที่เท่ากัน ถ้ามีฐานร่วมกัน และอยู่
บนข้างเดียวกัน ย่อมจะจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน



สมมุติให้ ก ค ง กับ ข ค ง ซึ่งมี ฐาน ค ง ร่วมกัน และอยู่บนข้างเดียวกันของฐานนั้น เท่ากัน

สามเหลี่ยมทั้งสองนี้จะจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ ถ้าลากเส้น ก ข, ก ข จะขนานกับ ค ง

สร้าง. หากว่า ก ข ไม่ขนานกับ ค ง ถ้าจะเป็นได้ก็ให้ลากเส้นใหม่ ก อ ให้ขนานกับ ค ง และให้พบเส้น ค ข หรือส่วนของ ค ข ที่ต่อตรงออกไปที่จุด อ แล้วลากเส้น อ ง

พิสูตร △ ก ค ง = △ อ ค ง ...๑๗

แต่ △ ก ค ง กับ ข ค ง ก็เท่ากัน สมมุติ

∴ △ อ ค ง กับ ข ค ง ก็เท่ากันด้วย ส่วนเท่ากับจำนวนเต็มของมันเองเป็นไปไม่ได้

∴ ก อ จะขนานกับ ค ง ไม่ได้อยู่เอง

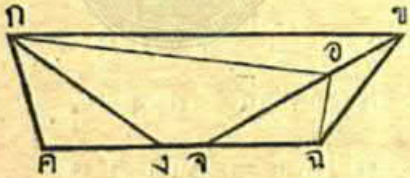
และจะพิสูตรได้ ใน ทำนองเดียวกัน ว่าไม่มีเส้นอื่นจาก จุด ก ที่จะขนานกับ ค ง ได้ นอกจากเส้น ก ข

∴ ก ข ก็ต้องขนานกับ ค ง อยู่เอง

ฮ. ต. พ.

บทที่ ๕๐

สามเหลี่ยมที่เท่ากัน ถ้ามีฐานเท่ากัน ฐานต่อเปนเส้นตรงอันเดียวกัน และสามเหลี่ยมอยู่บนข้างเดียวกันของฐาน สามเหลี่ยมเหล่านี้ก็จดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน



สมมุติให้ △ ก ค ง กับ ข จ ฉ ซึ่งมีฐานเท่ากันคือ ค ง กับ จ ฉ และฐานเปนเส้นตรงอันเดียวกันคือ ค ฉ, สามเหลี่ยมทั้งสองอยู่บนข้างเดียวกันของ ค ฉ ด้วยนั้น—เท่ากัน

สามเหลี่ยม ทั้งสองนี้ จะจดเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ ถ้า ลาก เส้น ก ข, ก ข จะขนานกับ ค ฉ

สร้าง แม้ ก ข ไม่ขนานกับ ค ฉ ถ้าจะ เปนได้ ก็ลากเส้น ก อ ให้ขนานกับ ค ฉ และให้พบเส้น ข จ หรือส่วนของ ข จ ที่ลากตรงต่อออกไป ที่จุด อ แล้วลากเส้น อ ฉ

พิสูตร △ ก ค ง กับ อ จ ฉ เท่ากัน ...๙

แต่ △ ก ค ง = △ ข จ ฉ สมมุติ

∴ △ อ จ ฉ = △ ข จ ฉ ส่วนเท่ากับจำนวน เต็มของมันเอง เปนจริงไม่ได้

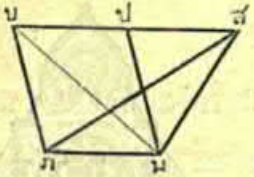
∴ ก อ ย่อมขนานกับ ค ฉ ไม่ได้อยู่เอง และจะพิสูตรได้ในทำนองเดียวกันว่าไม่มีเส้นอื่นจากจุด ก ที่จะขนานกับ ค ฉ ได้ นอกจากเส้น ก ข

∴ ก ข ต้องขนานกับ ค ฉ

ป. ก. พ.

บทที่ ๔๑

ถ้า สี่เหลี่ยมด้านขนาน กับ สามเหลี่ยมอยู่บนฐานร่วมกัน และจุดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน สี่เหลี่ยมด้านขนาน จะเป็นสองเท่าของสามเหลี่ยม



สมมุติให้ สี่เหลี่ยมด้านขนาน บ ป ม ภ กับสามเหลี่ยม ส ภ ม มีฐาน ภ ม ร่วมกัน และจุดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน คือ บ ส กับ ภ ม

บ ป ม ภ จะใหญ่เป็นสองเท่าของ ส ภ ม

สร้าง ลากเส้น บ ม

พิสูตร △ บ ภ ม = △ ส ภ ม ...๑

แต่ สี่เหลี่ยมด้านขนาน บ ป ม ภ เป็นสองเท่า ...๒

ของ △ บ ภ ม

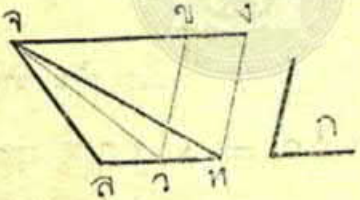
๑๒๐

$\therefore$ สี่เหลี่ยมด้านขนาน บ ป ม ภ เป็นสองเท่าของ $\triangle$ ส ภ ม ด้วย

ซ. ท. พ.

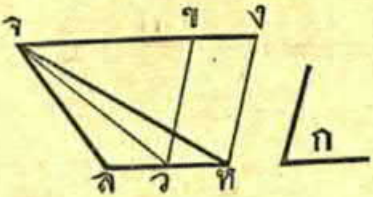
บทที่ ๔๒

จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานให้เท่ากับสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และให้มีมุมๆ หนึ่งกางเท่ามุมที่กำหนดให้



สมมุติให้ จ ล ห เป็นรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และ ก เป็นมุมที่กำหนดให้ จะต้องสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้เท่ากับ จ ล ห และให้มีมุมๆ หนึ่งกางเท่ากับมุม ก

วิธีทำ แบ่งกลางเส้น ล ห ที่จุด ว ...



ที่จุด ว ทำมุม ห ว ข ให้กางเท่ามุม ก ...

จากจุด จ ลากเส้น จ ข ง ให้ขนานกับ ล ห ...

ลากเส้น ห ง ให้ขนานกับ ว ข ...

ลากเส้น จ ว

ข ว ห ง จะเป็นสี่เหลี่ยม ด้านขนาน ที่ต้องการ

พิสูตร △ จ ล ว = △ จ ว ห เพราะอยู่บนฐานเท่ากัน และจดระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน ...

∴ △ จ ล ห เป็นสองเท่าของ △ จ ว ห

แต่ ข ว ห ง เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน สร้าง

และมีฐานร่วมกับ △ จ ว ห และจดระหว่างเส้นขนาน

คู่เดียวกัน คือ จ ง กับ ฉ ห สร้าง

∴ ข ว ห ง เป็นสองเท่าของ △ จ ว ห .....

∴ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ข ว ห ง = △ จ ฉ ห

จริง.

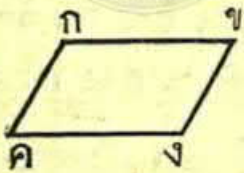
และมี √ ข ว ห = √ ก ที่กำหนดให้ด้วย

ฮ. ท. ท.

บทที่ ๔๓

รูปแถม ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่เส้นแทยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานใด ๆ ย่อมเท่ากัน

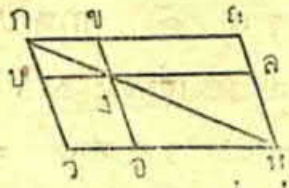
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน บางทีจะหมายเรียกเพียงอักษรสองตัวคือ



ตัวหัวท้าย ที่มุมตรงกันข้าม เช่นในรูปนี้ จะเรียกแต่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ง หรือ ข ค เท่านั้นก็ได้

ส่วนชาดของรูปใด ๆ ที่สำหรับจะทำให้รูปนั้นหรือรูปนี้

รูปแถม



สมมุติให้ ก ว ห ถ เปน สี่เหลี่ยม ด้าน ขนาน และ ให้ ว ง กับ ง ถ เปน รูป แถม ของ สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน บ ข กับ อ ล ที่ เส้น แทยง มุม ก ห

รูป แถม ว ง กับ ง ถ นั้น จะ เท่า กัน.

พิสูตร ∵ ก ง เปน เส้น แทยง มุม ของ □ ด้าน ขนาน บ ข

สมมุติ

∴ △ บ ก ง = △ ข ก ง ....

และ โดย เหตุ อัน เดียว กัน △ อ ง ห ก็ เท่า กับ △ ล ง ห

∴ △ บ ก ง รวม กับ △ อ ง ห = △ ข ก ง รวม กับ △ ล ง ห

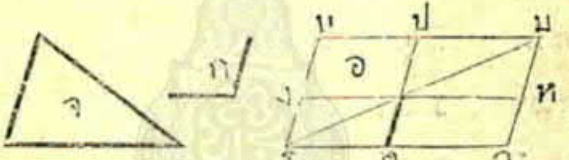
△ ว ก ห ทั้งหมด = △ ถ ก ห ทั้งหมด ....

∴ ที่ เหลือ อยู่ คือ รูป แถม ว ง = รูป แถม ง ถ

ฮ. ต. พ.

