



ก 03318



ตำราเรขาคณิต

เล่ม ๑

นายพันโท พระสารศาสน์พลเรือน (ทอง สุนทามนต์)

เรียบเรียง



มีกรรมสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ ก 03318



คำถวายทูลนาถิการทหารบก

วันที่ ๑ กันยายน รัตนโกสินทร์ศก ๑๒๗

คำราเระชาคนิตเล่ม ๑ ซึ่งครูของได้เรียบเรียงขึ้น กรม

ยุทธนาธิการได้ตรวจโดยดัดวันแล้ว เห็นว่าเป็นแบบแผนเครื่อง

แนะนำอันเป็นประโยชน์แก่การทหารส่วนหนึ่ง ควรใช้เป็นหลักสูตร

สำหรับตั้งสอนนักเรียนทหารบก และสำหรับนายทหารประจำแผนก,

กรมและกองทัพอไปได้ศึกษาให้ทราบไว้



ตรวจถูกต้องกับต้นฉบับแล้ว

นายพลตรี พระยา อินทรวงศ์

เจ้ากรมตำรวจทหารบก

สาราน

ยุคติดเต็ม ๑ บทที่

ตรงกับ อ. น. ที่

หน้า

๔	๔	๒๘
๕	๕	๓๓
๖	๖	๓๗
๘	๗	๔๑
๑๓	๑	๑๒
๑๔	๒	๑๖
๑๕	๓	๒๐
๑๖	๔	๔๗
๑๘	๕	๕๑
๑๙	๑๐	๕๓
๒๐	๑๑	๕๕
๒๔	๑๙	๘๖
๒๖	๑๗	๗๙
๒๗	๑๓	๖๓
๒๘		
๒๙		
๓๐	๑๔	๖๖
๓๑	๑๕	๖๘
๓๒	๑๖	๗๒
๓๓	๒๑	๙๕
๓๔	๒๒	๙๗

หน้า

หน้า

เกร็ดของหมายที่ไซ

๑

ป. น. ๑๔

๖๖

ดั่งดงศัพท

๓

ป. น. ๑๕

๖๘

ดั่งดงศัพท

๑๑

ป. น. ๑๖

๗๒

ป. น. ๑

๑๒

ป. น. ๑๗

๗๕

ป. น. ๒

๑๖

ป. น. ๑๘

๘๔

ป. น. ๓

๒๐

ป. น. ๑๙

๘๖

ป. น. ๔

๒๔

ป. น. ๒๐

๘๘

ป. น. ๕

๓๓

ป. น. ๒๑

๙๕

ป. น. ๖

๓๗

ป. น. ๒๒

๙๗

ป. น. ๗

๔๑

ป. น. ๒๓

๑๐๒

ป. น. ๘

๔๗

มาตราส่วน

๑๐๘

ป. น. ๙

๕๑

ร. น. ๑

๑๑๓

ป. น. ๑๐

๕๓

ร. น. ๒

๑๑๕

ป. น. ๑๑

๕๕

ร. น. ๓

๑๑๘

ป. น. ๑๒

๕๗

ร. น. ๔

๑๒๓

ป. น. ๑๓

๖๓

ร. น. ๕

๑๓๐

หน้า

หน้า

ร. น. ๖	๑๓๒	ป. น. ๒๕	๑๘๗
ร. น. ๗	๑๓๔	ข. น. พนท □ ขนาน	๑๘๙
ร. น. ๘	๑๓๙	ป. น. ๒๖	๑๙๑
ร. น. ๙	๑๔๓	ข. น. พนท △	๑๙๔
ร. น. ๑๐	๑๔๕	ป. น. ๒๗	๑๙๖
ร. น. ๑๑	๑๔๙	ป. น. ๒๘	๑๙๘
ร. น. ๑๒	๑๕๐	ป. น. ๒๙	๒๐๔
ร. น. ๑๓	๑๕๒	ข. น. พนทรูปเหลี่ยม	๒๐๙
จุดวง	๑๕๓	ป. น. ๓๐	๒๒๐
ร. น. ๑๔	๑๕๖	การหาพนท △	๒๒๔
ร. น. ๑๕	๑๕๘	ป. น. ๓๑	๒๓๓
ต้นหระจุด บทแทรกที่ ๑	๑๖๓	ร. น. ๑๖	๒๓๘
บทแทรกที่ ๒	๑๖๖	ร. น. ๑๗	๒๔๓
บทแทรกที่ ๓	๑๖๘	ร. น. ๑๘	๒๔๘
ภาคที่ ๒ ๘ แดงคัพพั	๑๗๒	ร. น. ๑๙	๒๕๐
ป. น. ๒๔	๑๗๗	แกนพิภัก	๒๕๔

คำนำของผู้เรียบเรียง

ข้าพเจ้าผู้เรียบเรียงคำรำนเห็นว่า โรงเรียนทหารบกยังขาด

ตำราเรชาศนิต สำหรับเป็นคู่มือของนักเรียน และตำราชนิดนี้

ในเวลานี้ยังไม่มีผู้ใดได้เรียบเรียงขึ้น ผู้บัญชาการโรงเรียน

ทหารบก จึงประทานโอกาสให้เรียบเรียงขึ้นฉลองพระเดชพระคุณ

ข้าพเจ้าจึงได้อุสาหเรียบเรียงคำรำนขึ้น ตั้งใจจะให้เป็นที่เครื่อง

บำรุงความสดวกในการเรียน และให้เป็นหลักฐานแห่งการสอน

แต่ขอความในสมุดเล่มนี้จะนับว่าบริบูรณ์ มิขาดตกบกพร่องเลยนั้นไม่

ได้ เพราะข้าพเจ้ามีเวลาน้อย ด้วยติดการสอนนักเรียนประจำวันที่

และเวลาอยู่เสมอ โดยเหตุนี้เองจึงได้คัดลอกทำครั้งละเล่ม ๆ นี้

คือเล่มต้น จำเป็นผู้นเรียนจะต้องรู้ไว้ก่อน และตั้งความคิดว่า

ถ้ามีเวลาจะเรียบเรียงเล่ม ๒ ส่วนของพระเดชพระคุณต่อไป

สมุดเล่มนี้ ข้าพเจ้าได้ทูลเกล้า ฯ ถวาย นายพลตรี สมเด็จพระเจ้าลูกยาเธอ เจ้าฟ้ากรมขุนพิศณุโลกประชานารถ ผู้บัญชาการ

โรงเรียนทหารบก ได้ทรงพระกรุณาตรววจแก้จนจบ เป็น

๒
พระเดชพระคุณบัณฑิตนพคุณเจ้าอาวาสวัดพระเชตุพนวิมลมังคลาราม
ทั้งหลาย.

ข้าพเจ้า ถียง

ครูวิชาเลข โรงเรียนนายร้อยทหารบกชั้นมัธยม

กัณยาน วันโกสินทร์ศก ๑๒๗



คำนำตำรา

โลกที่เราอาศัยอยู่นี้ ย่อมเต็มไปด้วยวัตถุต่าง ๆ ลักษณะ
และขนาดแปลก ๆ กัน บางทีใครจะทราบมีอะไรเท่าไรบ้างก็เด็ก
ที่สุดจนไม่อาจเห็นด้วยจักขุเปล่าได้ แต่สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ถึงแม้
ว่ารูปพรรณลักษณะขนาดผิดแปลกกันก็จริง แต่ยังมีข้อที่ควรทราบ
ว่าสิ่งเหล่านี้ย่อมเหมือนกันทั้งนั้นอยู่คือ

ประการที่ ๑ บ้างถึงต่าง ๆ ย่อมต้องการที่ ๆ จะอาศัยใน
ชั่วขณะหนึ่งเวลาหนึ่ง ดูจากธรรมชาติว่า สิ่งขนาดย่อมต้องการ
ที่นั้น

ประการที่ ๒ สิ่งทั้งหลายย่อมมีรูปมีขนาดด้วยกันทั้งหมด แต่
รูปและขนาดนั้น บางสิ่งก็คงอยู่บางสิ่งก็ไม่เป็นที่กำหนดแน่นอน
ว่าคงอย่างเดิมอยู่อย่างนั้น คือเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ ชนิดของ
สิ่งที่เปลี่ยนแปลงอยู่เสมออันบางชนิดก็โคจรทุกที บางชนิดก็เคลื่อน
ทุกที และจำพวกที่เปลี่ยนขนาดอยู่นี้ ก็หาได้ โคจรหรือเคลื่อน
เป็นกำหนดไม่ บางชนิดก็โคจรหรือเคลื่อนเร็ว บางชนิดก็โคจร
หรือเคลื่อนช้าระมัดระวัง และรูปพรรณต้นฐานเองก็มิได้เหมือนกัน
ไปหมดทุกสิ่ง แต่บางสิ่งก็คล้ายกัน บางสิ่งก็สัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน

จึงมีวิชาที่สำหรับศึกษาให้ทราบรูปร่างขนาดและการเกี่ยวของ
สัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ แต่เราจะเรียนถึงรูปพรรณสัณฐาน
ของวัตถุทั้งหมดหาไม่ได้ เพราะโลกเราย่อมประกอบด้วยสิ่งต่าง ๆ
หลายอย่างหลายชนิดมากมายเหลือเกินนัก ทั้งมีรูปพรรณสัณฐาน
ทรงสัณฐานแปลก ๆ ต่าง ๆ กัน ย่อมเป็นที่ยุ่งเหยิงมากไป เนิ
ความต้องการที่เราจะศึกษาในชั้นต้นนี้ เพราะฉะนั้นขอให้เข้าใจ
ว่าเราจะเรียนนั้นจะศึกษาแต่ รูปร่างขนาด ของวัตถุ ที่ รูปพรรณ สัณฐาน
เกิดยังเกิดเป็นกรณีต่างในการเรียนเท่านั้น วิชาที่พรรณนาถึงรูป
ขนาดและการเกี่ยวของสัมพันธ์ ในระหว่างสิ่งเหล่านี้ เรียกว่า
วิชาเรขาคณิต

เราจะเรียนเรขาคณิตไปทำไม จะมีประโยชน์อะไรกับเรา ?

บัณฑิตยสถาน ที่เริ่มเรียนมกตั้งขึ้น เพราะฉะนั้นจึงขออธิบาย

ให้ทราบเสียแต่ต้น

เรขาคณิตนั้นแบ่งออกเป็น ๒ ตอน ๆ ที่ ๑ ว่าด้วยวิธีเขียนรูป
จากรูป ตอนที่ ๒ พรรณนาถึงรูปต่าง ๆ และการพิสูจน์ความจริง
ได้จากรูปเหล่านั้น

ตอนที่ ๑ นั้นสอนให้เรารู้จักวิธีเขียนรูปต่าง ๆ ให้ถูกต้องตาม
ส่วนที่ประสงค์ มีประโยชน์เป็นอันมากแก่ผู้ที่มาทำการ โยธา,

เครื่องกลไก และผู้ที่มีความประสงค์จะเขียนแบบแผนเขียนแผนที่
 คึกบ้านเรือนโรงต่าง ๆ ทั้งมีประโยชน์แก่เราเหล่าทหารเป็นอันมาก
 ถ้าเราไม่มีความรู้ในวิชาเขียนรูปแล้ว ก็เป็นข้อขัดข้องอย่างยิ่ง
 กับการงานที่จะให้สำเร็จตลอดไปตามความปรารถนา เพราะเมื่อ
 ค่ายคูสถานประตูกุหลาบและสิ่งอื่นๆอีกเป็นอันมากที่จะประกอบเป็นรูป
 เมื่อร่างขึ้นให้เป็นทรวดทรงต้นฐานอย่างไรวางนั้น ต้องอาศัยการเขียน
 รูปเป็นประมาณ เช่นเป็นต้นว่าเราปรารถนาจะสร้างบ่อน้ำสร้างค่าย
 สร้างสถานหรือบ้านเรือนโรงทหารต่าง ๆ ก็ดี เราย่อมลงมือเขียน
 แผนผังของสิ่งเหล่านั้นเสียก่อนไม่ใช่หรือ แล้วจึงได้ลงมือทำโครง
 เป็นรูปเป็นร่างขึ้นได้

คำว่า พิสูจน์ ในที่นี้หมายความว่า การค้นหาหลักฐานพยาน
 มาประกอบความจริงที่มีอยู่แล้ว ให้เด่นเห็นชัดจริงและให้มั่นคง
 ทั้งหลายลงความเห็นด้วย

เราคาดคะเนก่อนที่จะกระทำให้เราชำนาญในการพิสูจน์ข้อความ
 จริงต่าง ๆ ว่าเหตุผลกลใดเป็นอย่างไร ความชำนาญทั้งนี้ อาจทำ
 ประโยชน์ในการค้นหาเหตุผลมาประกอบสิ่งที่พบให้ผู้อื่นหาหนทาง
 ที่จะคิดค้นได้ง่าย แปลว่ารู้จักพบกับทั้งสอนให้เชื่อแก่ทั้งหลักฐาน
 แล้วเท่านั้น

ประโยชน์ของเราคนนอกจากที่ได้กล่าวมานี้ยังมีอีกพแนก
หนึ่งที่มีประโยชน์แก่นักเรียนโดยตรง คือเป็นพื้นให้เข้าใจวิชาสูง ๆ
ต่อไปได้

ที่ข้าพเจ้าได้พรรณนามานี้ คือประโยชน์ของเราคนโดย
ถึงเขาเท่านั้น ยังไม่ตัดสินหมดจดทีเดียว แต่ยังมีอีกมากมายนัก
และคงจะปรากฏแก่ผู้ศึกษาเมื่อมีความรู้มากแล้ว เพราะฉะนั้นจึง
ขอปิดแต่เพียงนี้

อนึ่งการเรียนเรขาคณิต ครูควรอธิบายให้นักเรียนทราบว่า สิ่ง
ที่สำคัญและยากกับนักเรียน คือการพิสูจน์ การพิสูจน์ในเรขาคณิต
มีหลักกันว่า จะต้องเอาข้อความจริงที่เรียนไปแล้วมาประกอบพิสูจน์
ข้อต่อ ๆ ไปเสมอ จะใช้หาจากข้ออื่นไม่ได้เป็นอันขาด เพราะ
ฉะนั้นในตอนต้นจึงยากที่จะให้เข้าใจโดยชัดเจนและจำได้ โดยแน่นอน
ก็ เพราะตอนต้นยังตัดสินเหตุที่จะเอามาประกอบอยู่ ข้อเมื่อ
เรียนไปได้มากแล้ว ก็อาจหยิบยกข้อความจริงที่ได้พิสูจน์ไปแล้ว
มาประกอบเหตุให้สมผลได้ โดยไม่ขัดข้อง ถ้ายิ่งเรียนได้ยิ่งมาก
ก็ยิ่งอดมข้อความจริงที่จะมาประกอบ เพราะฉะนั้นยิ่งเรียนไปได้
มากยิ่งเป็นการง่ายแก่ผู้เรียน เพราะฉะนั้นผู้เรียนเมื่อแรกทงมือเรียน
รู้สึกว่ายากแล้ว ขูยาเพื่อที่ถ้อยก่อน จึงตั้งความอุตสาหะให้ยิ่ง

นำต้น

วิชาเรขาคณิตแบ่งออกเป็น ๓ ตอน ๆ ต้นเรียกว่าปะทะเรขา
 • คณิต หรือเรขาวิจี ตอนให้วาดรูปเขียนรูป ตอนกลางเรียกว่า
 • อะมะเรขาคณิต ตอนให้พิสูจน์ข้อความที่เป็นจริงแล้วให้แสดงให้เห็น
 ว่าจริงโดยชัดเจน และค้นหาข้อความจริงที่ยังบกมาดแต่งพร้อม
 • ด้วยเหตุผลต้นเค้า ตอนท้ายเรียกว่า อะมะเรขาคณิต คล้ายกับ
 อะมะเรขาคณิตคิดแต่ว่าด้วยรูปแท่ง คำว่าเล่นนี้กล่าวเพียงอะมะ
 เรขาคณิตอธิบายถึงเส้นและรูปต่าง ๆ ที่สร้างขึ้นในพื้นราบเท่านั้น คือ
 ไม่กล่าวถึงสิ่งที่มีกำหนดหนามานั้นเลย

เรขาคณิตแบ่งออกเป็นบท ๆ เรียกว่า อุตเทศ (propo sition)
 อุตเทศ แบ่งออกเป็น ๒ จำพวก คือ

บทพิสูจน์ เรียกว่า อุประมัยนิเทศ (theorem)

บทสร้าง เรียกว่า เรขานิเทศ (problem)

ทุก ๆ อุตเทศแบ่งเป็นภาค ๆ คือ

๑. ประกาศใจหัย โดยกว้างขวาง (General enunciation)

๒. ประกาศใจหัย โดยเฉพาะ (Particular enunciation)

๓. สร้าง (Construction)

๔. พิสูจน์ (proof)

๑. ประกาศโจทย์ โดยกว้างขวาง คือข้อความที่เป็นควมค้นหาข้อที่
พูดตอนนั้น อันเป็นข้อความที่พูดโดยกว้างขวางไม่จำกัดจำเพาะ
๒. ประกาศโจทย์ โดยเฉพาะ คือข้อความที่เขากระทำจากข้อ ๑
แต่ต่างพูดให้เป็นข้อความจำเพาะจำกัดเสีย
๓. ถ้อยคำ คือสิ่งที่เพิ่มเติมลงนอกจากคำกล่าวในข้อ ๒
๔. พิสูจน์ คือการหาเหตุผลมาอ้างและเปรียบเทียบเพื่อความเจตนา
จะให้แต่เห็นได้ โดยชัดเจนว่า ข้อความในข้อหนึ่งนั้นถูกต้องเป็นจริง
เราภาษาสันสกฤตใช้คำนี้แปลว่าเส้นหรือเส้นตรง
อุทเทศเป็นคำภาษามคธใช้คำนี้แปลว่านำขึ้นแสดง
อุปมาอันเทศมาจกคำว่าอุปมาภาษามคธ แปลว่าเปรียบเทียบ กับ นิเทศ
ภาษามคธแปลว่านำออกแสดงให้เห็นจริงจึงได้ใจความว่า นำขึ้นแสดงให้เห็น
จริงโดยวิธีเปรียบเทียบ คำว่าเราานิเทศมาจกเราถกับนิเทศได้ใจความว่า
นำขึ้นแสดงให้เห็นจริงโดยเส้นหรือรูป

อนุมาณภาษามคธแปลว่าข้อความเป็นจริงตามกระทู้อื่น

ผลิต คำภาษามคธแปลว่า คำนวณ

ตะมะ " รบว่าเสมอ

ชนะ " แท้ง

ปะทะ " รอยหรือทาง

พยานชนะ ๓ ตัว ช. ค. พ. ย่อคำ “ซึ่งต้องพิสูจน์” ใช้ได้ลง
ข้างท้ายบทพิสูจน์คืออุปมาอันเทศ เพื่อให้ทราบว่ามันต้องพิสูจน์
เท่านั้น ถ้าไม่ได้ ช. ค. พ. ให้เข้าใจว่าบทร่างคือเราานิเทศ

(๕) “ข้ออนุมาน” (corollary) คือ ความจริงได้จาก
 กระทั่งความในอวกาศที่มีหลักฐานพอแสดงให้เห็นได้แท้จริง และเอามาใช้
 ได้ โดยไม่ต้องพิสูจน์อีก

(๕) เครื่องหมายต่างๆ ที่ใช้ในเล่มนี้ คือ —

Δ รูปสามเหลี่ยม $\equiv$ เท่ากันทั้งกันสนิทพอดีกับ

$\therefore$ เพราะว่า, $\because$ เพราะฉะนั้น, $=$ เท่ากับ, $\parallel$ ขนานกัน $\perp$ ตั้ง
 ฉากกับ $\wedge$ มุม $>$ ใหญ่หรือยาวกว่า $<$ เล็กหรือสั้นกว่า

$\square$ รูปสี่เหลี่ยม

$\bigcirc$ วง
 เส้นรอบวง

อ.น. ย่อคำ อุปรมัณนีเทศ

ร.น. “ “ เรขานีเทศ

อน. “ “ ข้ออนุมาน

$\bigcirc$ วงกลม $\odot$ รัศมีของวงกลมเดียวกัน

$\odot$ จุดศูนย์กลาง $\odot$ เส้นศูนย์กลาง

$\vdash$ มุมนอกกับมุมในที่ตรงข้ามข้างกันตัดเดียวกัน

$\sqsubset$ มุมในทั้ง ๒ ข้างกันตัดเดียวกัน

Σ มุมแย้ง

เรขาคณิต

ภาคที่ ๑

การเรียนเรขาคณิตพิสูจน์เป็นสำคัญ และวิธีพิสูจน์นั้นจะต้องเก็บเอาหัวข้อความจริงที่ใคร่เรียนไปแล้ว แต่ค้นเฉพาะที่เกี่ยวข้องประกอบพิสูจน์ข้อต่อ ๆ ไปดังนี้ และสิ่งที่จะใช้ในการพิสูจน์ ต้องใคร่บอญามาแต่คนแล้วทั้งสิ้น เพราะฉะนั้นตอนนี้นั้นจึงต้องมีข้อที่อนุญาตไว้ คือมีข้อความจริงบางอย่างที่จะต้องใช้ ในการพิสูจน์ และเป็นสิ่งสามัญอย่างยิ่งหาแต่เห็นได้จริงง่ายที่สุดจึงอนุญาตไว้

สัจสูตร สิ่งเห็นจริงแล้ว. (axioms)

เหตุต่าง ๆ อันเกิดมีขึ้นในวิชาคำนวณวิชานั้น ย่อมเกิดจากกฎหรือข้อบังคับธรรมดาอาศัยความเป็นจริงแล้วทั้งสิ้น โดยเหตุนี้สิ่งสามัญอย่างยิ่งจนหาเห็นได้ โดยง่ายที่สุดที่จะกล่าวต่อไปดังนี้จึงไม่ต้องพิสูจน์ ให้เห็น และสิ่งเหล่านี้มิใช่ในตำราที่เพื่อให้เป็นเครื่องประกอบในการพิสูจน์

สิ่งเหล่านี้ให้ชื่อว่า สัจสูตร (axioms) .

คือ :- บวก สิ่งทั้งหลายที่เท่ากันถ้าวกเข้าเท่า ๆ กันผลบวกที่ได้ทั้งหมดย่อมเท่ากัน.

สัจจะคือความจริง
สูตร ,, ข้อความ

ข้อความที่เป็นจริงแล้ว

(อุทาหรณ์) ก. มีหนังสือ ๔ เล่ม ข. ก็มี ๔ เล่ม
ถ้าเพิ่มขึ้นอีกคนละ ๑ เล่ม ก. จะมี ๕ เล่ม และ ข. ก็จะมี ๕ เล่มเหมือนกัน

ลบ สิ่งต่างๆ ที่เท่ากันถ้าหักออกเสียข้างใดเท่ากัน ผลที่เหลือก็ย่อมเท่ากัน

(อุทาหรณ์) ก. มีหนังสือ ๔ เล่ม ข. ก็มี ๔ เล่ม
หักออกเสียเท่า ๆ กัน คือคนละ ๑ เล่ม

ก. จะยังเหลือ ๓ เล่ม ข. ก็ยังเหลือ ๓ เล่มเท่ากัน

คุณ สิ่งทั้งหลายเป็นคู่ของเท่า, ตามเท่า ฯลฯ ของสิ่งเดียวกันหรือของสิ่งที่เท่ากันนั้นย่อมเท่ากัน

(อุทาหรณ์) ก. มีเงินสองเท่าของ ข. (คือ มีมากกว่า
ข. เท่าตัว) ค. ก็มีสองเท่า ข. เหมือนกัน เพราะฉะนั้น ก.
กับ ค. จึงมีเงินเท่ากัน หรือ ก. มีเงินสองเท่า ข. ค. มี
สองเท่าของ ข. แต่ ข. กับ ข. มีเท่ากัน เพราะฉะนั้น ก.
กับ ค. จึงมีเท่ากัน

หาว่า สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เป็นคู่หนึ่ง หรือหนึ่งในสามหรือ ฯลฯ
ของสิ่งเดียวกันหรือของสิ่งที่เท่ากัน สิ่งทั้งหลายเหล่านั้นก็ย่อม
เท่ากันเหมือนกัน

(อุทาหรณ์) ก. มีเงิน ๑๐ บาท ข. มี ๑๐ บาท แบ่งเงิน
ของชายทั้งสองออกคนละครึ่ง ก. ยังเหลือ ๕ บาท ข. ก็ยังเหลือ
๕ บาทเท่านั้น

ผู้จัดตั้งที่กล่าวมานี้ พอเป็นตัวอย่างชักนำผู้เรียนไปสู่ข้อเกิด
แห่งความเข้าใจในตอนต้น และพอใช้ในการพิสูจน์ตอนต้นเท่านั้น
ซึ่งหาครบบริบูรณ์ทีเดียวไม่ยังจะต้องการอีก แต่จะกล่าวไว้เป็นครั้ง
เป็นคราวในที่ ๆ ต้องการ

๔. แดงศัพท์ (Definition)

นักเรียนคงทราบแล้วว่า จุด, เส้น, พนม, เป็น คืออะไร? แต่ในวิชา
สิ่งเหล่านี้ต้องใช้โดยละเอียดจึงต้องอธิบายให้ทราบ

(๑) จุด, เป็นสิ่งซึ่งไม่มีกำหนดกว้างยาวใหญ่เล็กมีแต่ตำแหน่ง
เท่านั้น (คือเราจะไม่สามารถวัดจุดได้ว่าใหญ่เล็กเพียงไร อาจ
ทราบได้แต่ว่าอยู่ที่ตรงไหนเท่านั้น)

(๒) เส้น, เป็นสิ่งที่มีกำหนดยาว, ไม่มี กำหนดกว้าง
(เมื่อเขาคิดต่อจากไปบนกระดาษให้เป็นรอยทาง ถ้าไม่สามารถ
ทราบได้ว่ากว้างเท่าใด รอยทางนั้นคือเส้น แต่เส้นที่ใช้ในวิชา
การเด็กที่สุด ที่จะเป็นได้คือไม่ให้มีขนาดกว้างเลย) ที่สุดปลาย
ทั้งสองข้างของเส้น คือ จุด

(๓) พื้น, เป็นสิ่งที่กำหนดทั้งกว้างและยาว แต่ไม่มีกำหนด
หนาบาง ของขอบพื้น โดยรอบเรียกว่า เส้น

เส้น, จะเป็นเส้นโค้งก็ได้ ตรงก็ได้ คือ มีสองชนิด

(๔) เส้นตรง, เป็นเส้นที่ซึ่งตั้งแคเรียอยู่ในระหว่างจุดปลาย
สองจุด

(๕) เส้นโค้ง, เป็นเส้นที่เปลี่ยนทางขยี้เสมอ

สังขสูตร (ก) จากจุดหนึ่งถึงจุดหนึ่งอาจขีดเส้นตรงได้เพียง
เส้นเดียวเท่านั้น

(ข) เส้นตรงสองเส้นจะตัดกันที่ว่างให้รอบไม่ได้

(๖) พื้นราบเสมอ, (Plane surface) เป็นพื้นซึ่งหาก
จะตั้งจุดขึ้นสองจุดแห่งหนึ่งแห่งใดในพื้นนั้น เส้นตรงที่ขีดในระหว่าง
สองจุดนั้น จะไม่ขึ้นขึ้นมาหรือแอ่งลงไปเป็นอันขาด

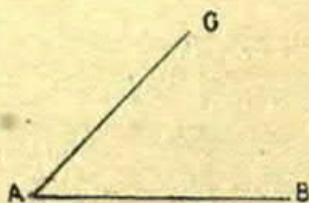
(๗) มุม (angle) เป็นข้อที่เกิดขึ้นจากเส้นตรงสองเส้นมา

จากกัน

(เส้นตรงทั้งสองนี้เรียกว่า

“ขาของมุม”

(hands of an angle)

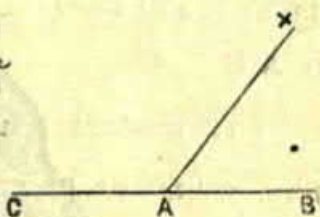


ขนาดของมุมย่อมเกิดจากเส้นฉากหรือเส้นฉาก

ดมุมที่ให้เส้นตรง AB อยู่กับที่และให้เส้น AC เวียนไปรอบจุด A เมื่อเส้น AC เวียนออกมา มุมก็ใหญ่ขึ้นทุกที ให้สังเกตด้วย จ้ามุมจะใหญ่จะเล็กไถ่นั้น ไม่ใช่เป็นด้วยยาวหรือสั้นเลย

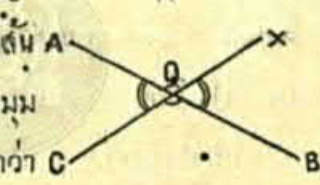
เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งบนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมทั้งสองที่เกิดขึ้นทั้งสองข้างนั้นให้เรียกว่า มุมประชิด

เช่นมุม BAX กับมุม CAX ให้เรียกว่า มุมประชิด เพราะประชิดกันอยู่



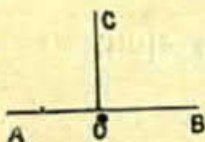
เมื่อเส้นตรงสองเส้นไขว้กัน เช่นเส้น AB กับ CX มาไขว้กันที่จุด O มุม AOX กับมุม COB ให้เรียกว่า

มุมตรงกันข้าม (Vertically opposite) และมุม AOB ก็ตรงกันข้ามกับมุม XOC เหมือนกัน



(๘) เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตั้งบนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง

เกิดมุมประชิดสองมุม ถ้าเท่ากัน, มุมหนึ่งของมุมทั้งสองนี้ให้เรียกว่า "มุมฉาก"



(right angle) และเส้นทั้งสองนั้นให้พูดว่า ตั้งได้ฉาก
(perpendicular) แก่กัน

สังจสูตร (ก) เมื่อ O เป็นจุดอยู่ภายในเส้น AB และ
เส้น OC เวียนรอบจุด O เมื่อออกจาก OB มายัง OA'
ในหนทางที่เวียนมานั้นเส้น OC คงต้องมาถึงที่แห่งหนึ่ง ซึ่งตั้งได้ฉาก
กับ AB

(ข) มุมฉากทั้งหลายย่อมเท่ากันหมด

มุมฉากมุมหนึ่งแบ่งออกเป็น ๙๐ ส่วน ๆ หนึ่ง ๆ ให้ชื่อว่า องศา
(degree) ($^{\circ}$) องศาหนึ่งแบ่งออกเป็น ๖๐ ลิปดา ($'$)
(minute) ลิปดาหนึ่งแบ่งออกเป็น ๖๐ พิลิปดา ($''$) (Second)

ตามรูปข้างบนนี้ ถ้า OC เวียนแต่ OB จนกระทั่ง
ถึง OA นับว่าเวียนได้ ๒ มุมฉาก หรือ ๑๘๐° (องศา)

ถ้า OC จะเวียนไปจนรอบจุด O คือ จากตำแหน่ง OB มาถึง
 OB อีกก็นับว่าเวียนได้ ๔ มุมฉาก หรือ ๓๖๐°

(๑๐) มุมแหลม (acute angle) เป็นมุมที่แคบกว่า

มุมฉาก

มุมแหลมย่อมไม่ถึง ๙๐ องศา



(๑๑) มุมบาน (obtuse angle) เป็นมุมที่กว้างกว่า
มุมฉาก แต่ไม่ถึง ๒ มุมฉาก
(ย่อมอยู่ในระหว่าง ๙๐ กับ

๑๘๐ องศา)

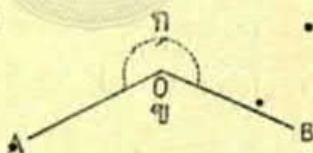
(๑๒) มุมตรง เป็นมุมที่เกิดแต่เส้นตรงสองเส้นมาจกกัน
และแยกออกเป็นเส้นเดียวกัน

มุมบนเส้นและใต้เส้นเรียกว่า มุมตรง (Straight angle)
มุมตรงวัดได้ ๑๘๐ องศาถ้วน



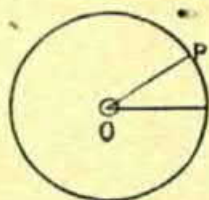
(๑๓) มุมเกิน (reflex angle) เป็นมุมที่เกินสองมุม
ฉาก แต่ต่ำกว่าสี่มุมฉาก
“มุมเกิน” จะอยู่ในระหว่าง
๑๘๐ กับ ๓๖๐ องศา

เมื่อเส้นตรงสองเส้นมาจุด
กันจะเกิดมุมขึ้นสองมุมตั้งในรูปมุมหนึ่ง จะให้ถือว่าอีกมุมหนึ่ง
มุมใหญ่นั้นนับว่าเส้น O A ได้เวียนจาก O B โดยทางซ้ายซึ่ง
หมายอักษร ก มุมเล็กนับว่าเส้น O A เวียนจากเส้น O B โดย
ทางตั้งซึ่งหมายอักษร ข



(๑๔) “รูปพินราบ” (plane figure) เป็นส่วนหนึ่ง
 ส่วนใดของพินราบ มีเส้นตรงไม่ว่ากี่เส้นเป็นอาณาเขต

(๑๕) วงกลม, (circle) เป็นรูปพินราบที่เส้นๆ เดียว
 ล้อมรอบ ถ้าลากเส้นตรงจากจุดใดจุดหนึ่งไปจรดเส้นรอบวง เส้นตรง
 ที่ลากนั้นไม่ว่ากี่เส้น ใดๆ จะต้องเท่ากันหมด
 เส้นเหล่านี้ให้เรียกว่า “รัศมี” (radius)
 ของวงกลม, จุดใดจุดหนึ่งให้เรียกว่า
 “ศูนย์กลาง” (centre) และเส้น



อาณาเขตให้เรียกว่า “เส้นรอบวง” (circumference) ตาม
 รูปข้างบนจะหมายความว่าจุด P เวียนรอบจุด O โดยระยะทางตั้งแต่ O ถึง P
 คงที่อยู่เสมอได้ เป็นรูปวงกลมเหมือนกัน

(๑๖) รัศมีของวงกลมเป็นเส้นตรงที่ลากจากศูนย์กลางไปจรด
 เส้นรอบวง

ถ้าจัสสุตร์ รัศมีของวงกลมวงเดียวกันหรือของวงกลมที่
 เท่ากันย่อมยาวเท่ากันทุกเส้น

(๑๗) เส้นศูนย์กลางวงกลม (diameter) เป็นเส้นตรง
 ที่ลากจากเส้นรอบวงข้างหนึ่งมาจรดศูนย์กลาง ไปจรดเส้นรอบวงอีก
 ข้างหนึ่ง

(๑๘) โค้ง (arc) ของวงกลมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นรอบวง

(๑๙) ครึ่งวงกลม (Semicircle) เป็นรูปพื้นราบที่มีเส้น
ศูนย์กลางกับเส้นรอบวงโอบมาจดกัน เป็นอาณาเขต

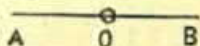
(๒๐) แบ่งครึ่ง (bisect)

คือตัดหรือแบ่งออกสองส่วนเท่าๆกัน



รูปเส้นตรงครึ่งวงกลม

ทฤษฎี (ก) ถ้าจุด O

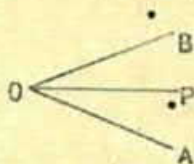


ในเส้น AB เชื่อมจากจุด A มาถึงจุด B จะมาถึงตำแหน่งหนึ่ง
ที่แบ่งเส้น OB ออกสองส่วนเท่าๆกัน เพราะฉะนั้นจุด O อาจแบ่งครึ่ง
เส้นตรงได้

(ข) ถ้าเส้น OP เวียนจาก OA ถึง OB จะมาถึง
ตำแหน่งหนึ่งซึ่งจะแบ่งมุม BOA ออกสองส่วนเท่าๆกัน

∴ มุมหนึ่งหลายมุมจะ
แบ่งออกสองส่วนเท่า ๆ กันได้

เส้นตรงอาจแบ่งหรือเส้นตรงอาจ
แบ่งครึ่งมุมใด ๆ ได้



อนุญาตให้สร้าง

ตั้งจุดขึ้นที่กล่าวไว้ในสแตงก์พท์ ข้อ ๙ กับข้อ ๒๐ นั้น
 ยังจะขยายออกอีกได้ โดยอาศัยมูลเหตุอันเป็นหลัก เพราะฉะนั้น
 จึงอนุญาตข้อต่อไปนี้ได้ โดยไม่ต้องให้ พิจารณา

(ก) จากจุดหนึ่งในเส้นตรงเส้นหนึ่ง จะขีดเส้นตรงอีก
 เส้นหนึ่งให้ตั้งได้ฉากกับเส้นนั้นก็ได้

(ข) อนุญาตให้ ใช้จุดแบ่งครึ่งเส้นตรงได้

(ค) อนุญาตให้ ใช้เส้นตรงแบ่งครึ่งมุมได้

เท่ากัน โดยทับกันสนิท (Superposition and Equality)

สัจสุตม์ สิ่งทั้งหลายที่มี "ขนาด" (magnitude) ถ้า
ทำให้ประทับกันสนิทได้ สิ่งเหล่านั้นย่อมเท่ากันทั้งสิ้น

กล่าวคือ :- เมื่อเส้นหรือมุมหรือรูปต่าง ๆ กัด ในเวลาที่ยก
จากที่เดิมโดยไม่เปลี่ยนแปลงรูป มาวางซ้อนเส้นหรือมุมหรือรูป
ขึ้นเพื่อเปรียบเทียบนั้น ถ้าทับกันสนิทได้ ไม่เกินหรือขาดที่แห่งใด
แห่งหนึ่ง ให้นับเขาว่าสิ่งเหล่านั้นเท่ากันสนิท

อนุญาตให้สร้าง

เพื่อให้สะดวกในการเขียนรูปต่าง ๆ ในวิชา นักเรียนควร
ใช้เครื่องมือคือ :- ในบททศยาวตรงกันจะเขียนมุมต่อข้อต่าง ๆ
ที่จะกล่าวต่อไปนี้ คือ อนุญาตให้สร้าง

(๑) แก่จุด ๑ จุดใด อาจลากเส้นตรงให้ ถึงอีกจุด ๑
จุดใดได้

(๒) เส้นตรงที่กำหนดให้ คือ เส้นตรงที่มีจุดปลายแล้ว
จะต่อเส้นนั้นออกไปให้ยาวเท่าใด ๆ ก็ได้

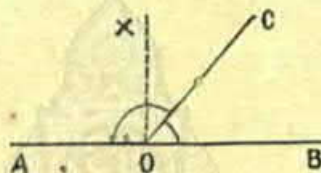
(๓) จะเอาจุด ๑ จุดใดเป็นศูนย์กลาง แล้วเขียนวงกลม
ให้รัศมีวงกลมยาวเท่าใด ๆ ก็ได้

ว่าด้วยเส้นกับมุม

อุประมัยนิเทศที่ ๑ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๑๓)

ประกาศโจทย์โดยกว้างขวาง
มุมประชิดรวมกันย่อมได้ตั้งของมุมฉาก

$$\text{มุมประชิด} = 180^\circ$$



ประกาศโจทย์โดยฉพาะ สมมติให้มุม COB กับ
COA เป็นมุมประชิด

ให้พิสูจน์ $\angle COB + \angle COA =$ ตั้งของมุมฉาก

(สร้าง) ที่จุด O ขีดเส้น $XO \perp AB$

(พิสูจน์) $\angle COB + \angle COA = \angle COB + \angle COX + \angle XOA$

และ $\angle XOB + \angle XOA = \angle COB + \angle COX + \angle XOA$

$$\therefore \angle COB + \angle COA = \angle XOB + \angle XOA = 180^\circ$$

ช. พ. พ.

