ก 02639

ม ๑๐๗

ตำรา เลข

เรขาคณิต - ยิออมเมตรี

เล่ม ๑

สำหรับ

นักเรียน สยาม

พิมพ์ครั้งแรก ๑๐๐๐ เล่ม

ราคา เล่ม ละ ๑๐ สลึง

กรุงเทพ - ร.ศ. ๑๒๔

หอสมุดแห่งชาติ

โรง พิมพ์ เกิด เต แอนด์โก

มี กำมสิทธิ์ หาม ไม่ ให้ ผู้ ใด พิมพ์ ปลอม

ก 02639

กระทรวงธรรมการ

ตำรา เลข

เรขาคณิต „ยี่อมเมตริ"

(ตอน ที่ ๑)

ภาค ที่ ๑

ว่า ด้วย มูล เหตุ นาม ของ จุด , เส้น , มุม , รูป สาม , สี่ ,
ทวิ เหลี่ยม กับ วง กลม ต่าง ๆ

มาตรา ๑

บท ที่ ๑

๑) จุด นั้น ไม่ มี อัตรา หนา , กว้าง , ยาว ประ การ ใด.

บทที่ ๒

๑) เส้นตรงนั้น มีอัตรา แต่ ยาว ออก ไป ฝ่าย เดียว ไม่มี หนา, กว้าง

๒) เส้นตรงนั้น ทาง ต้น และ ปลาย มี จุด ขั้น เป็น เขตร์

๓) เส้นตรงนั้น คือ จุด เลื่อน หรือ ติด ต่อ เนื่อง กัน ออก ไป ฝ่าย หนึ่ง

บทที่ ๓

๑) เส้น นั้น มี อยู่ สาม ประการ เส้นตรง, โค้ง และ หัก

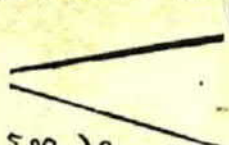
บทที่ ๔

๑) เส้นขนาน คู่ ตรง คือ เส้นตรง สอง เส้น ซึ่ง อยู่ เรียง เป็น คู่ กัน มี ระยะ ในระหว่าง ห่าง

เสมอ กัน ตั้ง แต่ ต้น จน ที่ สุด ถึง จะ ขยาย ให้ ยาว ออก ไป สัก เท่า ใด ก็ ดี ไม่ อาจ ที่ จะ บรรจบ กัน ได้ ดัง เช่น ทาง รถ ไฟ เป็น ต้น อนึ่ง ถ้า จะ เลื่อน เข้า มา ให้ ชิด กัน ต้อง ประกบ เป็น เส้น เดียว กัน

บท ที่ ๕

๑) เส้น บรรจบ คือ เส้น ตรง สอง เส้น ซึ่ง อยู่ เรียง กัน ใน



ระหว่าง มี ระยะ ห่าง ไม่ เสมอ กัน

รูป ๒

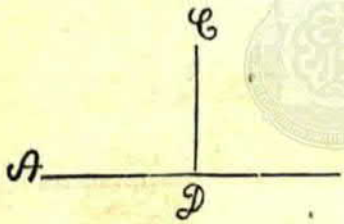
ทาง หนึ่ง ห่าง ทาง หนึ่ง ชิด ถ้า จะ ขยาย ให้ ยาว ออก ไป ทาง ที่ ชิด นั้น คง จะ บรรจบ กัน ทาง ที่ ห่าง ก็ จะ ยิ่ง ห่าง ออก ไป จน ไม่ มี ที่ สุด ทาง ชิด นั้น เรียก ว่า ต้น บรรจบ ทาง ที่ ห่าง นั้น เรียก ว่า ต้น แยก

บทที่ ๖

๑) พื้นราบเสมอนั้น มีเส้นกั้นเป็นเขตร์อยู่โดยรอบ

บทที่ ๗

๑) เส้นตรงหนึ่ง ตั้งขึ้นเบื้องบนหรือมาตัดเส้นอื่นซึ่งวางเรียบอยู่บนพื้นราบ ดังเส้น CD ตั้งขึ้นบนหรือมาตัดเส้น AB นั้น กับทั้งมุม ADC เท่ากับมุม BDC ด้วย คือทำมุมทั้งสองให้ ๙๐° เท่ากัน เส้น AB ซึ่งเป็นเส้นเรียบอยู่บนพื้นราบนั้น เรียกว่า เส้นระดับ (เส้นฮอริซอนเทอล ★) เส้น CD ซึ่งตั้งขึ้นบนหรือมาตัดเส้นระดับนั้น เรียกว่า



รูป ๑.

เส้นตั้ง (เส้นเวอร์ติเคอล ★)

๒) เส้นตรงตั้ง (เส้นเพอร์เพ็นดิคิวล่าร์) นั้น คือ เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งบนหรือตัดเส้นตรงอื่น และมุมสองข้างเส้นตั้งหรือตัดนั้นมีส่วน ๙๐ องศา เท่ากัน

มาตรา ๒

บทที่ ๑

๑) เส้นตรงสองเส้นมาตัดกัน ที่ตรงเส้นตัดกันนั้นยังเกิดเป็นมุมขึ้น เรียกว่ามุม (แองเกอล)

๒) มุมนี้มีต่างกันหลายชนิด แล้วแต่เส้นตรงนั้นจะตัดกันทางใด ถ้าเส้นตรงนั้นมาตัดกันทางตรงดังเส้นตั้งตัดเส้นระดับ มุมนั้นเรียกว่า (มุมตรง)

๖

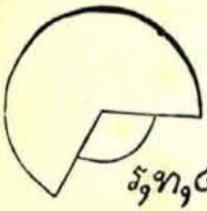
มีองศา ๙๐° ถ้วน

๓. ถ้า เส้น ตรง นั้น มา ตัด กัน โดย ทิศ ที่ ใกล้ กัน มุมนั้น ก็ แคบ เรียกว่า (มุม แหลม) มี องศา น้อย กว่า ๙๐°

๔) ถ้า เส้น ตรง นั้น มา ตัด กัน โดย ทิศที่ ไกล กัน มุมนั้น ก็ กว้าง เรียก ว่า (มุม ป้าน) มี องศา มาก กว่า ๙๐°

๕) ถ้า เส้น ตรง นั้น มา ตัด กัน ทาง ทิศ ที่ ตรง กัน ข้าม มุมนั้นเหยียดตรงเป็น เส้นเดียว เรียกว่า (มุมเหยียด) มี องศา สอง เท่า มาก กว่า มุม ตรง คือ ๑๘๐° ถ้วน

๖) ถ้า เส้น ตรง มา ตัด กัน ทาง ทิศ ที่ ไกล กัน มี องศา เกิน กว่า ๑๘๐° เรียก ว่า (มุม อ้อม)



รูป ๑๔.

มุมที่ตรงมุมอันข้ามเรียกว่า (มุมประกบ)

๗) เครื่องหมายมุมนั้น $\angle$ ดังนี้ แลชื่อของมุมหรือแทนตัวเลขของยานั้นใช้อักษรกรีกคือ

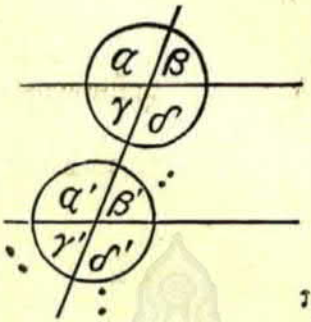
α — อาล์ฟา, β — เบ็ดตา, γ — กัมม่า,

δ — เด็ล์ต้า แลอื่น ๆ ดังมีอยู่ในท้ายสมุทนี้

บทที่ ๒

๑) กฎว่า เส้นตรงใดตัดเส้นขนานคู่ตลอดทั้งสองโดยทางใดก็ดี จะบังเกิดมีมุมคู่ชิ้นดังนี้ .

๔



ร.ท.ส.

ก) <u>ให้ฮ่างว่า</u> $\measuredangle\alpha = \delta, \alpha = \alpha', \alpha = \delta'$

$\measuredangle\beta = \gamma, \beta = \beta', \beta = \gamma'$

$\measuredangle\gamma = \beta', \gamma = \gamma'$

$\measuredangle\delta = \alpha', \delta = \delta'$

ข) <u>แสดงว่า</u> I. $\measuredangle\alpha + \beta = ๑๘๐^{\circ}, \measuredangle\delta + \beta = ๑๘๐^{\circ}$

$\alpha + \beta = \delta + \beta$

II. $\measuredangle \alpha + \beta = ๑๘๐^\circ$, $\measuredangle a + \gamma = ๑๘๐^\circ$

$$a + \beta = a + \gamma$$

$$\beta = \gamma \quad \text{เรียกว่า (มุมตะไกร)}$$

III. $\measuredangle \beta + \delta = ๑๘๐^\circ$, $\measuredangle \beta' + \delta = ๑๘๐^\circ$

$$\beta + \delta = \beta' + \delta'$$

$$\beta = \beta' \quad \text{เรียกว่ามุมเรียงคู่}$$

ถ้าดังนั้น $\alpha = \alpha'$, $\delta = \delta'$, $\gamma = \gamma'$ เรียกว่ามุมเรียงคู่

IV. $\delta + \gamma' = ๑๘๐^\circ$, $\delta + \beta' = ๑๘๐^\circ$

$$\delta + \gamma = \delta + \beta'$$

$$\gamma = \beta' \quad \text{เรียกว่ามุมแย้ง}$$

ถ้าดังนั้น $\alpha' = \delta$, $\alpha = \delta'$, $\beta = \gamma'$ เรียกว่ามุมแย้ง

V. $\measuredangle \alpha + \gamma'$, $\alpha' + \gamma$, $\beta + \delta'$, $\beta' + \delta$

เรียกว่ามุมกลับ

๒) มุมตะไกร, มุมเรียงคู่, มุม แย้ง นี้มีองศาเท่ากัน แต่มุมกลับนั้นมีองศา ๑๘๐°

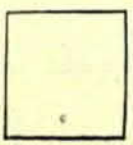
ภาคที่ ๒

ว่าด้วย รูปสี่เหลี่ยม ต่าง ๆ

มาตรา ๓

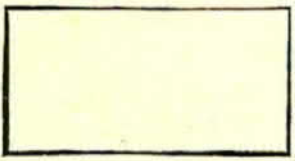
บทที่ ๑

ก) รูปสี่เหลี่ยมนั้นมีอยู่หลายชนิด

๑) 

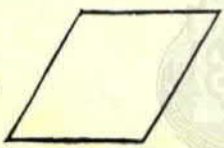
รูป ๑

สี่เหลี่ยมจัตุรัสมุมตรง มีด้านและมุมทั้งสี่เท่ากัน มุมหนึ่งมีองศามุมละ ๙๐° ถ้วน

๒ 

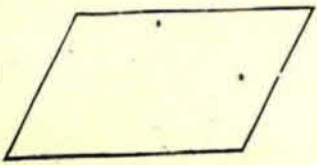
รูป ๗.

สี่เหลี่ยมผืนผ้า มุมทุกมุม ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามนั้น ขนานกัน ต่อกันแลเท่ากัน กับมีองศามุมละ ๙๐° ถ้วนทุกมุม

๓ 

รูป ๘.

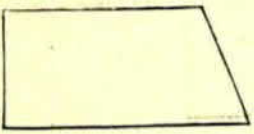
สี่เหลี่ยมขัดรัดโย้ มีด้านทั้งสี่เท่ากัน และมุมที่อยู่ตรงกันข้ามนั้น เท่ากัน

๔ 

รูป ๙.

สี่เหลี่ยมผืนผ้าโย้ มีด้าน และมุมที่อยู่ตรงกันข้ามนั้น เท่ากัน กับด้านตรงข้ามนั้นขนานคู่ต่อกัน.

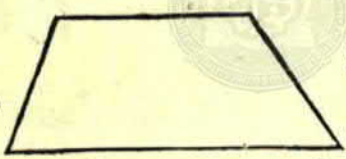
๕)



รูป ๑๐.

สี่เหลี่ยมด้านหนึ่งขนาน มีด้านขนานคู่ต่อกันหนึ่งคู่ กับด้านสุดคือด้านหนึ่งที่ตรงบรรจบหรือต่อด้านขนานทั้งสองข้างนั้น เป็นมุม ๙๐° ทั้งสอง แต่มุมแลด้านนอกจากนี้ต่างกัน

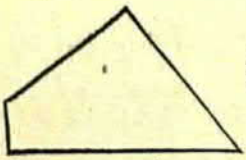
๖)



รูป ๑๑

สี่เหลี่ยมกันถัง มีด้านหนึ่งขนานคู่ต่อกัน แต่ด้านแลมุมนั้นต่างกัน

๗)



รูป ๑๒

สี่เหลี่ยมด้านไม่ขนาน มีด้านแลมุมทั้งสี่ต่างกัน.

๒) กฎว่า รูปสี่เหลี่ยมไม่ว่าชนิดใด รวมทั้งสี่มุม มี ๓๖๐° ถ้วน

มาตรา ๔.

ว่าด้วยวิธีหาเนื้อที่ของ รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านขนานคู่

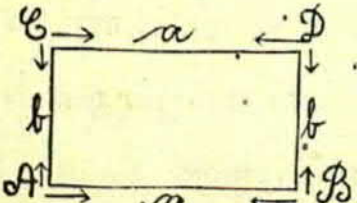
บทที่ ๑

๑) ในการที่จะคิดหาเนื้อที่และสิ่งอื่นของรูปสี่เหลี่ยม และรูปอื่นๆ ทุกประการนั้น เมื่อได้เขียนรูปแล้ว ต้องหมายอักษรตามมุม, ระหว่างเส้น, ลูกศร กับเขตรและราคาลงให้แน่นอนก่อน

๒) อักษรที่หมายตามมุมนั้น ต้องใช้อักษรเล็กดินตัวใหญ่ ในระหว่างเส้นหรือด้านนั้นหมายอักษร

เล็ก คิน ตัว เล็ก ตาม ตัว อย่าง ที่ จะ ทำ ให้ ดู ใน ข้าง หน้า นี้ ต่อ ไป

๓) วิธี หา เนื้อ ที่ ของ รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน คู่ มุม ตรง นั้น ให้ เอา ด้าน ระดับ คูณ กับ เส้น ดิ่ง หรือ ว่า ด้าน พื้น คูณ ด้าน ตั้ง เป็น ของ รวม กา กับ หมาย รูป สี่ เหลี่ยม ทั้ง ปวง ใช้ เครื่อง หมาย ▱ ดัง นี้



รูป ๑๓.

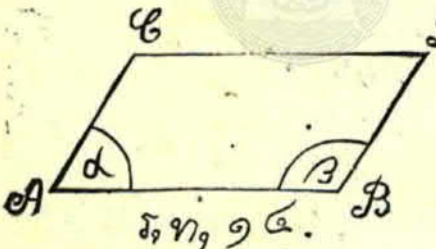
ให้ ภาค ▱ มุม ตรง $\begin{cases} a = 15 \text{ ม.} \\ b = 12 \text{ ม.} \end{cases}$

a . b — เนื้อ ที่ ▱ หรือ

a b = ▱ น. ตัด สั้น ถ้า ดัง นั้น ▱น — 15 . 12 — 180 ม ก ว.