บทที่ ๔๔

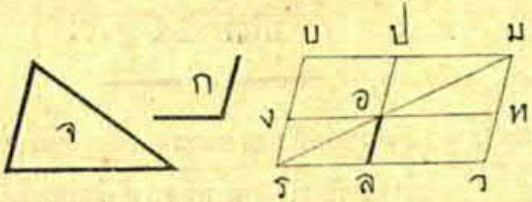
ให้ สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน บน เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้ ให้ เท่า กับ รูป สาม เหลี่ยม ที่ กำหนด ให้ และ ให้ มี มุม ๆ หนึ่ง กาง เท่า กับ มุม ที่ กำหนด ให้



สมมุติ ให้ อ ฉ เป็น เส้น ตรง ก เป็น มุม ๆ เป็น รูป สาม เหลี่ยม ที่ กำหนด ให้

จะ ต้อง สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน บน เส้น อ ฉ ให้ เท่า กับ สาม เหลี่ยม จ และ ให้ มี มุม ๆ หนึ่ง กาง เท่า มุม ก

วิธี ทำ บน เส้น ต่อ ของ เส้น ฉ อ สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน อ ง บ ป ให้ ใหญ่ เท่า สาม เหลี่ยม จ และ ให้ มี มุม ง อ ป กาง เท่า มุม ก [illegible] กับ [illegible]



จาก จุด ฉ ลาก เส้นตรง ฉ ร ให้ขนานกับ อ ง หรือ บ ป และให้พบกับเส้น บ ง ที่ต่อตรงออกมา ที่จุด ร .....

ลาก เส้น ร อ

∴ ร ฉ ∥ บ ป

∴ ∠ ฉ ร บ รวมกับ ∠ ร บ ป = สองมุมฉาก

∴ ∠ อ ร บ รวมกับมุม ∠ ร บ ป เล็กกว่าสองมุมฉาก

∴ บ ป กับ ร อ ถ้าต่อตรงออกไปทางจุด ป และ อ ก็จะพบกัน

ต่อตรงไป ให้พบกันที่จุด ม ลาก เส้น ม ว ให้ขนานกับ ป ฉ หรือ บ ร .....

แล้วต่อเส้น ร ล กับ ง ย ตรงยอกมาพบ ม ว ที่จุด ว และ ห

ย ว จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องประสงค์

พิสูตร. รูป บ ม ว ร เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สร้าง

และ ย ว กับ ย บ เป็นรูปแถมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ที่เส้นแทยงมุม ร ม

$\therefore$ ย ว = ย บ ...ก

แต่ $\triangle$ จ = ย บ สร้าง

$\therefore$ ว ย = $\triangle$ จ ด้วย

$\sqrt{}$ ง ย ป = $\sqrt{}$ ล ย ห ...ค

$= \sqrt{}$ ก สร้าง

$\therefore$ $\sqrt{}$ ล ย ห = $\sqrt{}$ ก

$\therefore$ ได้สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย ว ให้อยู่บนเส้น

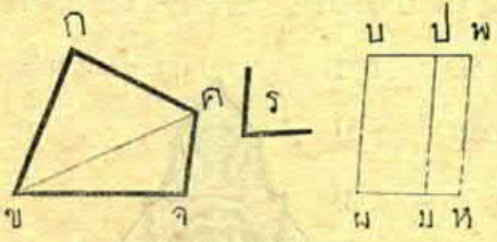
ย ล ให้โตเท่า $\triangle$ จ และให้มีมุม ๆ หนึ่งกางเท่า

$\sqrt{}$ ก แล้ว

ซ. ท. ท.

บทที่ ๔๕

ให้สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ให้เท่า กับรูป เหลี่ยม ที่กำหนด ให้ และ ให้มี มุม ๆ หนึ่ง กาง เท่า กับ มุม ที่ กำหนด ให้



สมมุติ ให้ ก ค จ ข เปน รูป เหลี่ยม และ ร เปน มุม ที่ กำหนด ให้

จะ ต้อง สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ให้ โต เท่า ก ค จ ข และ ให้มี มุม ๆ หนึ่ง กาง เท่า มุม ร

สมมุติ ให้รูป ที่ กำหนด ให้เปน รูป สี่ เหลี่ยม

วิธีทำ ลาก เส้น ข ค สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน บ ม ให้เท่า กับ สาม เหลี่ยม ก ข ค และ ให้มี มุม บ ผ ม กาง เท่า มุม ร

บน เส้น ป ม สร้าง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ป ห

ให้เท่าสามเหลี่ยม จ ข ค และให้มีมุม ป ม ห กางเท่ามุม ร

รูป บ ห จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

พิสูตร ∴ √ บ ผ ม กับ √ ป ม ห ต่างก็เท่ากับ √ ร

∴ √ บ ผ ม = √ ป ม ห

บวก √ ป ม ผ เข้าทั้งสองข้าง

∴ √ บ ผ ม รวมกับ √ ป ม ผ

= √ ป ม ห รวมกับ √ ป ม ผ

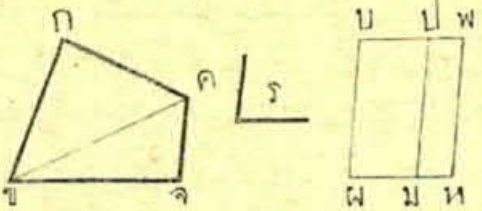
แต่ √ บ ผ ม กับ √ ป ม ผ รวมกัน = √ ฉาก สองมุม

∴ ผ ม กับ ม ห เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

อนึ่ง ∴ บ ป ∥ ผ ห สร้าง

∴ √ บ ป ม = √ ป ม ห

บวก √ พ ป ม เข้าทั้งสองข้าง



$\therefore$ $\triangle$ บ ป ม รวมกับ $\triangle$ พ ป ม

$=$ $\triangle$ ป ม ห รวมกับ $\triangle$ พ ป ม

แต่ $\triangle$ ป ม ห รวมกับ $\triangle$ พ ป ม

$=$ $\triangle$ ฉาก ส่วน มุม

$\therefore$ $\triangle$ บ ป ม รวมกับ $\triangle$ พ ป ม

$=$ $\triangle$ ฉาก ส่วน มุม

$\therefore$ บ ป กับ ป พ ก็เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

กับ $\therefore$ บ ผ กับ พ ห ต่างก็ $\parallel$ ป ม สร้าง

$\therefore$ บ ผ $\parallel$ พ ห

$\therefore$ ผ ห $\parallel$ บ พ สร้าง

$\therefore$ บ ห เปน ส่ี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน

และ $\because$ รูป บ ม = $\triangle$ ก ข ค สร้าง

รูป ป ห = $\triangle$ จ ข ค สร้าง

$\therefore$ รูป บ ห ทั้งหมด = รูป ก ค จ ข ทั้งหมด

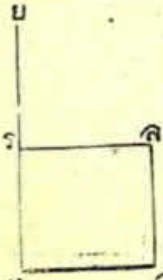
และมี $\sqrt{}$ บ ฝ ห = $\sqrt{}$ ร ด้วย สร้าง

ตาม วิธีนี้ อาจ สร้าง รูป ส่ี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ให้ โดเท่า รูป เหลี่ยม ไม่ว่า กี่เหลี่ยม ๆ ได้

ช. ต. ท.

บทที่ ๔๖

ให้สร้าง รูป ส่ี่ เหลี่ยม จตุรัสบน เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้



สมมติ ให้ ห ว เปน เส้น ตรง ที่ กำหนด ให้ จะ ต้อง สร้าง รูป ส่ี่ เหลี่ยม จตุรัส บน เส้น ห ว นั้น

วิธีทำ ตั้งแต่จุด ห ลากเส้น ห ย ให้ตั้งได้ฉาก กับเส้น ห ว ...

ตัดเอาแต่ส่วน ห ร ให้ยาวเท่า ห ว ...

ลากเส้น ร ล ให้ขนานกับเส้น ห ว ...

จากจุด ว, ลากเส้น ว ล ให้ขนานกับ ห ร ... และให้พบกับเส้น ร ล ที่จุด ล

ร ล ว ห จะเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ต้องประสงค์

พิสูตร ร ล ว ห เป็น □ ด้านขนาน สร้าง

∴ ร ล = ห ว, และ ห ร = ล ว ...

แต่ ห.ร = ห ว สร้าง

∴ ห ร, ร ล, ล ว, ว ห ทั้ง ๔ ด้าน นี้ เท่า กัน หมด

∴ ร ล ว ห นี้ เป็น รูป ด้าน เท่า

อนึ่ง √ ร ห ว บวก กับ √ ห ร ล = ๙๐ องศา

แต่ √ ร ห ว เป็น มุม ฉาก สร้าง

∴ √ ห ร ล ก็ เป็น มุม ฉาก ด้วย

และ มุม ที่ ตรง ข้าม ของ รูป □ ด้าน ขนาน ย่อม เท่า กัน....

∴ √ ร ล ว และ √ ล ว ห ก็ เป็น มุม ฉาก เหมือน กัน

∴ รูป ร ล ว ห จึง เป็น รูป มี มุม เป็น มุม ฉาก ทั้ง ๔

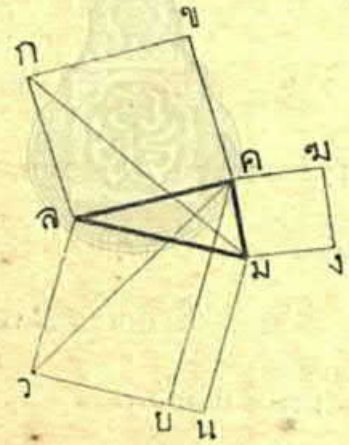
∴ จึง เป็น รูป ๔ เหลี่ยม จตุรัส และ ได้ สร้าง ขึ้น

บน เส้น ห ว ที่ กำหนด ให้ ด้วย

ป. ต. ท.