แก้

ครั้งแรกต้องหาขนาด ของมุม $\angle COB + \angle COA$ เสียก่อน
แล้วไปหาขนาดของมุม $\angle XO B + \angle XO A$ ก็จะปรากฏว่าได้ขนาดเดียวกัน
คือต่างก็มาเท่ากับ $\angle COB + \angle COX + \angle XO A$ ด้วยกัน เพราะ
ฉะนั้นจึงเท่ากัน แต่ $\angle XO B + \angle XO A = 2$ มุมฉากเพราะสร้างให้
 $XO \perp AB$ เพราะฉะนั้น $\angle COB + \angle COA$ จึงได้ 2 มุมฉากด้วย

พิสูจน์ตามวิธีเวียน (rotation)

สมมติให้เส้นตรงเส้นหนึ่งเวียนที่จุด O จากตำแหน่ง OB
ถึงตำแหน่ง OC และเวียนต่อไปมาถึงตำแหน่ง OA คือ เวียนที่จุด O
จากตำแหน่ง OB ผ่านมุม $\angle COB$ กับมุม $\angle COA$ ถึงตำแหน่ง OA
เมื่อเวียนมาได้ครบรอบนี้ เส้นตรงนั้นได้เวียนผ่านมุมฉากสองมุม
เพราะ $\angle AOB$ เป็นเส้นตรงเส้นเดียว

เพราะฉะนั้น $\angle COB + \angle COA$ จึง = สองมุมฉาก

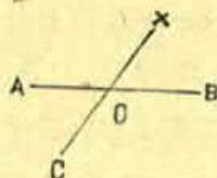
ข. ค. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑

เมื่อเส้นตรงสองเส้นตัดกันมุม < มุมที่เกิดขึ้นรวมกันจะได้

< มุมฉาก

๔ มุมรอบจุด = 360°



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{คือ: } \angle XOB + \angle XOA + \angle AOC + \angle COB = 4 \text{ มุมฉาก} \\ \text{พิสูจน์: } \angle XOB + \angle XOA = 2 \text{ มุมฉาก (มุมประชิด)} \\ \quad \angle AOC + \angle COB = 2 \text{ มุมฉาก (มุมประชิด)} \\ \therefore \text{ทั้ง ๔ มุมจึงได้ ๔ มุมฉาก} \end{array} \right.$$

ข้ออนุมานที่ ๒

เมื่อเส้นตรงไม่ฉากเส้น รวมมาบรรจบกันที่จุด ๑ มุมทั้งหมด
รอบจุดนั้นรวมกันจะได้ ๔ มุมฉาก

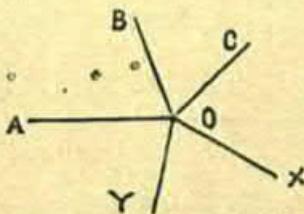
มุมรอบจุด = 360°

ตามข้ออนุมานนี้อาจนับได้ว่า

เส้นตรง OA เว้นผ่านมุมทุกมุมก็

เมื่อเส้นนั้นกลับเป็นเส้น OA เดิม

รอบจุด O จึงได้ ๔ มุมฉาก



สแดงศัพท์

(๑) มุมต้องมุมที่รวมกัน ได้ต้องมุมฉากเรียกว่า
 “มุมคู่อัมจักร” (supplement) ต่างมุมก็เป็น “มุมคู่อัมจักร”
 ของซึ่งกันและกัน เช่นในรูป อ. น. ที่ ๑ นั้นมุม COB กับมุม
 COA เป็น “มุมคู่อัมจักร”
 มุม ๑๒๓ เป็น “มุมคู่อัมจักร” ของมุม ๕๖ (เพราะ
 ต้องมุมรวมกันเป็นต้องมุมฉากหรือ ๑ อัมจักร)

(๒) มุมต้องมุมรวมกันได้ ๑ มุมฉาก เรียกว่า “มุมคู่ฉาก”
 (complement) ต่างมุมก็เป็น “มุมคู่ฉาก” ของซึ่งกันและกัน
 เช่นในรูป อ. น. ที่ ๑ มุม COX กับมุม COB เป็นมุมคู่ฉาก

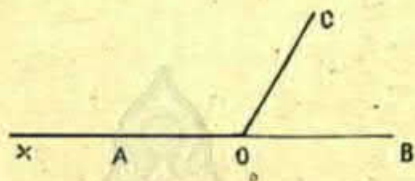
มุม ๓๔ เป็นมุมคู่ฉากของมุม ๕๖

ข้ออนุมาณที่ ๓ มุมทั้งหลายที่เป็น “มุมคู่อัมจักร” ของ
 มุม ๆ เดียวกันหรือของมุมที่เท่ากัน มุมเหล่านั้นย่อมเท่ากัน
 คู่อัมจักร

มุมทั้งหลายที่เป็น “มุมคู่ฉาก” ของมุม ๆ เดียวกันหรือ
 ของมุมที่เท่ากัน มุมเหล่านั้นย่อมเท่ากัน
 คู่ฉาก

อุปมาบิณฑิเทศที่ ๒ (ยุคคิดเล่ม ๑ บท ๑๔)

ที่ปลายเส้นตรงเส้นหนึ่ง มีเส้นตรงสองเส้นตรงกันข้ามมา
บรรจบกัน ถ้ามุมทั้งสองอันเกิดขึ้นนั้น รวมกันได้สองมุมฉาก
เส้นตรงสองเส้นนั้นจะต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน
ต่อกันได้ ๑๘๐



สมมุติให้เส้นตรง OA กับ OB ตรงกันข้ามมาบรรจบกันที่จุด O
ปลายเส้นตรง OC เกิด $\angle COB$ กับ $\angle COA$ รวมกันได้สอง
มุมฉาก

ให้พิสูจน์ เส้น OA กับ OB ต่อกันเป็นเส้นตรงเส้นเดียว,
ต่อเส้น BO ออกไปทาง O ถึงจุด X
 $\angle COB$ เป็นมุมคู่สัมผัสจักรของ $\angle COX$ (มุมประจิด) แต่โดย
โจทย์ $\angle COB$ เป็นมุมคู่สัมผัสจักรของมุม $\angle COA$
 $\therefore \angle COX$ จึง = มุม $\angle COA$ (คู่สัมผัสจักรของมุมเดียวกัน)
 $\therefore OX$ กับ OA จึงเป็นเส้นตรงเดียวกัน

$\therefore$ OB จึงเป็นเส้นตรงเดียวกับ OA ($\because$ OX เป็นเส้นเดียวกับ OB โดยสร้าง)

ข. ค. พ.

เค

ที่จะพิสูจน์ให้ OB กับ OA เป็นเส้นเดียวกันนั้น ครั้งแรกต้องหาเส้นอื่นมาเทียบเคียงเสียก่อน คือ ที่เป็นเส้นเดียวกับ OB มีฉะนั้นก็ OA, ในที่นี้ได้คือ BO ออกไปก็เพื่อประสงค์เส้นเทียบเคียง คือได้ OX เป็นเส้นเดียวกับ BO ครั้นแล้วพิสูจน์ให้ OA เป็นเส้นเดียวกับ OX โดยว่า

$\angle O A = \angle O X$ เมื่อมุมเท่ากันแล้ว ทั้งสองมุมนี้ขาเดียวกันอยู่ • ขา คือ OC เพราะฉะนั้นอีก • ขาต้องทับกัน มีฉะนั้นมุมก็ไม่เท่ากันได้ จึงได้ผลว่า OA เป็นเส้นเดียวกับ OX แล้วก็พูดได้ทีเดียวว่า OA เป็นเส้นเดียวกับ OB เพราะได้สร้างให้ OX เป็นเส้นเดียวกับ OB แล้ว

แบบฝึกหัด

(๑) จงหามุมคู่แย้งของมุมที่มีขนาดต่อไปนี้:-

(ก) $\frac{1}{2}$ ของมุมฉาก

(ง) มุม ๑๔๕°

(ข) $\frac{3}{4}$ ของมุมฉาก

(จ) มุม ๘๓°

(ค) มุม ๔๖°

(ฉ) มุม $๑๐๑^{\circ} ๑๕'$

(๒) ให้หามุมคู่ฉากของมุมต่อไปนี้

(ก) $\frac{1}{5}$ ของมุมฉาก

(ค) มุม $๓๘^{\circ} ๑๖''$

(ข) มุม ๒๗°

(ง) มุม $๔๑^{\circ} ๒๙' ๓๐''$

(๓) ถ้าเส้นตรงสองเส้นไขว้กัน เกิดมุมตั้งมุมและในมุม

ที่ทราบว่าเป็นมุมฉากย่อม ๑ ให้พิสูจน์มุมนอกนั้นเป็นมุมฉาก

ทุกมุม

(๔) ในรูปสามเหลี่ยม ABC บอกให้ว่า $A\hat{B}C$ และ

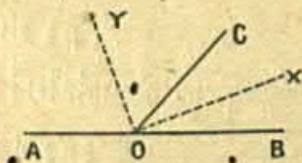
$A\hat{C}B$ นั้นเท่ากัน ถ้าตัดด้าน BC ออกไปทั้งสองข้าง ให้ตัด
ให้เห็นว่ามุมภายนอกทั้งสองที่เกิดขึ้นนั้นเท่ากัน

(๕) ในรูปสามเหลี่ยม ABC มุม $A\hat{B}C = \text{มุม } A\hat{C}B$

ถ้าตัดด้าน AB กับ AC ลงไปเลยฐาน ให้พิสูจน์มุมนอก
ทั้งสองนั้นเท่ากัน

แสดงคำ

เส้นตรงที่แบ่งมุมมุม ๑ ออกสองส่วนเท่า ๆ กันกับอีกเส้น ๑
ที่แบ่งมุมประชิด (เกิดขึ้นโดยต่อขาของมุมนั้นออกไป) ออกสอง
ส่วนเท่า ๆ กันอีกนั้น ให้ชื่อว่าเส้นแบ่งครึ่ง เส้นแรกให้เรียกว่า
“เส้นแบ่งครึ่งใน” (internal bisector) อีกเส้น ๑ ให้เรียก
ว่า “เส้นแบ่งครึ่งนอก” (external bisector) เช่นในรูปนี้



เส้น OX เป็น “เส้นแบ่งครึ่งใน” ของมุม BOC เส้น OY

เป็นเส้นแบ่งครึ่งนอกของมุม $\angle O C$

(๖) ให้พิสูจน์เส้นแบ่งครึ่งในกับเส้นแบ่งครึ่งนอกนั้นต่างก็ตั้งฉากแก่กัน

(๗) ตามรูปในหน้า ๑๔ นั้นให้ตั้งให้เห็นว่า $B O X$ กับ $C O Y$ นั้น เป็นมุมคู่ฉาก

(๘) ให้พิสูจน์ให้เห็นว่ามุม $C O X$ กับมุม $A O X$ เป็นมุมคู่สมมาตร และมุม $B O Y$ กับมุม $C O Y$ นั้นเป็นมุมคู่สมมาตรเหมือนกัน

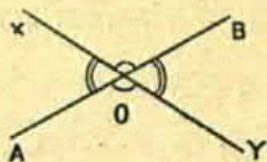
(๙) ถ้า $B O C$ วัดได้ 35° $A O Y$ จะวัดได้เท่าใด



อุประมัยนิเทศที่ ๓ (ยুক্তิ เต็ม ๑ บท ๑๕)

มุมตรงกันข้ามย่อมเท่ากัน

มุมตรงกันข้าม



สมมติให้เส้นตรง AB กับ XY ไขว้กันที่จุด O

ให้พิสูจน์ (ก) $\angle AOX = \angle BOY$

(ข) $\angle XOY = \angle AOY$

(พิสูจน์) $\therefore \angle AOX$ เป็นมุมคู่สมมาตรของ $\angle XOY$ (มุมประจก)

และ $\angle BOY$ เป็นมุมคู่สมมาตรของ $\angle XOY$ เหมือนกัน

$\therefore \angle AOX = \angle BOY$ (คู่สมมาตรของมุมเดียวกัน)

โดยวิธีเดียวกัน $\angle XOY = \angle AOY$

เท่า

ข้อสำคัญ ในการพิสูจน์ อ. ๑. ๓ จะต้องพูดแค่เพียงตามมุมเท่านั้น เพราะ

เมื่ออ้างว่า $\angle AOX$ เป็นคู่สมมาตรของ $\angle XOY$ และ $\angle BOY$ เป็น

มุมคู่สมมาตรของ $\angle XOY$ เหมือนกัน เช่นนั้นแล้ว จะได้กล่าวได้ว่า $\angle AOX$

กับ $Y\hat{O}B$ ต่างก็เป็นมุมคู่ตรงกันของมุมเดียวกัน จึงเท่ากันโดยอนุมาณ
ของ อ. น. • มิฉะนั้นจะเป็นมุมคู่ตรงกันของต่างมุมไปเสียก็จะพูดว่าเท่ากันไม่ได้

ช. ต. พ.

พิสูจน์ โดยวิธีเวียน

สมมติให้เส้น $A\hat{O}B$ หันที่จุด O จน $O A$ เข้าประกบ ๆ
 $O X$ ในเวลาเดียวกันนั้น $O B$ ก็จะไปประกบ ๆ $O Y$ เหมือนกัน
(เพราะเส้น $A\hat{O}B$ กับเส้น $X O Y$ เป็นเส้นตรงทั้งคู่) จึงเห็น
ได้ว่า $A O$ กับ $O B$ กว่าจะไปประกบ ๆ $O X$ และ $O Y$, เพื่อ
ให้มุมทั้งสอง คือ $A O X$ กับ $Y \hat{O} B$ สรุไปนั้นต้องเปิดองเวลา
เท่ากันและมีระยะเท่ากัน ;

มุม $A O X$ จึงเท่ากับมุม $Y O B$. โดยวิธี
เดียวกัน มุม $X O B$ ก็ = มุม $A O Y$

ช. ต. พ.

แบบฝึกหัดว่าด้วยมุม

(คำนวณ)

(๑) เข็มยาวของนาฬิกาจะเดินได้มุมกี่องศา เมื่อนาฬิกา
เดินได้

(ก) ๕ นาที (ข) ๒๑ นาที (ค) ๔๓ $\frac{1}{2}$ นาที (ง) ๑๔ นาที
๑๐ วินาที และจะเป็นเวลาเท่าใดถ้าเดินได้มุม 66° กับมุม 22°

(๒) นาฬิกาตั้งต้นเดินแต่ ๑๒ นาฬิกามาถึง ๑๕ นาฬิกา
๔๕ นาทีเข็มสั้นจะเดินได้มุมเท่าใด และถ้าเดินได้เวลา ๑๗ นาฬิกา
๑๐ นาทีจะเป็นมุมกี่องศา และถ้าเดินได้มุม 1๗2° เข็มสั้นเดิน
ได้เวลาเท่าใด

(๓) ลูกพิภพหมุนรอบแกนได้ใน ๒๔ ชั่วโมง ใน
๓ ชั่วโมง ๒๐ นาที จะหมุนไปเป็นมุมเท่าใด และถ้าหมุนได้มุม
 ๑๓๐° จะนานเท่าใด

(๔) ในรูปของอุประมัยนเทศที่ ๓

(ก) ถ้า $A \hat{O} X = ๓๕^{\circ}$ ที่เหลือสามมุมจะได้มุม ๑
กี่องศา

(ข) ถ้า $X \hat{O} B$ กับ $A \hat{O} Y$ รวมกันได้ ๒๕๐°
 $A \hat{O} X$ กับ $B \hat{O} Y$ จะได้มุมกี่องศา

(ค) ถ้า $A \hat{O} X, X \hat{O} B, B \hat{O} Y$ รวมกันได้ ๒๗๔°
มุมทุกมุมรอบจุด O จะได้มุม ๑ กี่องศา

(๕) ที่จุด O ในเส้น AB มีเส้นตรงสองเส้น OC กับ
OD เส้นตรงข้างมาบรรจบกันกระทำให้ $C \hat{O} B$ เท่ากับ $A \hat{O} D$

ให้พิสูจน์เส้น OC กับ OD นั้นต่อกันเป็นเส้นตรงเส้นเดียว

(๖) เส้นตรงสองเส้น AB กับ CD มาไขว้กันที่มุมฉากที่จุด O ให้พิสูจน์โดยพิภพกระต่ายเข่าที่ AB ว่า OC จะประกบกับ OD พอเหมาะ

(๗) เส้นตรงสองเส้น AB กับ CD ไขว้กันที่จุด O ถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $BO D$ ให้พิสูจน์เมื่อต่อ OX ออกไปว่าจะไปแบ่งมุม AOC ออกสองส่วนเท่า ๆ กันอีก

(๘) เส้นตรง AB กับ CD มาไขว้กันที่จุด O ถ้า OX แบ่งครึ่ง BOD และ OY แบ่งครึ่ง AOC ให้พิสูจน์ OX กับ OY ต่อกันเป็นเส้นเดียว

(๙) ถ้า OX แบ่งมุม AOB ออกสองส่วนเท่า ๆ กัน ให้พิสูจน์โดยพิภพกระต่ายเข่าที่เส้นแบ่งครึ่งว่า OA จะเท่ากับ OB พอดี และถ้า

(ก) มุม AOX ใหญ่กว่ามุม XOB

(ข) มุม AOX เล็กกว่ามุม XOB

เมื่อพิภพกระต่ายเข่า ในข้อข้อนี้จะได้ผลอย่างไร

(๑๖) เขียนเส้นตรง $A O B$ ลงในกระดาษ แล้วพับ
กระดาษเข้าที่จุด O ให้ $A O$ กับ $O B$ จงแสดงว่ารอยพับนั้น
ตั้งฉากกับ $A B$

สแดงศัพท์

กล่าวด้วยรูปสามเหลี่ยม

(๑) ส่วน ๑ ส่วนใดของพื้นราบ (plane surface)
มีเส้นตรงไม่ว่ากี่เส้นเป็นอาณาเขต ให้เรียกว่า รูปพื้นราบ (plane
figure)

เส้นทั้งหมดยกที่เป็นอาณาเขตของรูป ๑ รูปใดมารวมกันเข้าได้
ขนาดยาว ส่วนยาวนี้ให้เรียกว่า เขต (perimeter) ของรูปนั้น
และพื้นที่ทั้งหมดรวมกัน ให้เรียกว่า พื้นที่ (area)

(๒) รูปเหลี่ยม (rectilipeal figure) คือรูปพื้นราบ
ที่มีอาณาเขตเส้นตรงทุกเส้น

(๓) รูปสามเหลี่ยม (triangle) คือรูปพื้นราบที่มีเส้น
ตรงสามเส้นเป็นอาณาเขต



(๔) รูปสี่เหลี่ยม (quadrilateral) คือรูปพหุราบที่มี

เส้นตรงสี่เส้นเป็นอาณาเขต



(๕) รูปหลายเหลี่ยม (polygon) คือรูปพหุราบที่มี

อาณาเขตด้วยเส้นตรงเกินกว่าสี่เส้น



(๖) รูปเหลี่ยมนั้นแบ่งออกเป็น ÷

(ก) รูปเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral) คือรูปพหุราบ

ซึ่งมีด้านทุกด้านเท่ากัน

(ข) รูปเหลี่ยมมุมเท่า (equiangular) คือรูปพหุราบ

ซึ่งมีมุมทุกมุมเท่ากัน

(ค) รูปเหลี่ยมเรขาคณิต (regular) คือรูปพหุราบ

ซึ่งมีด้านเท่ากันทุกด้านและมีมุมเท่ากันทุกมุม

(๗) รูปสามเหลี่ยมแบ่งออกเป็นสามจำพวก เมื่อพูด

ถึงด้าน

คือ:— (ก) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral) คือรูป
สามเหลี่ยม ซึ่งมีด้านทั้งสามเท่ากัน



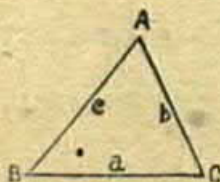
(ข) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles) คือรูปสามเหลี่ยม
ซึ่งมีด้านสองด้านเท่ากัน



(ค) รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (scalene) คือรูปสาม
เหลี่ยมซึ่งไม่มีด้าน ๑ ด้านใดเท่ากันเลย



อักษรตัวใหญ่ใช้ประจํารูปสามเหลี่ยม แต่อักษรตัวเล็ก
ใช้ประจําด้าน เพื่อความสะดวกในการสังเกตและเรียกชื่อ



เส้น A B ให้เรียกว่า ด้าน (side)

เส้น A C " " "

เส้น B C ให้เรียกว่า ฐาน (base)

มุม A ให้เรียกว่า มุมยอด (vertical angle) หรือ จอม (vertex)

(๔) รูปสามเหลี่ยมแบ่งออกเป็นสองส่วนเมื่อลากเส้นจากมุม

(ก) รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (right angled)

คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ๑ เป็น

มุมฉาก



(ข) รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน (obtuse angled)

คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมป้าน อยู่มุม ๑



(ค) รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม (acute angled)

คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสาม เป็นมุมแหลมทุกมุม



(จะทราบได้ ในข้อประมัตินที่ ๔ ข้ออนุมาณที่ ๑ ว่ารูปสามเหลี่ยมทุกรูปต้องมีมุมแหลมอย่างน้อยที่สุดสองมุม)

สแดงศัพท์ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นด้านซึ่งตรงกับ
มุมฉากให้ชื่อว่า “ด้านตรงฉาก” (hypotenuse)

การเปรียบเทียบรูปสามเหลี่ยม

(๑) มุมทั้งสามกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมใด ๆ ให้
ชื่อว่า “อวัยวะ” (six parts) ของรูปสามเหลี่ยมนั้น

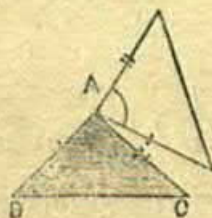
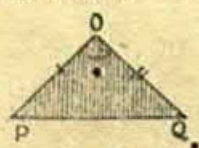
(๒) เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปมาประกบกันสนิทพอดี “อวัยวะ”
ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นย่อมเท่ากัน ทั้งพื้นที่ก็เท่ากันด้วย

(๓) เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปซ้อนกันพอดีและ “อวัยวะ”
ก็เท่ากันหมดให้พูดว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น เท่ากันสนิท
(congruent)

อุปมาณียุติที่ ๔ (ยุคติด เล่ม ๑ บท ๔)

รูปสามเหลี่ยมมีด้านสองด้านเท่ากันด้านคือด้าน และมีมุม
ในระหว่างเท่ากันรูปสามเหลี่ยมย่อมเท่ากันสนิท

สองด้านกับมุมในระหว่างเท่า



สมมติให้ $A B C$ กับ $O P Q$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสอง

รูป ให้ มีด้าน $A B = O P$, ด้าน $A C = O Q$ และ
 $\hat{B} \hat{A} C = \hat{P} \hat{O} Q$

• ให้พิสูจน์ $\triangle A B C \equiv \triangle O P Q$

(พิสูจน์) ยก $\triangle O P Q$ วางทับ $\triangle A B C$ ให้จุด O ทับจุด A
 และให้ด้าน $O P$ ทับด้าน $A B$

∴ ด้าน $O P =$ ด้าน $A B$ (โดย)

∴ จุด P จักบังกับจุด B

∴ ด้าน $O P$ ทับด้าน $A B$ และ $\hat{O} = \hat{A}$ (โดย)

∴ ด้าน $O Q$ จักบังกับ $A C$

∴ ด้าน $O Q = A C$ (โดย)

∴ จุด Q จักทับกับจุด C

เมื่อจุด B ทับจุด P และจุด C ทับจุด Q

ด้าน ~~$B C$~~ จึงเป็นอันทับด้าน ~~$P Q$~~ $B C$

∴ $\triangle P O Q$ ทับ $\triangle A B C$ พอดีจึงเท่ากันสนิท

การพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยกับกันและกัน เพราะเงื่อนไขประกอบโดยที่ทั้งละมือ
พิสูจน์รูป Δ เท่ากันสนิทเป็นครั้งแรก จึงต้องใช้วิธีย้อนดังเช่นนี้ ขอให้
นักเรียนสังเกตเมื่อขรูป Δ ไปที่นั่น จำเป็นต้องทับที่มุมซึ่งทราบว่าเท่ากัน
แล้วนั้นก่อน เพราะจะได้พูดได้ว่า—เส้นสองเส้นที่บรรจบเป็นมุมนี้ขึ้นนั้น ย่อม
ทับกัน ถ้าที่มุมเท่ากัน ทั้งจะเป็นการอ่านขอให้พิสูจน์ได้หมด เพราะเมื่ออ่าน
เท่ากันไปทับกันแล้ว ปลายด้านอีกข้างหนึ่งของทั้งสองด้านก็ย่อมไปทับกัน
หมด คือ จุด P ไปทับจุด B และ Q ไปทับ C อันเป็นเหตุให้พูดได้ต่อไป
ว่า PQ ทับ BC เหมือนกัน (เพราะเราพูดแล้วว่า B ทับ P และ C ทับ Q
 B กับ C ก็เป็นปลายด้าน BC และ P กับ Q ก็เป็นปลายด้าน PQ เหมือนกัน
เมื่อปลายทับกันแล้ว ก็เป็นอันทั่วอันตลอดกัน) จึงสำเร็จตามประสงค์

ก็มุมสามมุมเท่ากันมุมต่อมุม และด้านสามด้านเท่ากัน ด้าน
ต่อด้านและพื้นที่ก็เท่ากัน

ในบทนี้นักเรียนจะต้องสังเกตสิ่งใดบ้าง ที่ไจเรียมบอกให้กับ
สิ่งใดบ้างที่ให้พิสูจน์ กล่าวคือ :—

ไจเรียมแสดงว่า { ด้าน $AB = OP$
ด้าน $AC = OQ$
และ $B \hat{A} C = P \hat{O} Q$

เราจะต้องพิสูจน์ว่า { ด้าน $BC = PQ$
 $A \hat{B} C = O \hat{P} Q$
และ $A \hat{C} B = O \hat{Q} P$

ทั้งพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองให้เท่ากันด้วย

ให้นักเรียนสังเกตไว้ว่ามุมที่เราพิสูจน์ ได้ว่าเท่ากันนั้น อยู่ตรงข้ามกับด้านที่เท่ากันอยู่แล้ว

แบบฝึกหัด

(พิสูจน์)

(๑) ให้พิสูจน์เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดแห่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้น

(ก) ไปแบ่งครึ่งฐาน

(ข) ไปตั้งฉากกับฐาน

(๒) ถ้า O อยู่กึ่งกลางของเส้น AB และ OC ตั้งฉากกับ AB ถ้ามีจุด P อยู่ภายในเส้น OC ให้พิสูจน์ $PA = PB$

(๓) ทราบว่าด้านทั้ง ๔ แห่งรูปจัตุรัสนั้นเท่ากันหมด และมุมทั้ง ๔ ก็เป็นมุมฉากทุกมุม ให้พิสูจน์

เส้นทแยงมุม AC แห่งรูปจัตุรัส $ABCD$ นั้นยาวเท่ากับเส้นทแยงมุม BD

(๔) $A B C D$ เป็นรูปจัตุรัส, จุด X จุด Y จุด P
เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB , BC และ CD ให้พิสูจน์ว่า

$$(ก) XY = YP \quad (ค) AY = DY$$

$$(ข) AP = AY \quad (ง) BP = DY$$

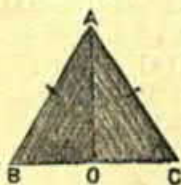
(เขียนรูปสำหรับทุกข้อ)

(๕) ถ้า $A B C$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ทัดด้าน AB
ลากได้ส่วน AX และตัด AC ออกได้ส่วน AP ให้ AX
 $= AP$ วัดเส้น BP และ CX ให้ พิสูจน์ $BP = CX$

อุปมาณียะเทศที่ ๕ (ยกคิดเต็ม ๑ บท ๕)

ในสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมที่ตรงข้ามกับด้านเท่า, ย่อมเท่ากัน

มุมตรงข้ามด้านเท่าของ $\triangle$ หน้าจั่ว



สมมุติให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ หน้าจั่วมีด้าน $AB = AC$
ให้พิสูจน์ $\hat{B} = \hat{C}$

แบ่งครึ่งมุม A โดยมาจุดฐานคือที่จุด O

(พิสูจน์) ในรูปสามเหลี่ยม ABO กับ ACO

เพราะว่า $\begin{cases} AB = AC \text{ (โจทย์)} \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \hat{BAO} = \hat{CAO} \text{ (สร้าง)} \end{cases}$

$\therefore \triangle$ ทั้งสองจึงเท่ากันสนิท (สองด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

$\therefore \hat{ABC} = \hat{ACB}$

ข. ค. พ.

แก้ไข

การพิสูจน์ให้มุมเท่ากันโดยบอกด้านที่ตรงข้ามให้เท่ากันนั้น จำเป็น
ต้องย้อนไปพิสูจน์ให้ $\triangle$ ที่มีมุม ๒ มุมนี้, มุม ๑, เท่ากันสนิท โดยขีดเส้น

ทรงแบ่งครึ่งมุมมาจากรากฐาน อันสำเร็จได้ตาม อ. น. ที่ ๙ นั้นก่อน เมื่อรูป $\triangle$ เท่ากันสนิทแล้วมุมก็เป็นอันเท่ากัน

พิสูจน์ โดยวิธีพิพ

พิพรูปสามเหลี่ยม ABC เข้าที่ตรงเส้น AO และเมื่อ

$$\angle BAO = \angle CAO$$

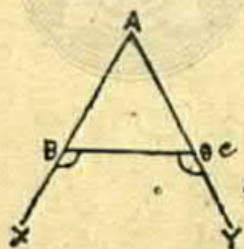
ด้าน AB ก็ย่อมพิพ AC แต่ $AB = AC$

$\therefore$ จุด B จึงพิพจุด C และ OB ก็เป็นอันพิพ OC

$\therefore \angle ABC$ จึงพิพ $\angle ACB$ พอดีจึงเท่ากัน

ช. ท. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้าต่อด้านเท่า (AB กับ AC)



แห่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (ABC) ลงไปมุมนอก (คือ XBC กับ YCB) ย่อมเท่ากัน (โดยที่มุมนอกทั้งสองนี้ ต่างก็เป็นมุมคู่คี่ภายในของมุมที่ฐานทั้งสองแห่ง รูปสามเหลี่ยมนั้น)

มุมนอกของ $\triangle$ หน้าจั่ว

ข้ออนุมานที่ ๒ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าย่อมเป็นสามเหลี่ยมมุมเท่า

△ ด้านเท่า

สีแดงศัพท์ รูปพื้นราบใด ๆ จะได้ส่วนประกบตรงเส้นใดเส้น ๑ ถ้าพับรูปได้นั้นเข้าที่ตรงเส้นนั้นแล้ว ทั้งสองส่วน ๆ จะข้างเส้นนั้นต้องมาประกบกันได้พอดี ไม่ขาดไม่เหลือ เส้นตรงที่พับให้ ชื่อว่า แกนประกบ (axis of symmetry)

เราก็อาจจะทราบได้ว่า ถ้าเป็น △ ส่วนทั้งสองข้างรอยพับของรูปสามเหลี่ยมนี้ย่อมเท่ากันทั้งรูปและขนาด เมื่อพับเข้าที่แกนประกบจึงจะมาทับกันสนิทได้ อุปมาเช่นเหตุที่ ๕ แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมนี้จะได้ส่วนประกบ (symmetrical about a line) ที่ตรงเส้นแบ่งครึ่งของมุมยอด

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ จะได้ส่วนประกบที่ตรงเส้นแบ่งครึ่งมุมใดมุม ๑

แบบฝึกหัด

(พิสูจน์)

(๑) ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งหมดเท่ากัน

ให้ ขัดเส้นทแยงมุม BD และให้ พิสูจน์ว่า

$$(ก) \hat{A} \hat{B} D = \hat{A} \hat{D} B$$

$$(ข) \hat{C} \hat{B} D = \hat{C} \hat{D} B$$

$$(ค) \hat{A} \hat{B} C = \hat{A} \hat{D} C$$

(๒) ให้ ABC กับ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
สองรูปมีฐานเดียวกันแต่อยู่รูปละข้าง ให้พิสูจน์ (โดย อ. น. ที่ ๕)
ว่า $\hat{A} \hat{B} D = \hat{A} \hat{C} D$

(๓) ABC กับ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสอง
รูปมีฐานเดียวกันข้างเดียวกัน ใช้อุปมาวิธีที่ ๕ มาพิสูจน์
ให้เห็นว่า $\hat{A} \hat{B} D = \hat{A} \hat{C} D$

(๔) AB กับ AC เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC
จุด X จุด Y กับจุด Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB , BC , CA
ให้พิสูจน์ว่า

$$(ก) XY = YQ$$

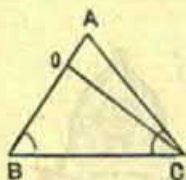
$$(ข) BQ = CX$$

$$(ค) \hat{A} \hat{X} Y = \hat{A} \hat{Q} Y$$



อุประมาณิเทศที่ ๖ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๖)

ในรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมสองมุมเท่ากัน ด้านของด้านที่ตรงข้ามกับสองมุมนั้นย่อมเท่ากันด้วย
ด้านตรงข้ามมุมหน้า



สมมติให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมี $\angle B = \angle C$
ให้พิสูจน์ ด้าน $AC = AB$

ถ้า AC กับ AB ไม่เท่ากันก็คงยาวกว่าอยู่ด้าน ๑ ต้องให้ AB ยาวกว่า AC

ถ้าเป็นเช่นนั้นตัด AB ออกที่จุด O ให้ BO ที่เหลือ $= AC$
ลากเส้น OC

(พิสูจน์) ใน $\triangle OBC$ กับ $\triangle ABC$

เพราะว่า $\begin{cases} OB = AC \text{ (สร้าง)} \\ BC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{มุมในระหว่าง, } \angle OBC \text{ (คือ } \angle B) = \angle C \text{ (โจทย์)} \end{cases}$

$\therefore \triangle OBC \equiv \triangle ABC$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

แต่ $\triangle OBC$ เป็นแค่ส่วน ๑ ของ $\triangle ABC$ เท่านั้น
จะไปเท่ากันไม่ได้

$\therefore AB$ ไม่ยาวกว่า AC และจะพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า
 AB ก็ไม่สั้นกว่า AC

$\therefore AB$ ก็ต้องเท่ากับ AC

ท. ต. พ.

แก้ไข

การพิสูจน์เช่นนี้เป็นวิธีดำเนินการ เมื่อจัดสนเหตุที่จะประกอบ นักเขียน
จะต้องเอาใจใส่ให้มากที่สุดว่า, "ถ้า AB กับ AC ไม่เท่ากันคงจะยาว
กว่ากันอยู่ด้านหนึ่ง ลองให้ AB ยาวกว่า AC " นั้น ตามธรรมชาติเมื่อตั้งสอง
สิ่งไม่เท่ากันก็คงใหญ่หรือยาวกว่ากันอยู่สิ่งหนึ่งเป็นแน่ เพราะฉะนั้นจึงเลือก
 AB ขึ้นพิสูจน์ให้ยาวกว่าลองดู แต่ในที่สุดก็หาว่าไม่ (ถูกต้อง)
เพราะฉะนั้น BA จะไปได้อีกทาง • คือสั้นกว่า AC ดังนั้นเราก็ต้องตัด
 AC ให้เท่ากับ AB แต่ก็คงเป็นไปได้เช่นกัน * ก็เป็นอันเท่ากันอยู่เอง
นักเขียนจะกระทำตนให้รู้สึกเสียก่อนว่า $AB = AC$ นั้นไม่ได้ต้องวางใจ
ให้แน่นลงไปตามสภาพของผู้ที่ยังไม่รู้ว่าจะเท่ากันหรือไม่ หรือค่อนข้างเห็นว่า
ไม่เท่ากันจึงจะเข้าใจดี

ข้ออนุมาน รูปสามเหลี่ยมมุมเท่า ย่อมเป็นรูปสามเหลี่ยม
ด้านเท่า

หมายเหตุของการเปลี่ยนแปลงในระหว่างอุปรมัณนิเทศ

ประกาศใจหทัยของอุปรมัณนิเทศนั้น รวมความอยู่สอง

ประการ ประการที่ ๑ กล่าวถึงสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นสิ่งกำหนดให้เพื่อ
เป็นเหตุประกอบ ประการที่ ๒ กล่าวถึงสิ่งต่าง ๆ ที่เราจะต้องพิสูจน์
ใช้สิ่งที่กำหนดให้นั้นเป็นหลัก นักเรียนควรคิดเสียว่าประกาศใจหทัย

เหมือน คำทำนาย ตามธรรมชาติจะทายก็จะต้องได้รับคำชี้แจงก่อน
คำชี้แจงนี้คือ ประการที่ ๑ ครั้นแล้วพยากรณ์ คำพยากรณ์นี้คือ

ประการที่ ๒ ในอุปรมัณนิเทศที่ ๕ สิ่งที่ต้องแสดงให้ทราบหรือคำชี้แจง
คือตาม $A B = A C$ สิ่งที่จะให้พิสูจน์หรือคำพยากรณ์ คือ

$A \hat{B} C = A \hat{C} B$ ถ้าเรากลับเอาสิ่งนี้ให้พิสูจน์หรือคำพยากรณ์
เป็นสิ่งที่กำหนดให้ คือให้เป็นคำชี้แจงเสีย จะได้อุปรมัณนิเทศใหม่
อีกบท ๑ ซึ่งมีใจความกลับกันกับบทก่อน คือ:— อุปรมัณนิเทศที่ ๕

สิ่งกำหนด, $A B = A C$ จะต้องพิสูจน์ $A \hat{B} C = A \hat{C} B$

อุปรมัณนิเทศที่ ๖ สิ่งกำหนด $A \hat{B} C = A \hat{C} B$

จะต้องพิสูจน์ตาม $A B = A C$ จึงเห็นได้ว่า อ. น. ที่ ๖ นั้นกลับ
กันกับ อ. น. ที่ ๕ เรียก อ. น. ที่ ๖ ว่าเป็น บทกลับของ

อ. น. ๕ ก็ได้

อ. น. ที่ ๖ นั้น เราพิสูจน์โดยวิธีเรียกว่า “วิธีอ้อม” (Indirect method of proof) ซึ่งต้องการใช้บ่อย ๆ นักเรียนต้องรู้วิธีไว้)

วิธีอ้อมแสดงให้เห็นว่าบทนั้น ๆ จะไม่จริงไม่ได้ ถ้าไม่จริงแล้ว เมื่อพิสูจน์ไป คงได้ผลผิด เป็นอันไม่ถูกต้อง พุทธนั้น ๆ คือ พิสูจน์หาผลให้เห็นว่าผิดจริงเท่านั้นเอง (reductio ad absurdum) วิธีนี้มักใช้พิสูจน์ตามบทที่เป็นบทกตัมของบทต้น

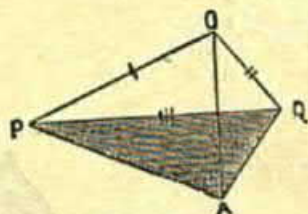
(ข้อสำคัญ) อย่าเข้าใจว่า ถ้าโจทย์เดิมจริง โจทย์ที่กตัมก็จริง หาใช่เช่นนั้นเสมอไปไม่ (ดูคำอธิบาย อ. น. ที่ ๘)

อุปรมยนิเทศที่ ๗ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๘)

รูปสามเหลี่ยม

ที่มีด้านทั้งสามเท่ากันด้านต่อด้านนั้นย่อม

เท่ากันสนิท



สมมุติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle OPQ$ เป็น $\triangle$

ให้มีด้าน $AB = OP$

ด้าน $AC = OQ$

ฐาน $BC = PQ$

ให้พิสูจน์ $\triangle ABC \equiv \triangle OPQ$

(พิสูจน์) . . . ให้ยก $\triangle ABC$ วางทับ $\triangle OPQ$

ให้จุด B ทับจุด P และเส้น BC ทับเส้น PQ $\because BC = PQ$

(โดย) . . . จุด C จึงทับจุด Q แต่ให้จุด A อยู่ตรงข้ามกับจุด O

จุดตรงข้ามเส้น PQ ซัดเส้น OA

$\therefore$ ด้าน $OP = AP$ (คือ AB). (โดย) POA

จึง $= PAO$ (มุมตรงข้ามด้านเท่า)

$$\therefore \text{ด้าน } OQ = AQ \text{ (คือ } AC) \text{ (โดย)}$$

$$\therefore Q\hat{O}A = Q\hat{A}O \text{ (มุมตรงข้ามกับด้านเท่า)}$$

$$\therefore \text{มุมทั้งหมด } \hat{O} = \text{มุมทั้งหมด } \hat{A} \text{ ใน } \triangle ABC$$

กับ $\triangle OPQ$

$$\text{เพราะว่า } \left\{ \begin{array}{l} \text{ด้าน } AB = OP \\ \text{ด้าน } AC = OQ \\ \text{มุมในระหว่าง, } \hat{A} = \hat{O} \text{ (พิสูจน์)} \end{array} \right.$$

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองจึงเท่ากันสนิท (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)



ร. ท. พ.