บทที่ ๒๓.

๑) วิธีหาเนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคู่มุมโย้นั้น ให้เอาด้านฟั้นคูณด้านตั้งอย่างเดียวกับบทที่ ๑ ข้อ ๓ แต่รูปสี่เหลี่ยมอย่างนี้มีวิธีผิดกันกับที่กล่าวมาแล้ว



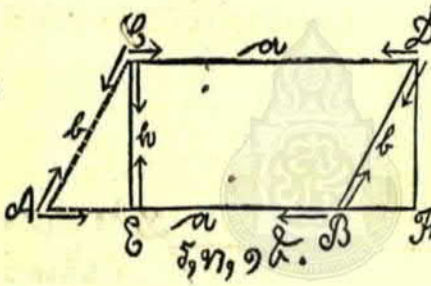
รูป ๑๔.

คือ AB เป็นด้านฟั้นตามอัตรา แต่ด้านตั้งนั้นยังไม่มี จะนับว่าด้าน AC. หรือด้าน BD. เป็นด้านตั้งไม่ได้ ด้วยมุมเหล่านี้ไม่

ใช้มุมตรง คือ $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$

ทั้งสองนี้ไม่มีองศามุมละ ๙๐° เพราะฉนั้นจำเป็น

จะต้องหาด้านตั้งก่อน



(๓๐) รูป □ เดิม นั้นคือ □ ABCD ต้องทอดดิ่งลงมาจากมุม(C)

ตัดด้าน AB ที่ตรง (E) ดังนั้น เส้น CE คือ

เส้นดิ่งหรือด้านตั้ง, □ ABCD = □ EFCD

เพราะเส้น CD = เส้น AB กับเส้น CD = EF ตาม

อัตราสี่เหลี่ยมมุมตรง

ถ้าดังนั้น AB = EF

หรือ $BE + AE = BE + BF$

ถ้า ดังนั้น $AE = BF$

เพราะฉะนั้น $\square ABGD = \square EFCD$

๓) คูณ หา เนื้อที่ นั้น ให้ เอา ด้าน (a) คูณ กับ ด้าน (h)

ให้ ราคา $\begin{cases} a = 18 \text{ ม.} \\ h = 6 \text{ ม.} \end{cases}$

$a.h = \square$ น.

$\square$ น. $= 6.18$

$\square$ น. $= 108$ ม.ท.ร. ดังนี้

มาตรา ๕

ว่า ด้วย โจทย์ เนื้อ ที่ รูป สี่ เหลี่ยม มุม ตรง

๑) โจทย์ ว่า ที่ คำยล หนึ่ง เป็น รูป มุม ตรง มี ด้าน กว้าง

ยาว ด้าน ละ ๑๕ วา เท่า กัน.

ก) จะ ใคร่ รู้ ว่า มี เนื้อ ที่ อยู่ เท่า ใด วา ตาราง เหลี่ยม

ข) ถ้า จะ ปู กระเบื้อง หน้า วัว หน้า ตอก ขัด รัด จะ สิ้น กระเบื้อง เท่า ใด ?

๒) โจทย์ว่า เรือน หลัง หนึ่ง มี เพดาน กว้าง ๔,๕ เมเตอร ยาว ๑๕, เมเตอร ท่าน ช่าง ทา สี คิด เป็น วา ตา เย็ก เสร็จ ๐,๒๕ ตาราง เหลี่ยม ละ ๖ อัฐ ถาม ว่า จะ เสีย เงิน ให้ ช่าง เป็น เงิน ทั้ง สิ้น เท่า ใด ?

๓) โจทย์ว่า ที่ นา แห่ง หนึ่ง กว้าง ๒๔ เส้น ยาว ๓๑,๒๕ เส้น จะ ขาย วา ตาราง เหลี่ยม ละ ๓๒ อัฐ รวม ทั้ง สิ้น จะ เป็น เงิน เท่า ใด ?

๔) เรือน หลัง หนึ่ง กว้าง ๕,๕ วา ยาว ๑๕,๕ วา คิด

ร่วมนอกทั้ง ๔ ระเบียง ๔ ด้าน ด้วย แต่ร่วมในนั้น กว้าง ๑๐ ศอก, ยาว ๑๒,๕ วา ถามว่า ถ้าไม้พื้นนั้น เป็นไม้สักหนา ๑,๕ นิ้ว ราคา ยกละ ๔๐ บาท จะคิดแต่ไม้พื้นระเบียง จะเป็นเงินไม้กี่ยก แลรวมเป็นเงินเท่าใด ?

ภาคที่ ๓

ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม และเนื้อที่

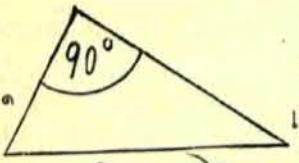
มาตรา ๖

บทที่ ๑

รูปสามเหลี่ยมนั้นมีอยู่หลายชนิด

ก) รูปสามเหลี่ยมนี้ เรียกนามตามมุมที่อยู่ตรงเส้นฉาก หรือพื้นข้าม กับทั้งตามนามของด้านบรรจบเป็นมุมนั้นด้วย

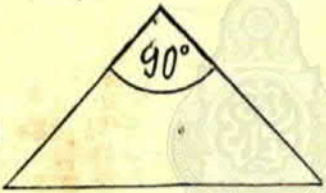
๑



รูป ๑๖

สาม เหลี่ยม มุม ตรง ด้าน ไม่เสมอมีด้านทั้งสามไม่ เท่า กัน มุม ที่ ตรง ด้าน ฟื้น ข้าม มี องศา ๙๐° ถ้วน

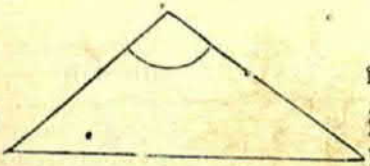
๒)



รูป ๑๗

สาม เหลี่ยม มุม ตรง ด้าน เสมอ มี มุม ที่ ตรง ด้าน ฟื้น ข้าม ๙๐° องศา ถ้วน กับ ด้าน สอง ด้าน ที่ บรรจบ เป็น มุม ๙๐° นั้น เท่า กัน

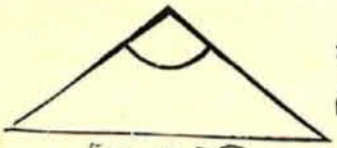
๓)



รูป ๑๘

สาม เหลี่ยม มุม ปัน ด้าน เม่ เสมอ มี มุม ที่ อยู่ ตรง ด้าน ฟื้น ข้าม มาก กว่า ๙๐ องศา แล ด้าน ทั้ง สาม ต่าง กัน

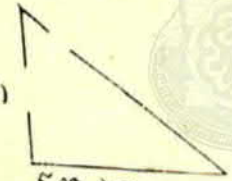
๔



รูปที่ ๑๗

สาม เหลี่ยม มุม ปัน ด้านเสมอมีมุมอยู่ตรง ด้าน ฟื้น ข้าม มาก กว่า ๙๐° องศา กับ ด้าน สอง ด้าน ที่ บรรจบ เป็น มุม ใหญ่ นั้น เท่า กัน

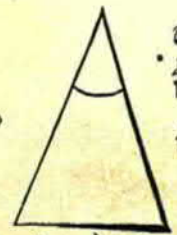
๕



รูปที่ ๑๘

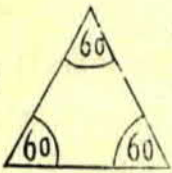
สาม เหลี่ยม มุม แหลม ด้าน ไม่ เสมอ มี มุม ที่ ตรง ด้าน ฟื้น ข้าม น้อย กว่า ๙๐° แล ด้าน ต่าง กัน

๖



รูปที่ ๑๙

สาม เหลี่ยม มุม แหลม ด้าน เสมอ มี มุม ที่ ตรง ด้าน ฟื้น ข้าม น้อย กว่า ๙๐° องศา กับ ด้าน สอง ด้าน ที่ บรรจบ เป็น มุม นั้น เท่า กัน

๗) 

สามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้านแลมุมทั้งสามเท่ากัน กับมุมนั้นมีองศามุมละ ๖๐° ด้วน

รูป ๒๒.

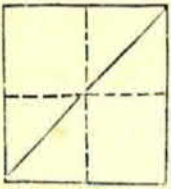
ข) กฎว่า รูปสามเหลี่ยมไม่ว่าชนิดใด รวมมุมทั้งสามมีองศา ๑๘๐° ด้วน เพราะสามเหลี่ยมนี้คือครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม

มาตรา ๗

ว่าด้วยวิธีหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม

บทที่ ๑

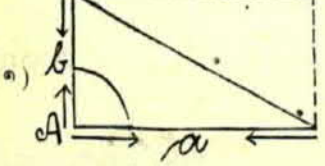
๑) ในการที่จะหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งปวงนี้ต้องกระทำอย่างเดียวกันกับ (มาตรา ๔) นั้นทุกประการ แต่มีวิธีผิดกันอยู่ที่ต้องเอาสองหารเท่านั้น เหตุที่รูปสามเหลี่ยมนี้เป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม



รูป ๒๓.

เมื่อเอาด้าน พื้น คูณ กับ ด้าน ตั้ง ทำเป็น ๆ จะต้องได้ เนื้อ ที่ ของรูป สี่เหลี่ยมโดย เต็มก่อน ภายหลังเมื่อเอาสองหารลง คงจะได้ แต่ เพียง ครึ่ง เดียว ดัง รูปที่ ๒๓ นี้ โดย ว่า จะ ตัด ทางใด ก็ ต้อง ได้ ครึ่ง หนึ่ง อยู่ ดังนั้น แล ไม่เฉภาะแต่ รูป อย่างที่ ๒๓ นี้ เท่านั้น ถึงรูปสี่เหลี่ยม อื่น ๆ ก็ เหมือน กัน.

บทที่ ๒. เครื่อง หมาย สาม เหลี่ยม △ ดังนี้



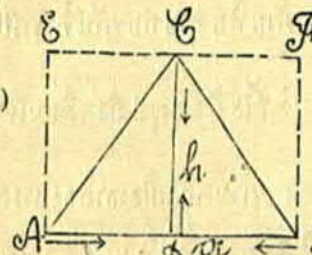
รูป ๒๔.

ให้ราคา $\begin{cases} a = 16 \text{ ม.} \\ b = 8 \text{ ม.} \end{cases}$

$ab =$ ▯ น. ABCD

$\frac{ab}{2} =$ △ น. ABC

$\frac{16.8}{2} =$ △ น.



รูป ท.๒๓ ก.

ข) ให้ รา คา $\begin{cases} a = 12 \text{ ม.} \\ b = 9 \text{ ม.} \end{cases}$

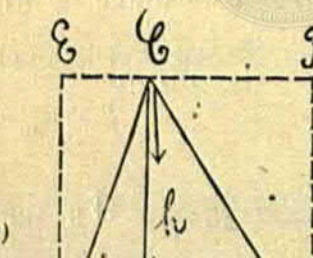
△ น. 64 ม.ท.ร

รูปนี้เส้นคิ่งทั้ง สาม นั้น เท่ากัน

$a.h = \#$ น. ABEF

$\frac{a.\ h}{2} = \triangle$ น. ACB

$\frac{12.\ 9}{2} = \triangle$ น. , $\triangle$ น. $= 54$ ม.ท.ร



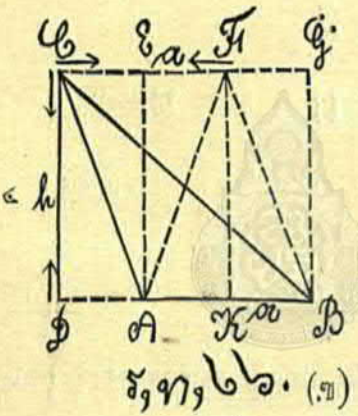
รูป ท.๒๖.

ค) ให้ รา คา $\begin{cases} a = 15 \text{ ม.} \\ b = 6 \text{ ม.} \end{cases}$

รูปนี้ เส้นคิ่งทั้ง สาม นั้น เท่ากัน แต่เส้นคิ่งนั้นไม่อยู่ตรงกลาง

(ก) $a \cdot h = \#$ น. ABEF, $\frac{a \cdot b}{2} = \triangle$ น ABC

$\frac{15.6}{2} = \triangle$ น. , $\triangle$ น. $= 45$ น.ก.ร.



รูปที่ ๖๐. (ข)

ก) รูปนี้เส้นทั้งออก อยู่นอกรูป เปรียบประหนึ่งว่าไม้เอน ถ้าจะใคร่รู้ว่าไม้นั้นสูงเท่าใด จำเป็นจะต้องทิ้งดิ่งแต่ปลายลงมาจากดิน จึงจะรู้ว่าไม้นั้นสูงจากพื้นดินเท่านั้นๆ ถ้าจะวัดตามลำต้นแต่พื้นดินถึงยอด ก็จะรู้ได้แต่เพียงว่าลำต้นของไม้นี้ยาว

เท่า ใด. เพราะ ฉะนั้น เส้น CD นี้ คือ เส้น ตั้ง หรือ ด้าน ตั้ง ของ รูป △ ABC, เส้น AC นั้น ไม่ ใช้ เส้น ตั้ง

ข) เส้น ตั้ง ทั้ง สี่ นี้ เท่า กัน CD = AE = FK = BG.

ตาม มาตรา ๙. บท ที่ ๑

อนึ่ง รูป สี่ เหลี่ยม ▱ ABCF = ▱ ABEG

เพราะ ว่า ด้าน AB = CF. AB = EG ถ้า ดัง นั้น เส้น CF = EG

△ น. ABC = $\frac{\text{A B. CD}}{2}$ △ น. ABF = $\frac{\text{AB. FK}}{2}$

ถ้า ดัง นั้น $\frac{\text{AB. CD}}{2} = \frac{\text{A B. FK}}{2}$ ตาม มาตรา ๙ บท ๒

เพราะ ฉะนั้น ▱ ABCF = ▱ ABEG, △ ABC = △ ABF

บท ที่ ๓

๑) กฎ ว่า ถ้า เอา ด้าน ของ สาม เหลี่ยม ๒ ด้าน มา บวก กัน จำเป็น ต้อง ยาว กว่า ด้าน ที่ ๓.

๒) กฎว่า ถ้าเอาด้าน ไดหนึ่ง } ของสามเหลี่ยมมาลบกัน เศษที่เหลือนั้นทำเป็นด้องสั้นกว่าด้านที่ ๓

อุทาหรณ์ ถ้าตัดไม้ให้เป็นสามท่อนๆ ละ ๔,๕,๑๐ เซนติเมเตอร์ ไม่ยังอาจสร้างให้เป็นรูปสามเหลี่ยมได้เป็นอันขาด

มาตรา ๘

ว่าด้วยโจทย์เนื้อที่รูปสามเหลี่ยม

๑) โจทย์ว่า ที่นาแห่งหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านพื้นยาว ๙,๒๕ เส้น ยืนขึ้นไป ๗,๗๕ เส้น ขายวาตารางเหลี่ยมละ ๑,๕ บาท จะต้องเสียเงินให้เจ้าของนานั้นเท่าใด?