บทที่ ๔๗

ใน รูป สาม เหลี่ยม มุม ฉาก สี่ เหลี่ยม จตุรัส ที่ ถาน คือ ด้าน ที่ ตรง มุม ฉาก ข้าม ใหญ่ เท่า สี่ เหลี่ยม จตุรัส ที่ สร้าง บน ด้าน ยึก สอง ด้าน รวม กัน



สมมุติ ให้ ล ค ม เปน สาม เหลี่ยม มุม ฉาก ที่ กำหนด ให้ มี มุม ม ค ล เปน มุม ฉาก สี่ เหลี่ยม จัตุรัส บน ถาน ล ม จะ ใหญ่ เท่า กับ สี่ เหลี่ยม จัตุรัส บน เส้น ล ค กับ ค ม รวม กัน

* สร้าง. สร้างสี่เหลี่ยมจตุรัส ก ว น ม บนเส้น ก ม สี่เหลี่ยมจตุรัส ก ข ค ฆ บนเส้น ค ฆ และสี่เหลี่ยมจตุรัส ค ฆ ง ม บนเส้น ค ม ...

แต่ ค ฉากเส้น ค ย ให้ขนานกับ ก ว หรือ ม น และให้พบเส้น ว น ที่จุด ย ...

ฉากเส้น ก ม และ ค ว

พิสูตร ∴ √ ข ค ฆ กับ √ ม ค ฆ เป็นมุมฉากทั้งคู่

∴ เส้น ข ค กับ ค ม จึงต่อตรงเป็นเส้นเดียวกัน ...

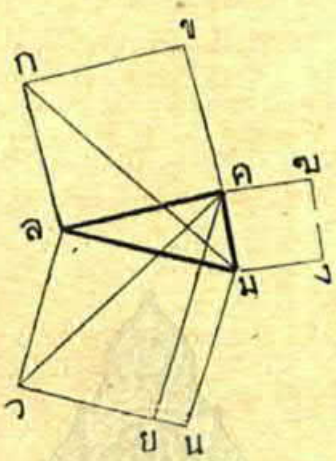
กับ √ ก ฆ ค และ √ ว ฆ ม ก็เท่ากัน เพราะเป็นมุมฉากทั้งคู่

บวก √ ค ฆ ม เข้าทั้งสองข้าง

∴ √ ก ฆ ม ทั้งหมด = √ ค ฆ ว ทั้งหมด

---

* ผู้เรียบเรียงขอสังเกตไว้ว่า คำว่า "สร้าง" นี้ ใช้แต่ในบท ช. ค. พ. ถ้าเป็นบท ช ค. ท. ละใช้คำว่า "วิธีทำ"



ใน $\triangle$ ก ล ม กับ ค ล ว

$\because$ ล ค = ล ก

ล ว = ล ม

และ $\angle$ ค ล ว = $\angle$ ก ล ม

$\therefore$ $\triangle$ ทั้งสองเท่ากันสนิท ...

แต่ $\square$ ด้านขนาน ล ย เป็นสองเท่าของ $\triangle$ ค ล ว

และ $\square$ จตุรัส ก ค ก็เป็นสองเท่าของ $\triangle$ ก ล ม ...

$\therefore$ $\square$ ด้านขนาน ถ ย $=$ $\square$ จตุรัส ก ค ดังนี้

ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากเส้น ค น และ ถ ง

ก็จะพิสูจน์ได้ว่า $\square$ ด้านขนาน ม ย $=$ $\square$ จตุรัส ค ง

$\therefore$ $\square$ จตุรัส น ถ ทั้งหมดจึง $=$ $\square$ จตุรัส ก ค

กับ $\square$ จตุรัส ค ง รวมกัน

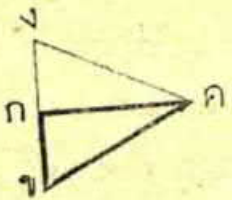
คือ $\square$ จตุรัส บน ด้าน ถ ม เท่ากับ $\square$ จตุรัส บน

เส้น ถ ก และบนเส้น ค ม รวมกัน

ช. ต. พ.

บทที่ ๔๘

ถ้าสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกสองด้านรวมกัน มุมในระหว่างด้านสองด้านนี้จะเป็นมุมฉาก



สมมุติให้ ก ข ค เปน รูป สาม เหลี่ยม ให้
สี่ เหลี่ยม จตุรัส บน ข ค เท่า กับ สี่ เหลี่ยม จตุรัส บน ก ข
กับบน ก ค รวม กัน

มุม ข ก ค จะ เปน มุม ฉาก

สร้าง จาก จุด ก ฉาก เส้น ก ง ให้ ตั้ง ได้
ฉาก กับ เส้น ก ค ....
และ ให้ ก ง เท่า กับ ก ข ..
ฉาก เส้น ง ค

พิสูตร ∵ ก ง = ก ข สร้าง

$\therefore$ □ จตุ. บน ก ง = □ จตุ. บน ก ฮ บวก □ จตุ. บน ก ค เข้า ทั้ง สอง ฝ่าย

$\therefore$ □ จตุ. บน ก ง กับ ก ค = □ จตุ. บน ก ฮ กับ ก ค

แต่ ง ก ค เป็น $\sqrt{}$ ฉาก สร้าง

$\therefore$ □ จตุ. บน ง ค = □ จตุ. บน ก ง และ ก ค รวม กัน ๑.๔๗

และ □ จตุ. บน ฮ ค = □ จตุ. บน ก ฮ กับ ก ค รวม กัน สมมุติ

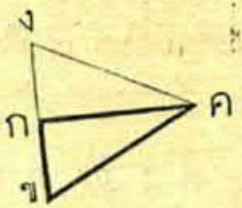
$\therefore$ □ จตุ. บน ง ค = □ จตุ. บน ฮ ค

$\therefore$ ง ค = ฮ ค

ใน $\triangle$ ก ง ค กับ ก ฮ ค

$\therefore$ ก ง = ก ฮ สร้าง

ง ค = ค ฮ พิสูจน์



ก ค เป็นด้านร่วม

∴ △ ง ก ค = △ ข ก ค ๑๐๔ สร้าง

แต่ ∠ ง ก ค เป็นมุมฉาก

∴ ∠ ข ก ค ก็เป็นมุมฉากด้วย

ฮ. ต. พ.

บทนี้สำคัญควรสร้าง อันแรกเรียนมักจะผิดบ่อย ๆ คือไม่ลากเส้น ก ง ให้ตัดได้ฉากกับ ก ค แต่ไปต่อเส้น ข ก ตัดจุด ง เสีย ถ้าทำดังนี้ก็ไม่ได้มุม ง ก ค เป็นมุมฉาก สอดคล้องพิสูจน์ไม่ได้ว่ามุม ข ก ค เป็นมุมฉากด้วย ต้องจำไว้ให้ดี

บทนี้เป็นบทกลับของบทที่ ๔๗ เช่นเดียวกับบท ๑๐๗ เป็นบทกลับของบท ๑๐๕ หรือบท ๖๗ เป็นบทกลับของบท ๖๗ และ ๖๘

ใจทย์ผีกหัดและตัวอย่างวิธีทำต่าง ๆ

คำแนะนำ
ด้วยวิธีที่จะทำใจทย์ต่าง ๆ ตามตำรายีออเมตรี

ผู้เรียนควรทราบไว้ให้แม่นยำว่า ตำราอย่างที่เรียนมาแล้วนั้น และยังมีต่อไปอีกมาก เขาเรียกว่า ยีออเมตรี และเปนสาขาหนึ่งของคณนาวิทยาคุณเดียวกับเลขหรือพีชคณิตฉะนั้น

แต่บทที่ทำมาแล้วทั้ง ๔๘ บทในเล่มต้นนี้ และยังจะมีต่อไปอีกจนจบสิบสามเล่ม เปนบทที่ท่านอาจารย์ยุคลิดคิดเรียบเรียงขึ้นไว้ เพื่อให้เปนตำราสำหรับเรียนวิชายีออเมตรีนี้ เมื่อท่านอาจารย์ยุคลิดล่วงลับไปแล้ว แต่ปีก่อนคฤสต์ศักราช ๓๒๓ ปี อายุของท่านได้ ๖๐ ปีพอดี นับแต่ที่ท่านถึงแก่กรรมจนถึงบัดนี้ได้ ๒๒๒๘ ปี คนอื่น ๆ ผู้ได้เรียนตำราของท่านเห็นว่ามีประโยชน์มาก จึงได้นำมาพิมพ์ขึ้นและภายหลังก็แปลออกเปนภาษาต่าง ๆ ใช้เปนตำราเรียนของทุก ๆ ชาติในโลก ที่ได้มีความรู้เจริญแล้วและพากันให้นามตำรานี้ตามนามของท่านว่า ยุคลิด เพื่อให้เปนเกียรติยศแก่ท่านเจ้าของที่พิมพ์ใช้กันอยู่นั้นมีแต่เล่ม

๑, ๒, ๓, ๔, ๕, ๖, ๑๑ เล่ม ๗, ๘, ๙, ๑๐, ๑๒ และ ๑๓ ไม่ ค่อ มี ประโยชน์ นัก เพราะ ว่า ด้วย วิชา เลข ต่าง ๆ ซึ่ง เป็น ของ ง่าย และ เรา มี ตำรา เลข เหล่า นี้ ใช้ อยู่ พอ แก่ ความ ต้อง การ แล้ว เขา จึง คัด ออก เสีย ไม่ นำ มา พิมพ์ ใช้