แก้

การพิสูจน์ให้ $\triangle$ เท่ากันสนิทได้เคยมีมาครั้งหนึ่งแล้ว คือ อ. น. ๔ แต่ต้องด้าน ๒ ด้านเท่ากันด้านต่อด้านและมุมในระหว่างเท่ากันก่อน จึงจะเท่ากันสนิทได้ แต่ในบทนี้บอกว่าด้าน ๓ ด้านเท่ากันด้านต่อด้านไม่ได้บอกว่ามีมุมในระหว่างเท่า, เท่ากันด้วย จึงเป็นอันไม่เหมือน อ. น. ๔ จะคงไปอ้าง อ. น. ๔ ว่า $\triangle$ เท่ากันสนิทโดย อ. น. ๔ นั้นไม่ได้ แต่ถึงอย่างไรก็ดี ก็จะต้อง อ. น. ๔ อยู่แน่เพราะได้เคยมีมา อ. น. เดียวเท่านั้น ไม่มีเหลือ เหตุฉะนั้นจึงต้องพยายามให้ถึงพร้อมซึ่งองค์ของ อ. น. ๔ ก็คือต้องได้มุมในระหว่าง

เท่ากันในที่นี้เป็นมุมใดก็ตามค แล้วแต่สะดวกเพราะใจหยั่งบอกว่าด้านเท่ากัน
หมดสามด้านแล้ว มุมไหนก็ต้องเป็นมุมในระหว่าง เพราะฉะนั้นจึงยก
 $\triangle ABC$ มาวางเรียงต่อ OPQ ไปให้ BC ทับ PQ ครั้นแล้ว

พิสูจน์โดย อ. น. ๙ ให้ $\hat{P} \hat{O} A = \hat{P} \hat{A} O$ และ $\hat{Q} \hat{O} A = \hat{Q} \hat{A} O$
แล้วผสมกันเข้า, บนผสมบน, ถ่างผสมถ่างจึงได้

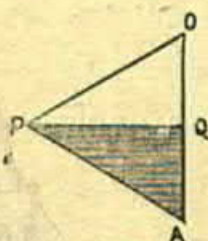
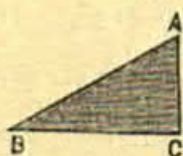
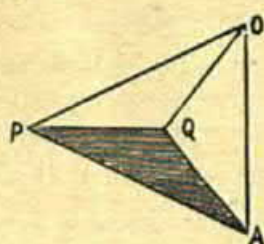
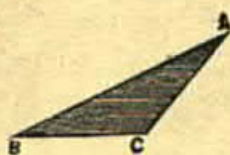
$\hat{P} \hat{O} A + \hat{Q} \hat{O} A = \hat{P} \hat{A} O + \hat{Q} \hat{A} O$ คือ $\hat{O} = \hat{A}$
เพราะสิ่งที่เท่ากันถ่างบวกเข้าเท่า ๆ กัน ผลก็ย่อมเท่ากันอยู่ เมื่อพูดได้ว่า $\hat{O} =$
 $\hat{A}$ แล้วก็เป็นอย่างนั้นในระหว่างเท่ากันจึงสำเร็จโดย อ. น. ๙

ข้อสำคัญ ก, ให้สังเกตว่ามุมที่เราพิสูจน์ได้ว่าเท่ากันใน
รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้, นั้นอยู่ตรงข้ามด้านที่เท่ากันอยู่แล้วแปล
ว่า $\triangle$ ที่ด้านเท่ากันด้านต่อด้าน ย่อมมีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

จงเขียนใจทย์ใหม่ใจความกลับกันกับที่ความนี้ และให้

สังเกตว่าหาได้ผลจริงไม่

(๑) ที่พิสูจน์มานี้ เราใช้รูปสามเหลี่ยมที่เส้น AO อยู่
ภายใน $\hat{P} \hat{O} Q$ และ $\hat{P} \hat{A} Q$ ยังมีรูปสามเหลี่ยมอีกสองชนิดชนิด
กับรูปสามเหลี่ยมที่ได้พิสูจน์มา คือ:—(๑) ที่เส้น OA อยู่
นอกเขตร $\hat{P} \hat{O} Q$ และ $\hat{P} \hat{A} Q$ (รูปที่ ๑) (๒) ที่เส้น OA
ทับเส้น OQ, AQ (รูปที่ ๒)



รูปสามเหลี่ยมทั้งสองข้างจะเกิดขึ้นเมื่อเป็นรูปสามเหลี่ยมมุม
 ฉากหรือรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น แต่ขอพิสูจน์กัน
 ทีเดียวว่ารูปที่ ๒ ไม่ต้องขีดเส้น OA แต่ขอให้ OQ กับ AQ
 เป็นเส้นเดียวกันเสียก่อน



แบบฝึกหัด (พิสูจน์)
 กล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันสนิท
 ตามใน อ. น. ที่ ๔ กับที่ ๗

• (๑) ให้พิสูจน์เส้นตรงที่ขีดจากมุมยอดแห่งรูปสามเหลี่ยมนำ
 จั้วมาจุดกึ่งกลางฐานรูปสามเหลี่ยมนำจั่วนี้ว่า

(ก) จะแบ่งมุมยอดออกสองส่วนเท่า ๆ กัน

• (๒) จะคงได้ฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้

(๓) ถ้า $A B C D$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าให้พิสูจน์ ถ้า
 ขีดเส้นทแยงมุม $A C$ ว่า (ก) $A \hat{B} C = A \hat{D} C$

(ข) $A C$ เป็น “เส้นแบ่งครึ่ง”

ของ $B \hat{A} D$ และ $B \hat{C} D$

• (๓) ในรูปสี่เหลี่ยม $A B C D$ ซึ่งมีด้านที่ตรงกันเท่ากัน คือ
 ด้าน $A B = C D$ และด้าน $A D = C B$ ให้พิสูจน์ $A \hat{D} C$
 $= A \hat{B} C$

(๔) ถ้า $A \hat{B} C$ กับ $D \hat{B} C$ เป็นรูปสามเหลี่ยมนำจั่วของรูปมี
 ฐานเส้นเดียวกัน (คือร่วมกัน) $B C$ พิสูจน์โดย อ. น. ที่ ๗ ว่า
 $A \hat{B} D = A \hat{C} D$

(ครั้งที่ ๑) เมื่อรูปสามเหลี่ยมอยู่บนฐานข้างเดียวกัน

(ครั้งที่ ๒) เมื่อรูปสามเหลี่ยมอยู่รูปละข้างฐาน

(๕) ถ้า ABC กับ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วของรูปที่มีฐานเส้นเดียวกัน BC แต่อยู่รูปละข้างเมื่อขีดเส้น AD แล้วให้พิสูจน์เส้น AD นั้นมาแบ่ง BAC กับ BCD ออกมุมละสองส่วนเท่า ๆ กัน

(๖) ให้พิสูจน์เส้นตรงสองเส้นที่ขีดจากจุดสองจุดปลายฐานรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มาจุดกึ่งกลางด้านทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน

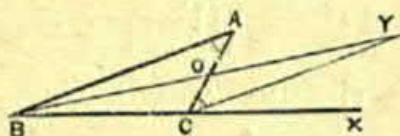
(๗) ให้พิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นโดยขีดเส้นตรงคอดังกัน แต่จุดสามจุดซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้านที่สามแห่งรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้น ก็เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

(๘) ให้พิสูจน์เส้นทแยงมุมสองเส้นแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าหรือจตุรศัณยัณนาคตกกันโดยมุมฉาก



อุประมายนิเทศที่ ๘ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๑๖)

ถ้าคอคานหนึ่งคานใดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไป, มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่ตรงข้าม
มุมนอก Δ



สมมุติให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมีด้าน BC ต่อยออกไป
เรียกจุดปลายว่า X

ให้พิสูจน์มุมภายนอก, $\angle ACX >$ มุมภายในที่ตรงข้าม, $\angle ABC$
และ $> \angle ACB$

ลากเส้น BD ผ่านกึ่งกลาง AC ต่อยออกไปจนได้ส่วน
 $= BO$ เรียกจุดปลายนี้ว่า Y ลากเส้น YC

(พิสูจน์) ใน ΔAOB กับ ΔCOY

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} \text{ด้าน } AO = CO \\ \text{ด้าน } OB = OY \\ \text{และ } \angle AOB = \angle COY \end{array} \right\}$ (สร้าง)

รูปสามเหลี่ยมทั้งสองจึงเท่ากันสนิท (๒ ด้านกับมุมใน
ระหว่างเท่า)

$$\therefore B \hat{A} O = Y \hat{C} O \text{ แต่ } A \hat{C} X > Y \hat{C} O$$

$\therefore A \hat{C} X$ จึง $> B \hat{A} O$ (คือ $B \hat{A} C$) ด้วยโดย
วิธีเดียวกัน ถ้าต่อด้าน $A C$ ออกไปยังจุด Q แล้วขีดเส้นแต่จุด A
มาผ่ากึ่งกลางด้าน $B C$ จะพิสูจน์ได้ว่ามุม $B \hat{C} Q$ โทกว่า $A \hat{B} C$
แต่ $B \hat{C} Q = A \hat{C} X$ (มุมตรงกันข้าม)

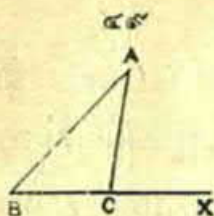
$$\therefore A \hat{C} X \text{ จึงโทกว่า } A \hat{B} C$$

ท. ท. พ.

แก้

ที่สร้างโดยขีดเส้น $B O$ ตลอดถึงกลาง $A C$ ออกไปจน $O B = O Y$
แล้วลากเส้น $Y O$ นั้น เพราะต้องการจะเทียบให้ส่วน $\circ$ ของ $A \hat{C} X$
ไปเท่ากับ $\hat{A}$ จะได้พูดได้ว่าเต็ม $A \hat{C} X$ โทกว่า $\hat{A}$ แต่ที่พูดว่า “ต่อ $B O$
เลขออกไปจนได้ส่วน $= B O$ เรียกจุดปลายว่า Y ” นั้น เพื่อกันความ
สงสัยว่าที่แรกไม่ได้มุ่งจะต่อไปยังจุด Y , จุด Y ยังไม่มี ครั้นเมื่อต่อออก
ไปจนยาวเท่า $B O$, แล้วจึงเรียกจุดที่สุดว่า Y , จะพูดว่าต่อ $B O$ ออกไปยัง
จุด Y , เช่นนั้นก็สมควร

ข้ออนุมานที่ ๑ มุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกัน
ย่อมไม่ถึงสองมุมฉาก



$\therefore \angle ABC < \angle ACX$ (ทีตั้งข้างบน) เพิ่ม $\angle ACB$ เข้าทั้งสองข้างจึงได้

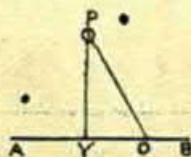
$$\angle ABC + \angle ACB < \angle ACX + \angle ACB$$

$\therefore \angle ABC + \angle ACB$ จึงไม่ถึงสองมุมฉาก ($\because \angle ACX + \angle ACB = 180^\circ$)

ข้ออนุมานที่ ๒ รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ต้องมีมุมแหลมไม่ต่ำกว่าสองมุม (เพราะว่าถ้ามุมหนึ่งเป็นมุมฉาก หรือมุมฉากสองมุมที่เหลื่ออยู่นั้น แต่ละมุมก็จะต้องเล็กกว่ามุมฉาก (อนู. ๑)

มุมใน $\triangle$ เหลว ๒ มุม

ข้ออนุมานที่ ๓ แต่จุด ๑ จุดใดนอกเส้นย่อมลากเส้นตรงลงมาตัดได้ฉากกับเส้นนั้นได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น ดังได้ลากเส้นเดียว (ถ้าจะลากเส้นตรงจากจุด P มายัง A B ให้ได้ทั้งสองเส้น จะเห็น



ได้ว่าเกิดรูปสามเหลี่ยม $P Y O$ ขึ้น ซึ่งมี $P \hat{Y} O$ กับ $P \hat{O} Y$ ต่างก็จะเป็นมุมฉากทั้งคู่ซึ่งแน่นอนใช้ไม่ได้)

แบบฝึกหัด (พิสูจน์)

(๑) ให้พิสูจน์ ข้ออนุมานที่หนึ่งโดยลากเส้นจากจุด A ลงมาสู่ฐาน BC

(๒) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมและ X เป็นจุด ๆ หนึ่งภายในรูปสามเหลี่ยมนั้น ถ้าลากเส้น BX กับ CX ให้พิสูจน์ $B \hat{X} C > B \hat{A} C$ โดย

(ก) ต่อ BX ออกไปจุด $A C$

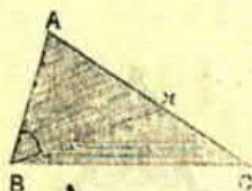
(ข) วัดเส้น $A \cdot X$ ต่อเลยมาสู่ฐาน

(๓) ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ออกไปทั้งสองข้าง มุมภายนอก ๒ มุมที่เกิดขึ้นรวมกันจะใหญ่กว่ามุมฉาก

(๔) ถ้าต่อด้านเท่าทั้งสองแห่งรูปสามเหลี่ยมนำจุดลงมา, มุมภายนอกทั้งสองจะเป็นมุมบ้านทั้งคู่

อุปพระมยนิเทศที่ ๙ (ยุคลิตเล่ม ๑ บท ๕)

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าด้านใดด้านหนึ่ง ยาวกว่าอีกด้าน
หนึ่ง มุมที่ตรงข้ามกับด้านยาวจะโตกว่ามุมที่ตรงข้ามกับด้านสั้น
มุมตรงข้ามด้านยาว > มุมตรงข้ามด้านสั้น



สมมุติให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน $AC > AB$

ให้พิสูจน์ $\angle B > \angle C$

ตัดด้าน AC ออกที่จุด X ให้ส่วน $AX = AB$ แล้วเชื่อม BX

(พิสูจน์) $\therefore$ ด้าน $AB = AX$

$\therefore \angle ABX = \angle AXB$ (มุมตรงข้ามด้านเท่า)

แต่ $\angle AXB > \angle ACB$ (มุมนอก $\triangle$)

$\therefore \angle ABX$ จึง $> \angle ACB$ ด้วย

และ $\angle ABC$ ก็ยิ่งใหญ่กว่า $\angle ACB$ เสียอีก

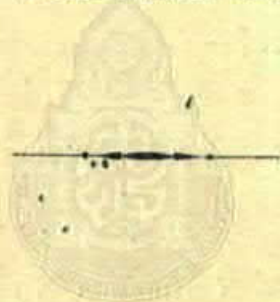
การพิสูจน์นี้อาศัย อ.น. ที่ ๘ กับ อ.น. ๕ คือเมื่อพิสูจน์ตาม อ.น. ๕ ว่า

$A \hat{B} X = A \hat{X} B$ แล้วก็จะพูดได้ว่า $A \hat{X} B > A \hat{C} B$ เพราะ

$A \hat{X} B$ เป็นมุมนอก $\triangle X \hat{B} C$ จึงใหญ่กว่ามุมภายในที่ตรงข้าม คือ $>$

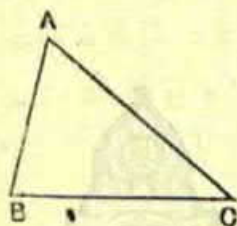
$A \hat{C} B$ นั้น ดังนั้น $A \hat{B} X$ ก็ $> A \hat{C} B$ ด้วย แต่ $A \hat{B} C$ ใหญ่

กว่า $A \hat{B} X$ อยู่ $\therefore A \hat{B} C$ ก็ยิ่ง $> A \hat{C} B$



อุปมาณียนเทศที่ ๑๐ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๑๙)

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ามุมหนึ่งโตกว่าอีกมุมหนึ่ง ด้านซึ่งตรงข้ามกับมุมใหญ่ย่อมยาวกว่าด้าน ซึ่งตรงข้ามกับมุมเล็ก
 ด้านตรงข้ามกับมุมใหญ่ $>$ ด้านตรงข้ามกับมุมเล็ก



สมมติให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมี $\angle B > \angle C$
 ให้พิสูจน์ ด้าน $AC > AB$

(พิสูจน์) ถ้าด้าน AC ไม่ $> AB$ ก็คงสั้นกว่า AB
 หรือมีขนาดนั้นก็ $= AB$ ถ้าด้าน $AC = AB$ $\angle B = \angle C$
 จำต้อง $= \angle C$ (มุมตรงข้ามด้านเท่า)
 แต่ตามโจทย์เป็นไปไม่ได้

$\therefore AC$ จะ $< AB$ ก็ไม่ได้เหมือนกัน

$\therefore AC$ จะ $= AB$ ไม่ได้

ถ้าด้าน $AC < AB$ $\angle B$ ต้อง $< \angle C$ (มุมตรงข้ามด้านสั้น)
 แต่ตามโจทย์เป็นไปไม่ได้

$\therefore AC$ ต้องยาวกว่าด้าน AB

ช. ท. พ.

แก้

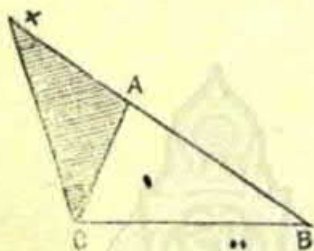
การพิสูจน์ อ. น. ๑๐ ใช้ อ. น. ที่ ๕ กับที่ ๘ มาขึ้นชั้น คือ ครั้งแรกลงมือพิสูจน์โดยทำนอง อ. น. ที่ ๕ คือถ้า $AB = AC$ $A \hat{B} C$ ต้อง $= A \hat{C} B$ แต่โจทย์แจ้งอยู่ว่า $A \hat{B} C > A \hat{C} B$ $\therefore$ จะเท่ากันไม่ได้เป็นอันขาด ถ้า AB ไม่เท่าก็ยังมิโอกาสยาวกว่า ถ้า $AB > AC$ $A \hat{C} B > A \hat{B} C$ เพราะ $A \hat{C} B$ ตรงข้ามกับ AB ซึ่งเป็นด้านยาว แต่ $A \hat{C} B$ จะต้องเล็กกว่า $A \hat{B} C$ ตามโจทย์แจ้งไว้ $\therefore AC = AB$ ไม่ได้ และสั้นกว่า AB ก็ไม่ได้ $\therefore$ ต้องยาวกว่า AB

อุปรมัยนิเทศที่ ๑๑ (ยุคลิกล่ม ๑ บท ๒๐)

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านสองด้านรวมกันจะยาวกว่า

ด้านที่เหลืออยู่

๒ ด้าน > ด้านที่เหลือ



สมมุติให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม

ให้พิสูจน์ $AB + AC > BC$

ต่อด้าน BA ออกไปทางจุด A จน $AX = AC$ เรียกจุดปลาย

ว่า X แล้วเส้น XC

(พิสูจน์) $\therefore AX = AC$

$\angle CXA$ จึง $= \angle ACX$ (มุมตรงข้ามกับด้านเท่า)

แต่ $\angle BXC > \angle CXA$

$\therefore \angle BXC$ จึง $> \angle ACX$ (คือ $\angle BXC$)

∴ ด้าน $BX > BC$ (ด้านตรงข้ามมุมใหญ่)

คือ $BA + AC$ จึงยาวกว่าด้าน BC (∵ $BX = BA + AC$)

โดยทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า $AB + BC > AC$
และ $AC + BC > AB$

ช. ศ. พ.

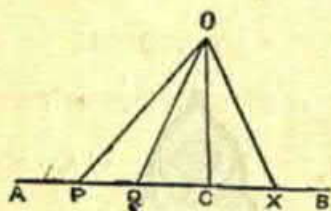
แก้

โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ว่า $AB + AC > BC$ จึงได้ต่อ BA
ออกไปเท่า AC จะได้ = เส้น $AB + AC$ ครั้นแล้วพิสูจน์ให้มุมตรง
ข้ามกับ $(AB + AC)$ นั้นใหญ่กว่ามุมตรงข้ามกับ BC คือครั้งแรก
พิสูจน์ให้ $A \hat{X} C = A \hat{C} X$ โดย อ. ม. ๔ ครั้นแล้วเห็นได้ว่า
 $X \hat{C} B > X \hat{C} A$ จึง $> A \hat{X} C$ ด้วย คราวนี้ใช้รูป $\triangle$ ใหญ่
 XCB เมื่อทราบว่า $X \hat{C} B > A \hat{X} C$ แล้วด้านตรงข้ามมุมใหญ่
คือ XB ก็ยาวกว่าด้านตรงข้ามมุมเล็ก คือ BC จึงเป็นคั่นเหตุได้
 $BA + AC > BC$

อุประมายน์เทศที่ ๑๒

บรรดาเส้นตรงที่ขีดจากจุดกำหนดมายังเส้นตรงเส้นหนึ่ง เส้นที่
ตั้งได้ฉากย่อมเป็นเส้นสั้นที่สุด

เส้น $\perp$ สั้นที่สุด



สมมุติให้เส้น OC ตั้งได้ฉาก และ OX คือเส้นเอนที่ได้
ขีดจากจุด O ลงมายังเส้น AB

ให้พิสูจน์ เส้น $OC < OX$

(พิสูจน์) ใน $\triangle O C X$

$\therefore \angle O C X$ เป็นมุมฉาก, มุม $O X C$ จึง $<$ มุมฉาก (๒ มุม
ของ $\triangle$ ไม่ถึง ๑๘๐°)

คือ $\angle O X C$ เล็กกว่า $\angle O C X$

$\therefore OC < OX$ (ด้านตรงข้ามกับมุมเล็ก)

โดยทำนองนี้จะไม่มีเส้นใดที่ขีดจาก O มายังเส้น AB สั้นกว่า OC

$\therefore OC$ เป็นเส้นสั้นที่สุด

ถ้าพูดถึงกับโจทย์เสียใหม่จะได้ข้ออนุมานดังต่อไปนี้ :-

ข้ออนุมานที่ ๑ บรรดาเส้นตรงที่ขีดจากจุดกำหนดมายังเส้นตรงเส้นหนึ่งเส้นในหนึ่งเส้นที่ตัด เส้นนั้นคงย่อมได้ฉาก

เส้นสั้นที่สุดตั้งได้ฉาก

ข้ออนุมานที่ ๒ บรรดาเส้นตรง ขัดจากจุดกำหนดมาจุดเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าห่างจากเชิงเส้นตั้งได้ฉากเท่ากันย่อมยาวเท่ากัน (ตามในรูป, OX กับ OQ ห่างจาก C เป็นระยะเท่ากันคือ $CX = CQ$, $\therefore OX = OQ$) (ชาศรี

อ. น. ที่ ๔ จะแสดงให้เห็นได้ว่า $\triangle O C X \equiv \triangle O C Q$, เพราะฉะนั้น $O X = O Q$)

ห่างจากเชิงเท่า

ข้ออนุมานที่ ๓ บรรดาเส้นตรงขีดจากจุดกำหนดมาจุดเส้นตรงเส้นหนึ่ง เส้นใดจุดในตำบลที่ใกล้เชิงเส้นตั้งได้ฉากกว่า เส้นนั้นจะยาวกว่า

ใกล้เชิงน้อยกว่า

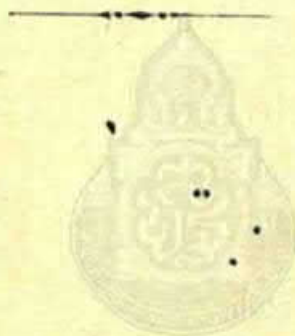
{ $\therefore$ ตามในรูป OP มาจุด $A B$ ณตำบลที่ใกล้เส้นตั้งได้ฉาก, กว่าเส้น OQ , เส้น OQ ย่อม $< OP$

$\therefore O \hat{Q} C$ เป็นมุมแหลม (ช.น. ๘ ขน.) ตัวอย่าง

$\therefore O \hat{Q} P$ จึงเป็นมุมบาน (ช.น. ๑) ตัวอย่าง

$\therefore OPQ$ จึง $< O \hat{Q} P$ ($\therefore O \hat{Q} C > O \hat{P} Q$)

$\therefore OQ$ จึง $< OP$ }



แบบฝึกหัด

(พิสูจน์)



(๑) ด้านตรงกลางของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากย่อมเป็นด้านยาวที่สุด
ในรูปสามเหลี่ยมนั้น



(๒) ถ้าต่อฐาน BC แห่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ออกไปข้างใดข้างหนึ่งถึงจุด X ให้พิสูจน์ว่าด้านที่เหลื้อยู่ทั้งสองด้าน แต่ด้านสั้นกว่า AX



(๓) ในรูปสามเหลี่ยม ABC , XB กับ XC คือเส้นแบ่งครึ่ง $\widehat{A}$ กับ $\widehat{C}$ ถ้า $AB > AC$, XB ก็จะ $> XC$ ด้วยเหมือนกัน



(๔) ถ้าเอาด้านสองด้านหักจากกัน ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ผลที่ได้จะสั้นกว่าด้านที่เหลื้อยู่

(๕) เส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะยาวกว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปนั้นรวมกัน

(๖) ในรูปสามเหลี่ยมทุกรูป เส้นรอบรูปจะยาวกว่า “เส้นมีเดีย” (เส้นตรงที่ขีดจากกึ่งกลางด้านไปจุดมุมที่ตรงข้าม เรียกว่า มีเดีย) ทั้งหมดรวมกัน

เส้นขนาน

สแดงศัพท์ เส้นขนาน คือเส้นตรงสองเส้นที่เรียงกันเป็น
คู่ขนานพันราบระยะห่างเท่ากันเต็มอศน์เต็มอบลาย ถ้าคู่ออกไป
ข้างใดข้างหนึ่ง เส้นเหล่านี้จะไม่รู้จักไปบรรจบกันได้

ข้อสำคัญ เส้นขนานจะต้องอยู่บนพื้นท่อนเดียวกัน ถ้าเส้น
หนึ่งอยู่บนโต๊ะอีกเส้นหนึ่งอยู่บนพื้น เมื่อคู่ออกไปเส้นทั้งสองนั้นก็
คงไม่บรรจบ แต่หาใช่เส้นขนานไม่ โดยที่ไม่ได้อยู่บนพื้นท่อน
เดียวกันนั่นเอง ..

สัจจะสุตว์ เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันนั้น ต่างก็จะมาขนานกับ
เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งไม่ได้เป็นอันขาด หรือ “จะขีดเส้นตรงขนาน
กับอีกเส้นหนึ่งผ่าจุดที่กำหนดให้ ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น”

อนุญาตให้สร้าง* อนุญาตให้ขีดเส้นตรงเส้นหนึ่ง ผ่านจุดที่
กำหนดให้ ๆ ขนานกับเส้นตรงที่มีอยู่แล้วได้

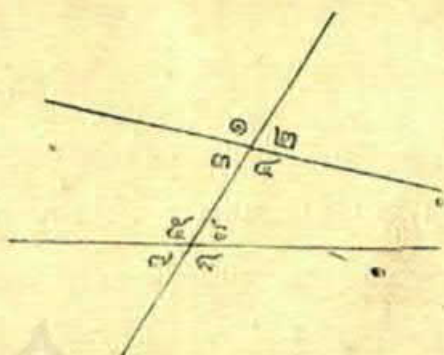
สแดงศัพท์ เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งมาตัดเส้นตรงสองเส้นจะเกิด
มุมขึ้นแปดมุม ซึ่งจะให้ชื่อต่าง ๆ กัน เพื่อเป็นการสะดวกในการ
สังเกตและเรียกชื่อมุมเหล่านั้น

ในรูปนี้, มุม ๑, มุม ๒,
มุม ๓, มุม ๔, ให้เรียก
ว่า "มุมนอก"

(exterior angles)

มุม ๓, มุม ๔, มุม ๕,
มุม ๖, ให้ชื่อว่า "มุมใน"

(interior angles)



มุม ๔ กับมุม ๕ ให้เรียกว่า "มุมแย้ง" (alternate angles)

มุม ๓ กับมุม ๖ ก็ให้เรียกว่า "มุมแย้ง" เหมือนกัน

มุม ๒ กับมุม ๖ คู่นี้ มุม ๒ ให้เรียกว่า "มุมนอก"

มุม ๖ ให้เรียกว่า "มุมในที่ตรงข้ามข้างบนทั้งคู่เดียวกัน"

มุม ๔ กับ ๖ หรือ ๓ กับ ๕ ให้เรียกว่า "มุมในทั้งสองข้างบนทั้งคู่เดียวกัน"

อุประมายืนที่ ๑๓ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๒๗ กับ ๒๘)

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งมาตัดเส้นตรงอีกสองเส้นถ้า

(๑) มุมแย้ง เท่ากัน

หรือ (๒) มุมนอกเท่ากับมุมในที่ตรงข้ามข้างบนตัดเดียวกัน

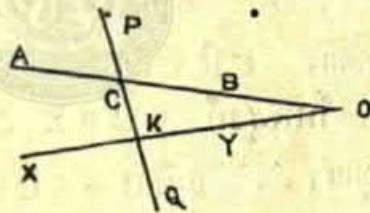
หรือ (๓) มุมในทั้งสอง ข้างบนตัดเดียวกัน รวมกันได้
สองมุมฉาก

เส้นตรงทั้งสองย่อมขนานกัน

(๑) มุมแย้งเท่า

(๒) มุมนอก = มุมในตรงข้าม

(๓) มุมในข้างบนตัดเดียวกันได้ ๑๘๐°



ถ้ามุมใดให้เส้นตรง P Q มาตัดเส้นตรง A B กับ X Y

ที่จุด C กับจุด K

(๑) เกิดมุมแย้ง, $\hat{A}CK = \hat{CKY}$

ให้พิสูจน์ เส้น $AB \parallel XY$

(พิสูจน์) ถ้าเส้น AB ไม่ $\parallel XY$ ต่อดออกไป ก็คงไป
บรรจบกันข้างหนึ่งเป็นแน่

ดังนั้น ต่อดออกไปบรรจบกันที่จุด O , ก็เห็นได้ว่า COK
เป็น $\triangle$

$\therefore \angle ACK > \angle CYK$ (มุมนอก $\triangle >$ มุมในตรงข้าม)
แต่ตามโจทย์ว่ามุมทั้งสองเท่ากันอยู่

$\therefore$ ที่ต่อดออกไปทาง B และ Y นั้นจะไม่บรรจบกันเหมือนกัน
และถ้าต่อดำเนินทาง A และ X จะพิสูจน์ได้ว่าไม่บรรจบกัน

$\therefore$ เส้น AB กับ XY จึงขนานกัน

(๒) เกิดมุมนอก, $\angle PCB =$ มุมในที่ตรงข้ามข้างบนที่
เดียวกัน, $\angle CYK$

ให้พิสูจน์ $AB \parallel XY$

(พิสูจน์) $\therefore \angle PCB = \angle ACK$ (มุมตรงกันข้าม)

$\therefore \angle ACK = \angle CYK$ ด้วย ($\because \angle PCB = \angle CYK$)

$\therefore$ เส้น $AB \parallel XY$ (มุมแย้งเท่า)

(๓) เกิดมุมในทั้งสองข้างบนที่เดียวกัน,

$\angle BCK + \angle CYK$ ได้สองมุมฉาก

ให้พิสูจน์ เส้น $AB \parallel XY$

(พิสัย) $B\hat{C}P$ เป็นมุมคู่แย้งของ $B\hat{C}K$ (มุมประชิด)

และ $C\hat{K}Y$ เป็นมุมคู่แย้งของ $B\hat{C}K$ (ใจหัด)

$\therefore B\hat{C}P = C\hat{K}Y$ (คู่แย้งของมุมประชิด)

$\therefore AB \parallel XY$ (มุมนอก = มุมในตรงข้าม)

ช. ค. พ.

เก้า

ที่จริงอุเทศน์ เป็นสาม จ. น. แต่เกิดจากมูลเหตุเดียวกันจึงรวม
เป็น จ. น. เดียวกันเสีย และสมมุติว่าเดี๋ยวกันได้ เพราะเหมือนกัน
หมดทุกข้อ การพิสูจน์ในข้อ ๑. ก็ถ้าไม่ขนานกันต่อออกไปก็คงไปจุดกัน
เพราะในสแดงศัพท์มีปรากฏว่า ที่จะเป็นเส้นขนานได้ ต่อออกไปไม่ว่าข้างใด
ต้องไม่ไปจุดกัน จึงได้ถือเอาสแดงศัพท์นี้เป็นหลักในชั้นแรก

สแดงศัพท์

เส้นตรงที่ตัดคดเส้นตรงสองเส้นนั้น ให้เรียกว่า “เส้นตัดคู่
ขนาน” (Transversal) ในรูปข้างบนเส้นตรง PKQ มาตัด
เส้นขนาน AB กับ XY

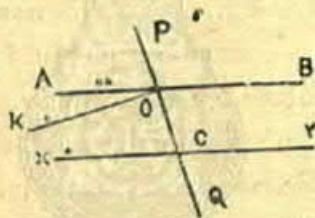
$\therefore$ จึงเป็น เส้นตัดคู่ขนาน ของ AB กับ XY



อุประมายืนที่ ๑๔ (ยุคติด เล่ม ๑ บท ๒๔)

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งมาตัดเส้นขนานสองเส้น

- (๑) มุมแย้งย่อมเท่ากัน
 - (๒) มุมนอกย่อมเท่ากับมุมในที่ตรงข้ามข้างบนหักเดียวกัน
 - (๓) มุมในทั้งสองข้างบนหักเดียวกันรวมกันย่อมได้สองมุมฉาก
- มุมแย้ง
มุมนอก, มุมในตรงข้าม
มุมในทั้ง ๒ ข้างบนหัก



สมมุติให้เส้นตรง AB กับ XY เป็นเส้นขนานและ PQ มาตัด

ให้พิสูจน์ (๑) $\angle AOC = \angle CYO$

(๒) $\angle POB = \angle CYO$

(๓) $\angle BOC + \angle CYO =$ สองมุมฉาก

(พิสูจน์) (๑) $\angle AOC$ ไม่เท่ากับ $\angle CYO$ สร้างอีกมุม

หนึ่ง คือ $\angle KOC$ ให้ $\angle KOC = \angle CYO$ ที่เดียว และให้แย้งกันอยู่กับ $\angle CYO$ ด้วย

ดังนั้นเส้นตรง KO จึง $\parallel XY$ (มุมแย้งเท่า) แต่ในโจทย์
นั้นเส้น $XY \parallel AB$ อยู่แล้ว, จึงกลายเป็นเส้นตรง AB กับ
 KO ซึ่งตัดกันนั้นต่างก็จะไป $\parallel XY$ อันได้เท่าเดียว

$\therefore$ ที่ $A\hat{C}O$ จะไม่ $= O\hat{C}Y$ นั้นไม่ได้เป็นอันขาด

$\therefore$ มุมแย้ง, $A\hat{O}C = O\hat{C}Y$

(๒) $\therefore A\hat{O}C = P\hat{O}B$ (มุมตรงกันข้าม)

และ $A\hat{O}C = O\hat{C}Y$ อยู่แล้ว (มุมแย้ง)

$\therefore$ มุมนอก, $P\hat{O}B$ จึง $=$ มุมในตรงข้าม, $O\hat{C}Y$

(๓) $\therefore P\hat{O}B = O\hat{C}Y$ (มุมนอก $=$ ในตรงข้าม)

$P\hat{O}B + B\hat{O}C = O\hat{C}Y + B\hat{O}C$ (เพิ่ม $P\hat{O}C$)

แต่ $P\hat{O}B + B\hat{O}C$ สองมุมฉาก (มุมประชิด)

$\therefore$ มุมในทั้งสอง, $B\hat{O}C + O\hat{C}Y = 2$ มุมฉากด้วย

ช. ต. พ.

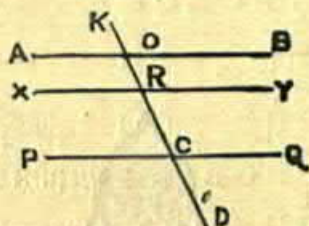
แก้

ที่จริงอุทเทศที่ ๑๔ นี้เป็น ๓ อ. น. แต่เกิดจากมูลเหตุเดียวกันจึงรวม
เป็น อ. น. เดียวกันเสีย และประกาศโจทย์โดยลघพาจะ คือ ถ้าสมมติ นั้นพูด
คราวเดียวได้ เพราะเหมือนกันหมดทุกข้อ การพิสูจน์ข้อ ๑ นั้นนักเรียนจะต้อง
ระกฏไว้ว่าเมื่อสิ่งไม่เท่ากันเช่นมุมในที่นี้ เมื่อหามาจงบจะให้เท่ากันก็ยอม
เลือกเอาที่เห็นว่าอาจจะเท่าซิ่งกว่าอื่น เมื่อที่เห็นว่าน่าจะเท่าซิ่งกว่าอื่นไม่เท่า
แล้วก็แปลว่าสิ่งเดิมเขาเท่ากันแล้วนั่นเอง เมื่อหามาใหม่จึงไม่เท่าได้จะไป
เสียเวลาหาสิ่งอื่นมาใหม่ก็ไม่ควร

อุปรมัยนิเทศบท ๑๕ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๓๐)

บรรดาเส้นตรงที่ต่างก็มาขนานกับเส้นตรงเส้นเดียวกัน ย่อม
ขนานกันเองทุกเส้น

ขนานกับเส้นเดียวกัน



สมมุติให้เส้นตรง AB กับ XY ต่างก็มาขนานกับเส้น PQ

ให้พิสูจน์ $AB \parallel XY$ ขีดเส้น KD ตัดเส้นตรง
 AB, XY, PQ ที่จุด O จุด R และจุด C

(พิสูจน์) $\because AB \parallel PQ, \angle AOC = \angle OCQ$ (มุมแย้ง)

$\because XY \parallel PQ, \angle RYQ = \angle CQ$ (คือ $\angle OCQ$)

(มุมนอกมุมในตรงข้าม)

$\therefore \angle AOC = \angle RYQ$

$\therefore AB \parallel XY$ (มุมแย้งเท่า)

แก้

การพิสูจน์ อ. น. ๑๕ นั้นขึ้นอยู่กับ อ. น. ๑๓ และจำเป็นต้องขึ้นกับ
 อ. น. ๑๓ เพราะมีอยู่ อ. น. เดียวตั้งแต่เวียนมา เหตุฉะนั้นเมื่อจะขึ้นกับ
 อ. น. ๑๓ ก็ต้องให้สมเหตุของ อ. น. ๑๓ ก็จะต้องมีเป็นหลักฐานไม่ข้อใด
 ข้อหนึ่งใน ๓ ข้อนี้ คือ “มุมแย้งเท่ากัน, มุมนอกเท่ากับมุมในที่ตรงข้าม
 ข้างบนตัดเดียวกัน, มุมในทั้งสองข้างบนตัดเดียวกันรวมกันได้ ๒ มุมฉาก”
 จึงเลือกเอาข้อ ๑ คือมุมแย้ง, $A \hat{O} R$ ที่ $= O \hat{C} Q$ แล้วเขียนต่อไป
 $O \hat{C} Q$ ไป $= O \hat{R} Y$ ซึ่งแย้งกับ $A \hat{O} R$ อยู่ชั้นอีกชั้นหนึ่ง ครั้น
 แล้ว $A \hat{O} R$ ที่ยอม $= O \hat{R} Y$ อยู่เอง $\therefore$ ไป $= O \hat{C} Q$ อยู่ก่อน
 เมื่อ $A \hat{O} R = O \hat{R} Y$ อันเป็นมุมแย้งแล้วเส้น AB ที่ $\parallel XY$
 หมายเหตุ ถ้า PQ อยู่กลาง, คือในระหว่างเส้น AB
 กับ XY แล้ว, ก็จะต้องพิสูจน์โดย เพราะธรรมดาเส้นตรง
 สองเส้นที่ตัดกันมาบรรจบกับเส้นกลาง จะไปบรรจบกันเองไม่ได้
 เป็นอันขาด หรือจะพิสูจน์ได้โดยวิธีนี้คือ:—
 ถ้าเส้น AB กับ XY ไม่ขนานกัน ต่อออกไปก็ถึง
 ไปตัดกันข้างใดข้างหนึ่ง เมื่อไปตัดกันแล้วก็จะเห็นว่าเส้นตรง
 สองเส้นที่ตัดกันต่างก็จะขนานกับเส้นเดียวกัน คือ PQ อันเป็น
 ไปไม่ได้ เพราะฉะนั้นเมื่อ AB กับ XY ตัดกันไม่ได้ก็คือ
 $AB \parallel XY$

แบบฝึกหัด (พิสูจน์)

- (๑) เส้นตรงทั้งหมด ถ้ามาคั้งได้ฉากกับเส้นตรงเส้นเดียว
กัน เส้นตรงเหล่านั้นย่อมขนานกันทุกเส้น
- (๒) ถ้ามีเส้นตรงเส้นหนึ่งมาตัดเส้นขนานไม่ว่ากี่เส้น และ
ตั้งได้ฉากกับเส้นขนานเส้นใดเส้นหนึ่ง ก็ย่อมตั้งได้ฉากกับเส้นขนาน
เหล่านั้นทุกเส้นไป
- (๓) เส้นตรงที่ขีดภายในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ขนานกับ
ฐานมาจรดด้านทั้งสองด้าน .. จะทำให้มุมสองมุมปลายเส้นนี้เท่ากับ
มุมที่ฐานแห่งรูปสามเหลี่ยมนั้นมุมต่อมุม
- (๔) ถ้าขีดเส้นตรงจากจุด X ซึ่งเป็นจุดในฐาน B C แห่ง
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว A B C ให้ตั้งได้ฉากกับฐานนั้น และมาตัด
ด้าน A B ที่จุด Y กับกัสด้าน A C เมื่อต่อออกไปแล้วที่จุด K
ให้พิสูจน์ รูปสามเหลี่ยม A Y K เป็นรูปสามเหลี่ยม
หน้าจั่ว
- (๕) เมื่อเส้นตรงแบ่งมุมนอกของรูปสามเหลี่ยมออกสองส่วน
เท่า ๆ กันนั้น ถ้ามาขนานกับด้านที่ตรงข้ามเขา รูปสามเหลี่ยม
นั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(๖) AB กับ CD คือเส้นตรงสองเส้นตัดกันเองที่จุด D ถ้าเราแบ่งมุมประชิดที่เกิดขึ้นนั้นออกมุมละสองส่วนเท่า ๆ กัน และขีดเส้น YXN ให้ขนานกับเส้น AB ผ่านจุด X ซึ่งเป็นจุดในเส้น CD และเลยไปจุดเส้นแบ่งครึ่งมุมประชิด, สองเส้นที่จุด Y กับ N

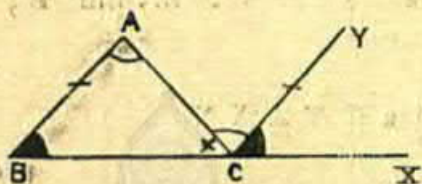
ให้พิสูจน์ $\angle XY = \angle XN$



อุปรัณยนิเทศที่ ๑๖ (ยุคติดเต็ม ๑ บท ๓๒)

มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกัน ย่อมได้ตั้งมุม
ฉาก

มุม $\triangle$ ได้ ๑๘๐°



สมมติให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม

ให้พิสูจน์ มุมทั้งสาม คือ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ๒$ มุม
หากต่อฐาน BC ออกไป คือยังจุด X ขีดเส้น $CY \parallel AB$ จาก
จุด C (พิสัย) $\therefore AB \parallel CY, \hat{A} = \hat{A}CY$ (มุมแย้ง)

$\therefore AB \parallel CY, \hat{B} = \hat{YCX}$ (มุมนอกมุมในตรงข้าม)

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}CY + \hat{YCX} + \hat{C}$

$(+ \hat{A}CY) \hat{A}CY + \hat{YCX} + \hat{C} = ๒$ มุม

ฉาก (มุมประชิด)

$\therefore \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ๒$ มุมฉาก

การพิสูจน์ อ. น. ๑๖ นี้ ขึ้นอยู่กับ อ. น. ๑๔ ทั้งสิ้น การที่สร้าง
เส้น $CY \parallel AB$ กับต่อ BC ออกไปก็เพราะประสงค์ที่จะเทียบมุม
ทั้งสามของ $\triangle$ นี้มาเท่ากับมุมประชิดเสีย จะได้ไปเท่ากับ ๒ มุมจากโดย
อ. น. ๑ เท่านั้นเอง

ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้าจุดด้านหนึ่งด้านใดของรูปสาม
เหลี่ยมออกไป มุมนอกที่เกิดขึ้นย่อมเท่ากับมุมในตรงข้ามรวมกัน
(คือ $\hat{ACX} = \hat{A} + \hat{B}$)

ข้ออนุมานที่ ๒ เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมสองมุมเท่า
กันมุมต่อมุม มุมที่เหลืออยู่รูปละมุมนั้นก็ย่อมเท่ากันเหมือนกัน

ข้ออนุมานที่ ๓ มุมแหลมทั้งสองแห่งรูปสามเหลี่ยมมุม
ฉากใด ๆ ย่อมเป็น “มุมคู่ฉาก” ของซึ่งกันและกัน

ข้ออนุมานที่ ๔ มุมทั้งสี่แห่งรูปสี่เหลี่ยมรูปใดรูปหนึ่ง
รวมกันจะได้สี่มุมฉาก

ผลความจริงจาก อ. น. ๑๖

ถ้ามุม A วัดได้ A องศา

” B ” ” B ”

” C ” ” C ”

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \text{ ก็ } = ๑๘๐^{\circ}$$

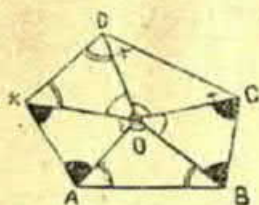
แบบฝึกหัดสำหรับ อ. น. ๑๖

(๑) ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มุมใดมุมหนึ่งย่อมวัดได้สองในสามของหนึ่งมุมฉาก

(๒) ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว มุมที่เท่ากันสองมุมต่างวัดได้ ๔๕ องศา

(๓) เมื่อต่อฐาน BC แห่งรูปสามเหลี่ยม ABC ออกไปนั้น ถ้ามุมนอก $\hat{A} \hat{C} X$ วัดได้ ๑๓๔° และ $\hat{B} \hat{A} C$ วัดได้ ๔๒° มุมทั้งสองที่เกิดอยู่มุมหนึ่งจะได้กี่องศา

(๔) ให้พิสูจน์ มุมทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้สองมุมฉาก โดยวิธีคิดเส้นตัดภายนอกของรูปสามเหลี่ยมขนานกับฐาน



ข้ออนุมานที่ ๕ ถ้าเอา ๔ มุมฉากเพิ่มมุมใน, ของรูป
เหลี่ยมใด ๆ ผลที่ได้ทอนเป็นจำนวนมุมฉากแล้วจะเป็นสองเท่า
จำนวนด้าน

{ กล่าวคือ:— $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$ ของรูปห้า
เหลี่ยม + ๔ มุมฉากจะได้ (๒ เท่าจำนวนด้าน คือ ๑๐ มุมฉาก)
พิสูจน์ กำหนดจุด ๆ หนึ่ง ในรูปนั้นคือจุด O แล้วให้ขีดเส้นตรง
จากจุดนั้นไปยังมุมทุกมุม จะเห็นว่ารูปนั้นแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยม
๕ รูป

∴ มุมทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยมใด ๆ นั้น รวมกันได้
สองมุมฉาก

∴ มุมทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมทุกรูป ในรูปเหลี่ยมนั้น
รวมด้วยกันจึง = ๑๐ มุมฉาก (คือ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$
+ มุมรอบ O) แต่มุมทั้งหมดนั้นสรุปรวมทั้งมุมในและมุมรอบ
จุด O ด้วย และมุมรอบจุด O นี้ได้ ๔ มุมฉาก (มุมประจักษ์)

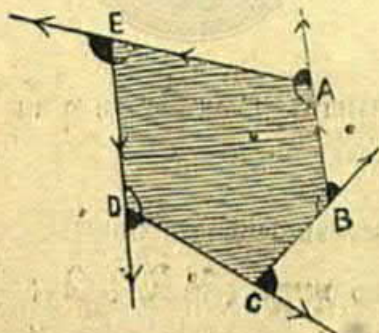
∴ มุมในทั้งหมดของรูปเหลี่ยม n มุมฉาก จึงได้
(๒ เท่าจำนวนด้าน) มุมฉาก

ช. ต. พ.