๒) เรือนไม้สักฝาถังหลังหนึ่ง กว้าง ๑๐ ศอก, ยาว ๔.๕ วา, ฝาสูง ๗ ศอก หน้าจั่วสองด้าน ด้านพื้นกว้าง ๑๐ ศอก, สูง ๖ ศอก
ถ้าใช้ไม้ ๑ นิ้ว, ราคาบาทละ ๓๕ บาท จะสิ้นไม้ทำฝาและหน้าจั่วนั้นกี่บาท? (ไม่คิดหักหน้าต่างออก)
กับจะต้องเสียค่าไม้เป็นเงินเท่าไร?

ภาคที่ ๔

มาตรา ๙.

ว่าด้วยวิธีหาเนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมต่างๆ และกฎของสิ่งที่อยู่ในเส้นขนานคู่

บทที่ ๑

๑) กฎว่า เส้นตรงสิ่งในระหว่างเส้นขนานคู่นั้น ต้องมีส่วนยาวเท่ากันทั้งสิ้น.

๒) กฎว่า เส้นตรงสิ่งทั้งหลายซึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอื่นร่วมกันนั้น ต้องขนานคู่ต่อกัน.

บทที่ ๒

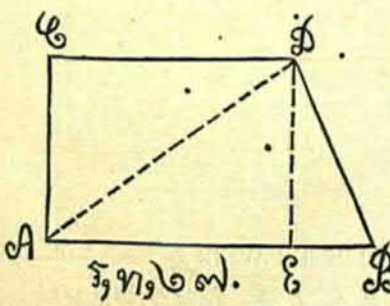
กฎว่า สามเหลี่ยมไม่ว่าชนิดใด ถ้ามีเส้นฉาน หรือฟื้นร่วมกัน และตั้งอยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่โดยกำกัด ต้องมีเนื้อที่เท่ากันเป็นนิตย์

มาตรา ๑๐

ว่าด้วยวิธีหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมต่างๆ

บทที่ ๑

๑) สี่เหลี่ยมด้านหนึ่งขนานนั้น คือสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งมีด้านตั้งร่วม,มาประกับกัน สี่เหลี่ยมด้านหนึ่งขนาน ▱ ABCD. นี้ ถ้าชักเส้น

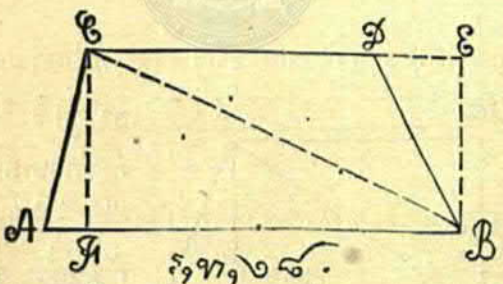


รูปที่ ๒๗. ๔

ทะแยงจากมุม A. ถึงมุม D. คือเส้นทะแยง AD.

บัดนี้แบ่ง ▱ ABCD ออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปคือ △ CDA. กับ △ ABD. ถ้าทิ้งดิ่งจากมุม D มาตัดเส้น AB ตรงจุด E ถ้าดังนั้นเส้นดิ่ง DE เป็นเส้นสั้งของ △ ABD. กับจำเป็นต้องเท่ากันด้าน AC ซึ่งเป็นด้วนตั้งของ △ ADC. ตามกฎในมาตรา ๙ เพราะฉนั้นจึงว่ามีด้านตั้งร่วมกัน

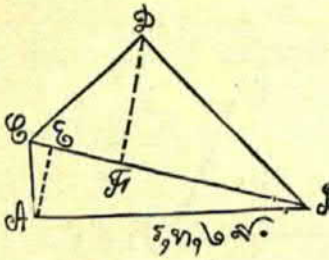
๒, สี่เหลี่ยมก้นถังนี้มีวิธีอย่างเดียวกันกับรูปที่ ๒๗



รูปที่ ๒๘.

▱ ABCD. นี้เท่ากับสามเหลี่ยม △ ABC + △ CDB ซึ่งมีเส้นตั้งร่วมกันคือเส้น CF = BE.

๓)



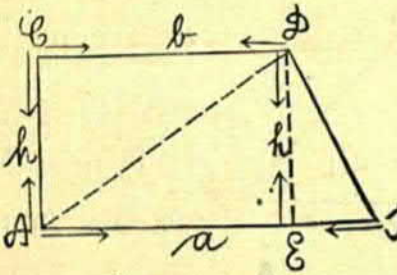
สี่เหลี่ยมด้านไม่ขนานนี้ มีวิธีต่างกันกับรูปที่ ๒๗—๒๘ เพราะด้านและมุมทั้งสี่นั้นต่างกัน ฉบับด้านไม่ขนานคู่ต่อกันเลย เพราะฉนั้นจำเปนต้องมีเส้นตั้งต่างกัน คือ ▱ ABCD นี้ เท่ากับ △ABC + △BCD แต่เส้นตั้ง AE นั้นไม่เท่ากับเส้นตั้ง DF.

มาตรา ๑๑

ว่าด้วยวิธีหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม

บทที่ ๑

ก) การที่จะหาเนื้อที่ของสี่เหลี่ยมด้านหนึ่งขนานนั้น



ตามกฎ ให้เอาด้าน ที่ขนาน คู่ต่อ กันนั้น บวกกัน แลให้เอาด้าน ตั้ง คูณ แล้วจึงเอาสอง

รูป ๓๐.

หาร ดังนี้ $\square น. = h \frac{a+b}{2}$

ข) โดย เหตุใด จึงจะสามารถ ทำได้ ดังนั้น?

ค) แสดงว่า เพราะ $\square ABCD$ นี้ได้แบ่งออก เป็น รูป สามเหลี่ยม สองรูป คือ $\triangle ABD$ กับ $\triangle CDA$. ซึ่งมี ด้านตั้ง AC. ร่วมกัน ถ้าจะหาเนื้อที่ของรูป สี่เหลี่ยมนี้ ทำเป็นต้องหาเนื้อที่ รูปสามเหลี่ยม ทั้งสอง เสียก่อน เมื่อได้ แล้วเอามา บวกกัน ดังนี้

คือ $\triangle น. ABD = \frac{a \cdot h}{2}$

$\triangle น. CDA = \frac{b \cdot h}{2}$

บัดนี้เอาเนื้อที่สามเหลี่ยมทั้งสองนี้มารวมกันด้วยกัน

คือ $\triangle$ น ABD + $\triangle$ น CDA $= \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$

" " " " " $= \frac{a \cdot h + b \cdot h}{2}$

" " " " " $= \frac{h(a+b)}{2}$

" " " " " $= h \cdot \frac{a+b}{2}$

เพราะฉนั้น จึงได้สามารถเอา $h \cdot \frac{a+b}{2}$ ดังนี้

บทที่ ๒

วิธีจะหาเนื้อที่ของสี่เหลี่ยมกันถังนั้นให้กระทำวิธี

เกี่ยวกันกับสี่เหลี่ยมด้านหนึ่งขนานนั้นทั้งสิ้น.

ภาคที่ ๕

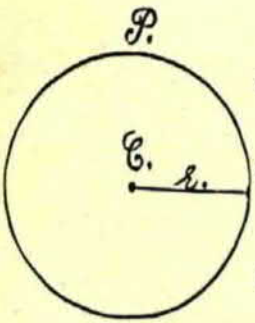
มาตรา ๑๒

ว่าด้วยวงกลมต่าง ๆ

บทที่ ๑

๑) ที่เรียกว่าวงกลมนั้นคืออะไร ?

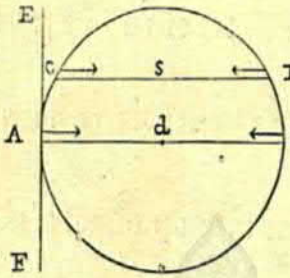
๒) วงกลมนั้นคือ ถ้าเอาหลักหรือสิ่งอื่นปักลงในที่ใดให้แน่น แล้วเอาเชือกหรือสิ่งอื่นผูกกับหลักแล่นเวียนไปโดยรอบหลักนั้นจนกลับมาที่เดิม นี้ยังเกิดเป็นรูปชนิดหนึ่งที่เรียกว่าวงกลม ซึ่งมีจุดหนึ่งเป็นศูนย์กลางอย่างเช่น รูปที่ ๓๑. นี้



รูป ๓๑. รอบ

๓) วงกลมนั้น คือรูปชนิดหนึ่ง ซึ่งมีเส้นกั้นเปนเขตร์แลห่างจากจุดหนึ่งเสมอกันโดย

๔) เส้นกั้นเขตร์โดยรอบนั้นเรียกว่า „ เส้นขอบวง" หรือ (เพริเฟรี), จุดที่เป็นสูญกลางนั้น เรียกว่า„ สูญกลาง" หรือ (เซ็นเตอร์); เส้นในระหว่างสูญกลางกับขอบวงนั้นเรียกว่า „ เส้นรัศมี" หรือ (เรเดียศ) หมายอักษรดังนี้ P. ขอบวง, C สูญกลาง R เส้นรัศมี.



ร.ท. ๓๒

๕) วงกลมนั้น ถ้าชักเส้นตรงแต่ขอบวงผ่านสูญกลางตลอดถึงขอบวงข้างอื่น ดังเส้น AB. นี้ เรียกว่า "เส้นชักวง" หรือ (ไดเอ็มเมเตอร์) และหมายอักษร d

๖) ถ้าเส้นตรงนั้นตัดวงกลมไม่ตรงหรือตลอดสูญกลาง ดังเส้น CD. นี้เรียกว่า "เส้นสายขนู" หรือ เส้นคอรด์ และหมายอักษร S หรือ s

๗) ถ้าเส้นตรงนั้นมากระทบขอบวงดังเส้น EF, เฉภาะปลายเส้นรัศมี แต่เส้นเดียวนั้น เรียกว่า "เส้นขนาบวง" หรือ (เส้นแทน็เย็นต์) และหมายอักษร T. หรือ t.

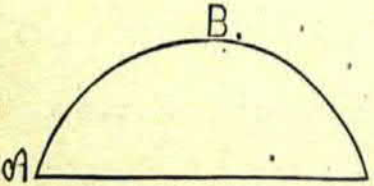
บทที่ ๒

๑) กฎว่า เส้นตรงที่ตัดวงกลมไม่ตรงศูนย์กลางนั้น ต้องสั้นกว่าเส้นซึ่งวงทั้งสิ้น

๒) กฎว่า เส้นตรงใดที่มากระทบขอบวงไม่เฉภาะปลายเส้นรัศมีแต่เส้นเดียวนั้น ไม่ใช่เส้นขนายวง

บทที่ ๓

๑) วงกลมซึ่งเส้นสายอนุตัดออกเป็นชิ้นดังรูปที่ ๓๓.

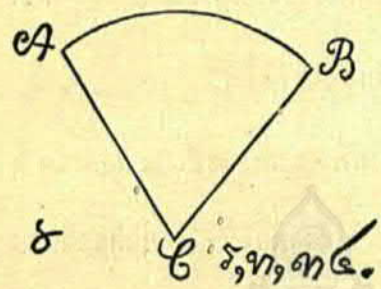


รูป ที่ ๓๓.

นี้เรียกว่า วงเดือน หรือ เซ็กเมนต์ ตัวเส้นวงนั้นเรียกว่า คันอนุ หรือ อาร์ค

และหมายอักษร B. หรือ b.

๒) วงกลมนั้นถ้าตัดออกตั้งแต่จุดกลาง ดัง รูปที่ ๓๔ นี้

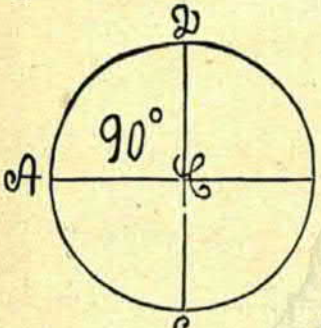


เรียกว่า "วงพัก"

หรือ "เซ็กเตอร์"

๓) วงกลมนั้น แบ่งออกเป็น ๓๖๐ ส่วนถ้วน ส่วนหนึ่ง เรียกว่าหนึ่ง "องษา" หรือ (ดีกรี) องษาหนึ่งแบ่งออกเป็น ๖๐ ส่วนถ้วน ส่วนหนึ่งนั้นเรียกว่าหนึ่ง "ลิบดา" หรือ (มินิต), ลิบดาหนึ่งแบ่งออกเป็น ๖๐ ส่วนถ้วน ส่วนหนึ่งนั้นเรียกว่า "พิลิบดา" หรือ (เซ็กกันด์) ส่วนที่แบ่งออกทั้งนี้นั้นสำหรับ ใช้ เป็น เครื่องวัด เส้นโค้งทั้งปวงดังเช่นมุมต่าง ๆ และเรียกว่ามาตราวงกลม

๔] วงกลมนั้น ถ้าผ่าตลอดศูนย์กลางออกเป็นสี่ส่วน



ดังรูปที่ ๓๕ นี้ ส่วนหนึ่ง เรียกว่า "ภาคหนึ่ง" หรือ (ควอแดร์นท์) มีองศาภาคละ ๙๐° ถ้วน ทุกๆภาค

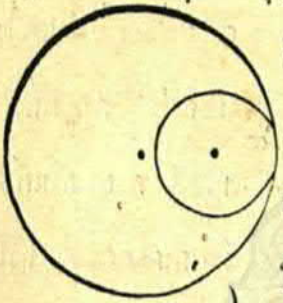
รูป ที่ ๓๕.

๕] ถ้าวงกลมคู่ซึ่งมีศูนย์กลางรวมกัน ดังรูปที่ ๓๖ นี้

เรียกว่า "วงร่วมศูนย์กลาง" หรือ (คอนเซ็นตริก)

รูป ที่ ๓๖.

๖) วงกลมคู่ซึ่งมี สุญ กลาง ไม่ ร่วมกัน ดัง รูป



ที่ ๓๗ นี้ เรียก ว่า วง ต่าง สุญกลาง หรือ(เอ็กค์เซ็นตริก) ถึงวงคู่ นี้ จะ อยู่ ภาย นอก หรือ ใน ก็ดี เรียก นาม อย่างเดียว กัน ถึง สิ้น

รูป ๓๗.

ภาคที่ ๖

มาตรา ๑๓

ว่า ด้วย ทวี่ เหลี่ยม ด้าน เสมอ

บทที่ ๑

๑) รูป ทวิเหลี่ยม ทั้ง ปวง นี้ คือ สาม เหลี่ยม หลาย รูป

ประกับกัน ถ้าสามเหลี่ยมนั้นมีด้านฟั้น, ด้านตั้งเท่าและชนิดเดียวกันก็เรียกว่า,, ทวิเหลี่ยมด้านเสมอ,,

๒) ถ้าสามเหลี่ยมนั้นมีด้านฟั้น ด้านตั้งและรูปต่างกัน เรียกว่า,, ทวิเหลี่ยมด้านไม่เสมอ,,

บทที่ ๒

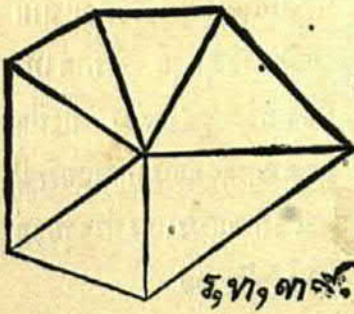
๑) ทวิเหลี่ยมด้านเสมอรูปหกมุมดังรูปที่ ๓๘ นี้ รูปสามเหลี่ยมที่ประกับเป็นรูปทวิเหลี่ยมนั้น เป็นรูปสามเหลี่ยมชั้วทุกรูป มีด้านเท่ากันและมุม ๖๐ องศา ทั้งสิ้น กับด้านหนึ่งนั้นเท่ากับเส้นรัศมีของวงกลมซึ่งล้อมรูปอยู่โดยรอบ

รูปที่ ๓๘.