เมื่อ ได้ ทราบ แล้ว ว่า ตำรา ยุคลิด คือ ยิออเมตริ แต่ เป็น ยิออเมตริ ที่ ท่าน อาจารย์ ยุคลิด แต่ง ต่อ นี้ ไป จึง จะ ผิก หัด วิชี ทำ โจทย ต่าง ๆ ของ ยิออเมตริ ทั่ว ไป โดย ใช้ บท ยุคลิด ที่ เรียน มา แล้ว ใน เล่ม ๑ นี้ เป็น หลัก ให้ ชำ นิ ชำ นาญ ไว้ ตาม ความ สัง เกต ของ ผู้ ที่ ได้ ศึกษา มา แล้ว ก็ เห็น ว่า โจทย์ ในตำรายิออเมตริ แท้ เป็นของ ยากแก่ ผู้ แรก เรียน มาก กว่า โจทย์ ของ สา ขา อัน ๆ แห่ง คณิ นาวิทยา ทั้ง นี้ดู เหมือน จะ เป็น เพราะ ๑ บท ที่ เรียน มา แล้ว ใน ตำ รา ยุคลิด นั้น จะ เป็น แต่ เข้าใจ ทั้ง หมด ไม่ ได้ ต้อง จำ เนื้อ ความ ได้ ทั้ง หมด ด้วย (ไม่ ใช่ ท่อง ปาก เปล่า) จึง จะ นำ มา ใช้ เป็น เครื่อง มือ สำ หรับ คิด โจทย์ นอก ๆ ได้ ถ้า เป็น แต่ เพียง เข้า ใจ แต่ จำ ไม่ ได้ ก็ นึก ไม่ ออก ว่า จะ ใช้ อัน ไหน เลย คิด โจทย์ไม่ ได้

๒ ชนิด ของ โจทย์ ใน ตำรา นี้ ไม่ มี ที่ สุด จะ แบ่ง ออก เป็น พวก ๆ แล้ว บัญญัติ วิชี ทำ ว่า พวก นี้ ต้อง ทำ ทาง นี้ พวก นั้น

ทำ ทาง นั้น เหมือน อย่าง โจทย์ เลข หรือ โจทย์ พีช คณิต ไม่ ได้

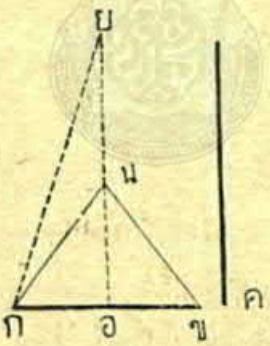
๓ ลำ ดับ บท ของ ท่าน อาจารย์ ยุคลิด นั้น ดีจริง พิเศษ จริง แต่ ก็ หา บอก หรือ ใช ให้ผู้ เรียน แล เห็น หน ทาง สำ หรับคิด หาวิธี ทำ หรือ วิธี "พิสูตร" ไม่ จุ๋ ๆ ท่าน ก็ ให้วิธี ทำ และวิธี พิสูตร สำเร็จหมด ความ คิด หา วิธี เหล่า นั้ ของ ท่าน เอง เป็น ความ ลับ อยู่ ใน ใจ ท่าน

ลำ ดับ บท ของ ท่าน อาจารย์ ยุคลิด นั้น คือ ตั้ง ต้น ตั้ง แต่ ความ สมมุติ ให้ เป็น ที่ ทราบ แน่ ว่า เป็น อย่าง นั้น ๆ แล้ว ก็ มี วิธี ทำ แล้ว โดย พิสูตร เป็น ขั้น ๆ ก็ ทราบ ความ จริง ที่ ประสงค์ จะ หา หรือ จะ พิสูตร ใน เบื้อง ต้น ได้ เพราะ ฉะ นั้น จึง จัด ว่า "เริ่ม ต้น ตั้ง แต่ ที่ ทราบ แล้ว ทำ ขึ้น ไป สู่ ความ จริง ใหม่ ที่ แต่ ก่อน ยัง ไม่ ทราบ แน่"

แต่วิธีหา ใช่ หนทาง สำหรับ ค้นหาวิธี ทำ และวิธี พิสูตรไม่ จึง จะ ขอแนะ นำ ผู้ เรียน ให้ ทำดัง ต่อไป นี้ ในการ ที่ จะ คิดแก้ โจทย์ ต่าง ๆ ให้ ตั้ง ต้น สมมุติ ประ หนึ่ง ว่า เรา ทราบ สิ่ง ที่เรา ต้อง การ แน่ แล้ว ๆ คิด กลับ ถอย หลัง ว่า ถ้า มัน เป็น ดัง นั้น อื่น ๆ จะ เป็น อย่างไร ตาม ความ จริง ใน บทต่าง ๆ ของ ยุคลิด ที่ เราได้ เรียน มา แล้ว การ ที่ เรา คิด กลับ ถอย หลัง นี้ ไม่ ใช่ อื่นไกล ถ้า

สำเร็จ ก็คือวิธีที่เราจะต้องทำต้องพิสูตรนั้นเอง แต่ก็นั่นแหละจะต้องอาศัยความสามารถและความจำบทยุคลิดได้บ้างใจเป็นธรรมดา ถ้าไม่เช่นนั้นก็คิดไม่ใคร่ออกจะทำตัวอย่างไว้ให้ดูเป็นที่สังเกตในต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ๑ ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสิ่งที่กำหนดให้ทราบนั้นคือฐานและเส้นที่เป็นผลบวกของด้านตั้งด้านหนึ่งกับเส้นตั้งได้ฉากกับฐานจากยอดของรูปนั้นรวมกันอีกเส้นหนึ่ง



สมมุติให้ ก ข เป็นฐานและ ค เป็นเส้นที่ยาวเท่ากับด้านตั้งด้านหนึ่งกับเส้นตั้งได้ฉากกับฐานจากยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรวมกัน

จะต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้น

คิด ทด ลอง กลับ ปลาย มาหา ต้น

เพื่อจะหา วิธี ทำโจทย์ อัน นี้ เรา ต้องสมมุติในใจ ว่า น ก ข เป็น △ หน้า จั่ว ที่ ต้อง ประสงค์ ที่ เราได้ สร้าง ขึ้น แล้ว จาก น ลาก เส้น น อ ให้ตั้งได้ ฉาก กับ ก ข

∴ อ เป็น จุด กลาง ของ เส้น ก ข ..๖

ถ้าเรา ต่อ เส้น อ น ให้ยาวตรง ไป ถึง ย และทำ ให้ อ ย = ค เรา ก็เห็น ได้ว่า น ย = น ก สมมุติ

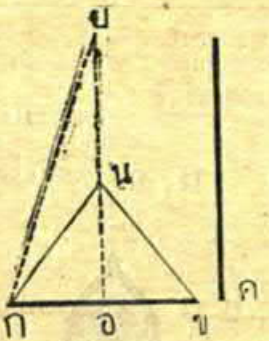
และ ถ้า ลาก เส้น ก ย √ น ก ย ก็ต้อง เท่ากับ √ น ย ก ..๔

เส้น ย อ นี้ เรา อาจ ลากได้ ก่อนที่จะ ทราบ ว่าจุด น อยู่ที่ไหน

∴ ที่เราจะ หา จุด น ก็เป็น อัน สำเร็จ ดังจะได้ ทำ ให้ ดู ตาม วิธี ยุกลิด ใน ต่อ ไป นี้

วิธีทำ โจทย์ นี้ จริง ๆ

วิธีทำ ตัด ก ข ออก เป็น สอง ท่อน เท่า ๆ กัน ที่ จุด อ .... จาก จุด อ ลาก เส้น อ ย ให้ตั้งได้ ฉาก กับ ก ข และให้ อ ย เท่ากับ ค .... กับ๑ ลาก เส้น ย ก ทำมุม ย ก น ให้



เท่ากับมุม ก ย น ..... และให้ น อยู่ในเส้น ย อ ตากเส้น น ข. น ก ข จะเป็น △ หน้าจั่วที่ต้องประสงค์

พิสูตร ∵ น ก = น ข ...

∴ น ก ข เป็น △ หน้าจั่ว

อนึ่ง √ น ก ย = √ น ย ก สร้าง

∴ น ก = น ย

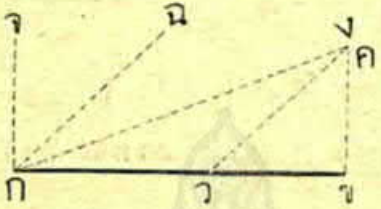
บวก น อ เข้าทั้งสองข้าง

∴ น ก กับ น อ = น ย กับ น อ = ย อ

คือ น ก กับ น อ = ค ตามที่ประสงค์ในโจทย์

ว. ท. ท.

ตัวอย่างที่ ๒ ให้แบ่งเส้นตรงออกเป็นสองท่อน ให้สี่เหลี่ยมจตุรัสบนท่อนหนึ่งเป็นสองเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกท่อนหนึ่ง



สมมุติให้ ก ข แปนเส้นตรงที่กำหนดให้ จะต้องแบ่งเส้น ก ข นี้ออกเปนสองท่อน ให้สี่เหลี่ยมจตุรัสบนท่อนหนึ่งเปนสองเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกท่อนหนึ่ง

คิดทดลองกลับปลายมาหาต้น

สมมุติว่าเราได้แบ่งเส้น ก ข ตามต้องการที่จุด ว แล้ว และ □ จตุรัสบนเส้น ก ว เปนสองเท่าของ □ จตุรัสบนเส้น ว ข

เราทราบอยู่ว่าถ้ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีมุมยอดเปนมุมฉาก □ จตุรัสที่ฐานก็เปนสองเท่าของ □ จตุรัสบนด้านทั้งด้านใดด้านหนึ่งทั้งสองด้าน