แสดงศัพท์

รูปเหลี่ยมเวียน (regular Polygon) คือรูปเหลี่ยม
ที่มีด้านทุกด้านเท่ากันกับมุมทุกมุมเท่ากันด้วย ถ้ามุมของรูป
เหลี่ยมที่มีด้าน Y ด้านวัดได้มุมละ x องศาจะได้ผลตามข้างบนว่า
 $x \cdot Y + 360^\circ = Y \times 180^\circ$

ข้ออนุมาณที่ ๖ ถ้าต่อด้านทุกด้านของรูปเหลี่ยมใด ๆ ออก
ไปข้างเดียว (อย่าให้ติดกัน) มุมนอกที่เกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด
จะได้ ๔ มุมฉาก



{ (พิสูจน์อยู่ที่ ๑) ถ้ามุมใดให้รูปเหลี่ยมมีด้าน n ด้าน
∴ จะมีมุม x มุม

ที่ตรงมุมนอกมุมหนึ่ง ๆ มุมในประชิดอยู่ด้วยซึ่งเมื่อรวมกันเข้าจะได้สองมุมฉาก

และรูปนี้มีมุมอยู่ x มุม

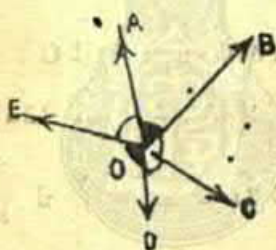
∴ มุมนอกทั้งหมด + มุมในทั้งหมดจึงได้ $2x$ มุมฉาก

แต่ตามข้อสมมติที่ ๑ มุมในทั้งหมดรวมกัน + ๔ มุมฉาก

ได้ $2x$ มุมฉาก

∴ มุมนอกทั้งหมดรวมกันจึงได้ ๔ มุมฉาก

(พิสูจน์วิธีที่ ๒)



กำหนด O แก้วขีดเส้น $OA \parallel$ ด้าน A เส้น

$OB \parallel$ ด้าน B เส้น $OC \parallel$ ด้าน C เส้น $OD \parallel$ ด้าน D

เส้น $OE \parallel$ ด้าน E

(คือด้านทั้งหมดมาบรรจบกันที่จุด O)

มุมนอก, ระหว่างด้าน A กับ B จะเท่ากับมุมนอกตรง B

(รูปที่ ๑) และมุมนอกอื่นก็มาเท่ากับมุมรอบจุด O นั้นมุมต่อมุมเมื่อรวมกันจึงได้ ๔ มุมฉาก

แบบฝึกหัด

(๑) ถ้าตัดด้านหนึ่งด้านใด แห่งรูปหกเหลี่ยมเรียบ (hexagon) ออกไป มุมนอกจะเท่ากับมุมในมุมใดมุมหนึ่งของ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้น

(๒) ถ้าต่อฐานของสามเหลี่ยมออกไปทั้งสองข้าง ให้ พิสูจน์มุมนอกทั้งสองรวมกันแล้วเท่ากับมุมยอดหักออก ว่าผลที่เหลือนั้นจะได้สองมุมฉาก

(๓) ในรูปสามเหลี่ยม $A B C$ เส้น $B O$ แบ่งครึ่งมุมที่ฐาน $\hat{B}$ เส้น $C O$ แบ่งครึ่ง $\hat{C}$

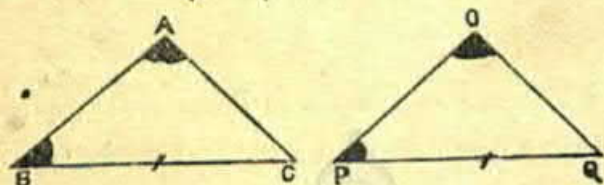
$$\text{ให้พิสูจน์ } \hat{B O C} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}.$$

(๔) ในรูปสามเหลี่ยม $A B C$ ถ้าตัดด้าน $A B$ กับ $A C$ ออกไปข้างเดียวกันแล้วแบ่งมุมนอกทั้งสองออกมุมละสองส่วน เท่า ๆ กัน โดยเส้น $B O'$ กับ $C O'$ ให้พิสูจน์

$$\hat{B O' C} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}.$$

อุปมาณียนเทศที่ ๑๗ (ยุคลิตเต็ม ๑ บท ๒๖)

การปรสามเหลี่ยมมีมุมสองมุมเท่ากัน มุมต่อมุมกับมันด้านอีก
ด้านหนึ่งเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมเหล่านั้นย่อมเท่ากันดังนี้
มุมสองมุมกับด้านหนึ่งเท่า



สมมุติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle OPQ$ เป็น $\triangle$ มี

$$\hat{A} = \hat{O}$$

$$\hat{B} = \hat{P}$$

$$\text{ด้าน } BC = PQ$$

ให้พิสูจน์ $\triangle ABC \equiv \triangle OPQ$

(พิสูจน์) ให้เอา $\triangle ABC$ วางทับ $\triangle OPQ$ ให้

จุด B ทับจุด P และเส้น BC ทับเส้น PQ

$\therefore BC = PQ$ จุด C จึงทับจุด Q

$\therefore \hat{B} = \hat{P}$ เส้น BA จึงทับเส้น PO

$\therefore \hat{C} = \hat{Q}$ (๒ มุมเท่ากันแล้วอีกมุมที่เหลือก็เท่ากัน) เส้น

CA จึงทับเส้น QO

∴ จุด A ที่เส้น BA กับ CA ไปชน จำเป็นต้อง
กับจุด O ที่เส้น PO กับ QO ไปชน จึงเห็นว่า $\triangle ABC$ กับ
 $\triangle OPQ$ ได้พอดีจึงเท่ากันสนิท

ช. ศ. พ.

เก้า

ที่บอกให้ว่ามุมสองมุมเท่ากันมุมต่อมุม คือมุมยอดเท่ามุมยอด มุมข้างซ้าย
เท่ามุมข้างซ้ายนั้น ก็เท่ากับบอกให้ว่า ๓ มุมเท่ากันมุมต่อมุมแล้ว คือ แถบ
มุมข้างขวาเท่ามุมข้างขวาอีก เพราะตามข้ออนุมาณที่ ๒ ของ อ. น. ๖๖
ปรากฏว่าเมื่อ $\triangle$ ใดมีมุมเท่ากัน ๒ มุม (มุมต่อมุม) แล้วที่เหลืออยู่รูปละมุม
ก็พลอยเท่ากันด้วย ที่ว่ามีค่านี้อีกด้าน ๓ เท่ากันนั้น ต้องเป็นด้านคู่ที่ตรง
ข้ามกับมุมคู่ที่เท่ากันไม่ว่าที่ใดพอจะบอกให้หรือที่ได้ไหม

แบบฝึกหัด (พิสูจน์)

(๑) จุดหนึ่งจุดใดในเส้นแบ่งครึ่งแห่งมุม ๆ หนึ่งจะห่างจาก
ขาทั้งสองของมุมนั้นเป็นระยะเท่ากัน

(๒) ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มาแบ่ง
ฐานออกสองส่วนเท่า ๆ กัน รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยม
หน้าจั่ว

(๓) ในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ถ้า $AB = AD$ และ
 $BC = CD$ ให้แสดงให้เห็นว่าเส้นทแยงมุม AC แบ่งมุมที่
ปลายเส้นออกสองส่วนเท่า ๆ กัน และจะคงได้ถ้ากับ BD

(๔) ทหารช่างผู้หนึ่ง เมื่อมาถึงแม่น้ำประสงค์จะทราบว่

กว้างเท่าใด แต่ก็ไม่สามารถจะวัดหรือใช้เครื่องมือวัดใด ๆ ได้ จึง
 มายืนอยู่ริมฝั่งแม่น้ำที่ตรง A ซึ่งตรงข้ามกับสิ่งที่มีหมายไว้ B ฝาก
 ข้างโน้น แล้วเดินเลียบฝั่งแม่น้ำเป็นแนวตรง A C ได้ฉากกับ AB
 และในระหว่างนั้นปักไม้หมายอักษร O ขึ้นอยู่กึ่งกลางเส้น A C ลง
 แล้วเดินจาก C ลงมาเป็นแนวตรงได้ฉากจนมาถึงที่แห่ง Q ซึ่งแต่ไป
 เห็น B O Q เป็นเส้นตรงจึงวัดเส้น C Q ว่าเป็นส่วนกว้างของแม่น้ำ
 ให้พิสูจน์ผลที่เขาได้ขึ้นจริง



รูปสามเหลี่ยมที่เท่าและไม่เท่า

ในการที่รูปสามเหลี่ยมจะเท่ากันสนิทได้นั้น ได้แสดงให้เห็นแต่
 อ. น. ที่ ๔ ที่ ๗ และที่ ๑๗ แล้ว ซึ่งกล่าวไว้ว่ารูปสามเหลี่ยม
 จะเท่ากันสนิทได้เมื่อ

(๑) ด้านของด้านเท่ากันด้านต่อด้าน และมุมในระหว่าง,
 เท่ากัน (อ. น. ที่ ๔)

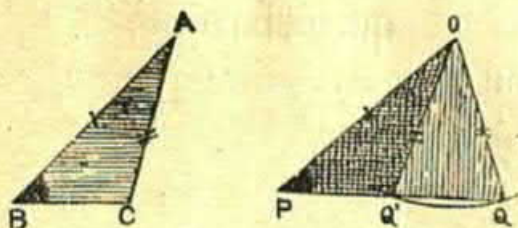
(๒) ด้านทั้ง ๓ เท่ากันด้านต่อด้าน (อ. น. ที่ ๗)

(๓) มุมของมุมเท่ากันมุมต่อมุม และอีกด้านหนึ่งเท่ากัน
 (อ. น. ที่ ๑๗)

ถ้านอกจากข้อทั้งสามนี้ ถึงรูปสาม
 เหลี่ยมจะมีอวัยวะสามสิ่งเท่ากันก็ไม่เท่ากันเสมอ
 ไป (เช่น) (ก) เมื่อมีมุมสามมุมเท่ากัน
 (ดังในรูป)



(ข) เมื่อมีด้านสองด้านเท่ากันด้านต่อด้าน และมุมโต
 มุมหนึ่งเท่ากัน (หาใช้มุมในระหว่างด้านไม่)

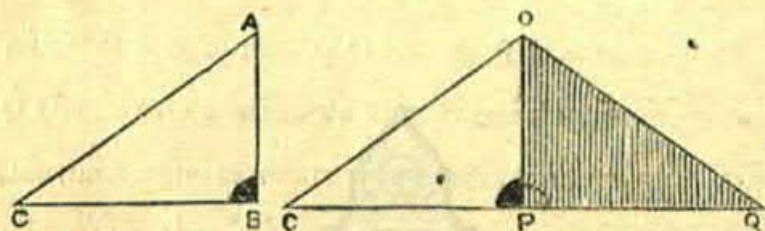


*} $AB = OP$, $AC = OQ$, และมุม $\hat{B} = \hat{P}$ จะเห็น
 ได้ว่าด้านอีกด้านหนึ่งที่เท่ากับ AC นั้นจะเป็นด้าน OQ หรือ OQ'
 ก็ได้ ตามในรูปเราอาจเห็นได้ความมุมที่ตรงข้ามกับด้านที่เท่ากัน,
 (ด้าน AB กับ OP) นั้น, จะเท่ากันก็ได้ ($\hat{C} = \hat{Q}'$) หรือ
 จะเป็นมุมคู่สมก็ได้ ($\hat{C} + \hat{Q} = 180^\circ$) ถ้าเช่นนั้นเท่ากัน
 รูปสามเหลี่ยมก็จะเท่ากันสนิท ถ้าเป็นมุมคู่สมจากรูปสามเหลี่ยม
 ก็หาเท่ากันไม่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้สองประการนี้ ถ้า $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก
 $\hat{Q}$ ก็เป็นมุมฉาก . นั้นแหละจะหมดข้อสงสัยว่าจะไม่เท่ากันกระมัง
 ดัง อ. น. ที่จะกล่าวต่อไป

อุปมัยนิเทศที่ ๑๘

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากด้านตรงฉากเท่ากัน กับอีกด้านหนึ่ง
เท่ากันย่อมเท่ากันสนิท

ด้านตรงฉากกับอีกด้านเท่า



สมมุติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle OPQ$ เป็น $\triangle$ มุมฉากทั้งคู่ $\hat{B}$
กับ $\hat{P}$ เป็นมุมฉาก มีด้านตรงฉาก $AB =$ ด้านตรงฉาก OP
และด้าน $BC =$ ด้าน PQ ด้วย

ให้พิสูจน์ $\triangle ABC \equiv \triangle OPQ$

(พิสูจน์) ให้ยก $\triangle ABC$ วางทับ $\triangle OPQ$ ให้
เส้น AB ทับเส้น OP กับให้จุด C อยู่ตรงกับจุด Q จุดตรงข้าม OP

$\therefore \angle BPC + \angle BPQ = 2$ มุมฉาก (โดย)

CP กับ PQ จึงต่อเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกันตลอด (ต่อกันได้ 180°)

ใน $\triangle OCQ$

$$\therefore OC = OQ \text{ (โจทย์)}$$

$$\therefore \hat{C} = \hat{Q} \text{ (ตรงข้ามกับด้านเท่า)}$$

$$\triangle ABC \text{ กับ } \triangle OPQ$$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} \hat{B} = \hat{P} \text{ (มุมฉาก)} \\ \hat{C} = \hat{Q} \text{ (พิสูจน์)} \\ AB = OP \text{ (โจทย์)} \end{cases}$$

$$\triangle \text{ จึงเท่ากันสนิท (มุม ๒ มุมกับด้านหนึ่งเท่า)}$$

ย. ท. พ.

แก้

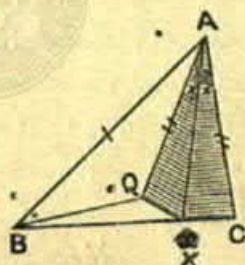
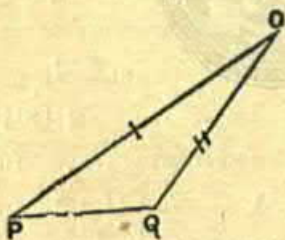
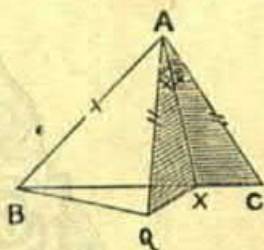
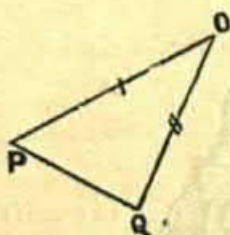
การจะพิสูจน์ให้ $\triangle ABC \equiv \triangle OPQ$ ต้องอาศัย อ.น. ๑๗ เป็นง่ายที่สุด เพราะฉะนั้นจึงต้องมีมุม ๒ มุมเท่ากัน มุมคู่มุมกับด้าน ๆ หนึ่งเท่ากัน แต่ด้านนั้นมีแล้วเกินต้องหาเสียอีก เพราะมีเท่าถึงสอง แต่มุมนั้นมีเท่าอยู่มุมเดียว เพราะฉะนั้นจะต้องหาให้เท่าอีกมุมหนึ่ง จึงเอารูป $\triangle ABC$ ไปซ้อน $\triangle OPQ$ ให้เส้น AB กับ OP เมื่อ $AB = OP$ ตามโจทย์แล้วก็ซ้อนทับกันให้พอดี ครั้นแล้วอาศัย อ.น. ๕ $\hat{C} = \hat{Q}$ เพราะด้าน $AC = QO$ แล้ว (ตามโจทย์ที่ว่าตรงจากเท่ากัน) แต่ก่อนจะยก อ.น. ๕ มากล่าวต้องกล่าวได้เสียก่อนว่า OCQ เป็น $\triangle$, จึงต้องบอกก่อนว่า CQ เป็นเส้นตรงเดียวกัน เพราะถ้าไม่เป็นแล้ว OCQ ก็จะไม่เป็นรูป $\triangle$ เลย แต่ข้อสำคัญที่จะเป็นเส้นเดียวกันหรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับมุมที่ P ตาม อ.น. ๒ แต่เป็นมุมฉากทั้งคู่ จึงได้ ๑๘๐ เมื่อรวมกัน $\therefore CPQ$ จึงเป็นเส้นตรงเดียวกันได้, เมื่อได้มุมอีกมุมหนึ่งเท่า, แล้ว $\triangle$ ก็เป็นอันเท่ากันสนิท

อุปมาณียนเทศที่ ๑๘ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๒๕)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมมีด้านสองด้านเท่ากันด้านคือด้าน แต่มุม

ในระหว่าง, ต่างกัน ฐานของรูปสามเหลี่ยมที่ตรงข้ามกับมุมใน
ระหว่าง, มุมใหญ่ จะยาวกว่าฐานที่ตรงข้ามกับมุมเล็ก

๒ ด้านเท่ากันและตรงข้ามมุมใหญ่



สมมติให้ ABC กับ OPQ เป็น Δ มี $AB = OP$
และ $AC = OQ$

มุม $B \hat{A} C > P \hat{O} Q$

ให้พิสูจน์ ฐาน $BC > PQ$

(พิสูจน์) ให้ยก $\triangle OPQ$ วางทับ $\triangle ABC$, ให้จุด O ทับจุด A ให้เส้น OP ทับ AB จุด P ต้องทับจุด B ($\because OP = AB$) แล้วขีดเส้น AX แบ่งครึ่ง QC จุด B C ที่จุด X ตกเส้น QX , ใน $\triangle AQX$ กับ $\triangle CXQ$

เพราะว่า $\begin{cases} AQ = AC \\ AX \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{มุมในระหว่าง, } \angle QAX = \angle CXQ \end{cases}$

* $\therefore QX = XC$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

$\therefore BX + XQ$ (หรือ XC) ซึ่งเป็น $BC > BQ$ (หรือ PQ) (๒ ด้านยาวกว่าด้านที่เหลือนั้น)

ช. ต. พ.

แก้

เมื่อยก $\triangle$ ไปซ้อนกันให้ OP ซ้อน AB นั้น ไม่จำเป็นต้องกล่าวว่าจุดปลายจะทับกันหรือเปล่า เพราะประการหนึ่งการยกไปซ้อนมีมาหลายครั้งแล้ว ย่อมเคยรู้จักมักคุ้นมาแล้ว และอีกประการหนึ่งเส้น $AB = OP$ แล้ว เพราะฉะนั้นอาจะเป็นที่เข้าใจได้เองว่าจุดปลายต้องทับกัน

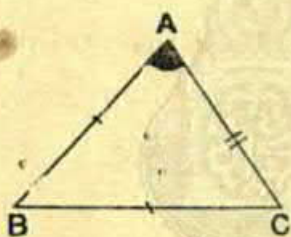
* อนึ่งที่ว่า $\therefore QX = XC$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า) นั้นตามเคยย่อมมีว่ารูป $\triangle$ เท่ากันสนิทเสียก่อน แล้วจึงจะพูดคราวหลังว่า $QX = XC$ แต่นี่โดยที่ได้รู้ได้เห็นมาหลายหนหลายครั้งแล้ว จึงย่อเสียโดยหวังจะให้เข้าใจเองว่า $\triangle$ เท่ากันสนิทอยู่ก่อนแล้ว

อุปประมัยนิเทศที่ ๒๐

บทกลับของอุปประมัยนิเทศที่ ๑๘

ถ้ารูปสามเหลี่ยม มีด้านสองด้านเท่ากันด้านต่อด้าน แต่ฐาน
ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นต่างกัน มุมในระหว่าง, ที่ตรงข้าม
กับฐานยาว จะใหญ่กว่ามุมในระหว่าง, ที่ตรงข้ามกับฐานสั้น

△ ๒ ด้านเท่ามุมในระหว่างตรงข้ามฐานยาว



สมมติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle OPQ$ เป็น $\triangle$

มีด้าน $AB = OP$

$AC = OQ$

แต่ให้ฐาน $BC > PQ$

ให้พิสูจน์ $\hat{A} > \hat{O}$

(พิสูจน์) $\hat{A}$ ไม่โตกว่า $\hat{O}$ ก็คงเท่ากับ $\hat{O}$, มิฉะนั้นก็เล็ก

กว่า $\hat{O}$

* ถ้า $\hat{A} = \hat{O}$, BC จำต้อง $= PQ$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า) แต่ $BC > PQ$ (โจทย์) จะเท่าไม่ได้ ถ้า $\hat{A} < \hat{O}$, BC จำต้อง $< PQ$ (Δ ๒ ด้านเท่า, ฐานตรงข้ามมุมเล็ก) แต่ $BC > PQ$ (โจทย์) อันเป็นไปไม่ได้อีก (โจทย์)

$\therefore \hat{A}$ ต้อง $\neq \hat{O} > \hat{O}$

ช. ต. พ.

แก้

* ถ้า $\hat{A} = \hat{O}$ แล้ว ΔABC กับ OPQ ก็จะมี
ด้าน $AB = OP$ (โจทย์)

$AC = OQ$ (,)

มุมในระหว่าง, $\hat{A} = \hat{O}$ (ถ้าเท่าได้)

ΔABC ก็ $\equiv OPQ$ (๒ ด้านกับมุมระหว่าง, เท่า)

$\therefore BC$ ก็ $= PQ$ ซึ่งเป็นอันใช้ได้ $\therefore BC > PQ$
(โจทย์)

โจทย์ที่วนรูปตามเหลี่ยมต่าง ๆ

(๑) ให้กล่าวอุปมาณินเทศ และข้ออนุมานต่าง ๆ

ที่เกี่ยวข้อง

(ก) ผดบวกละห่มในทั้งหมต

(ข) ผดบวกละห่มนอกทั้งหมต

(๒) ให้บอกจำพวกของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกล่าวถึงมุม และให้บอก “ประกาศโจทย์โดยกว้างขวาง” ของอุปประณัยนเทศต่าง ๆ ที่กล่าวถึงมุมของรูปสามเหลี่ยม

(๓) ให้บอก “ประกาศโจทย์ โดยกว้างขวาง” ของอุปประณัยนเทศสองบท ซึ่งบอกมุมของรูปสามเหลี่ยมให้ แล้วให้พิสูจน์ตาม

(ก) ในรูปสามเหลี่ยม $A B C$ ถ้า $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 51^\circ$ ให้คำนวณองศาของมุมที่เหลือ และบอกด้านที่ยาวที่สุด

(ข) $\hat{A} = \hat{B} = 62\frac{1}{2}^\circ$ มุมที่เหลือจะวัดได้ กี่องศาแล้วให้เขียนด้านทั้งสามลงตามลำดับความยาว

(๔) ให้บอกประกาศโจทย์ของอุปประณัยนเทศสองบทที่บอกด้านให้ แล้วให้พิสูจน์มุม ในรูปสามเหลี่ยม $A B C$

ถ้า $a = 3.6$ เซนติเมตร $b = 2.8$ เซนติเมตร $c = 3.6$

เซนติเมตร ให้บอกมุมตามลำดับขนาดแล้วให้พิสูจน์ว่าเป็น Δ

มุมแหลม

(๕) ให้แสดงให้เห็นในข้อต่าง ๆ ข้างล่างนี้ ว่าข้อใด
รูปสามเหลี่ยม $A B C$ กับ $A' B' C'$ จึงจะเท่ากันสนิท
และข้อใดที่รูปสามเหลี่ยม จะเท่ากันได้แต่ไม่เท่ากันได้

(ก) $A = A' = ๗๐^{\circ}$

$B = B' = ๔๖^{\circ}$

$a = a' = ๓.๗$

เซ็นติเมตร

(ข) $a = a' = ๔.๒$

เซ็นติเมตร

$b = b' = ๒.๔$

เซ็นติเมตร

$C = C' = ๘๐^{\circ}$

(ค) $A = A' = ๓๖^{\circ}$

$B = B' = ๑๒๑^{\circ}$

$C = C' = ๒๓^{\circ}$

(ง) $a = a' = ๓.๐$

เซ็นติเมตร

$b = b' = ๕.๒$

เซ็นติเมตร

$c = c' = ๔.๕$

เซ็นติเมตร

(จ) $B = B' = ๕๓^{\circ}$

$b = b' = ๔.๓$

เซ็นติเมตร

$c = c' = ๕.๐$

เซ็นติเมตร

$$(๑) \quad C = C' = 90^\circ$$

$$c = c' = 5.0 \quad \text{เซ็นติเมตร}$$

$$a = a' = 3.0 \quad \text{เซ็นติเมตร}$$

(๒) (๑) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านสองด้านเท่ากันด้านคู่
ด้าน และมุมตรงข้ามกับด้านที่เท่ากันคู่หนึ่งนั้นเท่ากัน มุมที่ตรงข้าม
ด้านที่เท่ากันอีกคู่หนึ่งก็จะเท่ากัน มิฉะนั้นก็เป็นมุมคู่สมจาก ถ้า
เท่ากันให้พิสูจน์รูปสามเหลี่ยม ทั้งสองรูปนั้นเท่ากันสนิท

(๓) (๒) จากจุด B เชิงเส้นตรง BA จะตัดเส้นระดับตลอดจุด
ของจุด C กับ D ซึ่งห่างกันอยู่ ๒๗ ศอก B C A วัดได้ ๖๕
และ B D A ได้ ๔๐ เขียนรูปนี้ลง (มาตราส่วน ๑ ซม. ต่อ ๑๐ ศอก)
แล้วให้วัดเส้นตรงดูว่าสูงเท่าใด

สแดงศัพท์

รูปสี่เหลี่ยม

(๑) รูปสี่เหลี่ยม (quadrilateral) คือรูปพื้นราบ
ที่เส้นตรงสี่เส้นล้อมรอบ เส้นตรงที่ขีดแถมมุมตรงกันข้ามมาหากัน
ให้เรียกว่า เส้นทแยงมุม (diagonal)

(๒) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) คือ

รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านคู่ตรงข้าม
ขนานกัน



(ต่อไปจะพิสูจน์ให้เห็นว่าด้านตรงข้ามเท่ากันและมุมตรงข้ามเท่ากัน)

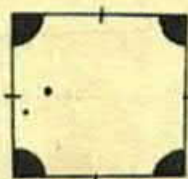
(๓) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangle) คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานที่มีมุมเป็นมุมฉาก

อยู่มุมหนึ่ง



(จะพิสูจน์ให้เห็นต่อไปว่ามุมของรูปนี้เป็นมุมฉากทุกมุม)

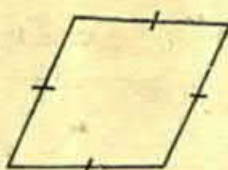
(๔) รูปจัตุรัส (square) คือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านที่ปลายจุดกันเท่ากัน



(จะพิสูจน์ให้เห็นต่อไปว่าด้านทุกด้านต้องเท่ากัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก)

(๕) รูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า (rhombus) คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานที่มีด้านทั้งสี่เท่ากัน แต่มุมทั้งสี่ไม่เท่ากัน

๕๔



(๖) รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า (trapezium)

คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ไม่เท่ากันสักด้านหนึ่ง แต่มีด้านที่ขนานกันอยู่คู่หนึ่ง



(๗) รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า คือรูปสี่เหลี่ยมที่ด้านทั้ง ๔ ไม่เท่ากันเลย และไม่ขนานกันเลยจนคู่เดียว

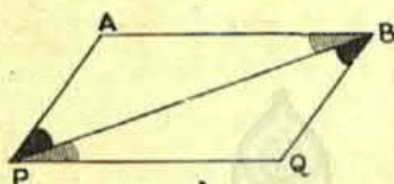


อุปมาขนิเทศที่ ๒๑

เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันและต่อปลาย เส้นขนานคู่เท่านั้น

ย่อมเท่ากันและขนานกัน

ต่อกันต่อปลายขนานคู่เท่า



สมมุติให้เส้น $AB \parallel PQ$ และ $AP \parallel BQ$ กับให้เส้น

AP ตัดกัน, BQ ตัดปลาย

ให้พิสูจน์ เส้น $AP \parallel BQ$ และ $AB \parallel PQ$

จากเส้น BP

(พิสูจน์) $\therefore AB \parallel PQ, \angle ABP = \angle QPB$ (มุมแย้ง)

ใน $\triangle ABP$ กับ $\triangle BQP$

เพราะว่า $\begin{cases} AB = PQ \text{ (โจทย์)} \\ BP \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{มุมในระหว่าง, } \angle ABP = \angle QPB \text{ (พิสูจน์)} \end{cases}$

$\therefore AP = BQ$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

$$\text{และ } A \hat{P} B = Q \hat{B} P$$

$$\therefore A P \parallel B Q \text{ (มุมแย้งเท่า)}$$

๒. ท. พ.

แก้

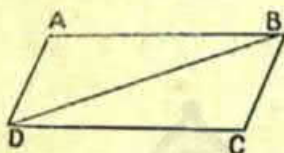
ที่จะพิสูจน์ให้ $A P = B Q$ และ $\parallel B Q$ นั้นจะต้อง
 อำนวยรูป $\triangle$ มาพิสูจน์ให้เท่ากันสนิทเสียก่อน เพราะฉะนั้นจึงตรงไป
 พิสูจน์ $A \hat{B} P = Q \hat{B} P$ (เมื่อขีดเส้น $B P$ แล้ว)
 เพราะมีมุมเท่ายังไม่พอใช้. เมื่อได้มุมเท่ากันพอแล้ว $\triangle$ จึงเท่ากันสนิทโดย
 อ. น. ๔ กรณแล้ว $A P = B Q$ และมุมแย้งที่จะทำให้ $A P \parallel B Q$
 ได้นั้นก็เท่ากันด้วยโดยที่ $\triangle$ เท่ากันสนิทแล้ว จึงเขียนอันได้ทั้งเท่าและขนาน.



ข้อประมัยนิเทศที่ ๒๒ (บุคคิกเล่ม ๑ บท ๓๔)

ด้านและมุมที่ตรงข้ามแห่งรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนานย่อมเท่ากัน
และเส้นทแยงมุมย่อมแบ่งครึ่งรูปนั้น

มุมตรงข้ามหรือด้านตรงข้ามหรือเส้นทแยงมุม □ ขนาน



สมมุติให้ $A B C D$ เป็น $\square + B D$ เป็นเส้นทแยงมุม

ให้พิสูจน์ (๑) $A B = C D$

(๒) $A D = B C$

(๓) $\hat{A} = \hat{C}$

(๔) $\hat{B} = \hat{D}$

(๕) $\triangle A B D \equiv \triangle B C D$

(พิสูจน์) $\therefore A B \parallel D C$ ($\because$ เป็น $\square$ ขนาน)

$A \hat{B} D = C \hat{D} B$ (มุมแย้ง)

$\therefore A D \parallel B C, A \hat{D} B = C \hat{B} D$ (มุมแย้ง)

เพราะว่า $\begin{cases} A \hat{B} D = C \hat{D} B \\ A \hat{D} B = C \hat{B} D \\ B D \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \triangle ABD &\equiv \triangle CBD \quad (\text{๒ มุมกับด้าน ๑ เท่า}) \quad (๕) \\
 \therefore AB &= CD \text{ และ } AD = BC \quad (\text{๑ กับ ๒}) \\
 \therefore \hat{A} &= \hat{C} \quad (๓) \\
 \therefore \angle ADB &= \angle CBD \text{ และ } \angle CDB = \angle ABD \quad (\text{พิสัย}) \\
 \therefore \angle ADB + \angle CDB &(\text{คือ } \hat{D}) = \angle CBD + \angle ABD \text{ คือ } (\hat{B}) \quad (๔)
 \end{aligned}$$

ข. ต. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้ามุมหนึ่งมุมใดแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นมุมฉาก มุมนอกที่อยู่ติดกับมุมฉากทุกมุม

□ สมมติ มุมฉากมุม ๑

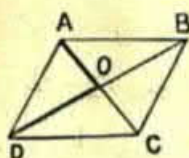
เพราะว่ามุมในทั้งสองข้างบนทิศเดียวกันรวมกันได้สองมุมฉาก

$\therefore$ ถ้ามุมหนึ่งเป็นมุมฉาก อีกมุมหนึ่งก็จะเป็นมุมฉากเหมือนกัน และมุมตรงข้ามแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมเท่ากัน จึงเป็นมุมฉากทุกมุม

ข้ออนุมานที่ ๒ เส้นทแยงมุมต้องเส้นแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต่างก็ตัดกันออกเส้นตรงสองส่วนเท่า ๆ กัน

เส้นทแยง AC และ BD ตัดกันที่ O

พิสัย $AO = OC$



และ $DO = OB$

ใน $\triangle AOD$ กับ $\triangle BOC$

$\angle ADO = \angle BCO$ (มุมแย้ง)

มุม $\angle AOD = \angle BOC$ (มุมตรงกันข้าม)

$AD = BC$ (ด้านตรงข้ามรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

$\therefore AO = OC$ และ $DO = OB$ (๒ ด้านกับมุม ๑ เท่า)

แบบฝึกหัด

(๑) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งรูปใด ถ้าด้านที่ตรงข้ามเท่ากัน
รูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(๒) รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ถ้ามุมที่ตรงข้ามเท่ากันรูปนั้นจะ
เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(๓) รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ถ้าเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นแบ่ง
ครึ่งกันเอง รูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(๔) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า จะตัดกันเป็น

มุมฉาก

(๕) ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานใด ๆ เท่ากันทั้งสองเส้น มุมจะเท่ากันทุกมุม

(๖) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานใด ๆ ถ้ามุมไม่เป็นมุมฉากสักมุมหนึ่ง เส้นทแยงมุมก็จะไม่เท่ากันเลย

แบบฝึกหัด (เส้นขนานและรูปด้านขนาน)

(๑) ให้สังเกตให้เห็น, เมื่อพับรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าเข้าตามเส้นทแยงมุม, รูปสามเหลี่ยมทั้งสองข้างแห่งเส้นนี้ จะมาทับกันสนิท คือให้พิสูจน์, เส้นทแยงมุมไม่ว่าเส้นใดแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่านี้เป็นแกนประกับแห่งรูปนั้น

(๒) ให้พิสูจน์, เส้นทแยงมุมรูปจัตุรัสใด ๆ เป็นแกนประกับแห่งรูปนั้น และให้บอกเส้นอีกสองเส้นที่จะเป็นแกนประกับของรูปจัตุรัสอีกเหมือนกัน

(๓) ในรูปสี่เหลี่ยม $A B C D$, $A B = A D$
 $C B = C D$ แต่ด้านไม่เท่ากันทุกด้าน จงสังเกตให้เห็นว่าเส้นทแยงมุมเส้นใดเป็นแกนประกับ

(๔) ให้พิสูจน์ข้อต่อไปนี้ โดยวิธีซ้อนกันทับกันสนิท

(ก) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะเท่ากันสนิท เมื่อด้านคู่เคียงกันสองด้านเท่ากันด้านต่อด้านและมุม ๆ หนึ่งเท่ากัน

(๒) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้านขนานจะเท่ากัน เมื่อด้านคู่เคียงกันสองด้านเท่ากันด้านต่อด้าน

(๕) รูปสี่เหลี่ยมสองรูป $A B C D$ กับ $O P Q X$ มีด้าน $A B, B C, C D, D A =$ ด้าน $O P, P Q, Q X, X O$, เติมนำตัวไปและ $B \hat{A} D = P \hat{O} X$ ให้พิสูจน์รูปทั้งสองนี้ทับกันสนิท

(คละ)

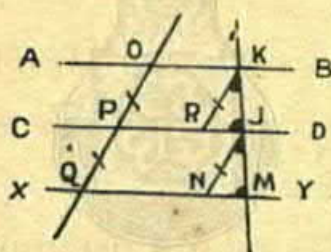
(๖) เส้นตรงที่ตัดผ่านจุดศูนย์กลางเส้นทแยงมุม แห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปจุดด้านทั้งสองที่ตรงกันข้าม จะได้เส้นทแยงมุมเส้นนั้นแบ่งเส้นแยงมุม

(๗) ถ้าจุด X กับจุด Y เป็นจุดกึ่งกลางด้าน $A D$ กับ $B C$ แห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A B C D$ ให้พิสูจน์ $A Y O X$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

อุปมัยนิเทศที่ ๒๓

เส้นขนานตั้งแต่ตามเส้นขึ้นไป มีเส้นตรงมาตัดได้ส่วนใน
ระหว่างเส้นขนานนั้นเท่ากัน ถ้าเส้นใด ๆ มาตัดเส้นขนานเหล่านั้นอีก,
ส่วนต่าง ๆ แห่งเส้นใหม่นี้ ในระหว่างเส้นขนานคู่ก็จะเท่ากันด้วย

ส่วนเส้นระหว่างขนาน



สมมติให้ AB, CD, XY , เป็นเส้นขนาน มีเส้น
 OPQ มาตัดได้ส่วน $OP = PQ$ ถ้ามี่ KJM อีกเส้นหนึ่ง
มาตัดอีก ได้ส่วนระหว่างเส้นขนานของเส้นตัดนี้ คือ KJ กับ JM

ให้พิสูจน์ว่า $KJ = JM$

จากจุด K ถัดจุด J ขีดเส้น KR ๑๓ CD ที่จุด R ,
 JN ๑๓ XY ที่จุด N ต่างก็ $\parallel OQ$

(พิสูจน์) $\therefore CD \parallel XY$

$K \hat{J} R = J \hat{M} N$ (มุมนอกก้นในตรงข้าม)

KR กับ JN ต่างก็ $\parallel OQ$, จึงขนานกันเอง (ขนานกับเส้นเดียวกัน)

$\therefore R \hat{K} J = N \hat{J} M$ (มุมนอกก้นในตรงข้าม)

$KR \parallel OP, JN \parallel PQ$ (ด้านตรงข้าม $\square$ ขนาน)

$\therefore KR = JN$ ($\because OP = PQ$ ตามโจทย์)

ใน $\triangle KJR$ กับ JMN

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} K \hat{J} R = J \hat{M} N \\ R \hat{K} J = N \hat{J} M \\ \text{และ } KR = JN \end{array} \right\} \quad (\text{พิสูจน์})$

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยม จึงเท่ากันสนิท (๒ มุมกับ ๑ ด้านเท่า)

$\therefore KJ = JM$

ร. พ. พ.