๒) ทวิเหลี่ยม ด้าน เสมอ นี้ เม่ เฉภาะ มี แต่ รูป หกมุม เท่านี้ ยังมี รูป ๗,๘,๙,๑๐ มุม แล อื่นๆ อีก เป็น อันมาก ดัง เช่น วงกลม นี้ก็เป็น รูป ทวิเหลี่ยม ด้าน เสมอ ซึ่ง มี มุมเล็ก ที่สุดมากเหลือประมาณ ที่จะนับได้

บท ที่ ๓

๑) ทวิเหลี่ยม ด้านไม่ เสมอ ดัง รูป ที่ ๓๙ นี้ รูป สาม

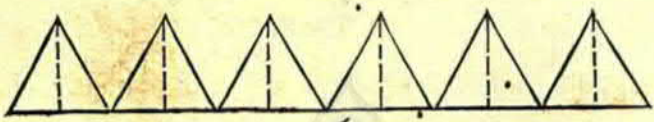


เหลี่ยม ที่ ประ กับเป็นรูป ทวิเหลี่ยมนั้น มีด้านแล มุมต่างกัน แลไม่มีเฉภาะ แต่รูปนี้ มีอยู่หลายรูป หลาย ชนิด เหมือน กัน.

รูป ๓๙

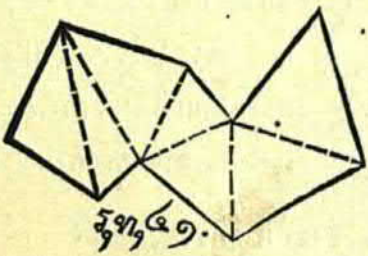
๒) ทวิเหลี่ยม เหยียด ด้าน เสมอดัง รูป ที่ ๔๐ นี้รูปสาม

เหลี่ยมที่ประกอบเป็นรูปนั้น มีด้านพื้น, เส้นตั้ง และรูปเท่ากันทุกรูป



รูปที่ ๔๐.

๓) ทวิเหลี่ยม เหยี่ยด ด้าน ไม่เสมอ ดัง รูปที่ ๔๑ นี้



รูปที่ ๔๑.

รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบเปนรูปนั้น มีด้านพื้น, เส้นตั้ง และรูปต่างกัน

มาตรา๑๔

ว่าด้วย มุม แลหา เนื้อที่ ของรูป ทวี่ เหลี่ยม

ต้านเสมอ

บทที่ ๑.

๑) ใน สุญกลาง ของ รูป ทวิ เหลี่ยม ซึ่ง ปลายของ

รูปสามเหลี่ยมประกับขนกันรวม องษา ของ ปลายสาม เหลี่ยม ทั้ง สิ้น นั้นเท่า กับ วงกลม คือ ๓๖๐°

๒) ถ้าจะ ใคร่รู้ว่ามุม หนึ่ง ของ ทวิ เหลี่ยม มี องษา เท่าใด ให้ เอา ๑๘๐° องษาคูณ ด้วย (n) หน ลบ ด้วย ๓๖๐° องษา หาร ด้วย (n).

๓) แสดงว่า ก) วงกลมนั้นมี องษา ๓๖๐° ถ้วน ปลาย

สามเหลี่ยมที่รวมชนอยู่กับสูญกลางนั้นเป็นวงกลม

ข) รวมมุมสามเหลี่ยมทั้งสามมี ๑๘๐° องษาถ้วนตามอักษร

ค) อักษร(n)นั้น สำหรับหมายสิ่งซึ่งจะกำหนดให้แน่ในภายหลัง หรือแทนสิ่งซึ่งได้กำหนดไว้แน่แต่ยังไม่ได้นับ ตามรูปที่๔๒นี้ต้องว่า n=6 เพราะว่าเป็นรูปหกเหลี่ยม

ฆ) ที่เอา ๑๘๐° องษาตั้งนั้น คือ รวมมุมของสามเหลี่ยมทั้งสามมุม(n)คูณนั่น คือ เอาจำนวนยอดของสามเหลี่ยมทั้งสิ้น เมื่อคูณกันดังนี้ จำเป็นจะได้องษารวมทุกมุมทั้งมุมสูญกลางด้วย เพราะฉนั้นจึงได้เอามุมในสูญกลางคือ ๓๖๐° ลบออกเสีย เมื่อลบแล้วยังคงเหลือมุมเหลี่ยมนอกทั้งสิ้นที่เอา

(n)หารนั้น คือเอาจำนวนของยอดมุมนอกทั้งปวง หารเพื่อจะใครรู้แต่มุมเดียว

เพราะฉนั้น $\frac{n.180^{\circ} - 360^{\circ}}{n}$ เท่ากับ

องศาในมุมหนึ่งของรูปทวิเหลี่ยมด้านเสมอ

บทที่ ๒

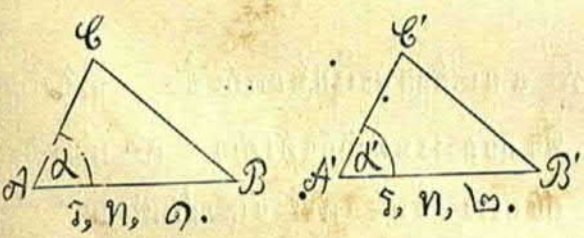
๑ ในการที่จะหาเนื้อที่ของทวิเหลี่ยมด้านเสมอนั้น ขั้นแรกต้องหาเนื้อที่ของ„ สามเหลี่ยมมูล" ให้เปนหลักเสียก่อน „สามเหลี่ยมมูล" นี้ คือ $\triangle ABC$ เมื่อได้เนื้อที่ของ สามเหลี่ยม แล้วจึงเอามาคูณเข้ากับ (n) คือดังนี้ $\frac{a.h}{2} . n$ เท่ากับ เนื้อที่ „ทวิเหลี่ยมด้านเสมอ"

ตำรา เลข
เรขาคณิต „ ยี่ออมเมตริ"
ตอน ที่ ๒
ภาค ที่ ๑

มาตรา ๑

ว่า ด้วย สามเหลี่ยม รูป เหมือน กัน ๔ ประการ

บท ที่ ๑



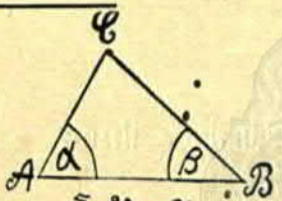
กฎว่า สามเหลี่ยม สอง รูป ที่ เท่า กัน นั้น ถ้า มี ด้าน ต้อง ด้าน กับ มุม หนึ่ง ซึ่ง ด้าน ทั้ง สอง บรรจบ แล

กระทำให้เปนเหลี่ยมขึ้นนั้นเท่ากัน

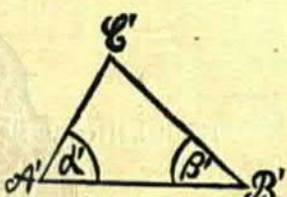
คือ ด้าน $AB = A'B', AC = A'C', \angle\alpha = \angle\alpha'$

เพราะฉนั้น $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

บทที่ ๒๒.



ร, ห, ด.



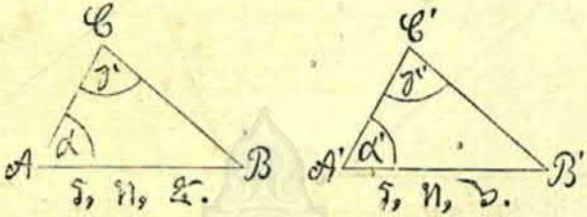
ร, ห, ด.

กฎว่า สามเหลี่ยม สองรูป ที่ เท่ากัน นั้น ถ้ามี ด้าน พื้น, กับ สอง มุม ที่ กำกับ หัว ท้าย หรือ เส้น หนึ่ง, กับ สอง มุม ที่ กำกับ หัว ท้าย เส้น นั้น เท่า กัน

คือ ด้าน $AB = A'B', \angle\alpha = \angle\alpha', \angle\beta = \angle\beta'$

เพราะฉนั้น $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

บทที่ ๓.

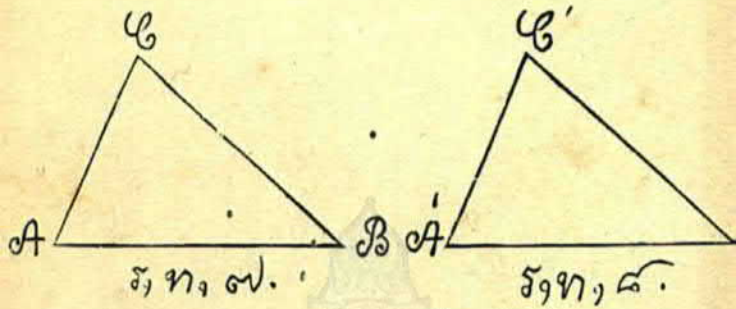


กฎว่า สาม เหลี่ยม สอง รูป ที่ เท่า กัน นั้น ถ้า มี ด้าน หนึ่ง, กับ มุม ก็ กับ หัว หรือ ท้าย ด้าน นั้น หนึ่ง มุม กับ มุม ที่ อยู่ ตรง ด้าน ข้าง นั้น เท่า กัน.

คือ ด้าน $AB = A'B'$, $\measuredangle \alpha = \measuredangle \alpha'$ $\measuredangle \gamma = \measuredangle \gamma'$

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ๗

บทที่ ๔



กฎว่า สามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันนั้น ถ้ามีด้านทั้งสามเท่ากัน

คือ ด้าน $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C',$

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

ภาคที่ ๒

มาตรา ๒๓

อุทาหรณ์รูปเหมือนกัน

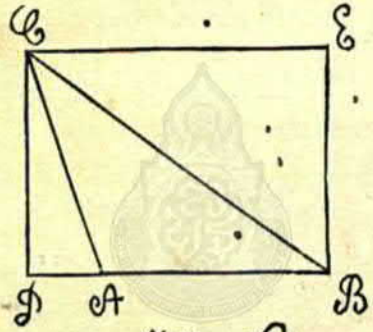
บทที่ ๑.

ถามว่า.

เหตุใดรูปสามเหลี่ยมทั้งปวงในระหว่างเส้นขนาน

คู่ ซึ่งมีด้านสิ้นร่วมกันนั้นจึงมีเนื้อที่เท่ากัน?

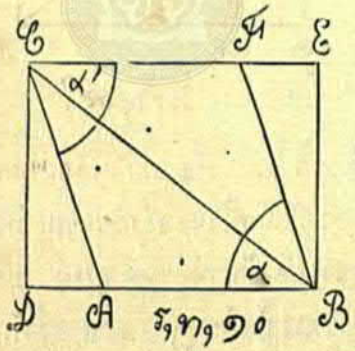
บทที่ ๒. แสดงว่า.



รูปที่ ๔.

๑) รูปที่ ๔. นี้ ABC. คือ สามเหลี่ยมมุมแหลมด้านไม่เสมอซึ่งมีเส้นตั้ง CD. อยู่ภายนอก ถ้าขีดเส้นEC ให้ขนานคู่ต่อด้าน DB, BE ∥ DC. บัดนี้บังเกิดเป็นผืนผ้าตรงชื้นคือ ▭ DBCE. มีด้าน DB=CE, DC=BE. ∡ BDC=∡ BEC=∡ DCE=∡ DBE ตามมาตราเส้นตรงดิ่ง และมาตราเส้นตรงในระหว่างเส้นขนานคู่ประการหนึ่งด้าน BC. ของรูป

สาม เหลี่ยม △ A BC บัดนี้ มาเป็นเส้นทะแยงหรือ (ไดแอโกแนล) ของรูป สี่เหลี่ยม ⌗ DBCE กับ ทั้ง เป็น ด้าน ร่วม ของ รูป สาม เหลี่ยม BCD และ △ BCE ทั้ง สองนี้ ด้วย ถ้า ด้าน DC = BE, DB = CE, BC = BC. ถ้าดังนั้น △ BCD ≅ △ BCE ตามอัตรา รูป เหมือน กัน ข้อ ที่ ๔.



๒) ถ้า ทำ เส้น C F ให้ เท่ากับด้าน A B. บัดนี้ เกิด มีสาม เหลี่ยมสองรูปขึ้นซึ่งเท่ากันคือ △ BCA ≅ △ CBF

เพราะด้าน A B = C F. ได้ทำขึ้นให้เท่ากัน

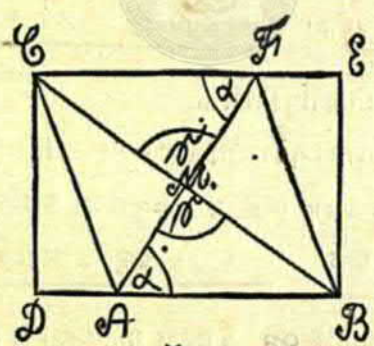
„ „ B C = B C. เปนด้านร่วม

„ „ D B ∥ C E ตามรูปเดิม

เส้น B C เปนเส้นตรงซึ่งตัดเส้นขนานคู่ DB และCE.

ถ้าดังนั้น ∡ ABC ทำเป็นต้องเท่ากันกับ ∡FCB. เพราะเปนมุมแย้ง.

เพราะฉนั้น △ B C A ≅ △ C B F ตามอัตราวุป เหมือนกันบทที่ ๑



รูป ๑๑.

๓) ถ้าลากเส้นแต่จุด A. ไปหาจุด F. ตรงเส้น A F

ตัดเส้น B C. นั้น หมายอักษร M. ลงบัดนี้ เกิดเปน
รูป สามเหลี่ยม △ A B F ขึ้นซึ่งเท่ากับรูปสามเหลี่ยม
A B C. กับรูป สามเหลี่ยม △ CFM เท่ากับ △BAM
△ A C M ≅ △ F B M, ซึ่ง สามเหลี่ยม C F M
เท่ากับ สามเหลี่ยม B A M นั้น

เพราะว่า ก้าน C F = A B ตามรูปเดิม

∠α = ∠α' เพราะเปนมุมแย้งตามรูปที่ ๑๐

∠γ = ∠γ' เพราะเปนมุมตะไกร,

ก) เพราะฉนั้น △ C F M ≅ △BA M. ตามอัตรา
รูปเหมือนกัน บทที่ ๓,
กับประการหนึ่งก้าน A C = F B ตามรูปที่ ๑๐.
กับ A M = F M, B M = C M. ตามข้อหมาย (ก)

ข) เพราะฉนั้น △ A C M' ≅ △ F B M

ถ้า △ CFM ≅ △ BAM, กับ △ ACM ≅ △FBM
ถ้าดังนั้น △ CFM + A CM ทำเปนต้องเท่ากันกับ
△ BAM + FBM.