∴ ในที่นี้ทำให้เราเห็นหนทางได้ว่า เราต้องลาก

เส้น ข ค ให้ตั้งได้ฉากกับ ก ข และให้ยาวเท่า ว ข แล้วลากเส้น ว ค

□ จตุรัสบนเส้น ว ค ก็เป็นสองเท่าของ □ จตุรัสบนเส้น ว ข ...๔๗

∴ ว ค ต้องเท่ากับ ว ก ด้วย สมมุติ

เมื่อเราลากเส้น ก ค เราก็แลเห็นว่า

$\sqrt{}$ ว ค ก = $\sqrt{}$ ว ก ค ...๔

∴ $\sqrt{}$ นอก ค ว ข เป็นสองเท่าของ $\sqrt{}$ ใน ค ก ว ...๖

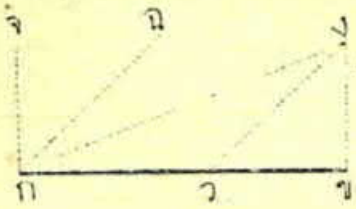
แต่ $\sqrt{}$ ค ว ข = ครึ่ง $\sqrt{}$ ฉาก ...๖

∴ $\sqrt{}$ ค ก ว = เสี้ยว $\sqrt{}$ ฉาก

นี่ก็เป็นอันชี้หนทางให้เราแก้โจทย์นี้ได้แล้ว

วิธีทำจริง ๆ

วิธีทำ ลากเส้น ข ง ให้ได้ฉากกับ ก ข และลากเส้น ก จ ให้ตั้งได้ฉากกับ ก ข .... ผ่ามุม จ ก ข ด้วยเส้น ก ฉ และผ่ามุม ฉ ก ข ด้วยเส้น ก ค ... ให้จุด ค อยู่ในเส้น ง ข ที่จุด ค สร้างมุม ก ค ว ให้



•กาง เท่า กับ มุม ว ก ค ..... ให้ จุด ว อยู่ ใน เส้น ก ข
จุด ว จะ แบ่ง เส้น ก ข ออก ตาม ต้อง การ

พิสูตร ดังที่ ∨ ค ก ว = ∨ ว ค ก สร้าง

∴ ก ว = ค ว ...๖

∵ ∨ ค ว ข = ∨ ค ก ว บวก ∨ ว ค ก ...๑๖

และ ∨ ค ก ว เป็น เสี้ยว ∨ ฉาก สร้าง

∴ ∨ ค ว ข = ครึ่ง ∨ ฉาก

∴ ∨ ข ค ว เป็น ครึ่ง ∨ ฉาก ด้วย ๑๖

∴ ข ค = ข ว ...๖

∴ □ จตุรัส บน เส้น ค ว เป็น สอง เท่า ของ
□ จตุรัส บน เส้น ว ข ...๗

∴ □ จตุรัส บน เส้น ก ว เป็น สอง เท่าของ

□ จตุรัส บน เส้น ว ข

ฮ. ต. ท.

โจทย์ฝึกหัด

เนื่องด้วย สามเหลี่ยม ที่ มี ส่วน เท่า

(ให้ใช้ บท ที่ ๔, ๘, กับ ๒๖ ให้ได้ คล่อง แคล่ว)

๑ ถ้า เส้น ตรง ตั้ง แต่ ยอด ของ รูป สามเหลี่ยม ตัด ฐาน ของ รูป นั้น ออก เป็น สอง ท่อน เท่า ๆ กัน รูปนั้น เป็น รูป หน้า จั่ว

๒ ถ้า เส้น ผ่า มุม ยอด ของ รูป สามเหลี่ยม ต่อ ลงมา ผ่า ฐานด้วย, รูป นั้น เป็น รูป หน้า จั่ว

ให้ ต่อ เส้น ผ่า มุม และ เลย ลงมา แล้ว ทำ คล้าย ๆ บท ที่ ๒๖ ก็ จะ สำเร็จ ได้

๓ ถ้า เส้น ผ่า มุม ยอด ของ รูป สามเหลี่ยม ตั้ง ได้ ฉาก กับ ฐาน ด้วย รูป นั้น เป็น รูป หน้า จั่ว

๔ จาก ปลาย ฐาน ทั้ง สอง ข้าง ของ รูป สามเหลี่ยม ถ้า ลาก เส้น ตรง ภายใน รูป นั้น ให้ จด กัน เป็น มุม และ ให้ มุม ระหว่าง ด้าน

ตั้งกับเส้นที่ลากนั้นทางเท่ากันทั้งสองข้าง แม้เส้นที่ลากทั้งสองนี้ยาวเท่ากัน รูปนั้นก็เป็นรูปหน้าจั่ว

๕ ในรูปสามเหลี่ยม ถ้าเส้นตรงที่ลากจากปลายฐานทั้งสองข้างให้ตั้งได้ฉากกับด้านตั้งที่ตรงข้าม ยาวเท่ากันทั้งสองเส้น รูปนั้นก็เป็นรูปหน้าจั่ว

๖ รูปสามเหลี่ยม ก ข ค กับ จ ข ค ที่ร่วมฐานกันคือ ข ค แต่อยู่คนละข้างของฐาน มีด้าน ก ข เท่ากับ ข จ และด้าน ก ค เท่ากับ ค จ ให้พิสูตร์ว่าถ้าลากเส้น ก จ เส้นนี้จะตั้งได้ฉากกับ ข ค

๗ ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าลากเส้นตรงจากปลายฐานทั้งสองข้างให้ตั้งได้ฉากกับด้านที่ตรงข้าม แล้วลากเส้นตรงตั้งแต่มุมยอดถึงที่เส้นทั้งสองไขว้กัน เส้นที่ลากนี้จะผ่ามุมยอดนั้น

๘ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม เส้นตรง ก ย ผ่ามุมยอด ก ข ค จาก ข ลากเส้นตรง ข ง ให้ตั้งได้ฉากกับ ก ย แล้วต่อตรงออกไปพบด้าน ก ค หรือส่วนต่อของ ก ค ที่จุด ย เส้น ข ง จะเท่ากับเส้น ง ย

๙ รูป สี่เหลี่ยม ก ข ค ง มี ด้าน ก ข เท่ากับ ก ง และ ข ค เท่า กับ ค ง จง พิสูตร์ ว่า เส้น ทะแยงมุม ก ค ผ่า มุม ทั้ง สอง ของ รูป สี่ เหลี่ยม

๑๐ ก ค ข ง เป็น รูป สี่ เหลี่ยม มี ด้าน ก ง เท่า กับ ด้าน ข ค และ มี เส้น ทะแยง มุม ก ค กับ ข ง ซึ่ง ไขว้ กัน ที่ จุด อ เท่า กัน ให้ ชี้ ให้ เห็น ว่า สาม เหลี่ยม ก อ ข กับ ง อ ค เป็น สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ทั้ง คู่

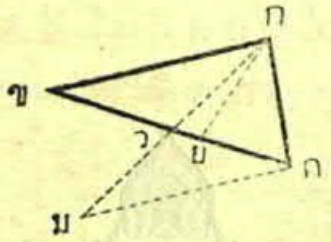
๑๑ ถ้า มุมหนึ่ง ของ รูป สามเหลี่ยม กาง เท่ากับ อีก สอง มุม รวม กัน ด้าน ยาว ที่ สุด นั้น เป็น สอง เท่า ของ เส้น ตั้ง แต่ จุด กลาง ของ ด้าน นี้ ถึง มุม ที่ ตรง ข้าม

ด้วย สิ่ง ที่ ไม่ เท่า กัน

(ให้ ดู บท ที่ ๑๖ ถึง ๒๕)

คำ ไข เส้น ตรง ที่ ลาก จาก มุม ของ รูป สาม เหลี่ยม ถึง สุนย์ กลาง แห่ง ด้าน ที่ อยู่ ตรง ข้าม เรียก ว่า มี เดียน ของ รูป สาม เหลี่ยม นั้น

ตัว อย่าง ทำ ให้ ดู ถ้า ด้าน ตั้ง ของ รูป สาม เหลี่ยม ยาว ไม่ เท่า กัน แม้ ถาก เส้น ผ่า มุม ยอด กับ เส้น มี เดียน จาก มุม ยอด เส้น มี เดียน นี้ จะ อยู่ ใน ระหว่าง เส้น ผ่า มุม กับ ด้าน ยาว



สมมุติ ให้ ก ข ค เป็น △ ที่ มี ด้าน ก ข ยาว กว่า ก ค ให้ ก ว เป็น มี เดียน และ ก ย เป็น เส้น ผ่า มุม ข ก ค

ก ว จะ อยู่ ใน ระหว่าง ก ย กับ ก ข

สร้าง ต่อ เส้น ก ว ยาว ออก ไป ถึง ม ให้ ว ม ยาว เท่า ก ว แล้ว ถาก เส้น ม ค

△ ข ว ก กับ ม ว ค เท่า กัน สนิท ...

∴ ข ก = ม ค และ ∠ ข ก ว = ว ม ค

แต่ ก ข ยาว กว่า ก ค สมมุติ

$\therefore$ ม ค ก็ยาวกว่า ก ค

$\therefore \sqrt{}$ ม ก ค กางกว่า $\sqrt{}$ ก ม ค

$\therefore \sqrt{}$ ม ก ค กางกว่า $\sqrt{}$ ข ก ว ด้วย

$\therefore \sqrt{}$ ว ก ค ต้องใหญ่กว่าครึ่งของมุม ยอด ข ก ค

$\therefore$ ก ว ต้องอยู่ในระหว่าง ก ข กับ ก ย ที่เป็นเส้นผ่ามุม ข ก ค

ข. ต. พ.