แก้

การพิสูจน์ให้ $KJ = JM$ นั้นต้องอาศัยรูป $\triangle$ ให้
นักเรียนสังเกตไว้ การพิสูจน์ให้มุมเท่ากันหรือด้านเท่ากัน มักจะอาศัย $\triangle$

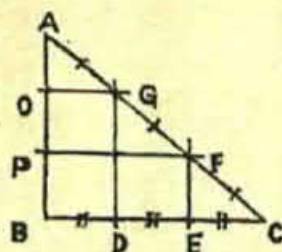
โดยมาก) เหตุฉะนั้นจึงสร้างเส้น KR กับ JN ให้ขนานกับ OQ ทั้งสอง
 เส้น คราวนี้ก็จะต้องตรงไปพิสูจน์ $\triangle KRJ \equiv JMN$ แต่ถ้าใช้
 อ.น. ๑๑ เป็นหลักฐานจะสะดวกที่สุด เพราะฉะนั้นจึงพิสูจน์ให้มุม ๒ มุมเท่ากัน
 กับอีกด้านหนึ่งเท่ากันก่อน คือ $\hat{KJR} = \hat{JMN}$ โดยที่เส้น $CD \parallel XY$
 และ KM มาตัด ๒ มุมนี้เป็นมุมนอกกับในที่ตรงข้ามข้างกันตัดเดียวกันอยู่
 $\hat{RKJ} = \hat{NJM}$ ได้ เพราะเป็นมุมนอกกับในที่ตรงข้ามข้างกันตัด
 เดียวกันเมื่อเส้น $KR \parallel JN$ และ KM มาตัด. ที่ว่า $KR \parallel JN$ นั้น
 เพราะ ๒ เส้นนี้ต่างก็ขนานกับ OQ (โดยสร้าง) จึงขนานกันเองโดย อ. น. ๑๔
 หนึ่งเมื่อ $KR \parallel OP$ (สร้าง) และทั้ง OK ก็ $\parallel PR$
 อยู่แล้ว (โจทย์) รูป $OKRP$ จึงเป็น $\square$ ด้านขนาน $\therefore$ ด้าน
 ตรงข้ามทั้งสอง, OP กับ KR จึงเท่ากันโดย อ. น. ๒๒ หนึ่ง PQ
 ก็ $\parallel JN$ (สร้าง) ทั้ง PJ ก็ $\parallel QN$ อยู่แล้ว (โจทย์) $\therefore PQ$
 $= JN$

$\therefore KR$ จึง $= JN$ ด้วยเมื่อได้ ๒ มุมกับด้าน ๑ เท่ากัน
 เสร็จแล้ว รูปสามเหลี่ยม KRJ ก็เป็นอัน $\equiv JNM$

$\therefore KJ$ จึง $= JM$

ข้ออนุมานที่ ๑ เมื่อเส้นตรงไม่ว่ากี่เส้นภายในรูปสามเหลี่ยม,
 ขนานกับฐาน. มาตัดด้านหนึ่งออกเป็นส่วนของเท่า ๆ กัน ก็จะไปตัด
 ด้านอีกข้างหนึ่งออกเป็นส่วนของเท่า ๆ กันอีกดังในรูป

เส้นขนานฐานตัดกันตรงข้าม



เส้น OG กับ PF ต่างก็ $\parallel BC$ ตัด AB ออกได้
 ส่วน AO, OP กับ PB ขึ้นเท่ากันแต่ก็เลยไปติดด้าน
 AC ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กันเหมือนกัน

คือ $AG = GF = FC$

คราวนี้จะยกเอารูปร่าง BC กับเส้นขนานเหล่านั้นเปรียบเทียบกับส่วน
 ยาวกันดูจากจุด G จุด F ชีตเส้นตรงมาสู่ฐาน BC ที่จุด D
 จุด E ขนานกับ AB ทุกเส้น ที่ชีตใหม่นี้จะไปตัด BC
 ออก ๓ ส่วนเท่า ๆ กันอีก (ส่วน เส้น ระหว่างขนาน)

และ OG ยาวหนึ่งในสาม, PF สองในสาม, ของ BC
 โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าเส้นขนานภายในรูปสามเหลี่ยมมาติดด้าน BC
 ออก x ส่วน OG จะ $= \frac{1}{x} BC$, $PF = \frac{2}{x} BC$ ดังนี้
 ค่อย ๆ ไป

ข้ออนุมาณที่ ๒ (กลับ) เส้นตรงภายใน $\triangle$ ถ้าไปตัดด้าน
ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กันข้างต่อข้างก็ย่อมไปขนานกับฐานทุกเส้น
 $\triangle$ เส้นตัดด้านเท่า ๆ กัน

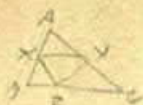
ว่าด้วยบท ๒๓

(๑) เส้นตรงที่ตัดจากศูนย์กลางของด้านหนึ่ง แห่งรูปสาม
เหลี่ยม, ขนานกับฐานไปจดด้านอีกด้านหนึ่ง, จะตัดด้านที่ต้อง
ออกสองส่วนเท่า ๆ กัน (เป็นข้อสำคัญของบท ๒๓) ในรูป
สามเหลี่ยม ABC ถ้าจุด X เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB เมื่อขีด
เส้น $XY \parallel BC$ ให้พิสูจน์ $AY = YC$ (จงขีดเส้น
 YO ขนานกับ AB แล้วจึงใ้กรัพิสูจน์ $\triangle XAY$
 $\equiv OYC$)

(๒) เส้นตรงที่ตัดจากกึ่งกลางด้านหนึ่ง แห่งรูปสาม
เหลี่ยมมาจดกึ่งกลางด้านอีกด้านหนึ่ง, ย่อมขนานกับด้านที่เหลืออยู่

(ถ้า X กับ Y เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB กับ CA
จะต้องพิสูจน์ $XY \parallel BC$ จงต่อด้าน XY ออกไป คือยังจุด
 O ให้ $YO = XY$ แล้วลากเส้น CO , พิสูจน์ $\triangle XAY$
 $\equiv YOC$ นอกนั้นก็จะได้ โดยเร็วพลัน)

(๓) เส้นตรงที่ต่อกึ่งกลางด้านสองด้านแห่งรูปสามเหลี่ยม
ไปถึงกันจะยาวถึงด้านที่เหลืออยู่



๑๐๗

(๔) ให้พิสูจน์เส้นตรงด้านเส้น ที่ต่อจุดศูนย์กลางด้าน
จุดของด้านทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยม มาถึงกัน จะแบ่งรูปสาม
เหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ สี่รูปซึ่งเท่ากันสนิททุกรูป

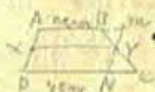


(๕) ABCD คือรูปสี่เหลี่ยมคางหมูขนาน X กับ Y เป็น
จุดกึ่งกลางด้านคู่ขนานตรงข้าม AD กับ BC, ให้พิสูจน์
BX กับ DY ตัดกันที่จุดกึ่งกลาง AC ออกด้านส่วนเท่า ๆ กัน

(๖) ให้แสดงให้เห็นว่า เส้นตรงสองเส้นที่ต่อจุดกึ่งกลาง
ด้านตรงข้ามแห่งรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมาถึงกันนั้น ต่างก็ตัดกันออกเส้น
สองส่วนเท่า ๆ กัน

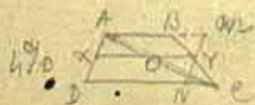
(๗) ถ้าขีดเส้นตรงต่อจุดกึ่งกลางด้านคู่เคียงของรูปสี่เหลี่ยม
คางหมูมาถึงกัน รูปสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูขนาน.

(๘) ด้านทั้งสองขนานกันในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูขนานด้านไม่เท่า
นั้น ด้านหนึ่งยาว ก. เซนติเมตร อีกด้านหนึ่งยาว ข. เซนติเมตร
ให้พิสูจน์เส้นตรงที่ขีดต่อจุดกึ่งกลาง ด้านไม่ขนานสองด้านมาถึง
กัน จะขนานกับด้านอีกคู่หนึ่งซึ่งขนานกันและจะยาว $\frac{ก+ข}{2}$ (ก+ข)
เซนติเมตร



$$XY = AB \text{ หรือ } DC$$

$$XY = \frac{1}{2}(AB + DC)$$



$$XO = \frac{1}{2} CD$$

$$YO = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore XY = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

$$= \frac{1}{2}(g+x) \text{ หรือ } \frac{g+x}{2}$$

มาตราส่วนตรง หรือมาตราส่วนเส้นทแยง

มาตราส่วนเส้นทแยงหรือมาตราส่วนตรงนั้น เป็นสเกลที่อาจวัดส่วนย่อยแห่งระยะต่างๆ ได้ โดยละเอียด และได้ประโยชน์ของ ข. น. ๒๓ จึงสร้างไว้ให้ดูเป็นตัวอย่างในการอ่านนิ้ว ส่วนสิบของนิ้ว กับส่วนร้อยของนิ้ว



ให้ขีดเส้นฐาน ก. ข. แบ่งออกเป็นระยะๆ ละหนึ่งนิ้ว หมายถึง เลข ๐, ๑, ๒, (ดังในรูป)

ระยะปลายคือ ก. ๐, ให้แบ่งออกอีกสิบส่วนเท่าๆ กัน หมายถึง เลข (จาก ๐) ๑, ๒, ๔, ๙. บัดนี้ก็จะอ่านนิ้วและส่วนสิบของนิ้วได้ จากส่วนย่อยที่ได้แบ่งไว้ ในระยะ ๐ ก.

แต่ถ้าประสงค์จะอ่านส่วนร้อยของนิ้ว ให้ขีดเส้นระดับ สลับกันขึ้นไปเป็นชั้นๆ เหนือเส้นฐานอีกสิบเส้นทุกๆ เส้นให้ขนานกับเส้น ก. ข. ระยะห่างในระหว่างเส้นตรงเหล่านี้จะต้องเท่ากันทุก

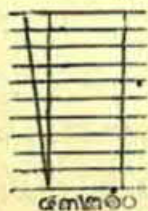
ระยะ แล้วให้ขีดเส้นตั้งได้นาจากมาจุดเส้น ก. ข. ที่จุด ก. ๐, ๑, และ ๒, ส่วนปลาย คือ ก. ๐, นั้นได้แบ่งออกสิบส่วนแล้ว ให้เขียนเส้นเอนทแยงตั้งในรูป คือขีดแต่จุด ๐ ถึงส่วนที่ ๑ ในเส้นขนานเส้นที่ ๑๐

แต่จุด ๑ ถึงจุด ๒

แต่จุด ๒ ถึงจุด ๓ ค่อย ๆ ไป

เป็นลำดับให้วิธีสร้างจะอธิบายวิธีใช้ต่อไป

ถ้าต้องการเส้นยาว ๒.๔๗ นิ้วจากสเกลนี้ ให้หยิบปากคืบมาจากจุดที่จุด ๒ ในเส้น ก. ข. ขาอีกข้างหนึ่งกางออกไปจนถึงจุด ๔ (ส่วนย่อยในระยะ ก. ๐) จะได้เส้นตรงยาว ๒.๔ นิ้ว เพื่อจะหาจุดส่วนร้อยของนิ้ว เลื่อนขาขวาของปากคืบขึ้นไปตามเส้นตั้ง ๑ จนถึงเส้นขนานที่ ๗ ขาปากคืบข้างซ้ายกางออกไปถึงเส้นทแยงที่ ๔ จะได้เส้นตรงยาว ๒.๔๗ นิ้ว



คำอธิบายวิธีสร้าง

ในการแบ่งส่วนย่อยครั้งแรกนั้น ไม่ต้องอธิบายก็ดำเนินการ
จะเข้าใจได้ แต่ที่ได้ส่วนย่อยของนิ้ว โดยขีดเส้นระดับดังับขนาน
กับเส้นฐานขึ้นไปนั้น อยู่ในข้ออนุมาณที่ ๑ ของ อ. น. ๒๓ นั้นแล้ว

เมื่อขีดเส้นแต่ละจุด ๐ บนถึงจุด ๐ ดัง, ซึ่งได้ฉากกับเส้น ๑, ๐
เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม ๐, ๐, ๑,

มีเส้นตรงขนานกับฐาน ๐, ๑ แบ่งกัน ๐, ๐, ๐๑ ๐ ส่วน
เท่า ๆ กัน ก็จะแบ่งเส้น ๐๑ ออก ๑๐ ส่วนเท่า ๆ กัน

ความยาวแห่งเส้นขนานในระหว่างเส้นตั้ง ๐, ๐, กับ ๑, ๐,
คือภายใน $\Delta ๐๑๐$ ॥ ฐาน ๐๑ นั้น เท่ากับ $\frac{๑}{๑๐} \frac{๒}{๑๐} \frac{๓}{๑๐}$

ของฐาน ๐๑ อัน

ยาว .๑ นิ้ว เพราะฉะนั้นจึงยาว .๐๑, .๐๒, .๐๓

ของหนึ่งนิ้ว ในวิธีสร้างใช้มาตราส่วน, หักต่อ ๒๔๐

๒,๔๗ นิ้วในมาตราส่วนตรงจะเท่ากับ ๒๔.๗ ศอก

ถ้า ๑ ศอก ๙๖๐๐ ๒.๔๗ นิ้วจะเท่ากับความจริง ๑๔๗ วา
มาตราส่วนเส้นทแยงจึงมีประโยชน์มาก ในการเขียนแบบแบบบ้าน
เรือนต่าง ๆ การวัดแผนที่แต่ละคดียังจะเป็นสังเกตลงไปว่าหนึ่งคอก
เท่าใด ๆ ตามแต่ละคอกตรงกับมาตราส่วนเส้นทแยงของแบบแบบนั้น

(ข้อสำคัญ) ในการแบ่งส่วนย่อยแห่งมาตราส่วนเงิน
 ทแยงนั้น จะต้องแบ่งออกตามมาตราที่จะสร้างได้เกิดขึ้นคือ ถ้าใช้
 มาตราเมตรหรือมาตรานิ้ว, คืบ, ศอก ฯลฯ ก็ให้แบ่งออกตาม
 มาตรานั้น ๆ ไม่เป็นที่กำหนดจะต้องแบ่งสืบส่วนเสมอไป

(ถ้าอยากทราบมาตราส่วนตรงโดยพิศดาร ให้ดูใน
 ตำราแผนที่เล่ม ๑ โดยนายพันเอก พระตำรวจดำสนิทพิทักษ์)



เวชานิกเทศ

เวชานิกเทศที่จะกล่าวต่อไปนี้ เมื่อสร้างให้ใช้แต่ไม้บันทึก
กับวงเวียนเท่านั้น ไม่ควรใช้เครื่องมืออื่น ๆ เช่นของศา (เครื่อง
วัดมุม) หรือไม้บันทึกมาตราส่วนหรือไม้ฉากเป็นต้น

เวชานิกเทศเหล่านี้จะศึกษาเช่นเดียวกับ อุปกรณ์นิเทศที่เรียน
มาแล้วนั้นไม่ได้ ต้องเอาใจใส่ในการสร้างรูปให้มาก ต้องเขียน
ให้ถูกต้องและต้องทำโดยความประณีตบรรจง ทุก ๆ ใจหทัยต้อง
พิสูจน์ให้เห็นไว้ง่ายแต่เมื่อสร้างรูปเสร็จแล้ว ถ้ามีเวลาควร
วัดสอบดูว่า รูปที่ทำขึ้นนั้นถูกหรือผิด และได้จริงตามความประสงค์
หรือไม่

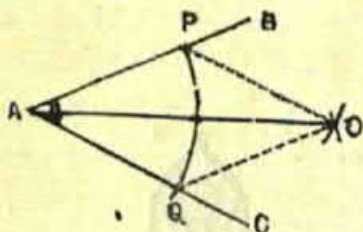
ความประสงค์ของบัณฑิตในเวชานิกเทศนั้น ก็คือการสร้างเท่า
นั้น การพิสูจน์นั้นของผู้ทำไม่เกี่ยวกับบัณฑิต เพราะเป็นการจำเป็น
ที่ผู้ทำจะต้องพิสูจน์เอง ว่าสิ่งที่ตนทำไปนั้นถูกหรือผิด เพื่อแสดง
ให้ผู้อื่นเชื่อว่าถูก

ในรูปทุกรูป เส้นที่ขีดเพื่อความสะดวกในการพิสูจน์ ไม่เกี่ยว
กับวิธีสร้าง ได้ทำไว้เป็นเส้นจุด

เรขานิเทศที่ ๑

ให้แบ่งมุมออกสองส่วนเท่า ๆ กัน

แบ่งครึ่งมุม



สมมุติให้ BAC เป็นมุมที่จะต้องแบ่งครึ่ง

(วิธีสร้าง) จุด A เป็นศูนย์กลางวงรีพอยคอร ขีดโค้งตัด

AB ที่จุด P และ AC ที่จุด Q , จุด P กับจุด Q เป็นศูนย์กลาง
 กว้างวงรีเดียวกัน ขีดโค้งตัดกันที่จุด O ถ้าเส้น AO ซึ่งจะแบ่ง
 มุม BAC (พิสูจน์) ถ้าเส้น PO กับ QO

ใน $\triangle APO$ กับ AQO

เพราะว่า $\begin{cases} AP = AQ \text{ (วงรีวงเดียวกัน)} & \text{ตัวอย่าง} \\ PO = QO \text{ (วงรีวงเท่า)} & \text{ตัวอย่าง} \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

รูปสามเหลี่ยมทั้งสองจึงเท่ากันสนิท (๓ ด้านเท่ากัน) ตัวอย่าง

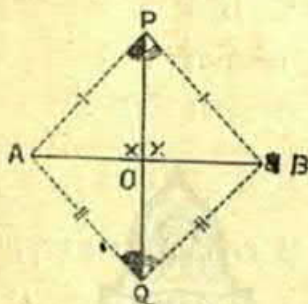
$\therefore \angle POA = \angle QOA$

ที่ว่าจุด A เป็นศูนย์กลางนั้น หมายความว่าจุดขาโลหะของวงเวียนที่จุด A และที่พูดว่าขีดโค้งตัด AB ที่ P และ AC ที่ Q ไม่ปรากฏว่าบังคับให้ถ่างวงเวียนเท่าใด ๆ นั้น แปลว่าจะต้องถ่างออกพอสมควรที่จะตัด AB กับ AC ได้ ก็อย่าให้เสีย AB หรือ AC ออกไป ที่ขีดโค้งตัดขาของมุม ก็เพื่อต้องการตัดเส้นที่ห่างจากหัวมุมเป็นระยะเท่ากัน

กับที่ว่าขีดโค้งตัดกันที่จุด () นั้นให้เข้าใจว่าต้องถ่างวงเวียนออกพอควรที่โค้งสองเส้นจะตัดกันได้ โดยไม่ทำให้ขาวงเวียนแคบจนโค้งไม่ตัดกัน หรือถ่างมากเกินไป อีกประการหนึ่งจะให้ขาของถ่างอยู่เหมือนเมื่อขีดโค้งที่ ๑ ก็ได้ และตามธรรมชาติที่โค้งจะตัดกันต้องถ่างออกไปกว่าครึ่งระยะ PQ

เรขานิกเทศที่ ๒

ให้ตัดเส้นตรงออกสองส่วนเท่า ๆ กัน
แบ่งครึ่งเส้นตรง



สมมติให้เส้น AB เป็นเส้นตรงที่จะต้องแบ่งครึ่ง

(วิธีสร้าง) จุด A เป็นศูนย์กลางรัศมีพอควร ขีดโค้ง

เหนือและใต้เส้น AB

จุด B เป็นศูนย์กลางรัศมีเดิมขีดโค้งเช่นเดียวกัน ตัดโค้ง

กันที่จุด P กับ Q จากเส้น PQ ตัด AB ที่จุด O POQ

จะแบ่งครึ่ง AB

(พิสูจน์) ตากเส้น AP, AQ, BP, BQ

ใน $\triangle APQ$ กับ $\triangle BPQ$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AP = BP \text{ (รัศมีเท่า)} \\ AQ = BQ \text{ (รัศมีเท่า)} \\ PQ \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$

$$A \hat{P} Q \text{ จึง } = B \hat{P} Q \text{ (๓ ด้านเท่ากัน)}$$

$$\text{ใน } \triangle A P O \text{ กับ } \triangle B \hat{P} O$$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} A P = B P \\ P O \text{ เป็นด้านร่วม} \\ A \hat{P} O = B \hat{P} O \end{cases}$$

$$\therefore A O \text{ จึง } = B O \text{ (๒ ด้านด้านมุมในระหว่างเท่า)}$$

เป็นอันได้ว่า $A B$ ออกสองส่วนเท่า ๆ กันที่จุด O แล้ว

$$\text{หมายเหตุ } \triangle A P O \equiv B P O \quad A \hat{O} P \text{ จึง } = B \hat{O} P \text{ และเป็นมุมประชิด จึงเป็นมุมฉากทั้งคู่}$$

$$\therefore \text{เส้น } P Q \text{ ซึ่งแบ่งครึ่ง } A B \text{ จึง } \perp A B \text{ ด้วย}$$

แก้

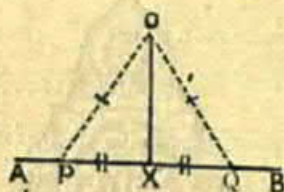
การพิสูจน์ให้ $A O = O B$ ต้องอาศัยรูป $\triangle$ ๒ รูป ที่มี $A O$ รูปหนึ่ง กับ $B O$ รูปหนึ่ง เพราะฉะนั้นให้ $\triangle P A O$ กับ $P B O$ หรือ $Q A O$ กับ $Q B O$ หรือ $P A O$ กับ $Q B O$ หรือ $P O B$ กับ $Q O A$ แต่ทุก ๆ คู่เหล่านี้จัดข้อหมกมุ่นครอบงำ ที่จะทำให้ $\triangle$ เท่ากันสนิทได้ สำหรับ $\triangle$ คู่แรกขาดมุมในระหว่างเท่า 'คือมุม $A P O$ กับ $B P O$ อันยังไม่มีหลักฐานว่าเท่ากัน เพราะฉะนั้นปล่อยให้จัดข้อหมกมุ่นอยู่เป็นอันไม่สำเร็จ เมื่อ

ต้องการให้สี่เหลี่ยมต้องมีขึ้น ถ้าจะให้มันก็ต้องพิสูจน์รูปเสียก่อน เพราะฉะนั้น
 จึงต้องไปพิสูจน์ $\triangle PAQ \equiv PBQ$ ผู้แรกเขียน เมื่อเห็นคำวาท
 คงพิศวงทำไมจึงมาจับ $\triangle PAQ$ เพราะไม่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่จะพิสูจน์ ก็นึก
 คำน PO กับ OB นั้น แต่เมื่ออ่านคำนี้แล้วก็คงจะรู้ได้ว่าเพราะต้องการ
 มุม คือ $\angle APO$ กับ $\angle BPO$ ให้เท่ากันจะได้ช่วยให้ $AO = OB$ ได้
 หนึ่งเมื่อพูดว่าเท่ากันนั้น มีข้อสังเกตอยู่หน่อย คือถ้าได้ชี้ค้ำไปยังโค้งที่ตัดกัน
 ก็แปลว่าเส้นรัศมีวงเท่า หมายความว่ารัศมีวงกลมที่เท่ากัน (นี่เป็นสังขยสูตร
 ไว้ในแสดงศัพท์เรื่องรัศมีนั้นแล้วจงพลิกไปดู) เพราะจดวงเวียนควาละแห่ง
 จึงมีจุดศูนย์กลางควาละจุด จึงมีวงกลมควาละวงไม่ใช่วงเดียวกัน แต่
 ถ้าได้ชี้ค้ำจากจุดศูนย์กลางเดียวกันยังโค้ง จึงแปลว่ารัศมีเท่ากันโดยเป็นรัศมี
 ของวงกลมเดียวกันรัศมีจึงเท่ากัน ตามสังขยสูตร

เรขานิกเทศที่ ๓

ให้ขีดเส้นตรงตั้งได้ฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่จุด ๆ หนึ่ง
ภายในเส้นนั้น

($\perp$ เส้นตรงจุดภายใน)



สมมติให้ AB เป็นเส้นกำหนดมีจุด X ภายในจะต้องขีด
เส้นตรง $\perp AB$ ตรงจุดนี้

(วิธีสร้าง) จุด X เป็นศูนย์กลางวงรัศมีพอควร ขีดโค้งตัด
 AB ที่จุด P กับจุด Q , จุด P กับจุด Q เป็นศูนย์กลางวงรัศมีเดียว
กัน ขีดโค้งเหนือเส้น AB ตัดกันที่จุด O ถ้าเส้น OX ขึ้น
จะ $\perp AB$

(พิสูจน์) ขีดเส้น OP กับ OQ

ใน $\triangle OXP$ กับ $\triangle OXQ$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} XP = XQ & (\text{รัศมีวงเดียว}) \\ OX \text{ เป็นด้านร่วม} \\ PO = OQ & (\text{รัศมีของวงเท่า}) \end{cases}$$

$$\therefore \hat{X}P \hat{Q} = O \hat{X} Q \quad (\text{๓ ด้านเท่ากัน})$$

จึงเป็นมุมฉากทั้งคู่ (มุมประชิด)

$$\therefore XO \perp AB$$

เมื่อ

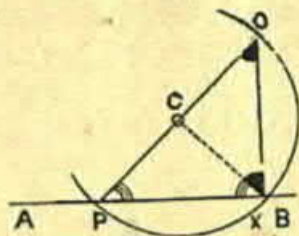
ที่จะพิสูจน์ให้ $OX \perp AB$ ต้องพิสูจน์ให้ $O \hat{X}P$ กับ $O \hat{X}Q$ เป็นมุมฉากเสียก่อนและที่จะเป็นมุมฉากต้องเท่ากันเสียก่อน และที่จะเท่ากันได้ต้องอาศรัยรูป $\triangle OXP$ กับ OXQ เท่ากันสนิทเสียก่อน

$\therefore$ จึงตรงไปพิสูจน์ $\triangle$ เลขที่เดียวกันในหน้า ๑๑๗ อ. น. ๓. เพราะด้านทั้งสามปรากฏพร้อมด้วยหลักฐานว่าเท่ากันแล้ว

• อนึ่งที่สร้างโค้งตัด AB ตรง P กับ Q นั้น $\therefore$ ต้องการคำนวณที่ห่างจาก X เป็นระยะเท่า

หมายเหตุ ถ้าจุด อยู่ก่อนข้างปลายเส้นให้เลื้อยไขว้วรีที่จะกล่าวต่อไป

เรขาคณิตที่ ๓ (วิธี ๒)



(วิธีสร้าง) ตั้งจุด C อยู่นอกเส้น AB

จุด C เป็นศูนย์กลางด้วยรัศมี CX ชีตโค้งตัด AB ที่จุด P ตากเส้น PC ต่อเลยออกไปจดวงกลมที่จุด O ชีตเส้น OX ซึ่งจะ $\perp$ AB

(พิสูจน์) ชีตเส้น CX $\therefore CO = CX$, (รัศมีวงเดียวกัน)

$\angle CO = \angle CX$ (ตรงข้ามด้านเท่า)

$\therefore CP = CX$ (รัศมีวงเดียวกัน)

$\angle CP = \angle CX$ (ตรงข้ามด้านเท่า)

$\therefore \angle PO = \angle XP + \angle XO$

$= \frac{1}{2}, 180^\circ$ (มุมของ $\triangle$)

$= 90^\circ$

XO จึง $\perp$ AB

แก้

การพิสูจน์ให้ $OX \perp AB$ ต้องพิสูจน์ให้ OXA เป็นมุมฉาก
 เสียก่อน เพราะนี่ต้องย้อนไปอาศัย อ.น. ๕ คือเมื่อสร้างเส้น CX แล้ว
 ใน $\triangle OXC$, $CO = CX$ เพราะต่างก็เป็นรัศมีวงกลมเดียวกัน

$$\therefore \angle COX = \angle CXO \text{ เพราะตรงข้ามกับด้านคู่เท่า (อ.น. ๕)}$$

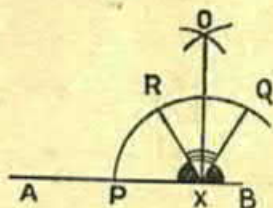
ครั้งที่สองใน $\triangle CPX$, $CP = CX$ เพราะเป็นรัศมีวงกลม
 เดียวกัน

$$\therefore \angle CPX = \angle CXP \text{ เพราะตรงข้ามกับด้านเท่ากันอยู่แล้ว}$$

(อ.น. ๕)

$\therefore \angle COX + \angle CPX = \angle CXO + \angle CXP$ คือ
 $\angle COX + \angle CPX = \angle OXP$ แต่ทั้งสามมุม คือ $\angle COX$
 $\angle CPX$ กับ $\angle COX$ เป็นมุมทั้งสามของ $\triangle OXP$ รวมกันจึงได้ 180°
 เพราะฉะนั้นต้องแบ่งครึ่ง 180° สำหรับ $\angle COX + \angle CPX$ เสียครึ่งหนึ่ง
 สำหรับ $\angle OXP$ อีกครึ่งหนึ่ง เพราะฉะนั้น $\angle OXP$ จึงเป็นมุมฉาก OX
 จึง $\perp AB$

เรขานิเทศที่ ๓ (วิธีที่ ๓)



(วิธีสร้าง) X เป็นศูนย์กลางวงขีดโค้งเหนือ A B ตัด AB

ที่จุด P

P เป็นศูนย์กลางวงรัศมีเดิม ขีดโค้งตัดโค้งก่อนที่จุด R, R เป็นศูนย์กลางวงรัศมีเดิม ขีดโค้งตัดโค้งก่อนที่จุด Q แบ่งครึ่ง $\angle R \hat{X} Q$ คือโดยเส้นตรง OX (แบ่งครึ่งมุม) OX ย่อม $\perp$ A B

(พิสูจน์) $\angle P \hat{X} R$ กับ $\angle R \hat{X} Q$ ต่างก็ $= \frac{1}{3}$ ของ 180°

$= 60^\circ$ แต่ $\angle R \hat{X} O = \frac{1}{2}$ ของ $\angle R \hat{X} Q$

$= \frac{1}{2}$ ของ $60^\circ = 30^\circ$

$\therefore \angle P \hat{X} O$ จึงเป็นมุมฉาก

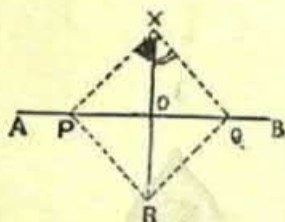
$\therefore OX \perp AB$

เรขาคณิตที่ ๔

ให้ ขีดเส้นตรงจากจุดนอกเส้น.

ไปตั้งได้ฉากกับเส้นนั้น

(ตั้งได้ฉากจากจุดนอกเส้น)



สมมุติให้ X เป็นจุดนอกเส้น AB จะต้องขีดเส้นตรง
 $\perp AB$

(วิธีสร้าง X เป็นศูนย์กลาง, รัศมีพอควร ขีดโค้งตัด AB

ที่จุด P กับจุด Q P กับ Q เป็นศูนย์กลางรัศมีเดียวกันขีดโค้งที่
 ตัดเส้น AB ตัดกันที่จุด R ถ้าเส้น XR ตัด AB ที่จุด O XO
 ย่อม $\perp AB$

(พิสูจน์) ขีดเส้น XP, XQ, PR, QR

เพราะว่า $\begin{cases} XP = XQ \text{ (รัศมีวงเดียวกัน)} \\ PR = QR \text{ (รัศมีวงเท่า)} \\ XR \text{ (เป็นด้านร่วม)} \end{cases}$

$\therefore \angle PXR = \angle QXR$ (๓ ด้านเท่ากัน)

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} P X = Q X \text{ (รัศมีวงเดียว)} \\ X O \text{ เป็นด้านร่วม} \\ P \hat{X} O = Q \hat{X} O \text{ (พิสูจน์แล้ว)} \end{array} \right.$

$$\therefore X \hat{O} P = X \hat{O} Q \text{ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)}$$

จึงเป็นมุมฉากทั้งคู่ (มุมประชิด)

$$\therefore O X \perp A B$$

หมายเหตุ ถ้าจุด X อยู่ก่อนข้างปลายเส้นให้เลือกใช้
วิธีที่ ๒ กับที่ ๓

แก้

ที่จะพิสูจน์ให้ $X O \perp A B$ ก็คือพิสูจน์ให้ $X \hat{O} P$ กับ $X \hat{O} Q$
เป็นมุมฉากและที่มุมทั้งสองเป็นมุมฉากได้ต้องพิสูจน์ให้เท่ากันเสียก่อน และ
ที่จะเท่ากันในที่นี้ต้องอาศัย Δ ๒ รูป ๆ หนึ่งมี $X \hat{O} P$ อีกรูปหนึ่งมี
 $X \hat{O} Q$ ก็คือ $\Delta X O P$ กับ $\Delta X O Q$ ใน Δ ทั้งสองนี้ยังไม่มีย
หลักฐานพอที่จะเท่ากันได้ มีข้อขัดข้องหลายอย่าง เพราะไม่ครบองค์ของ
อ. น. ๔ หรือ อ. น. ๗ หรือ อ. น. ๑๑ ก็ได้. จะพึง อ. น. ๔ ขาดมุมใน
ระหว่างเท่าที่จะใช้ อ. น. ๗ ขาดด้าน ๒ ด้าน, อ. น. ๑๑ ขาดมุม ๒ มุมเป็นอัน
ยังไม่ได้ทั้งสาม อ. น. แต่ถึงอย่างไรก็ดี Δ ทั้งสองจำเป็นต้องมีหลักฐานทบทวน
ว่าเท่ากันสนิท

∴ ที่สควกก็คือต้องอาศัย อ. น. ๔ ก็คือต้องพิสูจน์ให้มุมในระหว่าง
เท่ากันก่อน  เพราะฉะนั้นจึงพิสูจน์ให้ $\triangle PXR \equiv \triangle QXR$,
 $P\hat{X}R$ จะได้ $= Q\hat{X}R$ ครั้นเมื่อได้มุมในระหว่าง, เท่ากันแล้วก็ตรง
ไปพิสูจน์ $\triangle PXO \equiv \triangle QXO$ ที่เดียวแล้ว

$P\hat{O}X$ ก็ $= Q\hat{O}X$ จึงเป็นมุมฉาก (มุมประชิด) XO

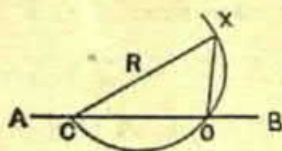
จึง $\perp AB$

แก้

การสร้างทำนองนี้ทำให้ขาดแก่การพิสูจน์ ต้องพิสูจน์ถึงสองชั้นจึงจะ
ได้สมผล แต่จะสร้างให้พิสูจน์ได้ง่ายก็ได้แต่เป็นการสร้างเพื่อการพิสูจน์ไป
หากว่าวิธีไม่แปลกกันเปลี่ยนแต่คำพูดจึงอาจใช้ได้ดังจะแจ้งไว้ต่อไปนี้

เมื่อขีดโค้งตัด AB ที่ P กับ Q แล้วต่อไปให้พูดว่าแบ่งครึ่ง
 $P\hat{X}Q$ ก็จะได้, เส้น XO เหมือนกัน ครั้นเวลาพิสูจน์ก็จะมีหลักฐาน
ต่อไปด้วยว่า $P\hat{X}O = Q\hat{X}O$ โดยสร้าง, ก็จะจับ $\triangle PXO$
 $\equiv \triangle QXO$ ได้เลขที่เดียว, ไม่ต้องพักไปอาศัย $\triangle PXR$
กับ QXR ให้ลำบาก

เรขานิเทศที่ ๔ (วิธีที่ ๒)



(วิธีสร้าง) ตั้งจุดจุดหนึ่ง (C) ลงในเส้น A B ชัดเส้นตรง X C แล้วแบ่งครึ่งออกที่จุด R (แบ่งครึ่งเส้นตรง)

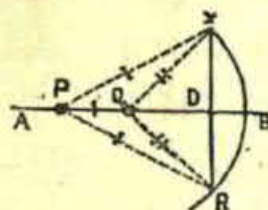
R เป็นศูนย์กลาง, R C เป็นรัศมีขีดโค้งตัด A B ที่จุด O ตากเส้น X O อันจะ $\perp$ A B

จะพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกับเรขานิเทศที่ ๓ วิธีที่ ๒ ว่า $XO \perp AB$

แก้

การพิสูจน์ให้ $XO \perp AB$ ก็คือพิสูจน์ให้ XOC เป็นมุมฉาก ก็จะต้องขีดเส้น CX เหมือนใน ร. น. ๒ วิธีที่ ๒ ครั้นแล้วก็ต้องใช้พิสูจน์ โดย อ. น. ๕ ทำนองเดียวกับ ร. น. ๓ วิธีที่ ๒ ซึ่งเราได้เคยพิสูจน์มาแล้ว เพราะฉะนั้นไม่จำเป็นต้องพิสูจน์ซ้ำอีกจึงพูดว่า “อาจพิสูจน์ได้โดยทำนอง อ. น. ๓ วิธีที่ ๒” เหนือนี้ก็พอ.

เรขาคณิตที่ ๕ (วิธีที่ ๓)



(วิธีสร้าง) ตั้งจุด ๒ จุด (P กับ Q) ลงในเส้น

A B ห่างกันพอสมควร

จุด P เป็นศูนย์กลางด้วยรัศมี P X ชัดโค้ง จุด Q เป็น
ศูนย์กลางด้วยรัศมี Q X ชัดโค้งตัดโค้งก่อน ที่จุด R ลากเส้น
X R ตัด A B ที่จุด O. อันจะ $\perp$ A B ที่ตรง O

(พิสูจน์) $\triangle X P Q \equiv \triangle R P Q$ (๓ ด้านเท่ากัน)

$$\therefore \angle X P Q = \angle R P Q$$

และ $\triangle X O P \equiv \triangle R O P$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

$$\angle X O P \text{ จึง } = \angle R O P$$

$\therefore$ จึงเป็นมุมฉากทั้งคู่ (มุมประจิด)

$$\therefore X O \perp A B$$

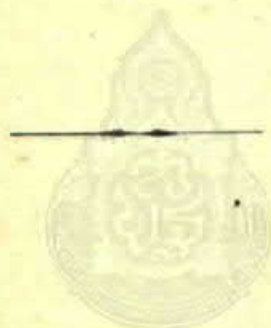
การพิสูจน์ให้ $XO \perp AB$ ก็คือพิสูจน์ $XO \perp A$ เป็นมุมฉากก็คือ
 พิสูจน์ให้ $X\hat{O}A = R\hat{O}A$ เสียก่อน ก็คือพิสูจน์ให้ $\triangle XOQ \equiv$
 $\triangle ROQ$ หรือ $\triangle XOP \equiv \triangle ROP$ เสียก่อน แต่ทั้ง ๒ คู่ไม่
 อาจเท่ากันสนิทได้ เพราะหลักฐานยังไม่พอ จะใช้ อ. น. ๔ ก็ขาดมุมในระหว่าง
 คือ $X\hat{P}O = R\hat{P}O$ หรือ $X\hat{Q}O = R\hat{Q}O$ จะใช้ อ. น. ๗ ก็ขาด
 $XO = RO$ จะใช้ อ. น. ๑๑ ก็ขาด $X\hat{P}O = R\hat{P}O$ หรือ $X\hat{Q}O$
 $= R\hat{Q}O$ กับขาด $P\hat{X}O = P\hat{R}O$ ด้วยเป็นอันไม่พอเพียงฉะนี้ แต่
 ถึงอย่างไรก็ดี จำเป็นต้องทำไม่คู่ใดที่คู่หนึ่ง เพราะฉะนั้นก็ต้องพิสูจน์
 ให้มุมไขว้ระหว่าง, เท่ากันจะได้ใช้ อ. น. ๔ หรือมีฉะนั้นด้าน $XO = RO$
 จะได้ใช้ อ. น. ๗ มีฉะนั้นมุมอีกคู่หนึ่งจะได้ใช้ อ. น. ๑๑ เป็นอันเลือกได้
 ในสามประการนี้ แต่ใช้ประการที่ ๑ คือ อ. น. ๔ เป็นสะดวกที่สุด เพราะ
 ฉะนั้นถ้ามือพิสูจน์ให้มุมในระหว่าง, เท่ากันเสีย แต่ก็ยังมีเลือกอีก เพราะ
 มือบู่ ๒ คู่ แต่พิสูจน์ $X\hat{P}O = R\hat{P}O$ เห็นง่ายที่สุดเพราะอาจพิสูจน์
 ให้ $\triangle XPQ \equiv \triangle RPQ$ ได้ง่าย
 โดยที่ $XP = RP$
 $XQ = RQ$ } รัศมีวงเดียวกัน
 PQ เป็นด้านร่วม. ครั้นเมื่อได้มุม $X\hat{P}O = R\hat{P}O$ แล้ว $\triangle XPO$
 ก็ $\equiv \triangle RPO$ โดย อ. น. ๔ เพราะ $XP = RP$ (รัศมีวงเดียวกัน)
 PO เป็นด้านร่วม

มุมในระหว่าง, $\hat{XPO} = \hat{RPO}$ (พิสูจน์ข้างบน)

$\therefore$ ในที่สุด $\hat{XOO} = \hat{RQX}$ จึงเป็นมุมฉาก (มุมประชิด)

XP จึง $\perp AB$

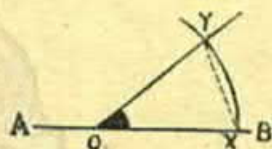
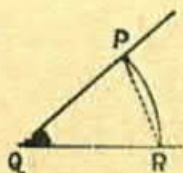
อนึ่งในการสร้างต้องตั้งจุด P กับ Q ให้ห่าง ๆ กัน เพราะถ้า
ตั้งชิดกันเกินไป วงกลมทั้งสองจะทับกันเสีย จะไม่ตัดกันให้เห็นที่ตรง
ตัดกระจำจ้ะ ครนนี้ขอให้ให้นักเรียนทดลองดู



เรขาคณิตที่ ๕

ที่จุดหนึ่งในเส้นตรงเส้นหนึ่งให้สร้างมุมให้เท่ามุมที่กำหนดให้

สร้างมุมเท่าๆ



สมมุติให้ O เป็นจุดภายในเส้นตรง A B จะต้องสร้างมุมให้เท่า $\hat{Q}$ ตรงที่กำหนดให้

(สร้างรูป) จุด Q เป็นศูนย์กลาง, รัศมีพอควร ขีดโค้งตัดข้าม Q ที่จุด P กับ R จุด O เป็นศูนย์กลางรัศมีเดียวกัน ขีดโค้งตัด A B ที่จุด X ขีดโค้ง R P ไปจุดที่ X ตัดโค้งนั้นที่จุด Y ขีดเส้น YO มุมที่เกิดขึ้นคือ $\hat{Y O X} = \hat{Q}$

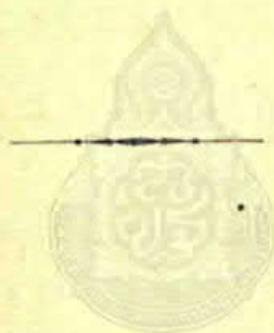
(พิสูจน์) ถ้ามุม $\hat{P R Q}$ ซึ่ง $= \hat{Y X O}$

ใน $\triangle P Q R$ กับ $Y O X$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} QP = OY \\ QR = OX \end{array} \right\}$ (รัศมีวงเท่า)
 และ $PR = YX$ (สร้าง)

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองจึงเท่ากันสนิท (๓ ด้านเท่ากัน)

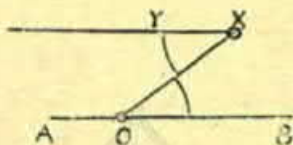
$\therefore \hat{Q} = Y \hat{O} X$



เรขาคณิตที่ ๒

จงลากเส้นตรงจากจุด ๆ หนึ่งนอกเส้น ๆ หนึ่งให้ขนาน
กับเส้นนั้น

ภาพเส้นขนาน



สมมุติให้ AB เป็นเส้นตรง X เป็นจุดนอกเส้น จะต้อง
ขีดเส้นตรงผ่านจุด $X \parallel AB$

(วิธีสร้าง) ในเส้นตรง AB ตั้งจุด O ลงแล้วขีดเส้นตรง
 XO สร้างมุม $OX Y$ ให้ $= X \hat{O} B$ (สร้างมุมตรงกะ) เส้น
 XY จะ $\parallel AB$

(พิสูจน์) $\therefore X \hat{O} B = O \hat{X} Y$ (สร้าง)

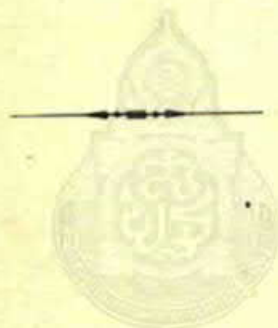
$\therefore XY$ จึง $\parallel AB$ (มุมแย้งเท่า)

หมายเหตุ เรขาคณิตที่ ๓ ที่ ๔ กับที่ ๒ นั้นไม่ค่อยจะได้
ใช้ตรงมวธรรมักจะสร้างด้วยไม้ฉากเสียโดยมาก เพราะสะดวกกว่ากัน
ถ้าต่อไปนักเรียนจะใช้ ไม้ฉากสร้างตามวิธีฉาก ก็อนุญาตให้ใช้ได้
แต่ต้องจำวิธีที่เรียนมานี้ไว้ โดยอย่าลืมเสีย

๑๓๓

เก้า

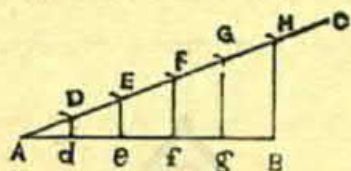
เรขานิเทศน์ไม่มีพิสุจน์ เพราะในวิธีสร้างมีหลักฐานผู้รับรองประกอบ
อยู่เสร็จแล้ว ไม่มีสิ่งใดที่ถกกันอยู่อย่างไม่ประจักษ์ว่าเป็นจริง เช่นจะสร้างมุม
ให้เท่ากัน ก็อ้างถึง ร. น. ๕ จะสร้างเส้นขนานก็อ้างถึงมุมแย้งเท่า อ. น. ๓๓
เป็นอันไม่มีสิ่งที่ต้องพิสุจน์ เพราะฉะนั้นจึงไม่ต้องพิสุจน์.