หรือ $\triangle CFM + ACM = \triangle BAM + FBM.$

ถ้าดังนั้น $\triangle BAM + ACM = \triangle BAM + FBM$

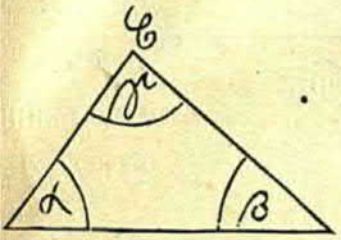
เพราะฉนั้น $\triangle ABC = \triangle ABF$ ดังนี้.

ภาคที่ ๓

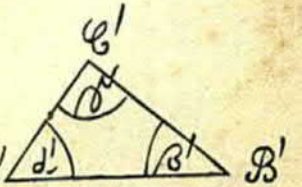
มาตรา ๓.

ว่าด้วย สามเหลี่ยมรูปคล้าย กัน สามประการ

บทที่ ๑.



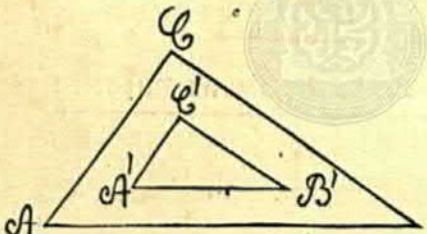
รูปที่ ๑๒.



รูปที่ ๑๓.

กฎว่า สาม เหลี่ยม สอง รูป ที่ มี รูป คล้าย กัน นั้น ถ้า มี มุม ชนิด เดียว แล เท่า กัน ทั้ง สาม มุม ตาม ลำดับ คือ ดัง นี้ $\angle\alpha = \angle\alpha'$, $\angle\beta = \angle\beta'$, $\angle\gamma = \angle\gamma'$,

บท ที่ ๒

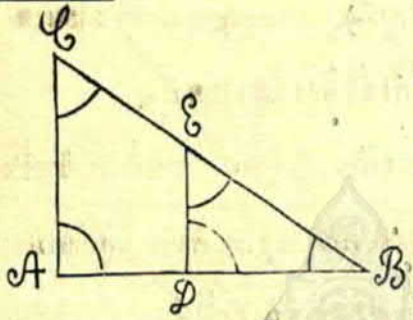


รูป ๑๔.

กฎว่า สาม เหลี่ยม สอง รูป ที่ มี รูป คล้าย กัน นั้น ถ้า เอา มา ซ้อน กัน แล ด้าน ทั้ง สาม ขนาน คู่ ต่อ กัน ตาม ลำดับ

คือ ดัง นี้ ด้าน $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$

บทที่ ๓



รูป ๓, ๑ ข.

กฎว่า สามเหลี่ยมใหม่ ว่ารูป ชนิด ใด ถ้าขีดเส้นใด เส้นหนึ่ง ให้ขนานคู่ต่อ ด้าน ใด ด้านหนึ่ง จะเกิดเป็นรูป สามเหลี่ยม สองรูปขึ้นซึ่งมีรูปคล้าย กัน. คือดังนี้

ก) สามเหลี่ยม $\triangle$ A.BC. นี้เป็นรูปเดิม.

ข) ถ้าขีด เส้น DE. ลงในรูปนั้นให้ขนานคู่ต่อด้าน AC. คือ DE $\parallel$ AC. บัดนี้เกิดเป็นสามเหลี่ยมสองรูปขึ้นซึ่งคล้ายกันคือ $\triangle$ DBE $\sim$ $\triangle$ ABC. ต้องกันกับกฎในบทที่ ๑—๒

ก) ด้วย $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$ เพราะเป็นมุมร่วมกัน $\measuredangle ACB = DEB$. $\measuredangle CAB = \measuredangle EDB$ เพราะเป็นมุมเยื้องคู่ ถ้าดังนั้นต้องกับในบทที่ ๑.

ฆ) กับประการหนึ่งด้าน $DE \parallel AC$ ตามที่ได้สร้างขึ้นกับด้าน $AB \parallel DB$ ด้าน $CB \parallel BE$. คือขนานคู่ต่อตัวเองตามอัตราเส้นขนานคู่ ถ้าดังนั้นต้องกับในบทที่ ๒.

บทที่ ๔

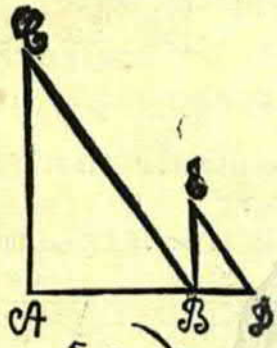
รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้น ด้านทั้งสามมีส่วนอันสำพันธุ์กันตามลำดับคู่

มาตรา ๔

อุทาหรณ์ รูปคล้ายกัน

บทที่ ๑

ก) เสาต้นหนึ่งปักตรงตั้งอยู่บนพื้นราบเสมอ ดังด้าน AC ในรูปที่ ๑๖



ข) มีแสงอาทิตย์ฉายกระทบเสาเฉียงลงมาแต่จุด C ถึงพื้นราบตรงจุด B

รูป ๑๖.

เสานั้นทอดเงาลงมาที่พื้นราบแต่จุด A ถึงจุด B คือด้าน AB ความที่แสงอาทิตย์ฉายมากระทบเสานั้น ยังนี้ยังเกิดมีเป็นรูปสามเหลี่ยมขึ้นคือรูป △ ABC.

ค) ถ้าปักไม้ใดที่ตรงลงบนพื้นราบทันใดเวลาเดียวกันหลัก BE จำเป็นต้องมีรูปสามเหลี่ยมขึ้นหนึ่งรูปซึ่งคล้ายกันกับ △ABC และมีส่วนอันสำพันธุ์ต่อกัน. คือ △ BDE ∽ △ ABC ดังนี้.

ฆ) เพราะเสาและหลักนั้นได้ปักลงบนพื้นราบโดย

ตรง ด้วยกัน ทั้ง คู่ ถ้า ดัง นั้น ด้าน BE||AC

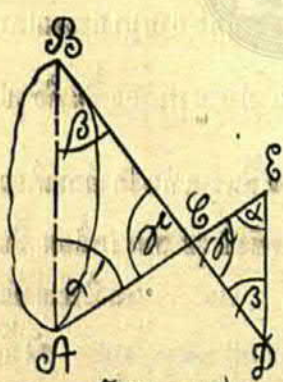
ง) อนึ่ง ด้าน DE||BC เพราะ อาทิตย์ ฉาย สิ่ง ที่ ตรง ทั้ง สอง นั้น ใน เวลา เดียว กัน

จ) กับ ด้าน BD||AB เพราะ เงาทั้ง สองนั้นอยู่ร่วมบนที่ราย

เพราะฉะนั้น $\triangle BDE \sim \triangle ABC, BE \sim AC, DE \sim BC,$ $BD \sim AB.$ อนึ่ง $\frac{AC}{AB} = \frac{BE}{BD}, AC = \frac{AB.BE}{BD}$

บทที่ ๒๓

ก) หนอง แห่ง หนึ่ง ดัง รูป ที่ ๑๗ กว้าง แต่ หลัก A. ถึง หลัก B. คือ เส้น AB



รูป ๑๗.

ข) ถ้า ปัก หลัก ลง บน พื้น ราย กว้าง แต่ หลัก D. ถึง หลัก E. คือ

เส้น DE. ให้ขนานคู่ต่อเส้น AB. คือ DE∥AB.

กับลากเส้นแต่จุด A. ตลอดจุด C. ถึงจุด E. คือ

เส้น AE. แล้วลากเส้นแต่จุด B. ตลอดจุด C. ถึง

จุด D. คือเส้น BD. บัดนี้ยังเกิดมีรูปสามเหลี่ยม

สองรูปขึ้น ซึ่งคล้ายกัน

คือ △ ABC ∽ △ EDC กับด้าน ED ∽ AB

AC ∽ EC, BC ∽ DC.

เพราะ $\measuredangle\gamma = \measuredangle\gamma'$ เป็นมุมตะไกร.

เพราะ $\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha', \measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$ เป็นมุมแย้ง

เพราะฉะนั้น $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC}$, $AB = \frac{ED.AC}{EC}$.

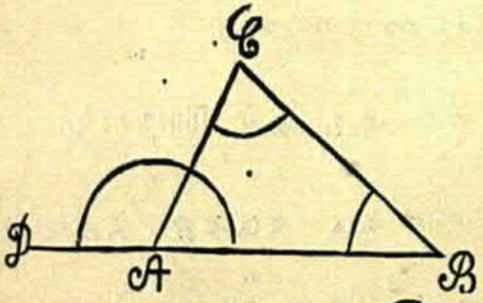
ภาคที่ ๔

มาตรา ๕

ว่าด้วย มุม นอก รูป สาม เหลี่ยม

บท ท ๑

ก) กฎว่า. มุม ซึ่งตั้ง อยู่ ภาย นอก ของมุมใด, ใน รูป สาม เหลี่ยม แล,บ้น เส้น ตรง ซึ่ง ขยาย ยาว ออก ไป พาก มุม นั้น มี ค่า เท่า กับ สอง สอง มุม ซึ่ง อยู่ ทาง ด้าน ตรง ข้าม ดัง รูป ที่ ๑๘



รูป ท ๑๘.

ก) รูปสามเหลี่ยมเดิมนั้นคือ

$\triangle ABC$

ข) ถ้าต่อด้าน BA พ้นจุด A. ถึง

จุด D. คือเส้น AD.

ค) บัดนี้เกิดมีมุมขึ้นนอกรูป, ตรงเหลี่ยม A. คือ

มุม DAC เรียกว่า,,มุมนอก" ซึ่งมีค่าเท่ากับสอง

มุมที่อยู่ทางด้านตรงข้ามคือ

$\measuredangle DAC = (ACB + ABC)$

เพราะ $\measuredangle (ACB + ABC + BAC) = 180^\circ$

" $\measuredangle (BAC + DAC) = 180^\circ$

ถ้าดังนั้น $\measuredangle (BAC + DAC) = \measuredangle (ACB + ABC + BAC)$

หรือ $\underline{\measuredangle BAC} + \measuredangle DAC = \measuredangle ACB + \measuredangle ABC + \underline{\measuredangle BAC}$

„ $\measuredangle DAC = \measuredangle ACB + \measuredangle ABC$

๗) เพราะฉนั้น $\measuredangle DAC = \measuredangle (ACB + ABC)$

บทที่ ๒๒

การที่เปรียบรูป หรือสิ่งทั้งปวงซึ่งจะเอามาคาหรือตัวมาแทนกันได้นั้น จำเปนต้องมีอัตราดังนี้ คือ ถ้าสิ่งที่ ๑ นั้นเท่ากับสิ่งที่ ๒ และสิ่งที่ ๑ นั้นเท่ากับสิ่งที่ ๓

ถ้าดังนั้นสิ่งที่สองกับสิ่งที่ ๓ จำเปนต้องเท่ากัน คือ $A = B$ และ $A = C$

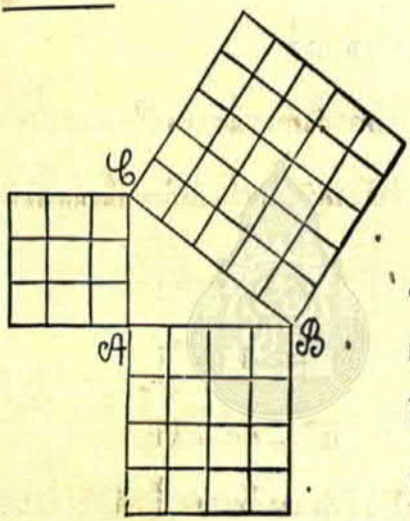
ถ้าดังนั้นจำเปนต้อง $B = C$ ดังนี้

ภาคที่ ๕

มาตราที่ ๖

ว่าด้วยวิธีหาด้านสามเหลี่ยมมุมตรงตามอัตรา “พีทาโกรัส”

บทที่ ๑



รูป ท. ๑๙

๑) รูปสามเหลี่ยมมุมตรง คือ $\triangle ABC$ นี้ ด้าน AB. กับ AC. เรียกว่า ด้านสั้น หรือ (แคธีตัส) ด้าน BC. เรียกว่า ด้านทะแยง หรือ (ไฮโปเทนิวส์)

๒) ด้านของสามเหลี่ยมทั้งสามด้านนั้นมีส่วนสัมพันธ์

กัน ดังนี้ จัตุรัส ของ ด้าน สั้น ทั้ง สอง นั้น เท่า กับ จัตุรัส ของ ด้าน ทะแยง

เอา จัตุรัส ของด้านสั้นด้านหนึ่ง ลบ จัตุรัส ด้านทะแยง เศษ นั้น จะเท่ากับ จัตุรัส ด้านสั้น อีกด้าน หนึ่ง นั้น ดังนี้

คือ $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

,, $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$

คือ $\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$

๓) ถ้า แล จะ ใคร่ รู้ ค่า ของ ด้าน เหล่า นี้ ก็ ต้องเอา มูล ออก ดังนี้

คือ $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

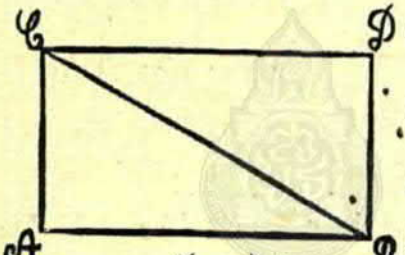
" $BC = \sqrt[2]{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$

เมื่อ ถอด มูลออก แล้ว เป็นราคา ของ ด้าน ทะแยงนั้น

บท ที่ ๒

อุทาหรณ์รูปสาม เหลี่ยม มุม ตรง

๑) สระหนึ่ง เป็น รูป สี่เหลี่ยม มุม ตรง ดัง รูปที่ ๒๐ นี้



รูปที่ ๒๐.

มีมุมๆ ละ ๙๐ ถ้วน

วัดแต่ A ถึง B.

เท่ากับ AB. วัดแต่

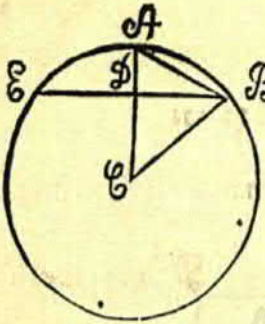
A ถึง C เท่ากับ AC

ถ้าจะใคร่รู้ เส้น ทะแยง ต้อง ตั้ง เลข ดัง นี้

เส้น $\overline{BC}^2$ = ด้าน $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$$

๒) สาม เหลี่ยม A BC. ซึ่ง เหลี่ยม C ปลาย ตก สูญ กลาง



รูปที่ ๒๑.