---

๑. ในรูปสามเหลี่ยม ก ข ค ถ้า ก ค ไม่ยาวกว่า ก ข ให้พิสูตรว่าเส้นตรงใด ๆ ที่ลากออกจากยอด ก ถึงมาถึงฐาน ข ค สั้นกว่าเส้น ก ข ทุกเส้น

๒. บ พ น เป็นรูปสามเหลี่ยม เส้น บ ว ผ่ามุม พ บ น และจดฐาน พ น ที่จุด ว ให้พิสูตรว่า บ พ ยาวกว่า พ ว และ บ น ยาวกว่า น ว

๓. ถ้าลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งถึงเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง เส้นที่สั้นที่สุดคือเส้นตั้งได้ฉากกับเส้นตรงนั้น เส้นอื่น ๆ

ที่ ใกล้ กับ เส้น ตั้ง ได้ ฉาก นั้น ย่อม สั้น กว่า เส้น ที่ ไกล ออก ไป และ จะ มี เส้น ที่ ยาว เท่า กัน ได้ เป็น คู่ ๆ คือ อยู่ คน ละ ข้าง สอง เส้น ตั้ง ได้ ฉาก

๔. ผล บวก ของ เส้น ตรง ที่ ลาก จาก จุด ภาย นอก รูป สาม เหลี่ยม ถึง จุด ที่ มุม ทั้ง สาม ของ รูป สาม เหลี่ยม ยาว กว่า ครึ่ง หนึ่ง ของ ผล บวก แห่ง ด้าน ทั้ง สาม ของ รูป สาม เหลี่ยม นั้น

๕. ผล บวก ของ เส้น ตรง ที่ ลาก จาก จุด ภาย ใน รูป สาม เหลี่ยม ถึง จุด มุม ทั้ง สาม ของ รูป สาม เหลี่ยม สั้น กว่า ผล บวก ของ ด้าน ทั้ง สาม แห่ง รูป สาม เหลี่ยม นั้น

๖. ผล บวก ของ ด้าน ทั้ง สี่ แห่ง รูป สี่ เหลี่ยม ยาว กว่า ผล บวก ของ เส้น ทะแยง มุม แห่ง รูป นั้น

๗. ผล บวก ของ เส้น ทะแยง มุม แห่ง รูป สี่ เหลี่ยม สั้น กว่า ผล บวก ของ เส้น ตรง ทั้ง สี่ ที่ ลาก จาก จุด มุม ของ รูป นั้น ถึง จุด หนึ่ง ภาย ใน รูป ให้ พิสูจน์ ข้อ นี้ แล้ว ชี้ ให้ เห็น ว่า มี อยู่ อย่าง เดียว ที่ จะ เท่า กัน ได้

๘. ด้าน คู่ ใด ๆ ของ สาม เหลี่ยม ใด ๆ รวม กัน ลง ยาว กว่า สอง เท่า ของ มี เดียน ที่ ด้าน เดียว

วิธี ทำ ให้ ต่อ เส้น มี เดียน แล้ว ทำ รูป คล้าย บท ที่ ๑๖

๙. ใน สาม เหลี่ยม ใด ๆ เส้น มี เดียน ทั้ง สาม รวม กัน ตง สั้น กว่า ด้าน ทั้ง สาม รวม กัน

๑๐. เส้น ทะแยง มุม ของ รูป ขนมเปี๊ยกปูน ด้าน เท่าไม่ เท่ากัน

ว่า ด้วย เส้นน ขาน

(ให้ ดู บท ที่ ๒๗ — ๓๑)

๑ ถ้า เส้น ตรง เส้น หนึ่ง ตัด เส้น ขนาน สอง เส้น และ ถ้า ผ่า มุม ใน ทั้ง สอง ที่ อยู่ ข้าง เดียว กัน เส้น ผ่า มุม ทั้ง คู่นั้น จะ จด กัน เปน มุม ฉาก

๒ ง ค พบ เส้น ตรง ก ข ที่ จุด ค มุม ประชิด ที่ บัง เกิดขึ้นนั้น ถ้า ผ่า ด้วย เส้น ค ฉ และ ค ว แล้ว จาก จุด ว ใน ที่ ใด ๆ ใน เส้น ง ค ลาก เส้น ฉ ว ร ให้ ขนาน กับ เส้น ก ข ให้ พบ เส้น ผ่า มุม ที่ จุด ฉ และ ร เส้น ฉ ว จะ เท่า กับ เส้น ว ร

๓ ถ้า เส้น ตรง สอง เส้น ขนาน กับ เส้น ตรง อีก สอง เส้น ๆ ต่อ เส้น แม้ ผ่า มุม ใน ระหว่าง เส้น ขนาน ทั้งสอง คู่ เส้น ผ่า มุม ทั้ง สอง เส้นนั้น จะ ขนาน กัน

๔ เส้นตรงใน ระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง ที่มีที่สุดปลายทั้งสองข้างที่เส้นขนานคู่นั้น มีจุดๆ หนึ่งเป็นศูนย์กลาง ให้พิสูตรว่าเส้นตรงใดๆ ที่ลากผ่านจุดนี้ไป ให้มีที่สุดปลายทั้งสองข้างที่เส้นขนานคู่นั้น จะมีศูนย์กลางร่วมกับจุดนั้นทุกเส้น

๕ บ ป กับ ม น เป็นเส้นตรงสองเส้น ว เป็นจุดในเส้น บ ป ให้หาจุด ย ในเส้น บ ป ที่จะให้ ย ว เท่ากับเส้นที่ลากจาก ย ถึงและตั้งได้ฉากกับ ม น

๖ ก ข ค เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้ลากเส้น ม น ขนานกับฐาน ข ค ให้มีที่สุดปลายที่ด้านทั้งคู่ แต่ให้ ข ม ม น และ น ค ยาวเท่ากันทั้งหมด

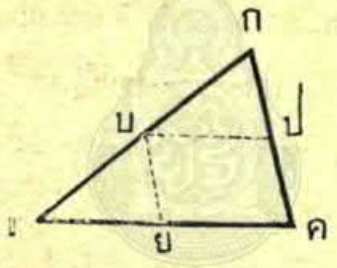
๗ ก ข ค เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้ลากเส้น ม น ขนานกับฐาน ข ค ให้มีที่สุดปลายที่ด้านทั้งคู่ แต่ให้ ม น ยาวเท่ากับ ข ม และ ค น รวมกัน

๘ ก ข ค เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้ลากเส้น น ม ขนานกับฐาน ข ค ให้มีที่สุดปลายที่ด้านทั้งคู่ แต่ให้ ม น ยาวเท่ากับผลลบของ ข ม และ ค น

รูปเส้นขนาน

(ให้ดูบทที่ ๓๓ และ ๓๔)

ตัวอย่างที่ ๑ เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของด้านหนึ่งแห่งรูปสามเหลี่ยม ให้ขนานกับฐาน ย่อมตัดอีกด้านหนึ่งออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กันด้วย

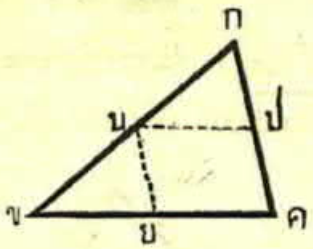


สมมุติให้ ก ข ค เป็น △ บ เป็นศูนย์กลางของ ก ข เส้น บ ป ได้ลากขนานกับฐาน ข ค และจุด ป อยู่ในเส้น ก ค

ป จะเป็นศูนย์กลางของ ก ค ด้วย

ลากเส้น บ ย ให้ขนานกับ ก ค .....

พิสูตร ใน △ ก บ ป กับ ข บ ย



∵ บ ป ∥ ข ค

∴ $\sqrt{}$ ก บ ป = $\sqrt{}$ บ ข ย ...(๑)

ใน ทำ นอง เดียว กัน $\sqrt{}$ บ ก ป = $\sqrt{}$ ข บ ย ...(๒)

และ ข บ = บ ก สมมุติ

∴ ด้าน ก ป = ย ย ...(๓)

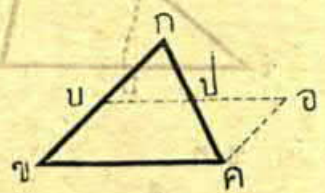
แต่ บ ป ค ย เปน □ ด้าน ขนาน สร้าง

∴ บ ย = ป ค ...(๔)

∴ ก ป = ป ค ด้วย คือ ป เปน สุนย์ กลาง ของ ก ค

ข. ค. พ.

ตัวอย่างที่ ๒ เส้นตรงที่ต่อจุดสุนย์กลางของด้านสองด้านแห่งรูปสามเหลี่ยม ย่อมขนานกับด้านที่สามด้วย



สมมุติให้ ก ข ค เป็น △ บ กับ ป เป็นสุนย์กลางของด้าน ก ข และ ก ค

เส้น บ ป จะขนานกับด้าน ข ค

สร้าง ต่อเส้น บ ป ออกไปถึง อ ให้ ป อ ยาวเท่ากับ บ ป ลากเส้น อ ค

พิสูตร ใน △ ก บ ป กับ ป ค อ

∵ ก ป = ป ค สมมุติ

บ ป = ป อ สร้าง

∠ บ ป ก = ∠ ค ป อ ...๔

∴ ก บ = อ ค และ ∠ บ ก ป = ∠ ป ค อ ...๔

∴ อ ค ∥ ก บ ...๒๗

แต่ ข ค = บ ก คือ เท่า กับ บ ข ด้วย สมมุติ

∴ ข ค = และ ∥ บ ข

∴ บ ข = และ ∥ ข ค

คือ บ ป ∥ ข ค

ข. ต. พ.