เรขาคณิตที่ ๗

ให้แบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน

แบ่งเส้นตรง



สมมุติให้ AB เป็นเส้นตรง จะต้องแบ่งออก x ส่วน
เท่า ๆ กัน

(วิธีสร้าง) ขีดเส้น AC จากจุด A จะให้ยาวเท่าใดก็ได้
กระทำมุมกับ AB ราว 30° กระเส้น AC ออก x ส่วนเท่ากัน
ทุกส่วนที่จุด D, E, F, G, H , ถากเส้น HB แล้วขีดจากจุด
 G, F, E, D , ต่อ ๆ มาขนานกับเส้น HB แบ่งเส้น AB ที่จุด
 g, f, e, d ออก x ส่วนเท่า ๆ กัน

(พิสูจน์) $\therefore$ เส้น HB, Gg, Ff, Ee, Dd ,
ตัด AH ออก x ส่วนเท่า ๆ กันก็จะมาตัด AB ออก x ส่วน
เท่ากันเหมือนกัน (ส่วนเส้นระหว่างขนาน)

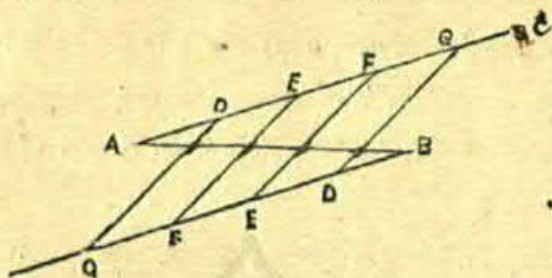
๑๓๕

แก้

ถ้าจะแบ่งเส้นกำหนดออกเป็นส่วน ๆ ก็ต้องกะ “ เส้นเพื่อแบ่ง ” คือ A C
ข้างบนออกเท่านั้นส่วนเหมือนกัน เช่นจะแบ่ง A B ออก ๕ ส่วนก็ต้องกะ A C
ออก ๕ ส่วนให้เท่ากันทุกส่วนเหมือนกัน ที่จะขีดเส้นเพื่อแบ่งขึ้นไปข้างบน
จะบรรจบกับ A B เป็นมุมเท่าใด ๆ ก็ได้ ถ้ามุมใหญ่ไปจะลำบากต่อการขีด
เส้นขนาด ๓๐° เป็นเหมาะ

การกะเส้นเพื่อแบ่งออกเป็นส่วน ๆ ไม่จำเป็นต้องพอเหมาะ เหลือได้
ขาดได้ เหลือก็ทิ้งเสีย ขาดก็ต่อออกไปอีก แต่ไม่การแบ่งให้ขาด เพราะ
ต้องต่อไม่สะดวก

เรขานิเทศที่ ๗ วิธีที่ ๒



(วิธีสร้าง) ชิดเส้น AC จากจุด A , B G จากจุด $B \parallel AC$ เส้นตรงข้าง AB แล้วกะ ๒ เส้นนั้น ออกเส้น
 ตะ (๕-๑) ส่วนเท่า ๆ กัน หมายถึงอักษร $DEFG$ ตากเส้น
 GD , FE , EF , DG เป็นอันแบ่ง AB ออก ๕ ส่วน
 เท่า ๆ กันแล้ว

(พิสูจน์) $\therefore FG \parallel ED$ และเท่ากัน (สร้าง)

∴ FE ∥ GD (ต่อกันต่อปลายขนานคู่เท่า)

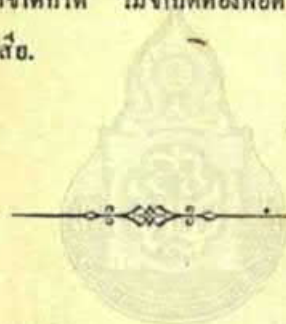
โดยทำนองนี้จะชนานกันหมด จึงมาแบ่ง A B ออกเท่า ๆ กัน

(ส่วนสั้นระหว่างขนาบ)

ក្រោយ

วิธีที่ ๒ ผิดกับวิธีที่ ๑ ที่ไม่ต้องจัดเส้นขนานหลายครั้ง เป็นแต่
ขีดมาหาจุดของมันเท่านั้น เพราะในวิธีที่ ๑ มีเส้นเพื่อแบ่งเส้นเคียว วิธี

ที่ ๒ มี ๒ เส้น และขนานกันด้วย เมื่อกระแสน เพื่อแบ่งต้องกะให้ต่ำกว่า
 ที่จะแบ่งเส้นกำหนดอยู่ ๑ ส่วนเสมอ ถือถ้าจะแบ่งเส้นกำหนด AB ออก
 ๕ ส่วน ต้องกะเส้นเพื่อแบ่งออก ๔ ส่วน อนึ่งเส้นเพื่อแบ่งเส้นล่างเส้น
 บนต้องกะเท่า ๆ กัน ทุก ๆ ส่วน จะแบ่งเส้นบนส่วนกว้างเส้นล่างส่วนแคบ
 ไม่ได้เป็นอันขาด FG ต้องเท่ากับ ED และต่อ ๆ ไปทุกส่วนทุกส่วน
 เท่ากันหมด, ไม่ว่าล่างหรือบน อีกประการหนึ่ง ไม่ว่าวิธีที่ ๑ หรือที่ ๒
 • เส้นเพื่อแบ่งจะเหลือก็ได้ขาดก็ได้ ไม่จำกัดต้องพอดี ถ้าไม่พอ ให้ตัดออก
 ไปอีก ถ้าเหลือก็ทิ้งเสีย.



แบบฝึกหัด (ไม่ต้องพิสูจน์)

(๑) ให้สร้างมุม 60° ด้วยไม้บรรทัดกับวงเวียนแล้วแบ่ง
ออก ๔ ส่วนเท่า ๆ กัน

(๒) ให้แบ่งมุมฉากออก ๓ ส่วนเท่า ๆ กัน (วิธี
คล้ายข้อ ๑)

(๓) วัดเส้นตรงยาว ๖.๗ เซนติเมตรกับให้แบ่งออก
๕ ส่วนเท่า ๆ กัน

(๔) ให้หา $\frac{9}{17}$ จากเส้นตรงยาว ๓.๗๒ นิ้ว

(พิสูจน์)

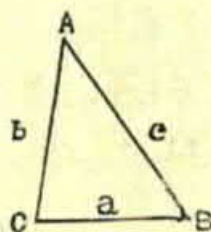
(๕) ในเส้นตรง XY ให้หาจุดใดจุดหนึ่ง ให้ระยะ
แต่เส้น AB กับ AC ที่ตัดกันนั้นเท่ากัน (เมื่อใดจะหาไม่ได้)

(๖) จากจุด P วัดเส้นตรง PY ลงมาหาเส้น AB
หามุมตามขนาดที่กำหนดให้

สร้างรูปสามเหลี่ยม เรขาคณิตที่ ๘

ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม กำหนดด้านทั้งสามให้
สร้าง $\triangle$ ด้านตามกะ

b- ~~del~~ a _____
c _____



สมมุติให้ a, b, c เป็นเส้นตรงแสดงความยาวของ
ด้านทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยมที่จะต้องสร้างขึ้น

ให้สร้าง $\triangle$ ด้านยาวเท่า a, b, และ c

(วิธีสร้าง) ชีตเส้น B C ให้ $= a$, C เป็นศูนย์กลาง
ด้วยรัศมี b ชีตโค้ง, B เป็นศูนย์กลาง, c เป็นรัศมีชดโค้ง
ตัดโค้งก่อนที่จุด A

๑๑ ผลเส้น A B, A C

A B C คือ รูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

หมายเหตุ สิ่งที่กำหนดให้เป็นส่วนยาวของด้านทั้งสาม

นั้นจะเขียนเป็นเส้นตรงตามเส้นก็ได้ หรือจะบอกให้เป็นมาตราชาว
ว่าด้านหนึ่ง—ยาวเท่าใด ๆ ก็ได้

ข้อสำคัญ ๑ ในการที่จะกำหนดเส้นตามเส้นลงไปให้เป็น
ด้านทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยมนั้น จะต้องให้เส้นกำหนดสองเส้น
ยาวกว่าเส้นกำหนดที่ ๓ (เพราะตามธรรมดา Δ ด้าน ๒ ด้านรวม
กัน ย่อมยาวกว่าด้านที่เหลือ) มิฉะนั้นเส้นโค้งสองเส้นที่ขีดนั้น
จะยาวไม่พอที่จะตัดกัน จะไม่ได้ส่วนของ Δ

ข้อสำคัญ ๒ โค้งสองเส้นที่ตัดกันที่จุด A นั้นถ้าตัดออกไป
ไปอีกคงไปตัดกันอีกแห่งหนึ่ง คือเส้น BC จึงเห็นได้ว่าตามวิธี
สร้างนี้ อาจทำรูปสามเหลี่ยมได้สองรูปและด้าน BC เป็นด้านรวม

การสร้างรูปสามเหลี่ยม

เราได้ทราบแล้วว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่จะเท่ากันต้องมีด้านที่
ต้องมีอวัยวะสามสิ่งเท่ากันดังต่อไปนี้ (สิ่งสามสิ่งเท่ากัน ไม่ใช่
สิ่งต่อสิ่ง รูปสามเหลี่ยมก็ยังไม่เท่า)

ถ้าประสงค์จะทราบรูป หรือขนาดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
ก็ต้องทราบอวัยวะสามสิ่งของรูปสามเหลี่ยมนั้นก่อนเหมือนกัน

(คำว่าอวัยวะนั้นได้แก่มุมกับด้าน) ในการสร้างรูปสาม
เหลี่ยมให้สำเร็จได้จะต้องได้รับอวัยวะที่กำหนดให้สามสิ่งเหมือนกัน

คือ:— สามารถจะสร้างรูปสามเหลี่ยมสำเร็จได้เมื่อ

(ก) ได้ด้านสองด้าน (b, c) กับมุมในระหว่าง (A)

กำหนดให้

(ข) เมื่อกำหนดมุมสองมุม (A, B) กับด้านด้านหนึ่ง
(a) ให้

(ในข้อนี้เมื่อเราทราบมุม A กับมุม B ว่าขนาดเท่าใดแล้ว

เราก็อาจทราบขนาดของมุมที่เหลือได้ (C)

$$\therefore A + B + C = 180^\circ.$$

ในการสร้างให้เขียนเส้น a ลงข้างปลายทั้งสองให้ทำมุม A

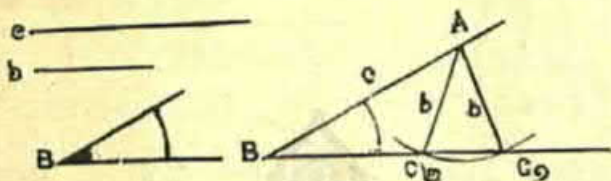
กับมุม B ตมมุม C นั้นก็จะได้ตามส่วน)

(ค) ถ้ากำหนดมุมให้สามมุม (ไม่ได้กำหนดด้านให้)
ผลที่ได้จะไม่จำกัด คือจะโคกได้จะเต็กก็ได้ โดยที่สิ่งทั้งสามที่กำหนด
ให้ขึ้น เป็นสิ่งเกี่ยวกันไป ไม่ต่างกัน กำหนด ๓ สิ่งก็เท่า
กับสองสิ่งเพราะอีกส่วนหนึ่งไม่ต้องกำหนดให้ก็ได้



เรขานิกเทศที่ ๙

ให้สร้าง $\triangle$ กำหนดด้านสองด้านกับมุมที่ตรงข้ามกับด้าน
กำหนดด้านหนึ่ง ให้
สร้าง $\triangle$ กะ ๒ ด้านมุมตรงข้าม ๑ มุม



สมมติให้ b, c เป็นด้านสองด้าน B เป็นมุม ๆ หนึ่ง
ที่กำหนดให้จะต้องสร้าง $\triangle$ ตามดังที่กำหนดให้

(วิธีสร้าง) ขีดเส้น B , ที่จุด B สร้างมุมให้เท่ามุม B

(ทำมุมตามกะ) แล้วตัดขวางนอกที่จุด A ให้เท่ากับ c จุด A
เป็นศูนย์กลาง b เป็นรัศมี ขีดโค้งนี้จะตัดเส้น B ออก ๒ จุด
คือที่จุด C_1 กับ C_2

รูปสามเหลี่ยม ABC_1 กับ ABC_2 จะเป็น $\triangle$ ที่
ต้องการทั้งสองรูป

หมายเหตุ โจทย์ชนิดนี้เรียกว่า “โจทย์ไม่แน่นอน”

(ambiguous case) ที่ข้อ ๒ ประการนี้จะเห็นโดยที่ด้าน b
สั้นกว่า a แต่ยาวกว่าเส้นตั้งฉากจาก A ลงมา BC

แบบฝึกหัด

ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมตามสิ่งที่กำหนดให้ข้างล่างนี้และแสดง
ให้เห็นในข้อใด ได้ผลเพียงหนึ่งและข้อใดได้ถึงสอง

(๑) เมื่อ b ยาวกว่า c

(๒) เมื่อ b เท่ากับ c

(๓) เมื่อ b เท่ากับเส้นตั้งใดฉาก แต่จุด A ลง

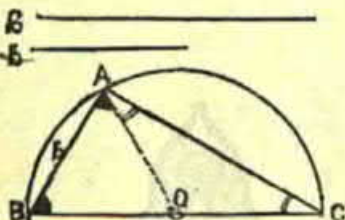
มา $B C$

(๔) เมื่อ b สั้นกว่าเส้นตั้งใดฉาก

เรขาคณิตที่ ๑๐

ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากด้วยด้านตรงฉาก กับอีกด้าน

หนึ่งกำหนดให้

สร้าง $\triangle$ ฉากด้วยตรงฉากกับด้าน a 

สมมติให้ a เป็นด้านตรงฉาก และ b เป็นด้านอีกด้านหนึ่ง
จะต้องสร้าง $\triangle$ มุมฉาก มี a เป็นด้านตรงฉาก มี b เป็นด้าน
อีกด้านหนึ่ง

(วิธีสร้าง) ขีดเส้น BC ยาวเท่า a แบ่งครึ่ง BC ที่
จุด O จุด O เป็นศูนย์กลางด้วยรัศมี OB (หรือ OC) ให้ขีด
โค้งครึ่งวงกลมจุด B เป็นศูนย์กลาง b เป็นรัศมีตัดครึ่งวงกลม
ออกที่จุด A ถ้าเส้น AB, AC
 ABC คือ รูป $\triangle$ มุมฉากที่ต้องการ

(พิสูจน์) ขีดเส้น OA

เพราะว่า $OA = OB$ (รัศมีวงเดียวกัน)

$\angle OAB$ จึง $= \angle OBA$ (มุมตรงข้ามด้านเท่า)

$$\therefore AO = OC$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA \quad (\text{มุมตรงข้ามด้านเท่า})$$

$$\therefore \angle BAC = \angle OBA + \angle OCA$$

$$= \frac{1}{2} \text{ หรือ } ๑๘๐^\circ \quad (\text{มุมของ } \triangle)$$

$$= ๙๐^\circ$$

$\triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ มุมฉาก

(ก)

ที่จะพิสูจน์ให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉากก็แปลว่า จะต้องพิสูจน์มุมของ $\triangle$ นี้เป็นมุมฉากอยู่มุมหนึ่ง

$\therefore$ จึงขีดเส้น AO แล้วดำเนินพิสูจน์คล้าย ร.น. ๓ วิธีที่ ๒ มุมที่ตรง A ข้างซ้าย = มุม B

..... A ข้างขวา = มุม C

$\therefore$ ทั้งซ้ายและขวา (คือ $\hat{A}$) นี้ = $\hat{B} + \hat{C}$ แต่ A, B, C เป็นมุมของ $\triangle$ เคียงกันรวมกันย่อมได้ ๑๘๐° $\therefore$ ต้องแบ่งให้ $\hat{A}$ ครึ่งหนึ่ง, $\hat{B} + \hat{C}$ ครึ่งหนึ่ง $\therefore \hat{A}$ จึงได้ ๙๐°

แบบฝึกหัด (สร้างรูป)

(๑) ให้เขียนแบบแผนรูปสามเหลี่ยม ด้านสองด้านวัดได้ ๓๑๕ เส้นแวง ๒๖๐ เส้น มุมในระหว่างวัดได้ ๓๙° (มาตราส่วน ๑ ต่อ ๑๙๒๐๐) แล้วให้วัดอีกด้านหนึ่งว่ายาวเท่าใด

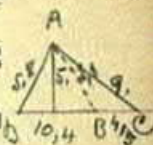
(๒) เรือเมดต้าหนึ่งเมื่อออกจากท่าแล่นไปข้างทิศตะวันออก
เฉียงเหนือ (กำลังความเร็ว ๙ นอตต่อหนึ่งชั่วโมง) เมื่อแล่นไป
ได้ ๒๐ นาที บ่ายหัวเรือไปข้างทิศตะวันตกเฉียงเหนือแล่นไปได้
 $๑๐\sqrt{2} = 6080 \text{ ft}$
๓๕ นาที ถามว่าเรือเมดต้าไกลจากท่าเท่าใดในเวลานั้น

(๓) มีถนนสองสายผ่านกันเป็นมุมฉาก ที่ตำบล A, แล้ว
ต่างก็แยกข้ามฝั่งพานข้ามคลองไปที่ตำบล B กับ C ฝั่งพานทั้งสองนี้
ไกลจากกันอยู่ ๔๖๑ เส้น แต่ตำบล A ถึงฝั่งพาน B นั้น ๒๖๑ เส้น
ถามว่าแต่ A ถึง C ก็เส้น

สร้างรูปและพิสูจน์

(๑) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้ฐานยาวเพียง
๔ เซนติเมตร ให้ระยะสูงยาว ๖.๒ เซนติเมตร จงพิสูจน์ตามทฤษฎี
สองนั้นเท่ากันด้านหนึ่งยาวเท่าใด

(๒) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ระยะสูงแก่จุด A
ลงมา BC ให้ยาว ๕.๐ เซนติเมตร กับให้ด้าน AB
กับ AC ยาว ๕.๘ กับ ๕.๐ เซนติเมตร วัดด้าน BC ว่า

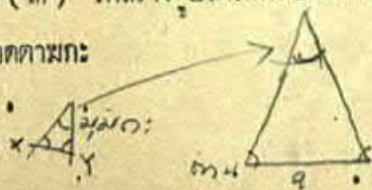


ยาวเท่าใด

(๓) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว บนฐานที่กำหนดให้

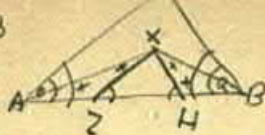
$\frac{a}{A}$ ตาม

มุมยอดตามกะ



(Perimeter) 13

๐.๔
๒.๔



$\Delta XZH \cong \Delta XH$ ครึ่งวงกลม ๑๔๘

(๔) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมกำหนดเส้นรอบรูป (perimeter)
และมุมที่ฐาน ทั้งสองมุมให้

การสร้างรูปสี่เหลี่ยม

ได้เรียนมาแล้วว่าในการสร้างรูปสามเหลี่ยมนั้น ถ้ากำหนด
ด้านให้สามด้าน ก็อาจทำได้สำเร็จได้ แต่ในการสร้างรูปสี่เหลี่ยม
หาเหมือนกันอย่างนั้นไม่ ถึงแม้ว่ากำหนดด้าน ๔ ด้านให้ ก็ไม่สามารถ
จะสร้างให้สำเร็จได้ ต้องกำหนดให้ ๕ สิ่งจึงจะเป็นอันทำได้



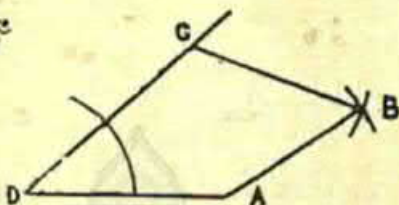
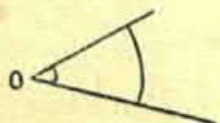
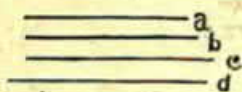
๑๔๖

เรขานิกะที่ ๑๑

ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยม

กำหนดด้านทั้งสี่กับมุม ๆ หนึ่งให้

สร้าง $\square$ ตาม มุมกะให้



สมมุติให้ $a b c d$ เป็นด้านทั้งสี่ และ O เป็นมุม ๆ หนึ่ง

กำหนดให้

ให้สร้าง $\square$ ตามสิ่งกะให้

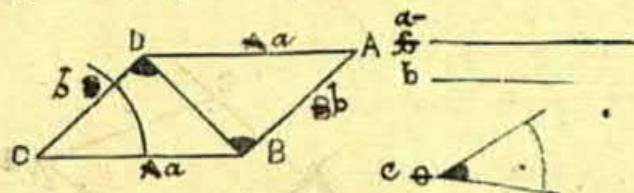
(วิธีสร้าง) ขีดเส้นตรง DA ยาวเท่าเส้น d ที่จุด D สร้าง

มุมเท่ามุม O ตัดขอบนอกให้เท่าเส้น c , ที่จุด C , จุด C เป็นศูนย์กลาง
 กว้างด้วยรัศมี b ขีดโค้ง, A เป็นศูนย์กลาง, a เป็นรัศมีขีดโค้ง
 ตัดเส้นก่อนที่จุด B ตัดเส้น BC, BA เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่ต้องการ



เรขาคณิตที่ ๑๒

ให้สร้าง $\square$ ด้านขนาน กำหนดด้านคู่ประชิดกับมุมในระหว่าง, ให้สร้าง $\square$ ขนานแก่ด้านคู่ประชิดกับมุมในระหว่าง



สมมุติให้ a กับ b เป็นด้านทั้งสอง และมุม C เป็นมุมในระหว่าง, ซึ่งจะให้

(วิธีสร้าง) วัดเส้น CB ให้ยาวเท่าเส้น a ที่จุด C สร้างมุม C ให้เท่ามุม C ที่กะ วัดขนานให้เท่า b ที่จุด D , จุด D เป็นศูนย์กลาง a เป็นรัศมีขีดโค้ง, B เป็นศูนย์กลางด้วยรัศมี b ขีดโค้งตัดกันก่อนที่จุด A , วัดเส้น AD กับ AB, CB, AD , เป็น $\square$ ขนาน ที่ประสงค์

(พิสูจน์) ถ้าวัดเส้น DB

ใน $\triangle CBD$ กับ $\triangle B A'D$

$$CD = BA \quad (\text{สร้าง})$$

เพราะว่า DB เป็นด้านร่วม

$$DA = CB \quad (\text{สร้าง})$$

๑๕๑

$$\therefore C \hat{D} B = D \hat{B} A \text{ (๓ ด้านเท่า)}$$

$$\therefore \text{เส้น } CD \parallel BA \text{ (มุมแย้งเท่า)}$$

$$\text{และเมื่อ } CD = BA \text{ (สร้าง)}$$

$$\therefore DA \overset{\text{จึง}}{\parallel} CB \text{ (ต่อคั่นต่อปลายขนานคู่เท่า)}$$

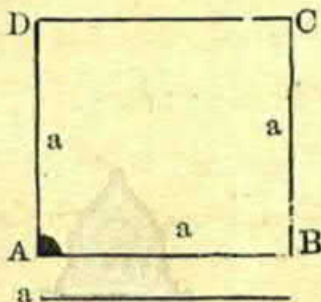
$$C B A D \overset{\text{จึงเป็น}}{\square} \text{ ขนาน ที่ต้องการ}$$

ไว้

โจทย์นี้บางทีนักเรียนจะสงสัยว่าทำไมจึงสร้างเป็น $\square$ ขึ้นได้ เพราะไม่ได้กำหนดคี่ให้ถึง ๔ ด้าน ะให้แค่เพียง ๒ ด้านเท่านั้น แต่ขอให้พิจารณา ก็จะทราบได้ว่า การที่กะให้ ๒ ด้าน ถือกว้างกับขยวนั้นก็เท่ากับกำหนดคี่ให้ ๔ ด้านเหมือนกัน เพราะตาม อ.น. ๒๒ บอกตรงว่า ด้านคู่ตรงข้ามของ $\square$ ด้านขนานย่อมเท่ากันจะนี้

เรขานิกเทศที่ ๑๓

ให้สร้างรูปจัตุรัส กำหนดด้านให้ด้านหนึ่ง
สร้างจัตุรัสกำหนด ๑ ด้าน



สมมุติให้เส้น a เป็นด้านที่กำหนดให้ ให้สร้างรูปจัตุรัส
มีด้านตามกำหนด

(วิธีสร้าง) ขีดเส้น $AB = a$ ที่จุด A ให้ขีดเส้น

$\perp AB$ แล้ววัดตัดออกไป $= AB$ (คือ AD)

จุด B กับจุด D เป็นศูนย์กลาง รัศมี AB ขีดโค้งตัดกันที่จุด C
ลากเส้น CD, CB

$ABCD$ จะเป็นรูปจัตุรัสตามประสงค์

(พิสูจน์) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้านเท่า

(สร้าง $\square$ ขนานละด้านคู่ประชิดกับมุม $\angle A$) เมื่อมุม A เป็นมุมฉาก
 $ABCD$ จึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมุมฉากคือรูปจัตุรัส

(วิธีที่ ๒) สร้างด้วยไม้ฉาก

ที่จุด A ขีดเส้น $AD \perp AB$ แล้วตัดเส้นนั้นออกที่จุด D

ได้ส่วนของ $AD = AB$ ขีดเส้น DC ผ่านจุด D $\parallel AB$ และขีด BC
ขนานกับ AD ผ่านจุด B ตัด DC ที่จุด C $ABCD$ จะเป็น
รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและ $AB = AD$ จึงเป็นรูปจัตุรัส

จุดวิถี (locus)

ถ้ามีผู้ขอให้หาจุดลงในแผ่นกระดาษ ผู้รับก็ยอมทำได้ตามใจ

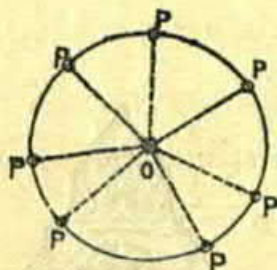
ไม่ว่าที่ตรงไหนและไม่ว่าที่จุดใดใดทั้งนั้น แต่ถ้าผู้ขอ ๆ ให้
ตั้งจุดให้ห่างจากมุมกระดาษ ๒ เซนติเมตร เช่นนั้นก็ยอมเป็นที่

กำหนดว่า เฉพาะจุดที่ห่างจากมุมกระดาษ ๒ เซนติเมตร จึงจะ
ใช้ได้ แต่ไม่ว่าที่จุดใดก็ตามก็ห่างจากมุม ๒ เซนติเมตร ก็ใช้ได้
ทั้งหมด เพราะฉะนั้นถ้าหาเป็นศูนย์กลางวงกลม ๒ เซนติเมตร

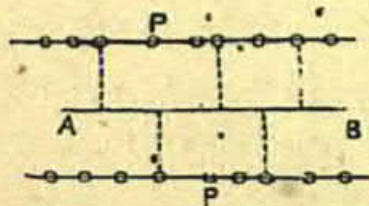
สร้างเขี้ยววงกลม ก็เป็นอันทราบได้ว่าสถานที่อยู่แห่งจุดกึ่งกลาง
ทั้งในแนวรอบวงนั้น จึงเป็นอันตั้งจุดลงได้ แนวสำหรับแห่งจุด
ที่ประสงค์เช่นนั้น ได้ชื่อว่า จุดวิถี

สแตงสัทท์ จุดวิถีของจุดใดจุดหนึ่ง คือหนทางที่จุดนั้น
เคลื่อนไปตามความประสงค์อันหนึ่ง

(เช่น) (๑) ต้องการให้จุด P เคลื่อนไป เฉพาะให้
ระยะทางแต่จุด O ถึงจุด P นั้นเสมออยู่ไม่สั้นไม่ยาว (ดังในรูป)
จุดวิถีของจุด P ก็คือเส้นรอบวงของวงกลมที่จุด O เป็นศูนย์กลาง
และ OP เป็นรัศมี



(๒) ต้องการให้จุด P เคลื่อนไปในหนทางเฉพาะให้ห่าง
จาก AB (๑ เซนติเมตร) เสมอเคลื่อนต่อไปตาม
จุดวิถีของจุด P คือ เส้นตรงทั้งสี่ของข้างเส้น AB และที่ห่าง
 AB อยู่ ๑ เซนติเมตร



จึงเห็นได้ว่าจุดวิถีของจุดใดจุดหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไปตามความ
ต้องการก็คือเส้น ๆ เดียวหรือหลายเส้น อันเป็นทางสว่างแจ้งว่าจุด

นั้นเคลื่อนไปตามแนวนั้น ถ้าจุดขาเคลื่อนไปพ้นจากแนวทางนี้ได้
แล้วทางนั้น ก็ไม่เป็นจุดวิถี

ถ้ามีจุดหลายจุดเป็นลำดับของด้วยกฎอันหนึ่ง และจุดที่
เคลื่อนจะต้องเคลื่อนให้ผ่านจุดเหล่านั้น ให้พูดว่า เขียนทางให้
วิถีจุด . (to plot the locus of a point)

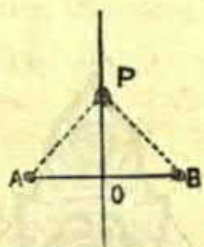
ตามที่กล่าวมาแล้ว ก็ย่อมเห็นได้ว่า การที่จะพิสูจน์ให้
เส้นตรงหรือเส้นโค้ง เส้นเดียวหรือหลายเส้นเป็นจุดวิถีได้ ก็คือจะ
ต้องพิสูจน์ ให้ประจักษ์ว่า

(๑) จุดของโจทย์ ย่อมอยู่ในวิถีที่ตอบ แปลว่าถ้าจุด
อยู่ในวิถีที่ตอบแล้ว จะสมดังประสงค์ของโจทย์

(๒) ถ้าจุดออกไปนอกวิถีที่ตอบ ก็จะผิดจากความหมาย
ของโจทย์ไป

เรขานิเทศที่ ๑๔

ให้หาจุดวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งเคลื่อนไปในหนทางเฉพาะให้
ระยะห่างยังจุดสองจุดเท่ากัน
จุดวิถีห่างจาก ๒ จุดเท่ากัน



สมมุติว่าจุด P จะต้องเคลื่อนไปให้ห่างจาก A กับ B เป็น
ระยะเท่ากัน ให้หาวิถีของ P

(วิธีสร้าง) วัดเส้นตรงแบ่งครึ่ง AB ได้ฉากที่จุด O (แบ่งครึ่งเส้นตรง)
เส้น O นี้ คือจุดวิถีที่ประสงค์

(พิสูจน์) ให้จุด P ไปหยุดที่ P ในรูป วัดเส้น PA,
PB ใน $\triangle PAO$ กับ PBO

$$\text{เพราะว่า } \left\{ \begin{array}{l} PO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ AO = BO \\ \hat{POA} = \hat{POB} \end{array} \right\} \quad (\text{สร้าง})$$

$\therefore P A = P B$ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

$\therefore$ เส้น $O P$ จึงเป็นจุดวิถึของจุด P สมประสงค์
 เค้า

เมื่อได้ทราบว่ใจทย์ต้องการจุดวิถึของ P ฉะนั้นให้ห่างจาก A กับ B เป็นหนทางเท่ากัน จึงหาว่าเส้นตรงที่ขีดแบ่งครึ่งเส้น $A B$ ได้ฉาก เป็นจุดวิถึ (แปลว่าขีดเส้นตรง A ถึง B แล้วแบ่งครึ่งโดย ร.น. ๒ ก็จะ $\perp A B$ เอง) ครั้นแล้วก็จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นนี้ ไม่ว่าแห่งใด (ตลอดเส้นที่เดียว) ห่างจากจุด A กับ B เท่ากันตลอด. จึงตั้งตำแหน่งลงในแนวเส้นแบ่งครึ่งได้ฉาก คือ P แล้วขีดเส้นระยะห่างยัง A กับ B พิสูจน์ได้ว่าเท่ากันโดย อ.น. ๔

$\therefore$ เส้น P ก็เป็นอันห่างจาก A กับ B เป็นระยะเท่ากัน จึงเป็นจุดวิถึ

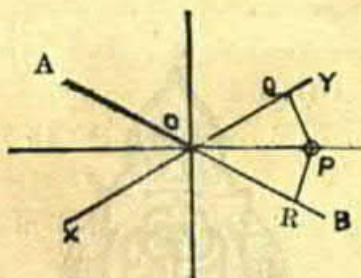
ข้ออนุมาน จุดวิถึซึ่งห่างจากจุดสองจุดเท่ากัน ย่อม $\perp$ ระยะห่างระหว่าง ๒ จุดตรงกึ่งกลาง

จุดวิถึห่างจาก ๒ จุด $\perp$ ระยะเคียง



เรขานิเทศที่ ๑๕

ให้หาจุดวิถีของจุดหนึ่ง ซึ่งเคลื่อนไปตามแนวเฉพาะให้
ห่างจากเส้นที่ตัดกันเป็นหนทางเท่ากัน
จุดวิถีห่างจากเส้นที่ตัดเท่ากัน



สมมุติว่าจุด P เป็นจุดเคลื่อนไปในแนวทางห่างจาก AB กับ
XY ซึ่งตัดกันที่จุด O เป็นระยะเท่ากันเสมอ

ให้หาวิถีของ P

(วิธีสร้าง) ชีตเส้นแบ่งครึ่งมุม (คือ $\angle YO B$) เกิดจาก
เส้นซึ่งตัดกัน เส้นเหล่านี้เป็นจุดวิถีที่ถูกต้อง

(พิสูจน์) ให้ P เป็นตำแหน่งที่จุด P ไปหยุด ชีตเส้น $\perp XY$
ที่จุด Q, $\perp AB$ ที่จุด R

ใน $\triangle POQ$ กับ POR

$$\text{เพราะว่า } \left\{ \begin{array}{l} P \hat{Q} O = P \hat{R} O \text{ (จากทั้งคู่โดยสร้าง)} \\ P \hat{O} Q = P \hat{O} R \text{ (สร้าง)} \\ O P \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$$

$$\therefore P Q = P R \text{ (๒ มุมกับด้าน ๑ เท่า)}$$

$\therefore$ เส้นแบ่งครึ่งมุมเป็นจุดวัดที่ประสงค์

(เพื่)

นักเรียนต้องเข้าใจคำว่า “จุดห่างจากเส้นตรงเท่าใด” ถึงเอาเส้นตรงจากจุด $\perp$ เส้นตรงนั้น

$\therefore$ จุด P ห่างจากเส้นตรงที่ตัดกัน ก็คือเส้นตรงจากจุดนั้นตั้งได้ฉากกับเส้นที่ตัดกันเส้นต่อเส้นนั่นเอง ก็เส้นตรงใดเล่า เมื่อขีดเส้นตรงจากแห่งหนึ่งแห่งใด ในแนวนั้นไป $\perp AB$ เส้นหนึ่ง $\perp XY$ อีกเส้นหนึ่ง แล้วเส้นตั้งได้ฉากทั้งคู่ย่อมเท่ากัน ก็อาจหาได้ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุม เพราะได้ทราบแต่ ร.น. ๑ แล้วว่าเส้นแบ่งครึ่งของมุมใด ๆ ย่อมห่างจากขาทั้งสองของมุมนั้นเท่ากัน

$\therefore$ จึงลงมือแบ่งครึ่งมุมแล้วพิสูจน์ ให้เส้น $\perp$ ขาทั้งสอง (คือเส้นที่ตัดกัน) จากแห่งหนึ่งแห่งใด (P) ในแนวเส้นแบ่งครึ่งนั้นให้เท่ากัน พิสูจน์ได้โดย อ.น. ๑๑ เส้นแบ่งครึ่งมุมจึงเป็นจุดวัดที่ตามประสงค์

ข้ออนุมาน จุดวัดซึ่งห่างจากเส้นตรงไขว้กัน, เท่ากัน, ย่อมแบ่งครึ่งมุมเกิดจากสองเส้นนั้น

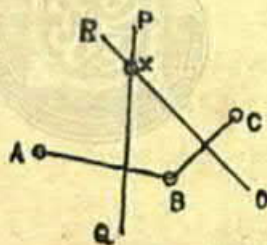
จุดวัดที่ห่างจากเส้นไขว้ แบ่งครึ่งมุม

จุดวิถีไขว้จุดวิถี

จุดวงนั้นอาจเอามาใช้ในการหาตำแหน่งของจุดซึ่งกระทำให้มีความประสงค์ถึงสองประการได้ ทั้งสองประการนี้ต่างก็จะมีจุดวิถี และจุดที่ตัดของกัน คือจุดที่จุดวิถีกับจุดวิถีไขว้กัน

อุทาหรณ์ที่ ๑ ให้หาจุด ๆ หนึ่งมีระยะทางแก่จุดตามจุด ซึ่งมีได้เรียงเป็นเส้นเดียว (A, B, C) นั้นเท่ากันหมด

(ก) จุดวงเฉพาะให้ระยะ แก่จุด A และจุด B เท่ากัน ต่อด คือเส้น P Q ซึ่งแบ่งครึ่ง A B ได้มุมฉาก

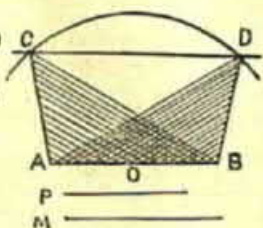


(ข) เช่นเดียวกันจุดวิถี ที่ระยะแก่ B และ C เท่ากัน คือเส้น O R ที่แบ่งครึ่ง B C ได้มุมฉาก

เพราะฉะนั้นจุดที่ตัดของกันซึ่งห่างจากเส้น AB และ BC เป็นระยะเท่ากัน คือจุด X ที่ตรงเส้น P Q กับ O R ไขว้กัน ซึ่งจะห่างจากจุด A, B และ C เป็นระยะเท่ากันหมด

อุทากรณที่ ๒ ให้สร้างรูป

สามเหลี่ยมกำหนดเส้นมัธยฐาน (median) ฐานกับระยะสูงให้, เส้น AB เป็นฐาน เส้น P เป็นระยะสูงและ M คือมัธยฐาน จะต้องสร้าง $\triangle$ ด้วยสิ่งกำหนดให้



สิ่งที่ต้องการในขั้นต้น คืออยากจะทราบว่าจอมของรูปสามเหลี่ยมจะอยู่ตรงไหน

$\therefore$ ให้ขีดเส้น $CD \parallel AB$, ห่างกันเท่าระยะยาวเส้น P (ระยะสูง) จอมของรูปสามเหลี่ยมจะอยู่ในแนวเส้น CD นี้ ภายหลังหาศูนย์กลางเส้น AB (จุด O) แล้วกระหวัดเวียนลงที่จุด O รัศมี M ขีดเส้นโค้งตัดเส้น CD ที่จุด Q กับ R จอมของรูป $\triangle$ จะต้องอยู่ในแนวเส้นโค้งนี้เหมือนกัน

เพราะฉะนั้นตำแหน่งที่สัมพันธ์กับความต้องการทั้งสองประการ ก็คือจะต้องอยู่ภายในเส้น CD กับภายในเส้นโค้ง จึงเป็นจุดที่เส้นโค้งตัดเส้น CD (จุด Q R) จึงได้รูปสามเหลี่ยมตามประสงค์ ในโจทย์นี้เส้นมัธยฐานยาวกว่าระยะสูง

ถ้าสิ่งที่กำหนดให้ ใน โจทย์เกี่ยวข้องกันมากเกินไปจนจุดวัดไม่ได้กันใด โจทย์นั้นก็ไม่สามารถจะทำให้สำเร็จได้เลย มัธยฐานคือเส้นขีดจากกึ่งกลางฐานไปสู่มุมตรงข้าม

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$

รูปที่ ๑๖๓ $OX = OY = OZ$



(๗) ให้หาจุดที่ห่างจากด้านทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยม เป็นระยะทางเท่ากัน



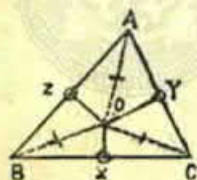
(๘) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมกำหนดเส้นฐานและระยะสูงให้ และต้องให้จุดของรูปสามเหลี่ยมนี้ อยู่ในแนวเส้นตรงที่กำหนดให้

สมุหะจุด (concurrence) บทแรก

เส้นตรงที่ลากตรงจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของ $\triangle$ ย่อมมาบรรจบ

กันแห่งเดียว

ซึ่งได้ลากตรงกึ่งกลางด้าน $\triangle$



สมมุติให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$

จุด X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางทั้งสาม กับสมมุติว่าที่จุด Z

กับจุด Y ได้ขีดเส้น $\perp AB$ และ $\perp AC$ มาบรรจบกันที่จุด O และลากเส้น OX แล้ว

ให้พิสูจน์ $OX \perp BC$ ด้วย

ขีดเส้น OA OB OC

$\therefore OY$ เป็นจุดวิถึที่ห่างจาก A จาก C เท่ากัน (ร.น. ๑๔)

$\therefore OA$ จึง $= OC$

$\therefore OZ$ เป็นจุดวิถึที่ห่างจาก A จาก B เท่ากัน

$\therefore OA$ จึง $= OB$

$\therefore OB$ จึง $= OC$ ($\because OA = OC$)

$\therefore O$ จึงเป็นจุดในแนวจุดวิถึที่ห่างจาก B จาก C เท่ากัน

$\therefore OX$ จึง $\perp BC$ ตรงกึ่งกลาง (จุดวิถึห่าง ๒ จุด, $\perp$ ระหว่าง

จุดตรงกลาง)

ย. ต. พ.