วงกลม, แลเหลี่ยม A, B, ปลายจดขอบวง ด้าน AC, BC เท่ากัน เส้นรัศมีวงกลม ถ้าได้กำหนดให้เพียง A. ถึง D. คือ AD. กับครึ่งเส้น สาย ขนุ แต่ B. ถึง D. คือ BD. จะ ใคร่รู้เส้น DC. ต้อง ตั้ง ดังนี้.

เส้น $BC = (AD+DC)$ เพราะ เป็น เส้น รัศมี ด้วย กัน

ถ้าดังนั้น $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$ ตามอัตรา "พีทาโกรัส"

หรือ $\overline{DC}^2 = (AD+DC)^2 - \overline{BD}^2$

บัด นี้ ต้อง กระจาย เลข ใน หลัง เล็ย เสีย ก่อน คือ

$(AD+DC)^2 = (AD+DC)(AD+DC)$

$(AD+DC)^2 = \overline{AD}^2 + 2\,AD.DC + \overline{DC}^2$ เมื่อกระทายออกดังนี้แล้ว ต้องกลับเอาไปใส่ไว้ตามที่เดิม

ถ้าดังนั้น $\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + 2\,AD.DC + \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2$

หรือ $\overline{AD}^2 + 2\,AD.DC + \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{DC}^2$

" $2\,AD.DC = \overline{DC}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$

หรือ $DC = \dfrac{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2AD}$. ดังนี้

ภาคที่ ๒

มาตรา ๗

ว่าด้วย กฎแลวิธี

หามุม, เส้น, ด้าน, เนื้อที่ รูปสามเหลี่ยม

บทที่ ๑

๑) กฎว่า สามเหลี่ยมมุมตรงนั้น ต้องรู้กำหนดอัตราที่กะให้แล้วสองอย่างก่อนจึงจะคิดได้.

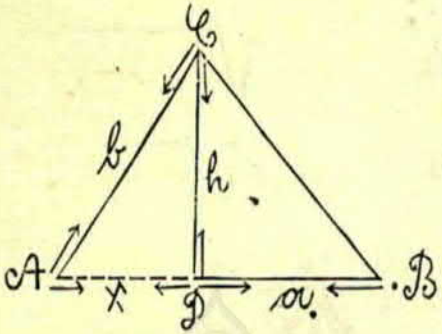
๒) กฎว่า สามเหลี่ยมทุกอย่างนั้น ต้องรู้กำหนดอัตราที่กะให้แล้ว สามอย่างก่อน จะคิดได้.

๓) กฎว่า สามเหลี่ยมซึ่งตั้งอยู่ในซีกวงกลม มีเส้นซีกเป็นฐาน และมุมยอดจดขอบวงกลมนั้น มุมที่จดขอบวงมีองศา ๙๐ ถ้วน คือมุมตรง

๔) กฎว่า สามเหลี่ยมมุมตรงนั้น ถ้าทอดดิ่งจากมุมตรงลงมาตัดด้านที่ตรงข้าม จะเกิดมีสามเหลี่ยมสองรูปขึ้นซึ่งคล้ายกัน และเส้นดิ่งนั้นเป็นเส้นลำพันธุ์ในระหว่างสองรูปด้วย

บทที่ ๒

๑) รูปทั้งปวงนั้น, ด้านหรือเส้นที่ยังไม่แจ้งอัตราเท่าใดนั้นให้หมายอักษร x, y, z ฯ ล ฯ ลงมุมนั้นหมายอักษร M, V เป็นต้น.



รูปที่ ๒๒

๒) รูปที่ ๒๒ นี้ ได้กำหนด ให้ สาม ด้าน คือ ด้าน BD = a

" " " AC = b

" " " CD = h

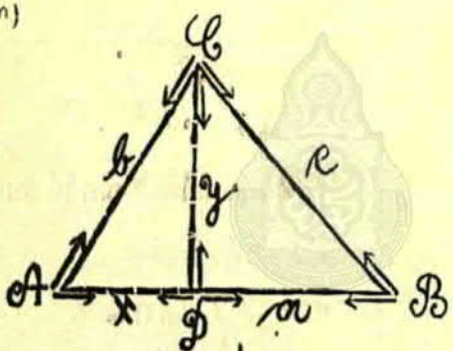
ถ้าจะรู้เนื้อที่รูป สามเหลี่ยมนั้น ขั้นแรกต้องหัก ด้าน (x) เสียก่อน เมื่อได้แล้ว ให้บวกกันกับ ด้าน (a) แล้วจึงคูณ หารกันตามธรรมดา

ถ้าดังนั้น $x^2 = b^2 - h^2$

ถ้า ดังนั้น $x = \sqrt[2]{b^2 - h^2}$

ถ้า ดังนั้น $\frac{(a + \sqrt[2]{b^2 - h^2}) \cdot h}{2} = \triangle$ น.ค.ร.

๓)



รูปที่ ๒๓

รูปที่ ๒๓ นี้ ได้กำหนดให้สามด้าน คือ ด้าน

BD = a

BC = c

AC = b

ถ้า จะ ใคร่ รู้ เนื้อ ที่ รูป สาม เหลี่ยม นี้ ขั้น แรก ต้อง หา ด้าน (x), (y) เสีย ก่อน เมื่อ ได้ แล้ว ทั้ง สอง จึง คูณ หาร กัน อย่าง ธรรมดา

ถ้า ดังนั้น $y^2 = c^2 - a^2, y = \sqrt[2]{c^2 - a^2}$

„ „ „ $x^2 = b^2 - (\sqrt[2]{c^2 - a^2})^2$

ถ้า ดังนั้น $X^2 = b^2 - (c^2 - a^2)$

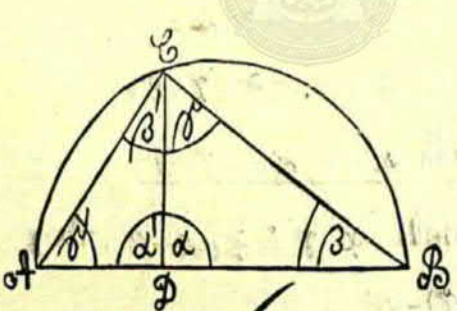
„ „ „ $X^2 = b^2 - c^2 + a^2$

„ „ „ $X = \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}$

$\triangle$ น.ตร. $= \dfrac{\left(a + \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}\right)\left(\sqrt{c^2 - a^2}\right)}{2}$

๔ $\triangle$ A B C, เป็นรูปสามเหลี่ยม

เติม. มีมุม $\angle ACB = (\gamma + \beta) = 90^\circ$



ร.ท.๑๔. ตามอัตราส่วน

สามเหลี่ยม ในซีก วง กลม.

ถ้า ทอดเส้นตรง ตก มุม ๙๐° แต่ จุด (C) ให้ ตัด ด้าน AB. ตรงจุด D คือเส้น CD. บัดนี้เกิดมีรูปสามเหลี่ยมสองรูปขึ้น ซึ่งคล้ายกันคือ $\triangle$ DBC $\sim$ $\triangle$ DCA. และเส้นตั้ง CD. มี สัดส่วน อัน สำ พันธ์ ใน ระหว่าง รูป สาม เหลี่ยม ทั้ง สอง.

เพราะ $\triangle$ DBC. มี $\angle \alpha = 90°$

„ $\triangle$ DCA. มี $\angle \alpha' = 90°$

„ $\angle$ ACB. $= \angle (\gamma + \beta') = 90°$

ถ้า ดัง นั้น $\underline{\angle \alpha = \alpha' = (\gamma' + \beta')}$

ประการหนึ่ง $\angle \gamma' \doteq \angle (\alpha' - \beta')$, หรือ $\gamma' = (\gamma + \beta') - \beta'$

หรือ $\gamma' = \gamma + \beta' - \beta'$

„ $\underline{\gamma' = \gamma}$.

ประการหนึ่ง $\measuredangle(\gamma+\beta') = 90^\circ$, $\measuredangle(\gamma+\beta) = 90^\circ$

ถ้าดังนั้น $\measuredangle(\gamma+\beta') = \measuredangle(\gamma+\beta)$

" " " $\measuredangle\beta' = \measuredangle\beta$.

มุมทั้งสามตามที่ได้แสดงมานั้นได้เท่ากันตามลำดับ

คือ $\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha'$, $\measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$, $\measuredangle\gamma = \measuredangle\gamma'$.

เพราะฉะนั้น สามเหลี่ยม $\triangle DBC \sim \triangle DCA$

ประการหนึ่งเส้นดิ่ง CD. เป็นด้านตั้งของ $\triangle DBC$.

" " " " " CD. เป็นด้านฟื้นของ $\triangle DCA$.

ถ้าดังนั้น $\frac{DB}{CD} = \frac{CD}{AD}$, $\overline{CD}^2 = AD.DB$ ดังนี้.

เพราะฉะนั้น เส้นดิ่ง CD. นี้จึงว่ามีช่วนอันสำพันธุ์

ในระหว่างรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง.

มาตรา ๙.

ว่า ด้วย กฎ แล หา เนื้อ ที่

มุม, เส้น, ด้าน ของ รูป สาม แล สี่ เหลี่ยม

บท ที่ ๑

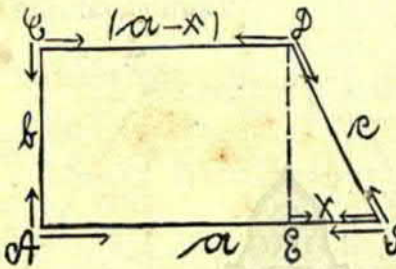
๑) กฎว่า สี่ เหลี่ยม มุม ตรง นั้น ต้อง รู้ กำหนด อัตรา ที่ กะ ให้ แล้ว สอง อย่าง ก่อน จึง จะ คิด ได้

๒) กฎว่า สี่ เหลี่ยม มุม โย้ ด้าน ขนาน คู่ นั้น ต้อง รู้ กำหนด อัตรา ที่ กะ ให้ แล้ว สาม อย่าง ก่อน จึง จะ คิด ได้.

๓) กฎว่า สี่ เหลี่ยม ด้าน ไม่ ขนาน คู่ นั้น ต้อง รู้ กำหนด อัตรา ที่ กะ ให้ แล้ว ห้า อย่าง ก่อน จึง จะ คิด ได้.

บทที่ ๒

๑) รูปสี่เหลี่ยมด้านหนึ่งขนานนี้ ได้กำหนดด้าน ให้ สาม ด้าน คือ AB = a, AC = b, BD = c



ถ้า จะรู้เนื้อที่ ทำเป็น ต้อง หา ด้าน CD. ที่หมาย (a—x) เสียก่อน ดังนี้.

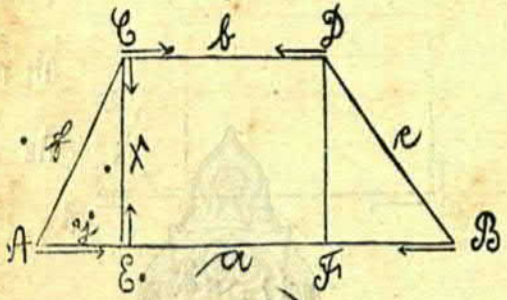
เพราะ $x^2 = c^2 - b^2$

ถ้า ดังนั้น $x = \sqrt{c^2 - b^2}$

บัดนี้ได้กำหนดราคาของเส้น (X) แล้ว เมื่อเอาเส้น (X) ลบกับด้าน (a) ก็คงรู้กำหนดราคาของด้าน CD. นั้น

เมื่อจะใคร่รู้เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยม ก็คูณหารกันตามอัตรา ดังที่กล่าว มา ในข้างต้นๆ นั้น

(๑๐) รูปสี่เหลี่ยมกันถังนี้ได้



รูป ที่ ๑๖.

กำหนดด้านให้สี่ด้าน

คือด้าน AB = a
CD = b
BD = c
AC = f

ถ้าจะใคร่รู้เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ ในชั้นแรกทำเป็นต้องหาเส้นดิ่ง CE = x, กับเส้น AE = y เสียก่อน คือดังนี้

I. $x^2 = f^2 - y^2$

II. $x^2 = c^2 - [a-(b+y)]^2$

ถ้า ดังนั้น $c^2 - [a-(a+b)]^2 = f^2 - y^2$

บัดนี้ ต้อง กระทายอักษรที่ ใน หลัง เล็บ นั้น ออก คือ

$$[a-(b+y)]^2 = [a-(b+y)][a-(b+y)]$$
$$[a^2 - 2a(b+y) + (b+y)^2]$$

ถ้า ดังนั้น $c^2 - [a^2 - 2a(b+y) + (b+y)^2] = f^2 - y^2$

ถ้า ดังนั้น $c^2 - [a^2 - 2ab - 2ay + b^2 + 2by + y^2] = f^2 - y^2$

„ „ „ $c^2 - a^2 + 2ab + 2ay - b^2 - 2by - y^2 = f^2 - y^2$

„ „ „ $c^2 - a^2 + 2ab + 2ay - b^2 - 2by = f^2$

„ „ „ $2ay - 2yb = f^2 + a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

„ „ „ $y \cdot 2(a-b) = f^2 + (a-b)^2 - c^2$

„ „ „ $$y = \frac{f^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}$$

ตามเลขถานที่ ๑ นั้น ว่า $X^2 = f^2 - y^2$

ถ้า ดังนั้น, $$X^2 = f^2 - \left(\frac{f^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}\right)^2$$

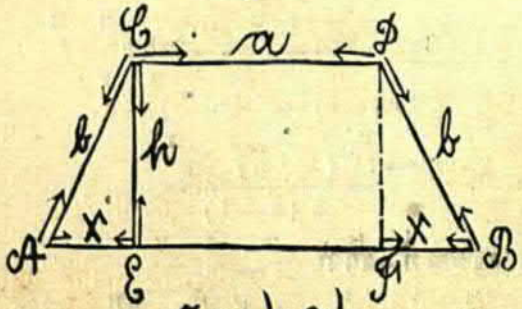
ถ้ากันนั้น $X = \sqrt{f^2 - \left(\frac{f^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}\right)^2}$

บัดนี้ได้กำหนดราคาของเส้น (X) แล้ว เมื่อจะใคร่รู้เนื้อที่ก็ให้คูณหารกับอัตรา.

บทที่ ๓. อุทาหรณ์รูปสี่เหลี่ยมกันถัง

๑] ยังมีมูลดินทางรถไฟเป็นรูปสี่เหลี่ยมกันถัง ดังรูปที่ ๒๙. นี้ได้กำหนดราคาให้สามด้าน

คือด้าน AC, BD = b,
CD = a,
CE = h,



รูปที่ ๒๙.

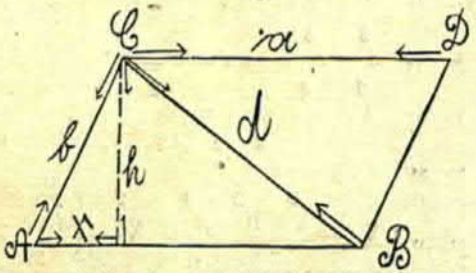
ถ้าจะใคร่รู้ว่าเนื้อที่หน้าราบซึ่งตัดออกไปนั้นเท่าใดในชั้นแรกต้องหาเส้น (X) เสียก่อนดังนี้

คือ $X^2 = b^2 - h^2$

ถ้าดังนั้น $X = \sqrt{b^2 - h^2}$

บัดนี้ได้กำหนดราคาของเส้น (X) เมื่อเอาบวกกันเข้ากับด้าน (a) ก็อาจรู้ได้ว่าด้าน A B นั้นเท่าใดเมื่อได้กำหนดราคาของด้าน A B ดังนี้แล้วถ้าจะใคร่รู้เนื้อที่ก็ให้คูณหารกันตามอัตรา.