๑ เส้น ตรง ที่ ต่อ จุดศูนย์ กลาง ของ ด้าน ทั้ง สอง แห่ง รูป สาม เหลี่ยม ย่อม เท่า กับ ครึ่ง หนึ่ง ของ ด้าน ที่ สาม

๒ ให้ พิสูตรว่า ถ้า ลาก เส้น ตรง ต่อ จุด ศูนย์ กลาง ของ ด้าน ทั้ง สาม แห่ง รูป สาม เหลี่ยม จะ แบ่ง รูป นั้น ออก เปน สาม เหลี่ยม เท่า ๆ กัน สี่ รูป

๓ เส้น ตรงใด ๆ ที่ ลาก จาก ยอด ถึง ฐาน ของ รูป สาม เหลี่ยม จะ ต้อง ถูก ตัด ออก เปน สอง ท่อน เท่า ๆ กัน ด้วย เส้น ที่ ต่อ จุด ศูนย์ กลาง ของ ด้าน ตั้ง ทั้ง คู่

๔ กำ หนด จุด ศูนย์ กลาง ของ ด้าน ทั้ง สาม ให้ ให้ สร้าง รูป สาม เหลี่ยม นั้น

๕ ก ข กับ ค ง เปน เส้น ตรง สอง เส้น ที่ กำ หนด ให้ ป เปน จุด ที่ กำ หนด ให้ อยู่ ใน ระหว่าง เส้น ทั้ง สอง นั้น

ให้ ฉาก เส้น ตรง ผ่า ป ไป มี ที่ สุด ปลาย ที่ เส้น สอง เส้น และ ให้ ป เป็น ศูนย์ กลาง ของ เส้น ที่ ฉาก ด้วย

๖ ก ข ค ง เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ว กับ ย เป็น ศูนย์ กลาง ของ ด้าน ก ง และ ข ค ให้ พิสูตร ว่า เส้น ข ว กับ ง ย แบ่ง เส้น ทะแยง มุม ก ค ออก เป็น สาม ส่วน เท่า ๆ กัน

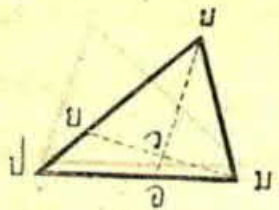
๗ ถ้า ต่อ จุด ศูนย์กลาง ของ ด้าน ทั้ง สี่ แห่ง รูป สี่ เหลี่ยมไม่ ว่า ชนิดใด ๆ รูปใหม่ ที่ เกิด ขึ้น ย่อม เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน

๘ ให้ พิสูตร ว่า เส้น ตรง ทั้ง สอง ที่ ต่อ จุด ศูนย์ กลาง ของ ด้าน ตรง กัน ข้าม แห่ง รูป สี่ เหลี่ยมใด ๆ ย่อม ตัด กัน และ กัน ออก เป็น สอง ส่วน เท่า ๆ กัน

โจทย์ระคน

(ใช้ บท ๓๒ เป็น พื้น)

ตัวอย่าง ใน รูป สาม เหลี่ยม ถ้า ฉาก เส้น ตรง จาก ปลาย ฐาน ข้าง หนึ่ง ให้ ตั้ง ได้ ฉาก กับ เส้น ผ่า มุม ยอด ของ รูป นั้น (ก) เส้น ที่ ฉาก นั้น กับ ด้าน ตั้ง ไม่ ว่า ด้าน ไหน จะ ทำ ให้ บังเกิด มุม กาง เท่า ครึ่ง หนึ่ง ของ มุม ที่ ฐาน รวม กัน (ข) เส้น ที่ ฉาก นี้ กับ ฐาน



จะทำให้บังเกิดมุมกางเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกแห่งมุมที่ถาน

สมมุติให้ บ ป ม เปน △ ให้ บ อ เปนเส้นผ่ามุม ป บ ม ให้ ม ว ย ตัด บ อ ได้มุมฉากที่จุด ว

(ก) มุม บ ย ม หรือ บ ม ย จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกแห่งมุม บ ป ม และ บ ม ป

พิสูตร ใน △ บ ย ว กับ บ ม ว

∴ √ ย บ ว = √ ม บ ว สมมุติ

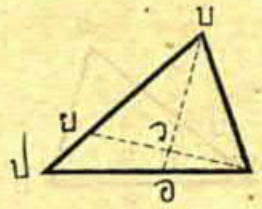
√ ฉาก บ ว ย = √ ฉาก บ ว ม

บ ว เปนด้านรวม

∴ √ บ ย ว = √ บ ม ว ...๖

อนึ่ง √ บ ย ม = √ ย ม ป บวก √ ย ป ม ...๗

∴ √ บ ม ย = √ ย ม ป บวก √ ย ป ม ด้วย บวก √ บ ม ย เข้าทั้งสองข้าง



$\therefore \sqrt{}$ บ ม ย สอง หน $= \sqrt{}$ บ ม ป บวก $\sqrt{}$ บ ป ม

$\therefore \sqrt{}$ บ ม ย $=$ ครึ่ง หนึ่ง ของ $\sqrt{}$ บ ม ป บวก $\sqrt{}$ บ ป ม

และ $\sqrt{}$ บ ย ม ก็ เท่า นี้ เหมือน กัน

(ข) $\sqrt{}$ ย ม ป จะ เท่า กับ ครึ่ง หนึ่ง ของ ผล ลบ แห่ง มุม บ ม ป และ มุม บ ป ม

พิสูตร ตาม ที่ พิสูตร มา แล้ว $\sqrt{}$ บ ม ย $= \sqrt{}$ ย ม บ บวก $\sqrt{}$ ย ป ม

บวก $\sqrt{}$ ย ม ป เข้า ทั้ง สอง ข้าง

$\therefore \sqrt{}$ บ ม ป $= \sqrt{}$ ย ป ม กับ สอง เท่า $\sqrt{}$ ย ม ป

$\therefore \sqrt{}$ ย ม ป สอง หน $=$ ผล ลบ ของ $\sqrt{}$ บ ม ป กับ $\sqrt{}$ บ ป ม (ตาม ความ จริง ใน วิชี กลับ อิเควชัน พีชคณิต)

$\therefore \sqrt{}$ ย ม ป $=$ ครึ่ง หนึ่ง ของ ผล ลบ แห่ง $\sqrt{}$ บ ม ป กับ $\sqrt{}$ บ ป ม

๑ ก เปน ยอด ของ สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว ก ข ค ถ้า ต่อ เส้น ข ก ออกไป ถึง ง ให้ ก ง เท่า กับ ก ข แล้ว ลาก เส้น ง ค ให้ พิสูตร ว่า ง ข ค เปน สาม เหลี่ยมมุมฉาก

๒ เส้น ตรง ที่ ต่อ จุด ศูนย์ กลาง แห่ง ฐาน ของ สาม เหลี่ยม มุม ฉาก กับ ยอด มุม ฉาก ย่อม ยาว เท่า กับ ครึ่ง หนึ่ง ของ ฐานนั้น

๓ จาก ปลาย ฐาน ทั้ง สอง ข้าง ของ รูป สาม เหลี่ยม ลาก เส้น ตรง ตั้งได้ ฉากกับด้าน ที่ตรง ข้าม (ต่อ ด้าน ออกไป ถ้า จำเปน) ให้ พิสูตร ว่า เส้น ตรง ที่ ต่อ จุด ศูนย์ กลาง ของ ฐาน กับ ปลาย เส้น ตั้ง ได้ ฉาก นั้น ย่อม ยาว เท่า กัน

๔ ก ง เปน เส้น ลาก จาก ยอด ก ตั้งได้ ฉาก กับ ฐาน ข ค ของ สาม เหลี่ยม ก ข ค ร. ฉ. ว. เปน จุด ศูนย์ กลาง ของ ด้าน ข ค ค ก และ ก ข ให้ พิสูตร ว่า มุม ว ร ฉ กับ มุม ว ง ฉ ต่าง ก็ เท่า กับ มุม ข ก ค

๕ ใน รูป สาม เหลี่ยม มุม ฉาก ถ้า ลาก เส้น ให้ ตั้ง ตรง ได้ ฉาก กับ ฐาน จาก ยอด มุม ฉาก สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง ที่ เกิด ขึ้น นั้น จะ มี มุม เท่า กัน มุม ต่อ มุม

๖ ใน สาม เหลี่ยม มุม ฉาก ถ้า ลาก เส้น ตรง สอง เส้น จาก

ยอด มุม ฉาก เส้น หนึ่งให้ตั้งได้ ฉาก กับ ถาน อีก เส้น หนึ่ง ลากต่อ ถึง สูนย์กลาง แห่งถาน ให้พิสูตร ว่า มุมใน ระหว่าง สอง เส้น นั้น กาง เท่า ผล ลบ ของมุม ของ สองมุม แห่ง รูป สาม เหลี่ยม

๗ ใน สาม เหลี่ยมใด ๆ มุม ที่ อยู่ใน ระหว่างเส้น ผ่ามุม ยอด กับ เส้น ลาก จาก มุม ยอดให้ ตั้งได้ฉาก กับ ถาน ย่อม เท่า กับ ครึ่ง หนึ่ง ของ ผล ลบ แห่ง มุม ที่ ถาน

๘ ด้าน ก ค ของ สาม เหลี่ยม ก ข ค ลาก ต่อ ออกไป ถึง ฆ มุม ข ก ค กับ ข ค ฆ ถูก ผ่า ด้วย เส้น ตรง สอง เส้น ที่ พบ กัน ที่ จุด ห จง ชี้ให้ เห็น ว่า มุม ห ซึ่ง บัง เกิด ขึ้น นี้ กาง เท่า กับ ครึ่ง หนึ่ง ของ มุม ที่ ตัว ข

๙ มุม ของ ทั้ง สอง แห่ง รูป สาม เหลี่ยม มุม ฉาก ถ้า มุม หนึ่ง เปน สอง เท่า ของ อีก มุม หนึ่ง ถาน จะ เปน สอง เท่า ของด้าน ที่ สั้น ที่ สุด