แก้

การพิสูจน์บทแทรกที่ ๑ นั้น คิดดู ร.น. ๑๔ เรื่องจุดวิถึที่ห่างจาก ๒ ตำบล
เป็นระยะเท่ากันนั้น ได้ทราบแล้วว่าจุดวิถึที่จะให้ห่างจาก ๒ ตำบลเป็นระยะ
เท่ากัน ต้องเป็นแนวตรงแบ่งครึ่งระยะห่างในระหว่าง ๒ ตำบลนี้ได้มุมฉาก
จึงทราบต่อไปว่า ถ้าแนวใดไปแบ่งครึ่งระยะห่างในระหว่าง ๒ ตำบลนี้ได้ฉาก
แล้วก็เป็นจุดวิถึเหมือนกัน อันปรากฏเป็นข้ออนุมานของ ร.น. ๑๔ นั้นแล้ว

$\therefore$ เมื่อ YO แบ่งครึ่ง AC ได้ฉากจึงเป็นจุดวิถึระยะห่าง OA
จึง $= OC$ เช่นเดียวกับ OA ก็ $= OB$ แต่ $OA = OC$ แล้ว
บันทึกบท $\therefore OB$ จึง $= OC$ (เพราะสิ่งที่เท่ากับสิ่งเดียวกันย่อมเท่ากัน)

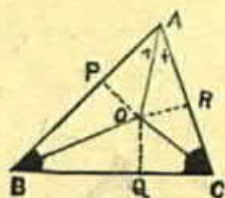
O X จึงเป็นจุดวิถี

O X จึงแบ่งครึ่ง BC ได้ฉากตรงกึ่งกลาง BC

∴ เส้นแบ่งครึ่งด้านได้ฉากไปบรรจบกันที่ O

อนึ่งเส้น $\perp$ ด้านที่ตรงกลาง, ๒ เส้นนั้นซ้อนไปบรรจบกันอยู่เองมีหลักฐาน
คือ ด้านของ $\triangle$ ไม่ขนานกัน เส้น $\perp$ ด้านตรงกลาง, จึงไม่ขนานกัน ∴ จึง
ไปบรรจบกันได้ จึงต้องพิสูจน์แต่ที่ $\perp$ ด้านที่ ๓ นั้นจะไปบรรจบตรงที่ ๒
เส้นไปบรรจบกันอยู่นั้น หรือไม่ยังเป็นปัญหา จึงต้องพิสูจน์แต่จะพิสูจน์ให้
เส้นไปบรรจบตรงที่ ๒ เส้นชนกันอยู่นั้นยากอยู่ ∴ จึงเถียงไปไข้อุบาย คือ
ขีดจากจุดที่เส้นตรงชนกัน (คือ O) ไปยังจุดกึ่งกลางด้านที่ ๓ แล้วพิสูจน์
ให้ตั้งได้ฉากภายหลังจะสะดวกกว่า ∴ จึงได้ขีดจาก O ยังจุด X นักเขียน
จงเข้าใจไว้

บทแทรกที่ ๒ เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยม ย่อม
รวมมาบรรจบกันแห่งเดียว
เส้นแบ่งครึ่งมุม $\triangle$ บรรจบ



สมมุติให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ กับสมมุติว่าได้แบ่งครึ่งมุม B, C
เลยไปชนกันที่จุด O กับได้ขีดเส้น O ยัง A แล้ว

ให้พิสูจน์ว่า OA แบ่งครึ่ง $\hat{A}$ ด้วย

แต่จุด O ขีดเส้น $OP, OQ, OR, \perp AB, BC$ และ AC
(พิสูจน์) $\therefore BO$ เป็นจุดวิถีห่างจากเส้น BA กับ BC เป็น
ระยะทางเท่ากัน

$$\therefore OP = OQ$$

เช่นเดียวกัน OC คือจุดวิถีห่างจาก CB กับ CA เท่ากัน

$$\therefore OR = OQ$$

$$\therefore OP = OR \quad (\because OQ = OR)$$

∴ $O A$ จึงเป็นจุดในวิถีห่างจาก $A B$ กับ $A C$ เป็นหนทางเท่ากัน

∴ $O A$ จึงแบ่งครึ่งมุม A (จุดวิถีห่างจากเส้น ๒ เส้นไขว้, ไปแบ่งครึ่งมุม)

ช. ต. พ.

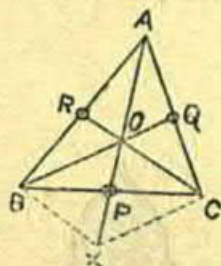
แก้ไข

ให้ผู้เรียนจำหลักพิสูจน์ บทแทรกที่ ๑ ไว้เอามาใช้ในบทแทรกที่ ๒ ก็จะเข้าใจได้ดี.

บทแทรกที่ ๓

มีเส้นแบ่งรูปสามเหลี่ยมย่อยรวมมาบรรจบ

กันแห่งเดียว

มีเส้นของ $\triangle$ บรรจบ

สมมติให้ $A B C$ เป็น $\triangle$ มีเส้น $R C$ กับ $B Q$ เป็นมีเส้น
ไปบรรจบกันที่จุด O กับสมมติว่าได้ลากเส้น $O A$ ต่อออกไปจุด
ฐาน $B C$ ที่จุด P

ให้พิสูจน์ $B P = P C$ ชีตเส้น $C X$ จากจุด $C \parallel B Q$,
ต่อ $A P$ ออกไปชนที่จุด X ชีตเส้น $X B$

(พิสูจน์) ใน $\triangle A X C$

$Q O$ แบ่งครึ่ง $A X$ (ช. น. ๒๓,)

ใน $\triangle A B X$ จุด R กับจุด O เป็นจุดกึ่งกลางด้าน $A B$ กับ
 $A X$ แล้ว

$\therefore B X$ จึง $\parallel R O$ (คือ $R C$)

$\therefore B O C X$ จึงเป็น $\square$ ด้านขนาน

$\therefore P$ จึงเป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC (เส้นทแยงมุม XO แบ่งครึ่ง BC โดยอนุ อ. น. ๒๒)

$\therefore AP$ เป็นมีเดียน

ท. ค. พ.

แก้

การพิสูจน์ บทแทรกที่ ๓ ขึ้นอยู่กับ อ. น. ๒๓ เมื่อ $CX \parallel OQ$ (โดยสร้าง) มีเส้นแบ่งครึ่งด้านหนึ่ง AC คือ $AQ = QC$ (สร้าง) ก็แบ่งครึ่งอีกด้านหนึ่ง คือ $AO = OX$ (อนุ, อ. น. ๒๓) อนึ่งเมื่อ $RB = RA$ แล้วและ $OX = OA$ แล้ว (สร้าง) จึงทราบได้ต่อไปโดยใช้อ. น. ๒๓ ว่า $BX \parallel RC$ เมื่อ $BX \parallel OC, CX \parallel OB$ ที่ตรงข้ามขนานกันแล้ว $O B X C$ ก็เป็นด้านขนานในรูป $\square$ ขนานนั้น เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกันเองอยู่

$\therefore P$ จึงเป็นจุดกึ่งกลาง BC , PA จึงเป็นมีเดียนอีกเส้นหนึ่ง จึงประจักษ์ว่าไปบรรจบที่ O มุกเส้น

สังเกตศัพท์ จุดที่มีเดียนไขว้กันให้เรียกว่า จุดเซ็นทรอยด์
ข้ออนุมาน มีเดียนทั้งสามต่างก็ตัดกันออกเส้นละสามส่วน

เท่า ๆ กัน และสองในสามส่วนอยู่ข้างมุมตามในรูปในทำโน้น
มีเดียนตัดกัน ๓ ส่วน

ได้พิสูจน์ไว้ว่า $AO = OP$ และ OP กึ่งของ OX คือ OA
เท่ากับหนึ่งในสามของเส้น AX เช่นเดียวกัน OQ จะเท่ากับ
หนึ่งในสามของเส้น BQ และ OR หนึ่งในสามของเส้น CR

อาศัยข้อนี้ อาศัยได้ว่า มีเส้นที่สั้น (หรือ RC)
ย่อมเป็นของด้านยาว

หมายเหตุ อาศัยพิสูจน์ให้เห็นต่อไปได้ว่าเส้นตั้งได้ฉากกับ
ด้านที่ตรงข้าม ย่อมรวมไปชนกันแห่งเดียว



โจทย์ฝึกหัด (กตละ)

(๑) จงขีดเส้นแบ่งครึ่งมุม $A O B$ โดยมีจุด O หัวมุม

(๒) P เป็นจุดกำหนดภายในมุม $A O B$ ขีดเส้นตรงตลอด P ไปสู่ $O A$ กับ $O B$ ให้ได้ P เป็นจุดกึ่งกลางเส้น

(๓) $O A, O B$ และ $O C$ ก็เส้นตรงสามเส้นที่รวมไป

• บรรจบกันที่จุด O ขีดเส้นตรงจุด $O A$ และ $O C$ ให้ได้ $O B$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง (สร้างเส้นแบ่งครึ่งตามความหมาย)

(๔) ประจุรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า (มุมไม่เป็นมุมฉาก) หรือ จตุรัส (rhombus) ลงในรูปสามเหลี่ยม $A B C$ และให้มุมใดมุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมทับมุม A

(๕) ให้ใช้หลักฐานจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คัดเส้นที่กำหนดให้ห้อยสามส่วนเท่า ๆ กัน

(สร้างรูปสามเหลี่ยม)

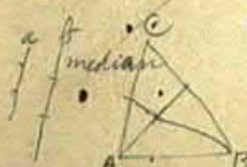
(๖) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมด้วยดังกำหนดต่อไปนี้

(ก) จุดกึ่งกลางด้านทั้งสาม

(ข) ด้านสองด้านกับมุมที่ติดกันของด้านที่สาม

(ค) ด้านหนึ่งกับมุมที่ติดกันของด้านที่เหลือสองด้าน

(ง) มุมที่ติดกันทั้งสามด้าน



ข้อนี้สร้างรูปสามเหลี่ยมด้วยวิธี complete A

ภาคที่ ๒

พื้นที่ (area)

แสดงศัพท์

(๑) ระยะเวลา (altitude) แห่งรูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือเส้นตรงตั้งฉากกับด้านหนึ่งไปจดด้านที่ตรงข้าม

(๒) ระยะเวลา แห่งรูปสามเหลี่ยมใดๆ คือเส้นตรงจากยอดตั้งฉากกับฐาน หรือ $\perp$ ฐานสูงขึ้นไปเสมอ ยอด

หมายเหตุ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูตั้งแต่ ๒ รูปขึ้นไปกับรูปสามเหลี่ยมด้วย ถ้าอยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกันระยะสูงย่อมเท่ากัน มิฉะนั้นก็เส้นเดียวกัน



(๓) พื้นที่ (area) ของรูปพื้นราบใดๆ คือ พื้นนํ้าทั้งหมดภายในเส้นอาณาเขตแห่งรูปนั้น

(๕) ตารางนิ้ว หรือ นิ้วตารางเหลี่ยม คือ พื้นที่

ของรูปจัตุรัสกว้างยาวหนึ่งนิ้วโดยรอบ



ตารางนิ้วหรือนิ้วตารางเหลี่ยม

เช่นเดียวกัน ตารางเซ็นต์เมตร กับ เซนต์เมตรตารางเหลี่ยม

ก็คือพื้นที่รูปจัตุรัส กว้าง ๑ เซนต์เมตร ยาว ๑ เซนต์เมตร



ถ้าพูดถึงตารางศอก, ตารางวา, ตารางเมตร ฯลฯ ก็ให้เข้าใจ

เช่นเดียวกัน

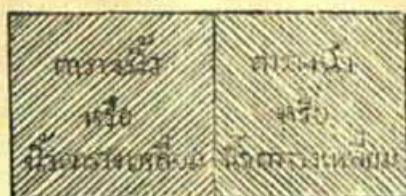
ผู้เรียนควรสังเกตว่า สอง, สาม, สี่, ห้า ฯลฯ ตาราง
นิ้ว คือ ศอก ฯลฯ กับ สอง, สาม, สี่, ห้า ฯลฯ นิ้ว,
คือ ศอก ฯลฯ ตารางเหลี่ยมนั้นจะเทียบให้ต่างกันก็ได้ให้
เหมือนกันก็ได้ แต่มิขอสำคัญอยู่ ความเข้าใจของผู้เรียนโดยมาก

ด้วยกันโน้นคณิ ดุเหมือนเห็นว่า ต้องคารางนิ้ว ๑๑ กับสองนิ้ว
 คารางเหลี่ยม ๑๑ นั้น ผิดกันมาก จะเหมือนกันมิได้ ด้วยความ
 เข้าใจเช่นนี้อาจจะทำให้คำคารางเหลี่ยม ดนัยถอยลง ไม่ใคร่
 จะได้ ไซ้กันแพร่หลายดังแต่ก่อน เพราะต่างคนต่างเกรงกันว่าจะเกิด
 เข้าใจผิดขึ้น โดยเหตุนี้จึงขออธิบายไว้ให้ทราบว่า อาจใช้ได้
 เหมือนกันไม่แปลกอะไร เว้นแต่ต้องเข้าใจใช้ความเข้าใจว่า ๒ นิ้ว
 คารางเหลี่ยมกับ ๒ คารางนิ้วต่างกันอยู่นั้นจะผิดก็หาไม่ได้, แต่ความ
 กิตเช่นนี้ ยังเข้าใจไม่ตลอด

๒ นิ้ว, คารางเหลี่ยม นั่นหมายเอารูปเช่นนี้

คารางนิ้ว หรือ นิ้วคารางเหลี่ยม	คารางนิ้ว หรือ นิ้วคารางเหลี่ยม
คารางนิ้ว หรือ นิ้วคารางเหลี่ยม	คารางนิ้ว หรือ นิ้วคารางเหลี่ยม

๒ ตารางนิ้ว หมายถึงอย่างนี้



๒ ตารางนิ้ว หรือ ๒ นิ้วตารางเหลี่ยม

ย่อมประจักษ์แล้วว่าต่างกัน จึงต่อไป

๒ นิ้ว, ตารางเหลี่ยม = 4 ตารางนิ้ว ที่คิดเช่นนี้ความ
เข้าใจจับหลักตารางเหลี่ยมไว้อย่างมั่นคงว่า เป็นรูปจัตุรัส ก็คือคิด
ว่า ๒ นิ้ว ตารางเหลี่ยมนั้นเท่ากับ ๒ นิ้ว, จัตุรัสเท่ากับรูปจัตุรัส
กว้าง ๒ นิ้ว ยาว ๒ นิ้ว.

และ ๒ ตารางนิ้วนั้นเข้าใจว่า ๑ ตารางนิ้ว + ๑ ตารางนิ้ว
๒ รูปด้วยกัน จึงเป็นเหตุให้เข้าใจว่า ๒ กันต่างกัน แต่ถ้าจะต่อ
ความเข้าใจให้ยาวออกไปอีกสักนิดไม่ได้หรือว่า ๒ นิ้วตารางเหลี่ยม
ก็คือ ๑ นิ้วตารางเหลี่ยม + ๑ นิ้วตารางเหลี่ยม ๒ รูปด้วยกัน ถ้า
เข้าใจเช่นนี้ก็ตรงกับรูปที่ ๒ ก็จะตรงกับ ๒ ตารางนิ้ว ก็จะไม่
ต่างกับ ๒ ตารางนิ้ว ก็จะใช้ปนเปกันไปได้ ก็จะหมดความ
เกรงกลัว ว่าผู้ฟังจะเข้าใจผิดนั้น เพราะฉะนั้น จึงได้เกิด ๒ นิ้ว,

ตารางเหลี่ยมกับ ๒ นิ้วตารางเหลี่ยมนั้นต่างกัน ควรเข้าใจได้คร่าว
 ะอย่าง, ๒ นิ้วตารางเหลี่ยม = ๑ นิ้วตารางเหลี่ยม + ๑ นิ้ว
 ตารางเหลี่ยม แต่ ๒ นิ้ว, ตารางเหลี่ยม = ต้องนิ้วจตุรัส = ๒ นิ้ว
 ยาว, ๒ นิ้วกว้าง = ๔ ตารางนิ้ว = ๔ นิ้วตารางเหลี่ยม

ถ้าจะให้เข้าใจว่า ๒ นิ้วตารางเหลี่ยมเป็นรูปจตุรัสกว้าง ๒ นิ้ว
 ยาว ๒ นิ้วแล้ว ควรเขียนหรือพูดอย่างนี้ ๒ นิ้ว ตารางเหลี่ยม
 (๒ นิ้ว.....ตารางเหลี่ยม)

ถ้าจะให้เข้าใจว่า ๒ นิ้วตารางเหลี่ยม เป็น ๑ นิ้วตารางเหลี่ยม
 ๒ รูปด้วยกัน ควรเขียนหรือพูดว่า ๒ นิ้วตารางเหลี่ยม (๒ นิ้ว
 ตารางเหลี่ยมให้ ตัดกันไป) เช่นเดียวกับ ๒ ตารางนิ้วเหมือนกัน

(๖) พื้นที่เป็นตารางนิ้ว, ศอก, วา, ฯ คือพื้นที่คิดเป็น
 รูปจตุรัสกว้างยาว ๑ นิ้ว ศอก, วา ฯ กล่าวคือ พื้นที่ ๒๐ ตารางวา
 ก็ต้องเข้าใจว่า พื้นที่รูปจตุรัสกว้าง ๑ วา ยาว ๑ วา ๒๐ รูป.

อุประมายืนเทศที่ ๒๔

ในรูป □ มุมฉาก ด้านกว้าง ๆ เท่าใด, ด้านยาว ๆ เท่าใด
ไปคูณกัน, ^{ซึ่ง}พื้นที่จะวัดได้เท่าใดคุณนั้น
ยาว × กว้าง = พื้นที่

D	4	4	4	4	4	C
	3	3	3	3	3	
	2	2	2	2	2	
	1	1	1	1	1	
A	๑	๒	๓	๔	๕	B

สมมุติให้ A B C D เป็น □ มุมฉากยาว ๕ ยูนิตกว้าง

๔ ยูนิต,

ให้พิสูจน์ว่า พื้นที่วัดได้ (๕ × ๔) ตารางยูนิตแบ่ง
AB ออก ๕ ส่วนเท่า ๆ กัน (ส่วนละ ๑ ยูนิต) และแบ่ง BC
ออก ๔ ส่วนเท่า ๆ กัน (ส่วนละ ๑ ยูนิต) ขีดเส้นติดต่อกันส่วนแบ่ง
ทั้งหลายนั้น เป็นอันได้แบ่งรูป □ มุมฉากออกเป็นห้อง ๆ แล้วห้อง
หนึ่ง ^{ซึ่ง}พื้นที่ได้ ๑ ตารางยูนิต ทั้งหมดมีอยู่ ๔ แถว ๆ ละ ๕ ห้อง (คือ
ตารางยูนิต)

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจัตุรัสพื้นที่ (๕×๕) ตารางศอก

ช. ต. พ.

หมายเหตุ ถ้าเป็นรูปจัตุรัสด้านยาว x ยูนิต จะได้พื้นที่
 $x \times x = x^2$ ตารางยูนิต จึงได้กฎว่า

(๑) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ยาว $\times$ กว้าง

(๒) พื้นที่ของจัตุรัส = (ด้านหนึ่ง)^๒

ข้ออนุมานที่ ๑ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมดถ้ากว้างเท่ากัน
 ยาวเท่ากัน ย่อมได้พื้นที่เท่ากัน

ข้ออนุมานที่ ๒ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่พื้นที่เท่ากัน ถ้ายาว
 เท่ากัน ย่อมกว้างเท่ากัน, ถ้ากว้างเท่ากัน ย่อมยาวเท่ากัน

เพื่อ

ที่พูดว่ากว้างเท่าใด ไปคูณที่ยาวเท่าใด พื้นที่วัดได้เท่านั้น ก็เท่ากับว่ากว้าง $\times$ ยาวเป็นพื้นที่นั่นเอง แต่ถ้าวัดตรงแล้วจะเห็นได้ การพูดว่า
 กว้าง $\times$ ยาวเป็นพื้นที่นั้นค่อนข้างสับสน เว้นแต่ความเข้าใจมืออยู่ทุกท่านแล้ว
 จึงนำไปเข้าใจถูกต้องไปได้ เพราะกว้างก็คือด้าน, ยาวก็คือด้านวัดกันด้วยมาตรายาว
 เอาไปคูณกันเรื่องอะไรจะเว้นพื้นที่ไปได้ คุณกันก็ตกลงกันเป็นจำนวนเลขที่จะ
 เป็นที่ทางไปนั้นได้หรือ

∴ จึงต้องพูดว่าคุณถนัดแล้วตกถักเป็นพื้นทั่วได้เท่านั้น

อีกประการหนึ่ง ในข้ออนุมาณที่ว่ารูป ☐ มุมฉากทั้งหมดนั้น ผู้เขียน
ต้องเข้าใจตลอดถึงรูปจัตุรัสด้วย เพราะรูปจัตุรัสก็เป็น ☐ มุมฉากชนิดหนึ่ง
แต่มีด้านเท่ากันหมดเสีย จึงมีชื่อพิเศษไปเท่านั้น

ข้อบังคับของ ☐ มุมฉากก็อาจใช้สำหรับ ☐ จัตุรัสได้เหมือนกัน



(การอ่าน)

คำว่า □ มุมฉาก A B C D นั้น ให้เข้าใจว่ารูปนั้น
 A B เป็นด้านยาว, B C เป็นด้านกว้าง เพราะว่าเส้นคู่เคียง
 ทั้งสองนี้ ย่อมกำหนดตั้งฐานทรวงดตรงและขนาดของรูปสี่เหลี่ยม
 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านคู่เคียง A B กับ B C จะเรียกสั้น ๆ ว่า
 A B. B C หรือเรียกให้สั้นยิ่งขึ้นไปอีกว่า A C หรือ B D
 คือเรียกเส้นทแยงมุมนั้นก็ได้ รูปจัตุรัสมี A B เป็นด้าน จะเรียก
 ว่า A B ตารางเหลี่ยม หรือ A B² ก็ได้



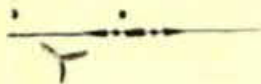
แบบฝึกหัด

มาตรายาวและตารางเหลี่ยม

(๑๘) ให้สร้างรูปแสดงให้เห็นเหตุใด

(ก) ๑ ตารางศอก $\frac{1}{2}$ = ๒ ตารางคืบ(ข) ๑ ตารางวา $\frac{1}{2}$ = ๔ ตารางศอก

(๒) ให้สร้างรูปแสดงให้เห็นเหตุใด

รูปจัตุรัสบนเส้นตรงเส้นหนึ่งจึงจุดที่ ๔ เท่ารูปจัตุรัสบน
เส้นนั้น(๓) ให้ใช้กระดาษตัดเป็นรูปจัตุรัสแสดงให้เห็นว่ารูปจัตุรัส
บนเส้นตรงยาวหนึ่งนิ้วนั้นเป็น (๑๐) เท่า รูปจัตุรัสบนเส้นตรง
ยาว ๐.๑ นิ้ว

เพิ่มเติมอุประมายนิเทศที่ ๒๔

พจน์ของ อ. น. ที่ ๒๔ นั้น พดถึงแต่รูปดีเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านวัดได้จำนวนเต็ม คือไม่มีเศษ แต่ข้อบังคับหรือสูตรของบทนี้ใช้ได้ทั่วไป ไม่ว่าจำนวนเต็มหรือทศนิยม สมมุติให้ด้านยาว ๆ ๓.๒ เซนติเมตร ด้านกว้าง ๒.๔ เซนติเมตร

จะแสดงให้เห็นว่าพื้นที่เท่ากับ (๓.๒×๒.๔)

เซนติเมตรตารางเหลี่ยม

ด้านยาววัดได้ ๓.๒ เซนติเมตร คือ ๓๒ มิลลิเมตร
ด้านกว้างวัดได้ ๒.๔ เซนติเมตร คือ ๒๔ มิลลิเมตร

$$\begin{aligned} \therefore \text{พื้นที่} &= (๓๒ \times ๒๔) \text{ มิลลิเมตรตารางเหลี่ยม} \\ &= \frac{๓๒ \times ๒๔}{๑๐๐} \text{ เซนติเมตรตารางเหลี่ยม} \\ &= (๓.๒ \times ๒.๔) \text{ เซนติเมตรตารางเหลี่ยม} \end{aligned}$$

ร. ต. พ.

แบบฝึกหัด

(พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก)

(๑) ให้เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ด้านกว้าง ก. กับด้านยาว ข.
 นั้นได้บอกไว้ข้างล่าง. ให้คำนวณพื้นที่ แล้วตอบสิ่งที่ได้ โดยนับ
 รูปจัตุรัส (ดังรูปใน อ. น. ที่ ๒๔)

(๑) $ก = ๓$ นิ้ว, $ข = ๓$ นิ้ว, (๒) $ก = ๑.๕$ นิ้ว, $ข = ๔$ นิ้ว

(๒) $ก = ๐.๘$ นิ้ว, $ข = ๓.๕$ นิ้ว, (๒) $ก = ๒.๕$ นิ้ว, $ข = ๑.๔$ นิ้ว

(๕) $ก = ๒.๒$ นิ้ว, $ข = ๑.๕$ นิ้ว, (๑) $ก = ๑.๖$ นิ้ว, $ข = ๒.๑$ นิ้ว

(๒) ให้คำนวณพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ด้านยาวและด้าน
 กว้างวัดได้ดังต่อไปนี้

(๑) $ก = ๑๘$ เมตร, $ข = ๑๑$ เมตร, (๒) $ก = ๗$ วา,
 $ข = ๗๒$ คืบ

(๓) $ก = ๒.๕$ กิโลเมตร, $ข = ๔$ เมตร

(๔) $ก = \frac{๑}{๔}$ ไมล์, $ข = ๑$ อินช์

(๓) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ ๓๐ เซนติเมตรตาราง
 เหลี่ยมแต่ด้านยาววัดได้ ๖ เซนติเมตร ให้หาว่าด้านกว้าง

แล้วให้เขียนรูปลงในกระดาษแข็งตาราง ตอบคุโดยนับ
ตาราง ว่าจะได้ ๓๐ จริ่งหรือไม่

(๔) (ก) เมื่อตัดด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากออกไปให้ยาวสามเท่าของเก่า แต่ด้านตั้งคงเดิม จะได้ พื้นที่มากขึ้นไปกี่เท่าของพื้นที่เดิม

(ข) เมื่อตัดทั้งด้านยาวและด้านกว้างออกไปด้านละสามเท่าของเก่า พื้นที่จะมากขึ้นกี่เท่าของเก่า

เขียนรูปแสดงผลที่ได้กับบอกกฎที่เขามาใช้

(๑) ในแผนผัง รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ด้านยาว ๆ ๓.๖ นิ้ว และกว้าง ๆ ๒.๕ นิ้ว (มาตราส่วน ๑ คือ ๑๙๘) ให้คำนวณหาพื้นที่

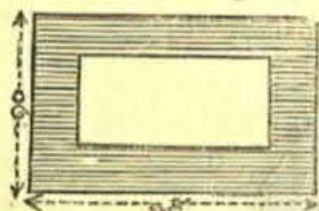
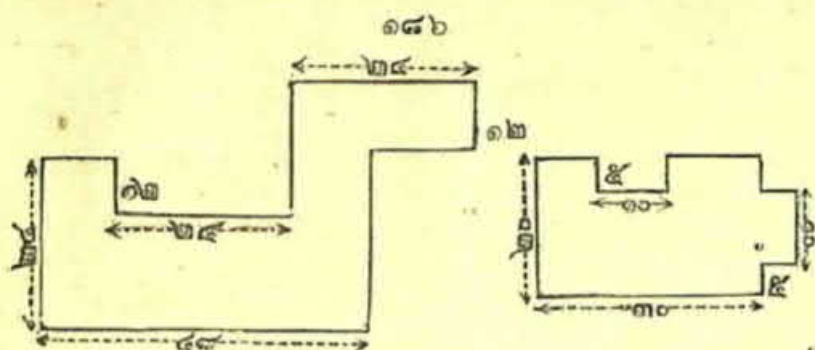
(๒) ส่วนคำบดนี้ ถ้าเพิ่มพื้นที่เข้า ๓๐๐ ตารางวา ด้านยาวจะยาวหมดด้วยกันเท่าใด ในแผนผังจะต้องให้ด้านยาว ๆ เท่าใด

(๓) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพื้นที่ ๑๔๕๐ ตารางวา ได้เขียนแผนที่ด้านยาว ๓.๒ เซนติเมตร ด้านกว้าง ๔.๕ เซนติเมตร แผนที่นี้ใช้มาตราส่วนเท่าใด

(๔) พื้นที่ของนารูปดีที่ถี่ยิบมุดจากตาบดหนึ่ง กำหนด
ได้ ๕๒๐๐๐ ตารางเมตร ได้เขียนแผนที่ลง ไร่มาคราส่วน ๑ นิ้ว
ต่อ ๑๐๐ เมตร ถามว่าส่วนกว้างในแผนที่นี้เท่าใด

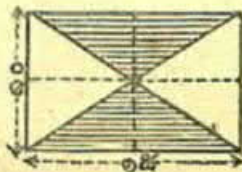
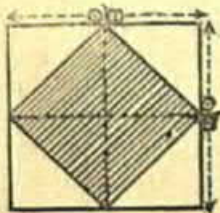
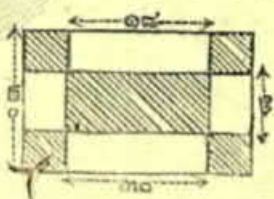
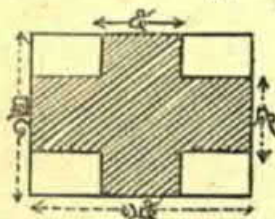
(๕) ให้หาพื้นที่ของที่ดินต่อไปนี้
ด้านคิดเป็นวา มุมเป็นมุมฉากทุกมุม





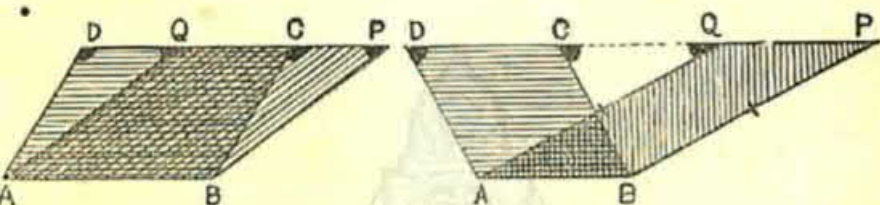
ส่วนระบายกว้าง ๒ ๑/๒ ๑๐

ส่วนระบายกว้าง ๔ ๑๐



อุปมาณียะเทศที่ ๒๕ (ยุคติด เต็ม ๑ บท ๓๕)

- ด้านขนานบนฐานเดียวกัน และในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน (ระยะสูงเดียวกันหรือเท่ากัน) ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน
- ขนานร่วมฐานระหว่างขนานพื้นที่เท่า



สมมติให้ $ABCD$ กับ $ABPQ$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนฐานเดียวกัน AB และระหว่างเส้นขนานคู่ AB กับ DP

ให้พิสูจน์ พื้นที่ของรูปทั้งสองนี้เท่ากัน

(พิสูจน์) ใน $\triangle A Q D$ กับ $\triangle B P C$

$$AQ = BP \quad (\text{ด้านตรงข้าม } \square \text{ ขนาน})$$

เพราะว่า $\angle QAD = \angle PBC$ (มุมนอก = ในตรงข้าม)

$$\angle ADQ = \angle BCP \quad (\dots)$$

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยมเท่ากันสนิท (๒ มุมกับด้าน ๑ เท่า)

$$\therefore \square BAPD - \triangle AQD = \square ABPD - \triangle BPC$$

$$\therefore \square \text{ชาน, } ABPQ = ABCD$$

ช. พ. ค.

เพิ่มเติม $\square$ ด้านชาน ถ้าฐานเท่าหรือเดียวกันระยะสูง

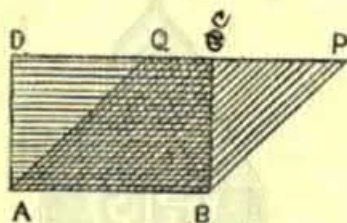
เท่าหรือเดียวกัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

แก้

* สิ่งทั้งหลายที่เท่ากัน ถ้าเอาสิ่งอื่นที่เท่ากันอยู่แล้วมาหักออกเสีย

ผลที่เหลือก็ยิ่งเท่ากันอยู่

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(กฎ) พื้นที่ □ ขนาน = ฐาน $\times$ ระยะสูงพิสัย $A B P Q$ คือ □ ด้านขนาน และ $A B C D$ คือ□ มุมฉากได้สร้างเส้นบนฐานเดียวกัน $A B$ และระยะสูงเส้นเดียวกัน $B C$ หรือ $A D$ (ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน $A B$ กับ $D P$)ตาม อ. น. ที่ ๒๔ พื้นที่ □ ด้านขนาน $A B P Q =$ พื้นที่□ มุมฉาก $A B C D$ แต่ □ มุมฉากมีพื้นที่

$$= A B \cdot B C \text{ (ยาว} \times \text{กว้าง) } \therefore \square \text{ ด้านขนานก็พื้นที่}$$

$$= A B \cdot B C \text{ เหมือนกัน}$$

$$= \text{ฐาน} \times \text{ระยะสูง} \text{ (} \because B C \text{ เป็นระยะสูงของ } \square \text{ ขนาน)}$$

แบบฝึกหัด

(๑) พื้นที่ □ ด้านขนาน A B C D คำนวณได้ ๔.๒ นิ้ว
 ตารางเหลี่ยมฐาน A B ยาว ๒.๘ นิ้ว ให้หาคะยะสูง ถ้า A D
 ยาว ๒ นิ้ว ให้สร้าง □ ด้านขนานนี้

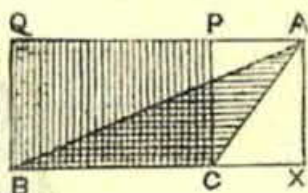
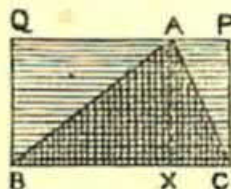
(๒) □ ด้านเท่า ด้านหนึ่งยาว ๒ นิ้ว และพื้นที่คำนวณ
 ได้ ๓.๘๖ ตารางเหลี่ยม ให้หาคะยะสูง แล้วเขียนรูปลงวัดมุม
 แห่มุมแห่งรูปนี้ดูว่าขนาดเท่าใด



อุปรมยนิเทศที่ ๒๖

พื้นที่รูปสามเหลี่ยมย่อมเท่ากับกึ่งหนึ่งของ □ มุมฉากบนฐาน
เดียวกัน ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน

$$\Delta = \frac{1}{2} \square \text{ ฐานเดียวกัน สูงเดียวกัน }$$



สมมุติให้ $\triangle ABC$ เป็น Δ และ $BCPQ$ เป็น $\square$ มุม
ฉากบนฐานเดียวกัน BC และระยะสูงเดียวกัน AX

$$\text{ให้พิสูจน์ } \triangle ABC = \frac{1}{2} BCPQ$$

(พิสูจน์) Δ มุมฉาก $AXB = \frac{1}{2} BXAQ$ (ทแยงมุม
แบ่งครึ่ง $\square$ ขนาน)

$$\triangle AXC = \frac{1}{2} \cdot XC \cdot PA \quad (\text{เหตุเดียวกัน})$$

$$\text{รูปที่ ๑ บวก รูปที่ ๒ ได้, } \triangle ABC = \frac{1}{2} BCPQ$$

จ. ต. พ.

แก้

รูปที่ ๑ ใช้สำหรับ $\triangle$ มุมแหลม รูปที่ ๒, $\triangle$ มุมบ้าน แต่ $\triangle$ มุม
ถากนั้นย่อมเป็นจริงโดยอาศัย อ. น. ๒๒ คือเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่ง $\square$ ขนาด
อยู่แล้ว

ในการพิสูจน์ทั้งสองรูปนี้ อาจพิสูจน์ไปพร้อมกันได้ในตอนต้น แต่
ตอนปลายที่จะได้สมพจน์นั้นต้องแยก เพราะรูปที่ ๑ บวกกัน รูปที่ ๒ ลบกันจึง
จะได้ผล

$$\text{คือเมื่อ } A \times B = \frac{a}{2} B \times A Q$$

$$\text{และ } A \times C = \frac{a}{2} C \times A P$$

รูปที่ ๑ ต้องบวกจึงจะได้ $\triangle A B C$ คือ

$$A \times B + A \times C = \frac{a}{2} B \times A Q + \frac{a}{2} C \times A P$$

$$A B C = \frac{a}{2} (B \times A Q + C \times A P) = \frac{a}{2} B C P Q$$

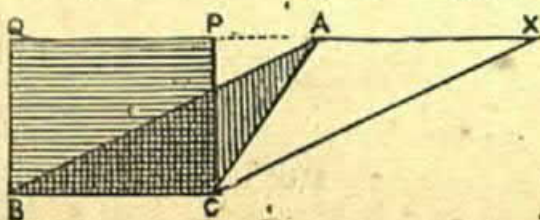
ส่วนรูปที่ ๒ ต้องลบจึงจะเหลือ $\triangle A B C$ คือ

$$A \times B - A \times C = \frac{a}{2} B \times A Q - \frac{a}{2} C \times A P$$

$$A B C = \frac{a}{2} (B \times A Q - C \times A P) = \frac{a}{2} B C P Q$$

รูปที่ ๒ นั้นจะพิจารณาให้เห็นจริงยาวมาก ถ้าแรกเขียนน้อยคนจะให้เห็น

$\therefore$ จึงพิสูจน์ไว้ให้เห็นอีกวิธีหนึ่งสำหรับ $\triangle$ มุมบ้าน คือ



ขีดเส้น $CX \parallel BA$, ต่อ QA ออกไปบรรจบ ที่จุด X
 (พิสัย) $\triangle ABC = \frac{a}{2} BCXA$ (ทแยงมุมแบ่งครึ่ง $\square$ ขนาน)
 แต่ $BCXA = BCPQ$ ($\square$ ขนานฐานตั้งและระยะสูงเท่า)
 $\therefore \triangle ABC = \frac{a}{2} BCPQ$ ด้วย

ข. ต. พ.

ผู้เรียนจะใช้วิธีนี้ก็ได้ง่ายกว่าวิธีที่ ๑ แต่มีเสียที่พิสัย ไปกับรูปที่ ๑
 ไม่ได้ ต้องแยกรูปต่างหาก. อีกประการหนึ่ง ถ้าจะให้ง่ายกว่านี้อีก
 ก็ให้ใช้พิสัยอย่างวิธีที่ ๑ รูปที่ ๑ เสียก็ได้ แต่ต้องหงายเอา $\hat{C}$ ขึ้นเป็นจอม
 BA ฐาน. อนึ่งในข้ออนุมานว่า $\triangle$ จะเป็น $\frac{a}{2} \square$ ขนาน นั้น ผิดกับ
 อ. น. ๒๖ แต่เฉพาะที่ว่า $\square$ มุมฉากเป็น $\square$ ขนานไป ขอให้ผู้เรียนจงสังเกต
 ไว้ เขาเหยียด $\square$ ฉากเป็น $\square$ ขนานได้นั้น เพราะความรู้อยู่ที่ว่า $\square$ ฉากก็
 อยู่ในจำพวก $\square$ ขนานเหมือนกัน แปลกแต่ที่มุมเป็นมุมฉากเท่านั้น จึงได้
 ชื่อพิเศษไป

ข้ออนุมาน $\triangle$ ที่มีฐานและระยะสูงเท่ากันกับ $\square$ ขนายน้อย
 ได้พื้นที่ $\square$ ขนายนั้น

$$\triangle \frac{a}{2} \square \text{ ขนาน}$$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

$$\text{พื้นที่ } \triangle = \frac{\text{ฐาน} \times \text{ระยะสูง}}{2}$$

หรือ กึ่งฐาน $\times$ ระยะสูงหรือ กึ่งระยะสูง $\times$ ฐาน(พิสูจน์) ให้ B C ยาว x ยูนิต C P ยาว y ยูนิตB C P Q = $x y$ ตารางยูนิต

$$\therefore A B C = \frac{x y}{2} \text{ ตารางยูนิต } (\triangle = \frac{1}{2} \square \text{ ขนาด})$$

แต่ B C คือฐาน, C P เป็นระยะสูงของ $\triangle$ ได้

$$\therefore \text{รูปสามเหลี่ยม} = \frac{\text{ฐาน} \times \text{ระยะสูง}}{2}$$

$$= \text{หรือ } \frac{1}{2} \text{ ฐาน} \times \text{ระยะสูง}$$

$$= \text{หรือ } \frac{1}{2} \text{ ระยะสูง} \times \text{ฐาน}$$



แบบฝึกหัด

(คำนวณ)

(๑) ให้คำนวณหาพื้นที่ $\triangle$ ต่อไปนี้

(ก) ฐานยาว ๒๔ ศอก, ระบายสูง ๑๕ ศอก,

(ข) ฐานยาว ๔.๘ นิ้ว ระบายสูง ๓.๕ นิ้ว

(ค) ฐานยาว ๑๖๐ เมตร สูง ๑๒๕ เมตร

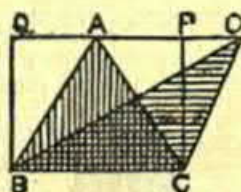
(๒) รูปสามเหลี่ยมคำนวณได้พื้นที่ ๘๐ นิ้วตารางเหลี่ยม
 ฐานยาว ๑ ศอก ๘ นิ้ว ระบายสูงเท่าใด และอีกรูปหนึ่งพื้นที่ได้
 ๑๐.๔ ตารางเซนติเมตร ระบายสูง ๑.๖ เซนติเมตร ฐานยาวเท่าใด

(๓) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC a ยาว ๓ นิ้ว
 b ยาว ๒.๘ นิ้ว, c ยาว ๒.๖ นิ้ว ให้วัดเส้นตรงขีดแต่ A
 ลงมา $\perp BC$ แล้วคำนวณพื้นที่

อุปมาณียนเทศที่ ๒๗ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๓๗)

$\triangle$ ที่ฐานเดียวกันและในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน ย่อมได้พื้นที่เท่ากัน

$\triangle$ ฐานเดียวกันสูงเดียวกันเท่ากันเท่า



สมมุติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle OBC$ เป็น $\triangle$ บนฐานร่วมกัน AC และระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน BC กับ AO

ให้พิสูจน์ พื้นที่ $\triangle$ ทั้งสองนี้เท่ากัน

สร้าง $\square$ จากบนฐาน BC ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกับ $\triangle$ ข้างบน คือ $\square BCPQ$

$$(\text{พิสัยน์}) \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} BCPQ \quad (\Delta = \frac{1}{2})$$

$\square$ จากฐานเดียวกันสูงเดียวกัน)

และ $\triangle OBC = \frac{1}{2} BCPQ \quad (\Delta = \frac{1}{2} \square \text{ จากฐานเดียวกันสูงเดียวกัน})$

$$\therefore \triangle A B C = \triangle O B C$$

ช. ต. พ.