๒) ยังมีที่ตำบลหนึ่งเป็นรูปผืนผ้าโย้ดังรูปที่ ๒๘ นี้



รูปที่ ๒๘.

ได้กำหนดให้ห้าด้าน.

คือ ด้าน $AB = CD = a$

$AC = BD = b$

$BC = d$

ถ้าจะใคร่รู้เนื้อที่ ในชั้นแรกต้องหาเส้น (X) เสียก่อน เมื่อได้แล้วจึ่งค่อยหาเส้นตั้ง (h) ต่อไปดังนี้

คือ I. $h^2 = b^2 - x^2$

,, II. $h^2 = d^2 - (a - x)^2$

ถ้าดังนั้น $d^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$

,, ,, ,, $d^2 - [(a - x)(a - x)] = b^2 - x^2$

,, ,, ,, $d^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = b^2 - x^2$

,, ,, ,, $d^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$

,, ,, ,, $d^2 - a^2 + 2ax = b^2$

,, ,, ,, $2ax = a^2 + b^2 - d^2$

,, ,, ,, $X = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2a}$, $X^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 - d^2}{2a}\right)^2$

บัดนี้ได้กำหนดราคาของเส้น (X) แล้ว ที่นี้ต้องหาเส้นตั้ง (h) ต่อไปดังนี้

ตามที่ หมาย เลข (1)

คือ $h^2 = b^2 - X^2$

แทน อักษร (X) นี้ ต้อง เอากำหนด ราคา ที่ คิดได้นั้น ใส่ ลง ดังนี้

คือ $h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - d^2}{2a} \right)^2$

ถ้า ดังนั้น $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - d^2}{2a} \right)^2}$

บัด นี้ได้ กำหนด ราคา ของ (h) แล้ว ถ้า ต้องการ จะรู้ เนื้อที่ ก็ ให้ คูณ หาร กัน ตาม อัตรา ต่อ ไป.

๓) ยังมี ที่ คำบล หนึ่ง เป็น รูป ผืน ผ้า ตรง ได้รู้ กำหนด ราคา ดังนี้

ด้าน ฟื้น เท่า กับ (a) มี เนื้อ ที่ อยู่ เท่า (i) ม. ก. ร.

บัดนี้จะ ใคร่ รู้ว่า เส้นตั้ง (h) นั้นมี กำหนด ราคา เท่า ใด? ใน ชั้นแรก ตั้ง เลข เป็น แบบ ลงอย่าง คูณ หาร หา เนื้อ ที่ รูป ผืน ผ้า ตรง นั้น ดังนี้

คือ $a.h = i$ ม.ต.ร.

ถ้า ดัง นั้น $h = \frac{i}{a}$ เป็น เส้น ตั้ง

๔) ยัง มี ที่ ตำบล หนึ่ง เป็น สี่ เหลี่ยม ด้าน หนึ่ง ขนาน ได้ รู้ กำหนด ราคา ดัง นี้

คือ ด้าน ตั้ง (h), ด้าน ขนาน ยาว ซึ่ง เป็น ด้าน พื้น (a) กับ เนื้อ ที่ (i) ม.ต.ร.

บัด นี้ จะ ใคร่ รู้ ด้าน (b) คือ ด้าน สั้น ซึ่ง เป็น ด้าน ขนาน คู่ กับ ด้าน (a)

ใน ชั้น แรก ต้อง ตั้ง เลข เป็น แบบ ลง อย่าง คูณหาร หา เนื้อ ที่ รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน นั้น

คือ $\frac{a + b}{2} . h = i$ ม.ต.ร.

แต่ ด้าน (b) นั้น ยัง ไม่ รู้ กำหนด ราคา ทำ เป็น ต้อง ใส่ อักษร (X) แทน เพื่อ กัน หลง

ถ้า ดัง นั้น $\frac{a + X}{2} . h = i$ ม.ต.ร.

„ , „ $\frac{a + X}{2} = \frac{i}{h}$

ถ้า ดังนั้น $a + X = 2.\frac{i}{h}$

„ „ „ $x = \frac{2i}{h} - a$

เพราะฉนั้น เส้น ตั้ง (h) เท่า กับ $\frac{2.i}{h} - a$

๕) ยังมี สาม เหลี่ยม รูป หนึ่ง ได้รู้ กำหนด เส้น ตั้ง (h) กับ เนื้อ ที่ (i) ม.ต.ร. ถ้าจะ ใคร่ รู้ ด้านฟิน (a) ในชั้น แรกต้องตั้ง แบบลงอย่างคูณหาร หาเนื้อที่ก่อน คือ

$$\frac{a.h}{2} = i \text{ ม.ต.ร.}$$

เพราะ ด้าน (a) เปน ด้าน ที่ ยัง ไม่รู้ กำหนด ต้อง ใส่ อักษร (x) แทน (a)

ถ้า ดังนั้น $\frac{x.h}{2} = i$ ม, ต, ร,

„ „ „ $X.h = 2.i$

„ „ „ $X. = \frac{2.i}{h}$

เพราะฉนั้น เส้น ตั้ง $a = \frac{2.i}{h}$ ดังนี้

วิธี หาชนิด นี้ สำหรับ รูป สาม เหลี่ยม ทั่วไป ไม่ เฉภาะ แต่รูป อย่าง นี้ ถ้า แล เมื่อ รู้ ด้าน ใด ด้านหนึ่ง อีก ด้วย ก็ อาจรู้ได้ ว่า เป็น รูป ชนิด ใด

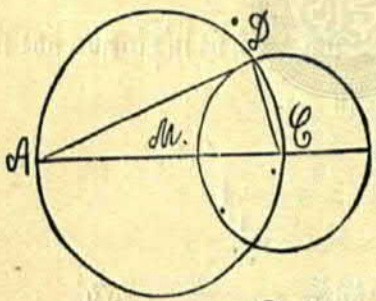
ภาคที่ ๓

มาตรา ๙

ว่าด้วยการที่จะวางเส้นขนาบวง

มุมในวงกลมต่าง ๆ

บทที่ ๑



รูป ๑๒๕

เมื่อจะวางเส้นตรงลงริมวงใด ให้เป็นเส้นขนายวงนั้น ดังรูปที่ ๒๙. นี้ เส้น A D. เป็นเส้นขนายวง T วงกลม C. หรือ A D T C. เพราะวงกลม (C) นั้นมีเส้นชักวงร่วมอยู่ในเส้น

ซึก วงของวงกลม (M) ขอบ วง M. ตัดขอบวง C. ที่ ตรง D. △ A C D เป็น สาม เหลี่ยม ใน ซึก วงกลม M.

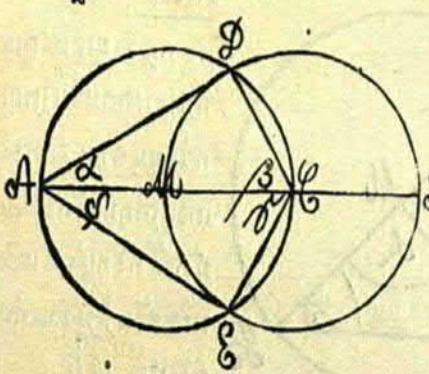
$\measuredangle$ A D C = 90°, สูญ กลาง วง C. อยู่ ที่ขอบวง M. เส้น C D. เป็น เส้น รัศมี วง C.

เพราะฉนั้น เส้น A D. เป็น เส้น ขนาบ วง C.

หรือ A D T C.

บท ที่ ๒.

กฎว่า เส้น ขนาบ วง สอง เส้น ซึ่ง ขนาบ วงเดียว กัน



ถ้า มา ตัก กัน ที่ ตรง ใด เส้น ทั้ง สอง นั้น ต้อง มี กำ หนด ราคา เท่า กัน คือ

TAD = AE.

เพราะ $\angle ADC = AEC$ เป็น มุม ของ ว ง ใน ชิก ว ง,

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. ถ้าเอามาบวกกัน

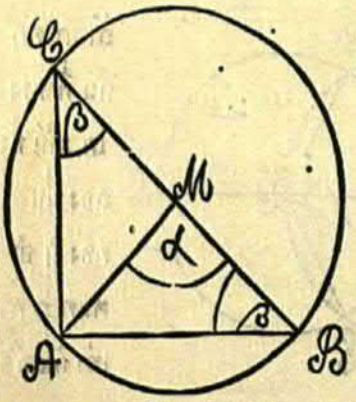
$$\alpha + \gamma + \alpha + \beta = \beta + \delta + \gamma + \delta$$

ถ้า ดัง นั้น $2\alpha = 2\delta$ หรือ $\alpha = \delta$

ถ้า ดัง นั้น ทำ นอง $\gamma = \beta$

" " " " " $\triangle ADC \sim \triangle AEC$

เพราะ ฉะนั้น เส้น $AD = AE$



รูป ๓๑.

บท ที่ ๓

๑) กฎ ว่า มุม ใน สุ ญ กลาง ว ง กลม นั้น ใหญ่ กว่า มุม ของ ว ง สอง เท่า ถ้ามุม ทั้ง สอง นั้น มี หรือ ตั้ง อยู่ บน เส้น หรือ ก้น ฟิ้น ร่วม กัน ดัง รูป ที่ ๓๑ นี้

คือ $\measuredangle AMB = 2.ACB.$

เพราะเส้น AM, BM, CM เป็นเส้นรัศมีวงกลม

ถ้าดังนั้น $\triangle ABM$ เป็นสามเหลี่ยมลองด้านเสมอ

„ „ „ $\triangle ACM$ „ „ „ „

„ „ „ $\triangle ABC$ „ „ „ „

ด้านพื้นของสามเหลี่ยม ABC นั้นเป็นเส้นชีกวง

กับ $\measuredangle \alpha$ ของ $\triangle ABM$ นั้น 90° เพราะเส้น AM.

เป็นเส้นตรงดิ่งตัดสูญกลางวงกลม

ถ้าดังนั้น $\triangle ABM \cong \triangle ACM$

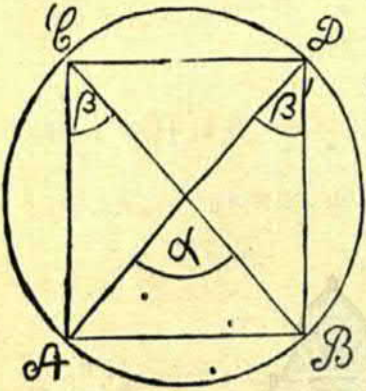
„ „ „ $\measuredangle ACM = \measuredangle ABM = \measuredangle BAM.$

„ „ „ $\measuredangle \alpha = 90^\circ$

„ „ „ $\measuredangle \beta + \beta = 90^\circ, 2\beta = 90^\circ$

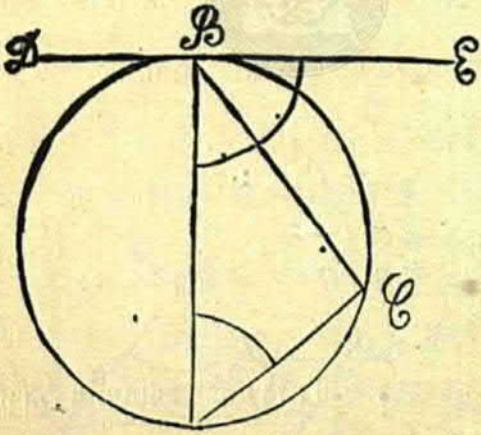
เพราะฉนั้น $\measuredangle \alpha = 2\beta.$

๒) กฎว่า มุมของวงซึ่งมีหรือตั้งอยู่บนเส้นพื้นร่วมกัน



รูป ที่ ๓๒.

นั้น เท่า กัน ดังรูป ที่ ๓๒ นี้
คือ $\angle\beta = \angle\beta'$,
เพราะ $\frac{\alpha}{2} = \angle\beta$
,, $\angle\frac{\alpha}{2} = \angle\beta'$
เพราะฉะนั้น $\angle\beta = \angle\beta'$



รูป ที่ ๓๓.

บท ที่ ๔

กฎ ว่า มุม ซึ่ง
อยู่ ใน ระหว่าง
เส้น ขนาบ กับ
เส้น สาย ขนุ
นั้น เท่า กับ มุม
ข่อบ วง ซึ่ง อยู่

ตรงข้ามในชิกวงเดียวกัน

คือ $\measuredangle EBC = BAC$

เพราะ $\measuredangle EBC = 90^\circ - \measuredangle ABC$

" $\measuredangle BAC = 180^\circ - (ACB + ABC)$

แต่ $\measuredangle ACB = 90^\circ$ เป็นมุมของบ่วงในชิกวง

ถ้าดังนั้น $\measuredangle BAC = 180^\circ - (90^\circ + ABC)$

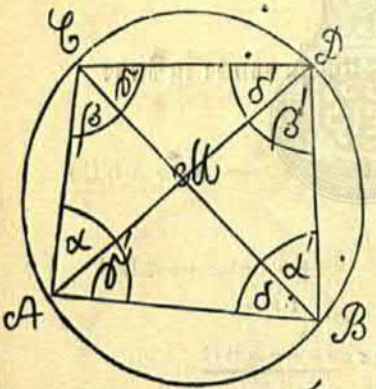
" " " $\measuredangle BAC = 180^\circ - 90^\circ - ABC$

" " " $\measuredangle BAC = 90^\circ - ABC$

เพราะฉนั้น $\measuredangle EBC = BAC.$

บทที่ ๕

กฎว่า รูปสี่เหลี่ยมในวงกลม ซึ่งมุมทั้งสี่ขอบเป็นมุมของวงนั้น มุมสองมุมซึ่งอยู่ตรงกันข้ามบวกกัน ได้ยอดเท่ากับสองมุมอื่นซึ่งอยู่ตรงกันนั้น



คือ $\measuredangle ABD + ACD =$

$= \measuredangle BAC + BDC,$

เพราะ

$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$

รูป ๓๔.