๑๐ ถ้า กำ หนด จุด สองจุดที่เส้น ทะแยง มุมแห่ง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ให้ มี ระยะ ห่าง เท่า กัน นับ แต่ ปลาย เส้น คน ละ ข้าง แล้วต่อ จุด นี้ กับ มุม ที่ อยู่ ตรง ข้าม รูป ที่ เกิด ขึ้น จะ เปน รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ด้วย

๑๑ บ ป ม เปน สาม เหลี่ยม ด้าน เท่า ใน ด้าน บ ป

ป ม และ ม บ มี จุด ก, ข และ ค ซึ่งมี ระยะ ป ก, ป ข และ ม ค เท่ากัน เส้น ก ม, ค ป และ ข บ ที่ ลาก นั้น ไขว้กัน ที่ จุด ร, ฉ และ ว ให้พิสูตร ว่า รูป ร ฉ ว ที่เกิด ขึ้น นั้น เป็น สาม เหลี่ยม ด้าน เท่า

๑๒ มี เส้น ตรง ที่ กำ หนด ให้ เส้น หนึ่ง กับ จุด สอง จุด ให้ ลาก เส้น ตรง สอง เส้น ผ่าน สอง จุด นี้ ให้ บรรจบ กับ เส้น ที่ กำ หนด ให้ แล้ว บัง เกิด เป็น รูป สาม เหลี่ยม ด้าน เท่า

๑๓ จาก จุด ที่ กำ หนด ให้ ๆ ลาก เส้น ตรง สอง เส้น ถึง เส้น ขนาน คู่ หนึ่ง ให้ เส้น ที่ ลาก นี้ เท่า กัน และ จด กัน และ กัน เป็น มุม ฉาก

๑๔ เส้น ตรง สาม เส้น จด กัน ที่ จุด ๆ หนึ่ง ให้ ลาก เส้น ตรง อีก เส้น หนึ่ง ตัด เส้น สาม เส้น นี้ ให้ ส่วน ทั้ง สอง ของ เส้น ที่ ลาก ยาว เท่า กัน

(ข้อ ที่ ๑๓ กับ ๑๔ นี้ ทำ ได้ หลาย ทาง)

๑๕ ใน รูป สาม เหลี่ยม ให้ สร้าง รูป ขนม เบียก ปูน ด้าน เท่า ให้ เอา มุม หนึ่ง ของ รูป สาม เหลี่ยม เป็น มุม หนึ่ง ของ รูป ขนม เบียก ปูน ด้าน เท่า นี้

ในที่สุดนี้ได้รวบรวมคำไขทั้งหมด เรียงตามลำดับข้อมาไว้เพื่อให้เป็นเครื่องจำง่ายแก่ผู้เรียน เพราะในต้น ๆ นั้นได้ยกคำไขขึ้นกล่าวเป็นภาค ๆ คำไขเหล่านั้นย่อมกะท่อนกะแท่น ไม่ติดต่อกัน และไม่เรียงตามลำดับกัน

คำไข

๑ จุด เป็นสิ่งซึ่งไม่มีกำหนดกว้างยาวใหญ่เล็ก มีกำหนดแต่ที่เท่านั้น

๒ เส้น เป็นสิ่งซึ่งมีแต่กำหนดยาว ไม่มีกำหนดกว้าง

ปลายเส้นทั้งสองข้างย่อมเป็นจุด และถ้าเส้นสองเส้นไขว่กัน ที่ ๆ เส้นทั้งสองไขว้กันนั้นก็นับว่าเป็นจุดเหมือนกัน

๓ เส้นตรง คือเส้นซึ่งซึ่งดึงเครียดอยู่ในระหว่างจุดปลายทั้งสองข้าง

๔ พื้น คือสิ่งซึ่งมีกำหนดกว้างยาว แต่ไม่มีกำหนดหนา

(ขอบของพื้นใดขอบนับว่าเป็นเส้น)

๕ พื้นราบเสมอ เป็นพื้นซึ่งหากจะสมมุติตั้งจุดขึ้นสองจุดในที่ใด ๆ ในพื้นนั้น เส้นตรงในระหว่างสองจุดนั้นจะติดเรียบอยู่กับพื้นตลอดทั้งเส้น

๖ มุม คือที่เส้นสองเส้นเอนจดกัน แต่ไม่ติดหรือต่อเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

คำไข

๗ ถ้า เส้น ตรง เส้น หนึ่ง ตั้ง อยู่ บน เส้น ตรง อีก เส้น หนึ่ง และ ตั้ง ตรง แนว จน มุม สอง มุม ที่ ประชิด กัน นั้น เท่า กัน มุม ทั้ง สอง นี้ เรียก ว่า มุมฉาก ทั้ง คู่ และ เส้น ที่ ตั้ง ตรง อยู่ บน อีก เส้น หนึ่ง นั้น เรียก ว่า เส้น ตั้ง ได้ ฉาก กับ เส้นนั้น

๘ มุม ขัว คือ มุม ที่ กาง มาก กว่า มุม ฉาก

๙ มุม ยง คือ มุม ที่ แคบ กว่า มุม ฉาก

๑๐ วงกลม คือ รูป ที่ มี เส้น ๆ หนึ่ง ล้อม รอบ เส้นนี้ เรียก ว่า เส้น รอบวง และ มี จุด ๆ หนึ่ง อยู่ ตรง กลาง ภายใน ถ้า เรา ลาก เส้น ตรง ตั้ง แต่ จุด นี้ ไป ถึง เส้น รอบ วง เส้น ตรง ที่ เรา ลาก นี้ ไม่ ว่า กี่ เส้น ๆ ก็ ยาว เท่า กัน ทั้ง หมด เส้น ตรง เหล่า นี้ เรียก ว่า รัศมี ของ วง กลม และ จุด ที่ อยู่ ตรง กลาง นั้น เรียก ว่า ศูนย์ กลาง ของ วง กลม

๑๑ เส้น อัฒจักร ของ วง กลม คือ เส้น ที่ ลาก ผ่า ศูนย์ กลาง ของ วง กลม และ มี ที่ สุด ปลาย ทั้ง สอง ข้าง ที่ เส้นรอบ วง

๑๒ ครึ่งวงกลม คือ รูป ซึ่ง มี เส้น ศูนย์ กลาง กัน ส่วน ของ เส้น รอบ วง ซึ่ง โอบ มา เพียง เส้น ศูนย์ กลาง นี้ เป็น อาณาเขตร์

๑๓ ส่วน ของ วง กลม คือ รูป ซึ่ง มี เส้น ตรง เส้น หนึ่ง กับ ส่วน ของ เส้น รอบ วง ซึ่ง โอบ มา เพียง เส้น ตรง นั้น เป็น อาณาเขตร์

๑๔ รูป เหลี่ยม คือ รูป ซึ่ง มี เส้น อาณาเขตร์ เป็น เส้น ตรง ทั้ง นั้น

๑๕ รูป สาม เหลี่ยม เป็น รูป ซึ่ง มี ด้าน สาม ด้าน เป็น เส้น ตรง ทั้ง นั้น

๑๖ รูป สี่ เหลี่ยม คือ รูป ซึ่ง มี ด้าน สี่ ด้าน เป็น เส้น ตรง ทั้ง นั้น

๑๗ รูป หลาย เหลี่ยม คือ รูป ซึ่งมี ด้าน มาก กว่า สี่ด้าน ขึ้นไป และ เป็น เส้น ตรง ทั้ง นั้น

๑๘ สาม เหลี่ยม ด้าน เท่า คือ รูป สาม เหลี่ยม ที่ มี ด้าน เท่า กัน ทั้ง สาม ด้าน

๑๙ สาม เหลี่ยม หน้า จั่ว คือ รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มี

ด้าน เท่า กัน สอง ด้าน

๒๐ สาม เหลี่ยม ด้าน ไม่ เท่า คือ รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มิ ด้าน ไม่ เท่า กัน เลย

๒๑ สาม เหลี่ยม มุม ฉาก คือ รูป สาม เหลี่ยม ซึ่ง มี มุม ๆ หนึ่ง เปน มุม ฉาก

๒๒ สาม เหลี่ยม มุม ขัว คือ รูป สาม เหลี่ยม ที่ มี มุม ๆ หนึ่ง เปน มุม ขัว

๒๓ สาม เหลี่ยม มุม ป้าน คือ รูป สาม เหลี่ยม ที่ มี มุม เปน มุม ป้าน ทั้ง นั้น

๒๔ เส้น ขนาน ตรง คือ เส้น สอง เส้น ที่ เรียง เปน คู่ กัน อยู่ บน พื้น ราบ อัน เดียว กัน และ มี ระยะ ห่าง เท่า กัน เสมอ ตัน เสมอ ปลาย ถ้า จะ ลาก เส้น ทั้ง สอง นี้ ต่อ ไป ทาง ปลาย ข้าง หนึ่ง ข้าง ใด เส้น ทั้ง สอง นี้ ก็ จะ ไม่ รู้ จัก พบ กัน เลย

๒๕ สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน คือ รูป สี่ เหลี่ยม ที่ มี ด้าน ที่ อยู่ ตรง กัน ข้าม ขนาน กัน เปน คู่ ๆ

๒๖ สี่ เหลี่ยม มุม ฉาก ด้าน ขนาน คือ รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ที่ มี มุม เปน มุม ฉาก

๒๓๗ สี่เหลี่ยม จตุรัส คือรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมี ด้าน เท่ากัน ทั้ง สี่ ด้าน และมี มุม เป็น มุม ฉาก ทั้ง สี่ มุม

๒๓๘ รูป ขนม เปี๊ยก ปูน เป็น รูป สี่เหลี่ยม ที่ มี ด้าน เท่า กัน ทั้ง สี่ ด้าน แต่ไม่มี มุม เป็น มุม ฉาก

9.3