$\delta = \delta'$ เป็นมุมของวงซึ่งมีเส้นพื้นร่วมกัน

เพราะ $\triangle ABC$ มีมุม $\beta + \alpha + \gamma' + \delta = 180^\circ$

เพราะ $\triangle ABD$ มีมุม $\gamma' + \delta + \alpha' + \beta' = 180^\circ$

ถ้าดังนั้น $\beta + \alpha + \gamma' + \delta = \gamma' + \delta + \alpha' + \beta'$

,, ,, ,, $(\alpha + \gamma') + (\delta + \beta) = (\delta + \alpha') + (\beta' + \gamma')$

,, ,, ,, $(\alpha + \gamma') + (\delta' + \beta') = (\delta + \alpha') + (\beta + \gamma)$

ประการหนึ่ง $(\alpha + \gamma') = \measuredangle BAC$, $(\delta' + \beta') = \measuredangle BDC$,

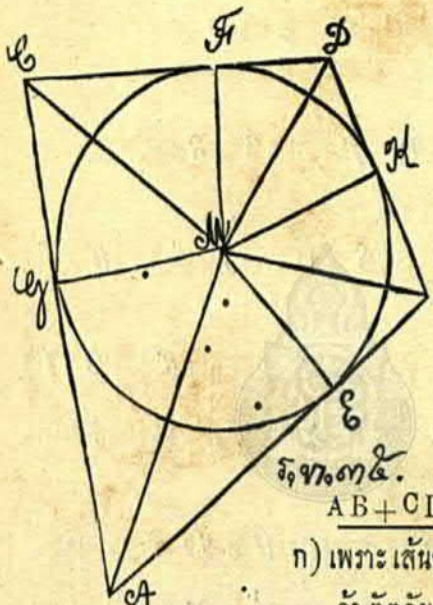
,, ,, ,, $(\delta + \alpha') = \measuredangle ABD$ $(\beta + \gamma) = \measuredangle ACD$.

เพราะฉนั้น $\measuredangle ABD + ACD = \measuredangle BAC + BDC$.

บทที่ ๖

กฎว่า สี่เหลี่ยมซึ่งด้านทั้งสี่ล้อมอยู่รอบวงโดย

กำหนดนั้น



รูป ท. ๓๕.

ด้านสองด้าน ซึ่งอยู่ตรงกันข้าม บวก กันได้ ยอด เท่ากับ สอง ด้านอื่นที่ อยู่ ตรงกัน ข้าม นั้น ดังรูปที่ ๓๕. คือ ด้าน

$$AB + CD = AC + BD$$

ก) เพราะ เส้นขนาบวง สองเส้น ถ้า ตัดกัน ต้องมี กำหนด รา คา เท่า กัน

ข) สาม เหลี่ยม ที่มี รูป เหมือน และ เท่า กัน ต้อง มี ด้าน เท่า กัน ตาม ลำ ดับ สาม เหลี่ยม ตามรูป ที่ ๓๕. นี้ เป็น รูป เหมือน และ เท่า กัน ตาม คู่ ทุก รูป เพราะด้าน หนึ่ง เป็น เส้น รัศมี ด้าน หนึ่ง เป็น เส้น ขนาบวง ด้าน

หึ่งเป็นเส้นร่วมกัน

ถ้าดังนั้น AE=AG, BE=BK, DF=DK, CF=CG

„ „ „ AE+BE+CF+DF=AG+CG+KB+DK

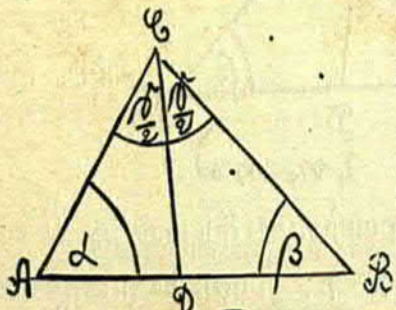
„ „ „ (EA+BE)=ด้าน AB, (CF+DF)=ด้าน CD

„ „ „ (AG+CG)=ด้าน AC, (BK+DK)=ด้าน BD

เพราะฉนั้น ด้าน AB+CD=AC+BD ดังนั้น

บทที่ ๗

กฎว่า รูปสามเหลี่ยมนั้น ถ้าขีดเส้นใดให้ผ่าซีกมุมใดให้ลงมาตัดด้านซึ่งอยู่ตรงมุมข้าม ด้าน



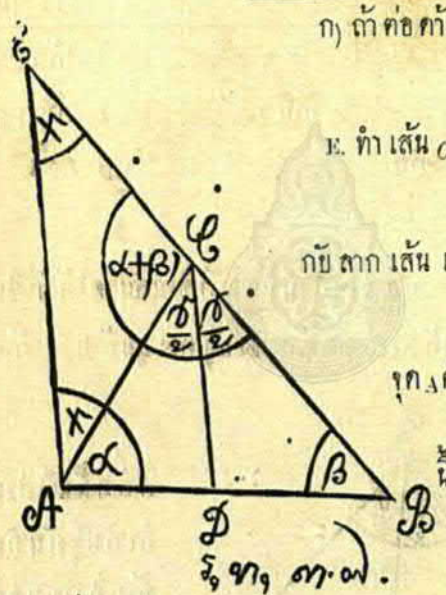
รูปที่ ๓๑.

ที่ตัดนั้นมีส่วนสำพันธุ์กันกับด้านที่เนยอยู่กับมุมผ่าซีกนั้นตามลำดับ

คือ เส้น $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$ ดังนี้

แสดงว่า

ก) ถ้าต่อด้าน BC ถึง จุด E. ทำเส้น $CE=AC$



กับลากเส้น แต่ จุด E. ถึง จุด A คือด้าน AE. บัดนี้มีรูป $\triangle ACE$ ขึ้น

รูป ๓๑ ก.ฆ.

ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมสองด้าน เสมอ มี $\measuredangle ACE$ เท่ากับ $\measuredangle(\alpha+\beta)$ เพราะเป็นมุมนอกของสามเหลี่ยม ABC

ข) เพราะ $AC=EC$, $\measuredangle AEC=\measuredangle CAE$.

ถ้าดังนั้น $2x+(\alpha+\beta)=180^0$, $2x=180^0-$

$-(\alpha+\beta)$ กับประการหนึ่ง $\alpha+\beta+\gamma=180^0$

„ „ „ „ $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$

ถ้าดังนั้น $2x=\gamma$

„ „ „ $X=\frac{\gamma}{2}$

„ „ „ ก็ได้ $AE \parallel DC$

เพราะ $\measuredangle X=\frac{\gamma}{2}$ เป็นมุมแย้ง

ถ้าดังนั้นเส้น $\frac{AD}{BD}=\frac{EC}{BC}$

เพราะฉนั้น $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$ ตามอัตราส่วนคล้ายกัน

ภาคที่ ๘

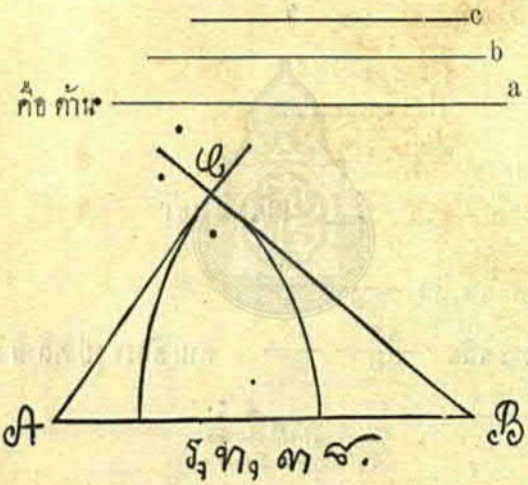
มาตรา ๑๐

ว่าด้วยวิธีเขียนรูปต่าง ๆ อย่างง่าย

(คอนสตรักชั่น)

บทที่ ๑

๑) ในการที่จะเขียนรูปสามเหลี่ยมนั้น ถ้าได้รู้กำหนดราคาของด้านทั้งสามต้องทำดังนี้



รูปที่ ๓๙.

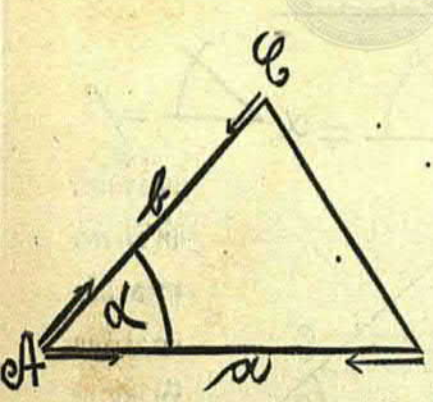
ในชั้นแรกให้ขีดเส้นตรงลงแล้วเอาวงเวียนจับกะให้เท่ากับเส้น (a) คือด้าน AB แล้วให้กะเท่าเส้น (b) เอาวงเวียนปักลงที่ตรงจุด (B) ดิ้วงกลมอ้อมจุด (B) แล้วกะเท่าเส้น (c)

เอาวงเวียนปักลงตรงจุด (A) ค้างกลมอ้อมจุด (A) บัดนี้เป็นรูปสามเหลี่ยม AB=a, BC=b, AC=c ขึ้นดังนี้

๒) ในการที่จะเขียนรูปสามเหลี่ยมนั้น ถ้าได้รู้กำหนดราคาสองด้านกับมุมหนึ่ง ต้องทำดังนี้

b

a ∡α = 45°



รูป ๓๗

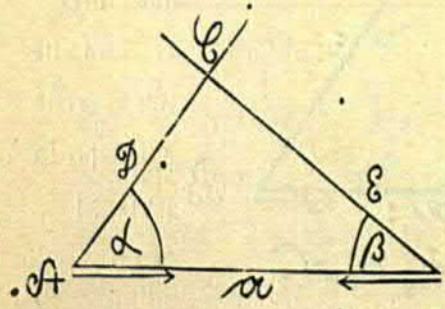
ในขั้นแรกให้ขีดเส้นตรงลงก่อน แล้วเอาวงเวียนจับกะเส้น (a) คือ AB = (a) แล้วเอาเครื่องวัดมุม

วาง ลง ตรง จุด (A) ให้ สูญกลาง ของ เครื่อง ตรง จุด (A) แล เส้น บรรทัด ตรง แนว เส้น A B, แลกะปลาย วง เวียน ลง ตรง ที่ ๔๕ องษา แล้ว ขีด เส้น ตรง ตั้ง แต่ จุด (A) ตลอด จุด ปลาย วง เวียน แล้ว กะ เส้น b ลง บน เส้น ตรง นั้น ตั้ง แต่ A ถึง C คือ ด้าน AC แล้วลาก เส้น แต่ จุด B ถึง C คือ ด้าน BC บัด นี้ เป็น รูป สาม เหลี่ยม ขึ้น ตาม ที่ ต้อง การ คือ

ด้าน $AB = a$, $AC = b$, $BAC = \alpha = 45^\circ$

ถ้า ได้ รู้ กำหนด ราคา หนึ่ง ด้าน กับ สอง มุม ต้อง ทำ ดัง นี้

a



รูป ๑๐.

ใน ขั้น แรก ให้ ขีด เส้น ตรง ลง แล้ว เอา วง เวียน จับ เส้น กะ (a) คือ A B = a

แล้วเอาวงเวียนตั้งจ้อมจุด (A) ให้เทามุม ให้กะกว้างของมุม (α) แล้วไปจุดลงตรงจุดซึ่งวงตัดเส้น (a) นั้น ให้ตั้งตัดกันกับวงจ้อมมุม (A) ยัดนิ้วทั้งสองตัดกันตรงจุด D. ทางมุม (β) ก็ทำอย่างเดียวกันวงทั้งสองตัดกันตรงจุด (E.) ให้ลากเส้นตรงแต่จุด A. ตลอดจุด D. แต่จุด B. ตลอดจุด E. เส้นตรงทั้งสองไปบรรจบกันตรงจุด C. ยัดนี้เป็นรูป $\triangle$ ABC ตามต้องการ

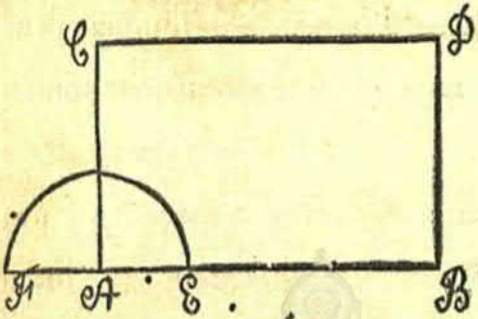
บทที่ ๑๑

๑) ในการที่จะเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถ้ารู้กำหนดราคาสองด้าน

b

a

คือด้าน



รูป ๔๑.

ใน ชั้น แรก ให้ ชัก เส้น ตรงลง มา กะเส้น (a) แต่ จุด B ถึง A คือ ด้าน AB.

ให้ ตี วง อ้อม จุด A. ตัด เส้น ตรง ที่ จุด E, F บัด นี้ ตี วง อ้อม จุด E, F. ตรง วง ทั้ง สอง ตัด กัน นั้น ให้ ลาก เส้น ลง มา ถึง จุด A. เป็น เส้น ดิ่ง แล้ว กะ เส้น b. ลง บน เส้น ดิ่ง แต่ จุด A. บัด นี้ ได้ เส้น AB = a, AC = b ให้ กะ เส้น (a) ตี วง อ้อม จุด C. กะ เส้น b. ตี วง อ้อม จุด B. วง ทั้ง สอง นั้น ตัด กัน ตรง ที่ จุด D ชัก เส้น แต่ จุด D ถึง B และ ถึง C เป็น รูป สี่ เหลี่ยม ▱ ABCD. ตาม ต้อง การ

ยิ ออม เมตริ.

เครื่อง หมาย ต่าง ๆ

เครื่อง หมาย อย่าง นี้ ว่า $=$ เท่า, เสมอ.

,, ,, ,, ,, $+$ บวก

,, ,, ,, ,, $-$ ลบ

,, ,, ,, ,, $\cdot$ คูณ

,, ,, ,, ,, $\frac{0}{0}$ หรือ) (แต่แทนจุดนั้นต้องใส่เลข)

,, ,, ,, ,, $\underline{\underline{=}}$ เท่า เบนอัน เดียว กัน

,, ,, ,, ,, $\backsim$ ลำพันธ์กัน หรือ คล้ายกัน

,, ,, ,, ,, $>$ ใหญ่ กว่า หรือ มาก กว่า

,, ,, ,, ,, $<$ เล็ก กว่า หรือ น้อย กว่า

,, ,, ,, ,, 0° องษา

,, ,, ,, ,, $0'$ ลิบดา

,, ,, ,, ,, $0''$ พิลิบดา

,, ,, ,, ,, 0^2 กำลัง สอง

ยิออม เมตรี.

เครื่อง หมาย อย่าง นี้ ว่า o^3 กำลัง สาม แด ต่อ ๆ ไป

,, ,, ,, ,, $v^{\frac{2}{}}$ หรือ $v^{\frac{}{2}}$ มุด จัตุรัศ

,, ,, ,, ,, $v^{\frac{1}{}}$ มุด ลูก บาศ

,, ,, ,, ,, $v^{\frac{}{}}$ แด ต่อ ๆ ไป ทวี มุด

,, ,, ,, ,, $\|$ เส้น ขนาน คู่

,, ,, ,, ,, $\triangle$ สาม เหลี่ยม

,, ,, ,, ,, $\#$ สี่ เหลี่ยม

,, ,, ,, ,, $\odot$ วง กลม

,, ,, ,, ,, $\measuredangle$ มุม

,, ,, ,, ,, ∞ ไม่ มี ที่ สิ้น สุด

ตัว อักษร กรีก สำหรับ มุม

α = อาล์ฟา, δ = เดล์ต้า, π (พี) หมายว่าผลหาร

β = เบ็ตต้า, ของ เส้น ขอบ วง กลมแดเส้น ชื่ก วง

γ = กัม ม่า, ผล หาร นี้ = 3,14159...เสมอ.