เพิ่มเติม รูปสามเหลี่ยมที่ฐานเท่ากันและระยะสูงเท่ากัน
ย่อมได้พื้นที่เท่ากัน

แก้

การพิสูจน์ อ. น. ๒๖ นั้นขึ้นอยู่กับสัจจะสูตรที่ว่า ครึ่งของสี่เหลี่ยม
ย่อมเท่ากัน

$$\text{เมื่อ } A B C = \frac{๑}{๒} B C P Q$$

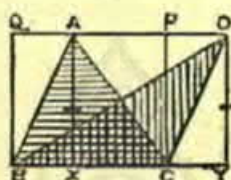
$$\text{และ } O B C = \frac{๑}{๒} B C P Q \text{ เหมือนกัน}$$

$$A B C \text{ จึง } = O B C$$

อุปรมัยนิเทศที่ ๒๘ (ยุคติด เล่ม ๑ บท ๓๙)

△ ที่พื้นที่เท่ากันและบนฐานเดียวกัน ย่อมอยู่ในระหว่าง
เส้นขนานคู่เดียวกัน (หรือสูงเท่ากัน)

△ เทำฐานเดียวย่อมสูงเท่าเดียว



สมมุติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle OBC$ เป็น $\triangle$ บนฐานร่วมกัน BC
และมีพื้นที่เท่ากันด้วย กับสมมุติให้เส้น AX กับ OY เป็นระยะสูง
ให้พิสูจน์ $AX = OY$

(พิสูจน์) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square$ ฐาน BC สูง AX } $(\Delta = \frac{1}{2}$
 $\triangle OBC = \frac{1}{2} \square$ ฐาน BC สูง OY } $\square$ จาก
 ฐานเดียวสูงเดียว)

$\therefore \square$ ฐาน BC สูง $AX = \square$ ฐาน BC สูง
 OY (ครึ่งเท่า, เพิ่มขึ้นเท่า)

$\therefore AX = OY$ ($\because$ ขาวเท่าต้องกว้างเท่า)

ท. ท. พ.

เกົว

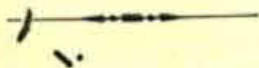
เมื่อ $ABC = \frac{a}{2} \square$ จาตรฐาน BC สูง AX และเมื่อ
 OBC ก็ $= \frac{a}{2} \square$ จาตรฐาน BC สูง OY

แต่ใจหัดบอกแล้วว่า $ABC = OBC$

$\therefore \frac{a}{2} \square$ จาตรฐาน BC สูง $AX = \frac{a}{2} \square$ จาตรฐาน BC
 สูง OY

$\therefore \square$ จาตรฐาน BC สูง $AX = \square$ จาตรฐาน BC สูง OY

แต่บรรดา $\square$ จาตรฐานก็ถือคั้นขาว สูงก็ถือคั้นกว้าง เมื่อฐาน
 เดียวกัน BC ก็คือขาวเท่ากัน จึงต้องกว้างเท่ากัน $AX = OY$ มิฉะนั้น
 พื้นที่ก็หาเท่ากันไม่



แบบฝึกหัด (พิสูจน์)

✓ ใน $\triangle ABC$ ให้ขีดเส้น $XY \parallel BC$ ตัดด้านทั้งสองออก
ที่จุด X กับ Y ให้ลากเส้น BY , กับ CX แล้วพิสูจน์

$$(ก) \triangle XBC = \triangle YBC \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{คู่ในเส้นขนาน} \\ \text{โดยเส้นตรง} \end{array} \right.$$

$$(ข) \triangle BXY = \triangle CXY$$

$$(ค) \triangle ABY = \triangle ACX$$

ถ้า BY กับ CX ตัดกันที่จุด O ให้พิสูจน์

$$\triangle BOX = \triangle COY$$

✓ (๒) ให้พิสูจน์เส้นทแยงมุมทั้งสองแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
แบ่งรูปนั้นออก ๔ ส่วนเท่า ๆ กัน

(๓) ในรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ขีดเส้นmedian

คือขีดแต่กึ่งกลางฐานขึ้นไปสู่ยอด และกำหนดจุด Y ในmedianนี้

ให้ลากเส้น AY แล้วให้พิสูจน์
เส้นทแยงมุม, โดยวิธีตรงข้าม

$\triangle ABY$ กับ $\triangle CY$ มีพื้นที่เท่ากัน

(๔) ให้พิสูจน์ โดยอุปนัยกับเทหัตถ์ ๒๔ และ ๒๘ ว่า
เส้นตรงที่ขีดต่อจากกึ่งกลางด้านทั้งสองย่อมขนานกับด้านที่เหลือ

(๕) การแบ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ มีจุด X เป็นจุด
กึ่งกลางด้าน AD จุด Y เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC แล้วกำหนด

จุด P ขึ้นภายในเส้น XY หรือในเส้น XY เมื่อตัดออกไปแล้ว ให้
 พิจารณา $\triangle APB$ มีพื้นที่หนึ่งในส่วนของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น

(๖) ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ กำหนดจุด X
 ขึ้นภายในด้าน CD กับจุด Y ภายในด้าน AD ให้พิจารณา $\triangle AXB$
 กับ $\triangle YBC$ มีพื้นที่เท่ากัน $\triangle AXB + \triangle YBC = \frac{1}{2} \text{ของ } \square$

(๗) ถ้ากำหนดจุด P ขึ้นภายในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 $ABCD$ ให้พิจารณารูปสามเหลี่ยม $PAB +$ รูปสามเหลี่ยม
 PCD มีพื้นที่กับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น

ข้อนี้ได้ใจใจแล้ว
 แล้วข้อที่หนึ่งให้รวม



แบบฝึกหัดวาดด้วยพินทรูปสามเหลี่ยม

(กำหนด)

(๑) มีนารูปสามเหลี่ยมอยู่แห่งหนึ่ง ด้านทั้งสามวัดได้ ๓๗๐ วา ๒๐๐ วา ๑๕๐ วา ให้เขียนแผนที่ (มาตรา ส่วน ๑ คือ ๕๖๐๐) แล้ววัดระยะสูง เมื่อรู้ว่ายาวเท่าใด..... แล้วจึงกำหนดพินทให้ ได้ผลเป็นตารางวา

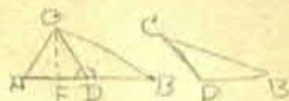
(๒) ที่ดินรูปสามเหลี่ยม ด้านหนึ่งยาว ๑๒๔ เมตร อีกด้านหนึ่งยาว ๑๔๔ เมตร มุมในระหว่างด้านทั้งสองนี้วัดได้ ๔๕° (ให้เขียนแผนที่ ๑ คือ ๒๐๐๐) วัดสิ่งที่ต้องการในการหาพินท แล้วให้หาพินทของที่ดินด้านนี้

(๓) ในรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งจุด P ที่ $b.b$ ตาราง เส้นคี่เมตร วัดฐาน BC ได้ ๕.๕ เส้นคี่เมตร ให้หาระยะสูง กับหาจุดวัดที่แห่งจุด A ด้วย ถ้าทราบต่อไปอีกว่าด้าน BA ยาว ๒.๖ เส้นคี่เมตร ให้วัดด้าน CA สร้างรูปขึ้นให้เห็นด้วย

(๔) ในรูปสามเหลี่ยม ABC พินทได้ ๓.๐๖ นิ้ว ตารางเหลี่ยมด้าน a ยาว ๓ นิ้ว ให้หาระยะสูงว่ายาวเท่าใด กับหาจุดวัดของจุด a ด้วย ถ้าทราบมุม C ว่าขนาด ๖๘° ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมกับวัดด้าน b

๒๐๓

(พิเศษ)

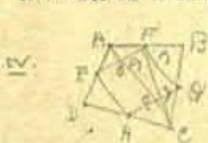


(๕) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านเท่ากันสองด้าน ๆ ต่อ
ด้านและมุมในระหว่างทั้งสองเป็นมุมคู่สมจักร รูปสามเหลี่ยม
ทั้งสองนั้นย่อมมีพื้นที่เท่ากัน แต่จะเท่ากันสนิทได้หรือไม่

(๖) ถ้าต้องการจะสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วบนฐานของ
รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ารูปนั้น จะทำอย่างไร

(๗) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าขีดเส้นตรงต่อจุดกึ่งกลาง
ด้านทั้งสี่ไปถึงกันตามลำดับ ให้ได้รูปสี่เหลี่ยมภายในแล้วจึงพิเศษ
รูปนั้นว่า (ซึ่งจะเห็นว่า เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน) มีพื้นที่กับรูป
สี่เหลี่ยมใหญ่

(๘) ในรูปสามเหลี่ยม ABC จุด L เป็นจุดกึ่งกลาง
ด้าน AB และ Y เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC ถ้าเส้น BY กับ LC
ตัดกันที่จุด X ให้พิเศษรูปสามเหลี่ยม BXC มีพื้นที่เท่ากับรูป
สี่เหลี่ยม A Y X L



$$\Delta G H I = \frac{1}{4} \Delta A B C$$

$$\Delta A F C = \Delta F B G$$

$$\therefore \square F G H I = \frac{1}{2} \Delta A B C$$



$$\Delta A L C = \Delta L B C$$

$$1+5+4 = 2+3$$

$$3 \times 4$$

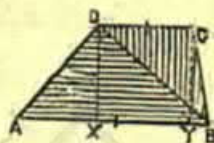
$$7+5 = 2$$

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม

ข้อประมัตินที่ ๒๙ จงหาพื้นที่

ข้อ ๑ รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า

ข้อ ๒ รูปสี่เหลี่ยม



(๑) จงมติให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า
มี $AB \parallel CD$

ขีดเส้นทแยงมุม DB แล้วขีดระยะสูง (คือ DX กับ CY)
ให้ $\triangle$ ทั้งสอง

$$\triangle DAB = \frac{๑}{๒} DX \cdot AB$$

$$\text{และ } \triangle BDC = \frac{๑}{๒} CY \cdot DC$$

$$\text{แต่ } \square ABCD = \triangle DAB + \triangle BDC$$

$$= \frac{๑}{๒} DX \cdot AB + \frac{๑}{๒} CY \cdot DC$$

$$\text{แต่ } DX = CY \quad (\because \text{เป็นระยะสูง } \square)$$

$$\therefore ABCD = \frac{๑}{๒} DX \cdot AB + \frac{๑}{๒} DX \cdot DC$$

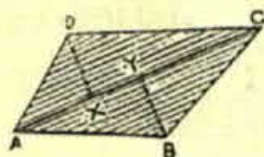
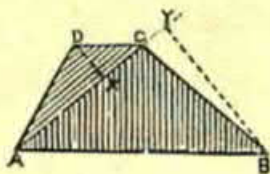
$$= \frac{๑}{๒} DX (AB + DC)$$

ท. เว้นแต่จะบอกถึงวิธีหาพื้นที่
พื้นที่ $\square = \frac{1}{2} AC \times BD$

๒๐๕

∴ พื้นที่สี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่าจึง

$$= \frac{1}{2} \text{ ระยะสูง } \times (\text{ผลบวกด้านคู่ขนาน})$$



(๒) ถ้ามุมให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ขัดแย้งกัน
มุม AC แล้ววัดระยะสูง (คือ DX กับ BY) ให้ Δ ทั้งสอง

$$\Delta DAC = \frac{1}{2} AC \cdot DX$$

$$\Delta BAC = \frac{1}{2} AC \cdot BY$$

$$\begin{aligned} \therefore \square ABCD &= \frac{1}{2} AC \cdot DX + \frac{1}{2} AC \cdot BY \\ &= \frac{1}{2} AC (DX + BY) \end{aligned}$$

∴ พื้นที่สี่เหลี่ยม

$$= \frac{1}{2} \text{ เส้นทแยงมุม } \times (\text{ผลบวกเส้นตั้งฉาก}) \quad (\text{offsets})$$

ช. ต. พ.

แก้

ขอให้สังเกตเมื่อแบ่ง $\square$ เป็น Δ แล้ว ได้เลือกเอาด้านคู่ขนานเป็น
ฐานของ Δ ทั้งสองแล้วจึงวัดระยะสูง เพราะต้องการจะให้ระยะสูงทั้งสอง

เท่ากัน ถ้าที่ระยะสูงทั้งสองปรากฏได้ว่า เป็นระยะสูงของ $\square$ รูปเดียวกัน
 ครั้นเมื่อหาได้ว่า $\triangle DAB = \frac{a}{2} DX \cdot AB$

$$\triangle BDC = \frac{a}{2} CY \cdot DC \text{ ครั้นแล้ว}$$

$$\square ABCD = \triangle DAB + \triangle DCB$$

จะได้เหลี่ยม CY เป็น DX หรือ DX เป็น CY

$$\text{ก็ } \square ABCD = \frac{a}{2} DX \cdot AB + \frac{a}{2} DX \cdot DC$$

จะได้ผลต่อไปว่า $\square ABCD = \frac{a}{2} DX (AB + DC)$ จึงจะได้

กฎว่า เครื่องระยะสูงคู่กันคู่ขนาน อีกประการหนึ่งในข้อ ๒ เมื่อขีด
 เส้นทแยงมุมแบ่ง $\square$ ออกเป็น $\triangle$ ๒ รูปแล้ว เมื่อจะได้ระยะสูง ได้
 มัคับให้ $\triangle$ ทั้งสองเอาเส้นทแยงมุมเป็นฐาน เพื่อจะได้ร่วมฐานกัน ลง
 ปลายจะได้หา ห.ร.น. หรือไฮคอมมอนเทกเตอร์ได้ ก็เมื่อ

$$\triangle DAC = \frac{a}{2} AC \cdot DX$$

$$\triangle BAC = \frac{a}{2} AC \cdot BY$$

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \triangle DAC + \triangle BAC \\ &= \frac{a}{2} AC \cdot DX + \frac{a}{2} AC \cdot BY \text{ จึงจะมี } AC, AC, \\ &\text{ตัวกันทั้งสองข้างเครื่องหมายบวก} \end{aligned}$$

$$\text{จึงจะได้} = \frac{a}{2} AC (DX + BY).$$

ว่า ทั้งเส้นทแยงมุมคู่กันผลบวกเส้นสาขา

สีแดงศัพท ขีดเส้นทแยงมุมทั้ง $\square$ เป็น $\triangle$ ๒ รูป
 แล้วขีดระยะสูงให้ $\triangle$ ทั้งสอง เอาเส้นทแยงมุมเป็นฐานร่วมระยะสูง
 ทั้งสองมีนามว่า เส้นสาขา



แบบฝึกหัด

คำนวณ

(๑) ให้หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า ด้านขนาน
ตั้งด้านยาว ๔.๗ นิ้ว กับ ๓.๓ นิ้ว ระยะสูง ๑.๕ นิ้ว

(๒) ถ้าเส้นทแยงมุม AC แห่งรูปสี่เหลี่ยม A B C D
ยาว ๑๗ ศอก และเส้นผ่าจากจุด B กับจุด D ยาว ๑๑ ศอก
เส้นหนึ่ง, ๙ ศอกเส้นหนึ่ง พื้นที่ของรูปนี้เท่าใด

(๓) ในแผนที่นารูปสี่เหลี่ยม A B C D เส้นทแยงมุม AC
ยาว ๘.๒ เซนติเมตร และเส้นผ่าจากจุด B กับ D ยาว ๓.๔
เซนติเมตร และ ๒.๖ เซนติเมตร ถ้าแผนที่นี้สร้างขึ้นด้วยมาตรา
ส่วน ๑ ต่อ ๕๐๐๐ พื้นที่มาคำนวณเท่าใด

(๔) ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า A B C D ด้วย
สิ่งต่าง ๆ กำหนดให้ต่อไปนี้ :— A B กับ C D ให้เป็นด้านคู่ขนาน
กัน, A B ยาว ๔ นิ้ว A D ยาวเท่า B C ซึ่งยาว ๒ นิ้ว, $A = B$
 $= 60^\circ$ แล้วคำนวณหาพื้นที่ (ถ้าต้องการสิ่งใดอีกก็ให้เพิ่มเติม
ขึ้นในรูปแล้ววัดเขา)

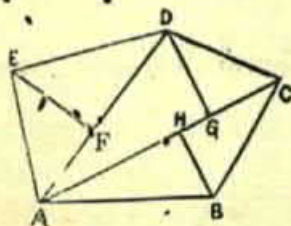
(๕) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ได้ทราบแล้วว่า $= \frac{1}{2}$ เส้นทแยง
มุม $\times$ (เส้นสาขาทองสองรวมกัน)

ถ้าเส้นทแยงมุมตั้งฉาก ให้แสดงให้เห็นว่าพื้นที่ $= \frac{a}{2} \times$
 (ผลคูณแห่งเส้นทแยงมุมสองเส้น)

พื้นที่รูปเหลี่ยม

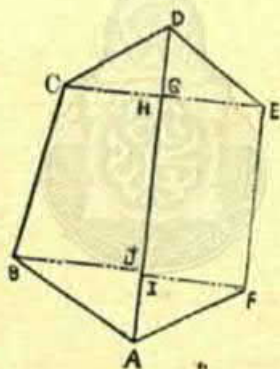
ถ้าต้องการพื้นที่รูปเหลี่ยมใด ๆ

(วิธีที่ ๑) ให้แบ่งรูปเหลี่ยมนั้น ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม
 ทุกรูปที่รูปตามแต่ความสะดวก, ยื่นขยายไปถึงดี. แล้วให้หาพื้นที่ของ
 รูปสามเหลี่ยมทุกรูป, เขาผลบวกกัน ก็จะได้พื้นที่ของรูปเหลี่ยมนั้น
 และในการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมเหล่านั้น ถ้าต้องการสิ่งใดก็ต้อง
 วัดเอา (เช่นรูปนี้)



สิ่งที่ต้องการคือ จะต้องทราบว่าเส้น AC , AD และเส้น
 ด้าน BH , DG , EF นั้น ยาวเท่าใด

(วิธีที่ ๒) ทำโดยวิธีต่อไปนี้ คือให้ขีดเส้นกลางแต่ A
 ถึง D ดังในรูปข้างบนแล้วขีดเส้นด้านจากเส้น AD นี้ ซึ่งจะแบ่ง
 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กับรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่ามุมฉาก



และรูปเหล่านี้เมื่อหาพื้นที่ให้วัดเส้นด้านต่าง ๆ และส่วนต่าง ๆ
 ในเส้นกลาง AD

ตัวอย่าง ให้หาพื้นที่ด้าน $ABCDEF$ ดังแผนที่ยังบน
 กับได้วัดสิ่งที่ต้องการให้แล้ว

๗

$$H C = ๑๒$$

$$J B = ๒๐$$

$$A D = ๕๖$$

$$A G = ๕๐$$

$$A H = ๔๐$$

$$A J = ๑๘$$

$$A I = ๑๐$$

$$G E = ๑๘$$

$$I F = ๑๔$$

ได้วัดแต่จุด A ขึ้นไปเป็นระยะๆ

$$\text{รูปสามเหลี่ยม } A I F = \frac{๑}{๒} A I \cdot I F$$

$$= \frac{๑}{๒} \times ๑๐ \times ๑๔ \text{ ตารางวา} = ๗๕ \text{ ตารางวา}$$

$$\text{รูปสามเหลี่ยม } A J B = \frac{๑}{๒} A J \cdot J B$$

$$= \frac{๑}{๒} \times ๑๘ \times ๒๐ \text{ ตารางวา} = ๑๘๐ \text{ ตารางวา}$$

$$\text{รูปสามเหลี่ยม } D G E = \frac{๑}{๒} D G \cdot G E$$

$$= \frac{๑}{๒} \times ๖ \times ๑๘ \text{ ตารางวา} = ๕๔ \text{ ตารางวา}$$

$$\text{รูปสามเหลี่ยม } D H C = \frac{๑}{๒} D H \cdot H C$$

$$= \frac{๑}{๒} \times ๑๖ \times ๑๒ \text{ ตารางวา} = ๙๖ \text{ ตารางวา}$$

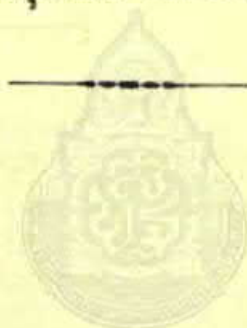
รูปสี่เหลี่ยม ขนานด้านไม่เท่า I F E G

$$= \frac{๑}{๒} I G \times (I F + G E) = \frac{๑}{๒} \times ๔๐ \times ๓๓ = ๖๖๐ \text{ ค.ว.}$$

รูปสี่เหลี่ยม ขนานด้านไม่เท่า J B C H

$$= \frac{๑}{๒} J H \times (J B + H C) = \frac{๑}{๒} \times ๒๒ \times ๓๒ = ๓๕๒$$

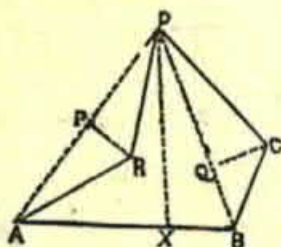
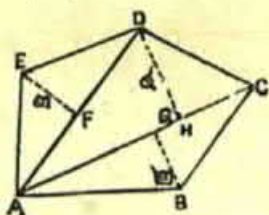
รวมกันทั้งหมดคเป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม A B C D E F = ๑๔๑๗ ค.ว.



๒๑๓

แบบฝึกหัด

(๑) ให้คำนวณพื้นที่ของแผนที่ต่อไปนี้



$AC = ๖$ เซนติเมตร

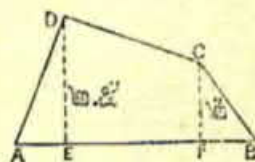
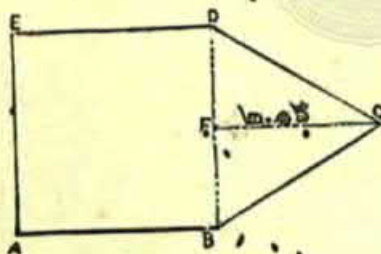
$AD = ๕$ " "

$DX = ๕.๒$ ซม. เส้นด้ายที่ได้ออกไว้ ในรูปเกิดเป็นเส้นทแยงมุม

$AB = BD = DA = ๖$ ซม.

$PR = CQ = ๑$ ซม.

(๒) ให้เขียนรูปตามแผนที่ต่อไปนี้ ให้ได้ขนาดเดิม



แล้วคำนวณพื้นที่, รูปมิตานเท่ากัน

ด้านยาว $๒\frac{๑}{๒}$ นิ้ว

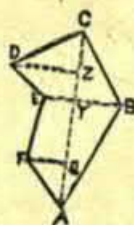
$AE = ๑\frac{๑}{๒}$ นิ้ว

$EF = ๒\frac{๓}{๔}$ นิ้ว

$FB = ๑\frac{๓}{๔}$ นิ้ว

(๓) ให้หาพื้นที่รูปเหลี่ยม A B C D E F จากดังที่
กำหนดให้ต่อไปนี้ กับให้เขียนแผนที่ใช้มาตราส่วน ๑ ต่อ ๒๐๐๐

	เมตร	
	ถึง C	
๘๐ ถึง D	๑๘๐	
๔๐ ถึง E	๑๕๐	
๖๐ ถึง F	๑๒๐	๕๐ ถึง B
	๕๐	
	จาก A	



แบบฝึกหัด (พิสูจน์)

(ว่าด้วยรูปสี่เหลี่ยม)

(๑) $A B C D$ คือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อลากเส้นต่อจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่เกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยม $P Q R S$ ให้พิสูจน์รูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า และจุดศูนย์กลางรูป $A B C D$ ทั้งให้พิสูจน์ด้วยว่าผลคูณในระหว่างเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูป $P Q R S$ ย่อมเป็นพื้นที่แห่งรูปสี่เหลี่ยม $A B C D$ และจะหาถูกนี้ไปใช้ ในรูปสี่เหลี่ยมทั่วไป ที่เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉากได้หรือไม่ (ให้เขียนรูปประกอบคำตอบด้วย)

(๒) ให้พิสูจน์ เส้นตรงที่ขีดตลอดจุดกึ่งกลางเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคงไปแบ่งครึ่งรูปนั้น

(๓) ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้านไม่เท่า ทราบว่าด้าน $A B$ ขนานกับ $D C$ และ X เป็นจุดกึ่งกลาง $B C$ ขีดเส้น $P Q$ ขนานกับ $A D$ ผ่านจุด X โดยไปจัด $A B$ ที่จุด P จุด $D C$ (ที่ตัดออกไปแล้ว) ตรงจุด Q

ให้พหุคูณ (ก) รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า $A B C D$
 $=$ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A P Q D$

(ข) รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า $A B C D$
 $=$ สองเท่ารูปสามเหลี่ยม $A X D$

(สร้างรูปและคำนวณ)

(๔) ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A B C D$ ด้าน AB ยาว ๘.๐ เซนติเมตร AD ๓.๒ เซนติเมตร เส้นตั้งฉากในระหว่าง AB กับ DC ยาว ๓.๐ เซนติเมตร สร้างรูปขึ้นแล้วให้รู้ว่า ระยะทางแค่ว่า AD ถึง BC ยาวเท่าใดโดยวิธีวัดก่อนแล้วจึง ใ้วิธีวัดสอบคู่ข้อภายหลัง

(๕) ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านหนึ่งยาว ๒.๕ นิ้ว เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว ๓.๔ นิ้วอีกเส้นหนึ่งยาว ๒.๔ นิ้ว แล้ว วัดเส้นต่าง ๆ ที่ต้องการในวิธีหาพื้นที่ คำนวณให้ทราบว่าเป็นเท่าใด

(๖) ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปอื่น $A B$ ให้หาจุดกึ่งกลาง เส้นทแยงมุมทั้งสองตัดกัน เฉพาะให้พื้นที่เดิมอยู่ไม่ไห่มากหรือน้อยไป

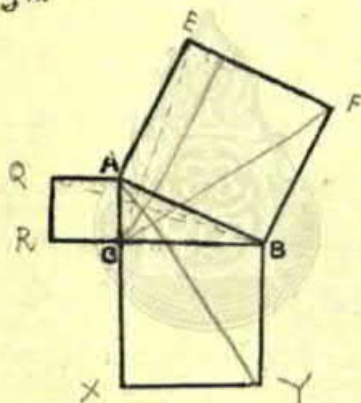
แบบฝึกหัด

นำสู่ความเข้าใจ อุประมัยนิเทศที่ ๓๐

ในรูปนี้, $A B C$ คือรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก, มุม C เป็นมุมฉาก และได้สร้างรูปจัตุรัสขึ้นบนด้านทั้งสาม

คราวนี้จะเปรียบเทียบรูปจัตุรัสบนตรงฉากกับจัตุรัสบนด้านตั้ง

และจัตุรัสบนด้านฐาน



(๑) ให้สร้างรูปจัตุรัสข้างบนให้ AC ยาว ๓ เซนติเมตร

และ BC ยาว ๔ " "

พื้นที่รูปจัตุรัสบน $AC = 3^2$ หรือ ๙ ตารางเซนติเมตร

" " " " $BC = 4^2$ " ๑๖ " "

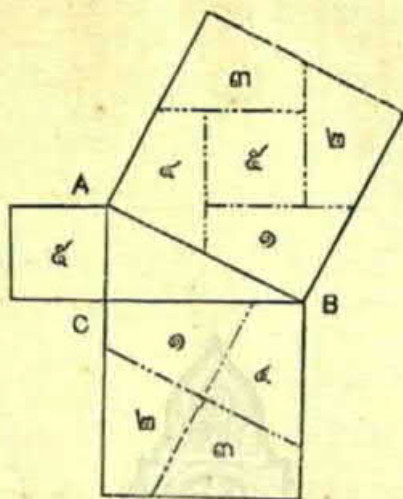
เพราะฉะนั้นพื้นที่รูปจัตุรัสทั้งสอง = ๒๕ ตารางเซนติเมตร

ควรวัดให้วัดตาม AB และคำนวณพื้นที่รูปจัตุรัสบน AB จะ
ได้พื้นที่เท่ากับ ๒๕ ตารางเซนติเมตรหรือไม่

(๒) ให้ทำเช่นเดียวกับข้อ ๑ แต่ให้ AC ยาว ๑.๐ นิ้ว
และ BC ยาว ๒.๔ นิ้ว

(๓) ถ้าด้าน a ยาว ๑๕, b ยาว ๘, c ยาว ๑๗ ให้สังเกต
ให้เห็นว่า $c^2 = a^2 + b^2$ แล้วให้สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC
ลงให้ด้าน a ยาว ๑๕, b ยาว ๘, และ c ยาว ๑๗ กับวัดมุม C

(๔) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC , มุม C เป็น
มุมฉาก แล้วให้สร้างรูปจัตุรัสบนด้านทั้งสาม ขีดเส้นตรงตั้งฉาก
กับ AB และอีกเส้นหนึ่งขนานกับ AB ทั้งสองเส้นต้องให้มาจุดศูนย์
กลางของ “รูปจัตุรัสบน BC ” (คือจุดที่เส้นทแยงมุมทั้งสอง
ตัดกัน) เป็นอันแบ่งรูปจัตุรัสดังกล่าวเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่รูปพื้นที่เท่ากัน
ทุกรูป ถ้ายกรูปสี่เหลี่ยมทั้งสี่รูปนี้พร้อมด้วยรูปจัตุรัสบน AC ไป
เรียงซ้อนรูปจัตุรัสบนตรงฉาก AB จะเห็นได้ว่าทับกันสนิทไม่ขาด

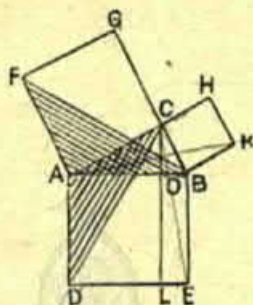


ไม่เหลือ ดังในรูปย่อมเป็นเครื่องทอดของให้เห็นได้ว่า ในรูป
 ตามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ จัตุรัสบนตรงฉากจะเท่ากับจัตุรัสบนด้าน
 อีกสองด้านรวมกันหรือตรงฉาก^๒ = ด้าน^๒ + ด้าน^๒

อุประมายนิเทศที่ ๓๐ (ยุคติดเล่ม ๑ บท ๔๗)

รูปจัตุรัสบนตรงฉากเท่ากับจัตุรัสบนฐานบวกรูปจัตุรัสบนด้านตั้ง

$$\text{ตรงฉาก} = \text{ฐาน} + \text{ตั้ง}$$



สมมุติให้ ABC เป็น Δ มุมฉาก C เป็นมุมฉาก กับมี
จัตุรัสสร้างขึ้นบนด้านทั้งสามแล้ว

$$\text{ให้พิสูจน์ } AB^2 = AC^2 + CB^2$$

ชักเส้น CL จากจุด $C \parallel BE$ จุด D, E ตรง L
ลากเส้น FB, CD

(พิสูจน์) BC กับ CG ย่อมต่อกันเป็นเส้นตรงเส้น
เดียว (ต่อให้ 90°)

ใน ΔCAD กับ FAB

$$\left. \begin{array}{l} CA = FA \\ AD = AB \end{array} \right\} \text{ (ด้านตรงข้าม } \square \text{ ฐาน)}$$

$$C \hat{A} D = F \hat{A} B \therefore \left\{ \begin{array}{l} B \hat{A} D = F \hat{A} C \text{ (จาก)} \\ \therefore B \hat{A} D + B \hat{A} C \\ = F \hat{A} C + B \hat{A} C \\ \therefore C \hat{A} D = F \hat{A} B \end{array} \right\}$$

$$\therefore \triangle CAD \equiv FAB \text{ (๒ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{แต่ } \triangle CAD = \frac{๑}{๒} \square AL \\ \triangle FAB = \frac{๑}{๒} \square GA \end{array} \right\} \text{ (ฐานเดียวระหว่างขนานคู่เดียว)}$$

$$\therefore \square AL = \square GA$$

โดยทำของเดียวกันถ้าขีดเส้น CE กับ AK, $\square BI = \square HB$

$$\therefore \square AL + \square BL = \square GA + \square HB$$

$$\text{คือ } AB^2 = AC^2 + CB^2$$

ธ. ต. พ.

(ก)

เมื่อ $\triangle CAD \equiv \triangle FAB$ นั้น.

$\therefore$ ด้าน CA ของ $\triangle CAD = FA$ ของ $\triangle FAB$
($\therefore$ เป็นด้านรูปจัตุรัสคู่เดียวกัน). และ AD ของ

$\triangle CAD \equiv AB$ ของ $\triangle FAB$ เหมือนกัน มุมใน
ระหว่าง, $C \hat{A} D$ ของ $\triangle CAD = F \hat{A} B$ ของ $\triangle$

$FAB \} \therefore \widehat{BAD} = \widehat{FAC}$ โดยที่เป็นมุมฉากทั้งคู่เอา $\widehat{BAC}$
บวกทั้งสองข้างได้ดังนี้ $\widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \widehat{FAC} + \widehat{BAC}$
สิ่งที่เท่ากันบวกเข้าเท่า ๆ กัน บอมนเท่ากันอยู่

แต่ $\widehat{BAD} + \widehat{BAC}$ ก็คือ $\widehat{CAD}$ และ $\widehat{FAC} + \widehat{BAC}$
คือ $\widehat{FAB}$

$$\therefore \widehat{CAD} = \widehat{FAB}$$

$$\therefore \triangle CAD \equiv \triangle FAB \text{ (อ.น. ๔)}$$

$$\text{และ } \triangle CAD \text{ นั้น } = \frac{๑}{๒} \square ADLO$$

ฐานเดียวกัน AD ระหว่างเส้นขนาน AD กับ CL

$$\text{และ } \triangle FAB \text{ ก็ } = \frac{๑}{๒} \square \text{ จตุ. } CAFG$$

$$\therefore \text{อยู่บนฐานเดียวกัน FA ระหว่างเส้นขนาน FA กับ GB } \frac{๑}{๒} \square$$

$$ADLO \text{ จึง } = \frac{๑}{๒} \square \text{ จตุ. } CAFG$$

$$\therefore \text{เพิ่ม } \square ADLO \text{ จึง } = \text{เพิ่ม } \square \text{ จตุ. } CAFG \text{ โดยทำนองนี้}$$

$$\square BELO \text{ ก็ } = \square \text{ จตุ. } BKHC$$

$$\therefore \square ADLO + \square BELO \text{ จึง } =$$

$$\square CAFG + \square BKHC$$

$$\text{คือ } \square \text{ จตุ. } ABED = \square \text{ จตุ. } CAFG + \square \text{ จตุ. } BKHC$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + CB^2$$

อุปรมยนิเทศนี้จะเรียกว่าบทพิทาโกราส (pythagoras) ก็ได้
จะได้เป็นเครื่องรูกถึงผดุงคณ

โดยอาศัยความจริงของอุปมาบนีที่ ๓๐ จึงได้กล่าวต่อไปนี้

$$น = ถ + ต$$

$$\therefore ถ = น - ต$$

$$\text{และ } ต = น - ถ$$

$$\text{คือ } \text{ตรงฉาก} = \text{ฐาน} + \text{ตั้ง}$$

$$\text{ฐาน} = \text{ตรงฉาก} - \text{ตั้ง}$$

$$\text{ตั้ง} = \text{ตรงฉาก} - \text{ฐาน}$$

หมายเหตุ จึงสังเกตข้อพิศดารที่จะได้ต่อไปอีก

ถ้า CL กับ AB ตัดกันที่จุด O ตามที่ได้พิสูจน์มา $\square GA = \square AL$

คือ $AC = \square$ ฐาน AB สูง AO และ

เมื่อ $\square HB = \square BL$, BC ก็ $= \square$ ฐาน AB สูง BO

หมายเหตุ อาจพิสูจน์ได้ โดยวิธีที่บนี ว่ารูปจัตุรัส

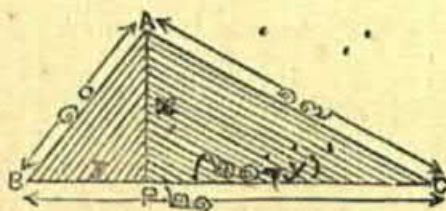
ทุกรูปที่ด้านเท่ากันย่อมมีพื้นที่เท่ากัน และรูปจัตุรัสทุกรูปที่มีพื้นที่

เท่ากัน ด้านย่อมยาวเท่ากัน

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม บอกด้านทั้งสามให้ ๆ คำนวณพื้นที่
(ตัวอย่าง) ให้หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม, ด้านทั้งสาม ยาว ๒๑ เมตร
๑๗ เมตร และ ๑๐ เมตร

สมมติให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$, $AB = 10$ $AC = 17$
 $BC = 21$ ชีตเส้น $AP \perp BC$ ถ้าจะหาพื้นที่ต้องใช้สูตร
คือ $\frac{\text{ฐาน} \times \text{สูง}}{2}$ $\therefore$ ตั้งแต่เรขาคณิตบอกไว้สูตรเดียว แต่ถ้าใช้

สูตรนี้ก็ต้องการรู้สูงว่าเท่าใด แต่ฐานรู้แล้ว, โจทย์บอกให้, จึง
เป็นอันต้องทราบระยะสูงเท่านั้น คือ ต้องทราบ AP ว่ายาวเท่าใด
แต่จะทราบได้ต้องอาศัย อ. น. ๒๙ คือต้องทราบระยะ BP มิฉะนั้น
ก็ CP เสียก่อน จึงต้องคำนวณดังนี้



สมมติให้ AP ยาว x และ BP ยาว y

$\therefore CP$ จึงยาว $(21 - y)$ ($\because BC = 21$)

แล้วดำเนินตรงไปหาราคา x กับ y จึงต้องใช้ข้อเงื่อนไขข้อที่ ๒ ขึ้น
คือให้ได้อีกเงื่อนไข ๒ — ข้อเงื่อนไขจึงต้องพึง Δ จากทั้ง ๒ รูป
(ซ้ายกับขวา)

$\therefore$ ใน Δ จาก ABP , $x^2 = 100^2 - y^2$ ใน
 Δ จาก APC , $x^2 = 17^2 - (21 - y)^2$

$\therefore 100^2 - y^2 = 17^2 - (21 - y)^2$
 $10000 - y^2 = 289 - 441 + 42y - y^2$

$\therefore y = 6$

$x^2 = 100^2 - y^2 \therefore x^2 = 100^2 - 6^2 = 10000 - 36 = 9964$

$\therefore x = \sqrt{9964} = 99.82$

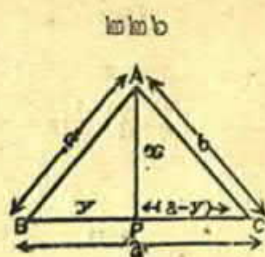
พื้นที่ $\Delta = \frac{1}{2}$ ฐาน $\times$ ระยะสูง = $\frac{1}{2} \times 21 \times 6$
เมื่ควรวางเหลี่ยม

= 63 เมื่ควรวางเหลี่ยม

ที่ทำให้เห็นราคาจำกัดไปเสีย คราวนี้จะไม่ใช้ราคาจำกัด คือจะ
ใช้ราคาทั่วไป คำนวณจะเท่าใด ๆ ก็ได้

คือ สมมติให้ ABC เป็น Δ ด้านยาว a, b , กับ c ให้
คำนวณหาพื้นที่ จิตเส้นระยะสูงจาก $A \perp BC$ ที่จุด P และสมมติ
ให้ยาว x กับให้ BP ยาว y .

$\therefore CP$ ยาว $(a - y)$ ($\because BC$ ยาว a)



ໃນ $\triangle$ ມາດ $\hat{A} \hat{B} \hat{P}$

$$x^2 = c^2 - y^2 \dots (1)$$

ໃນ $\triangle$ ມາດ $A \hat{C} P$

$$x^2 = b^2 - (a - y)^2 \dots (2)$$

$$\therefore c^2 - y^2 = b^2 - (a - y)^2 \dots (\text{1}=2)$$

$$c^2 - y^2 = b^2 - a^2 + 2ay - y^2$$

$$\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} = y \dots (\text{ຄຸກລະກັດ } y)$$

$$\therefore x^2 = c^2 - \left\{ \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right\}^2 \quad \text{ຈາກ (1)}$$

$$= \left[c^2 + \left\{ \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right\} \right] \left[c^2 - \left\{ \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right\} \right]$$

$$= \left\{ \frac{2ac + c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right\} \left\{ \frac{2ac - c^2 + b^2 - a^2}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(a+c)(a+c)-b^2}{2a} \right\} \left\{ \frac{b^2-(a^2-2ac+c^2)}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(a+c)^2-b^2}{2a} \right\} \left\{ \frac{b^2-(a-c)(a-c)}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(a+c)^2-b^2}{2a} \right\} \left\{ \frac{b^2-(a-c)^2}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a} \right\} \left\{ \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a} \right\}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{4a^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}}$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a}}$$

(จึงได้กฎหารยะสอง)

$$\text{พจน์ } \Delta^2 = \frac{1}{4} a \times x$$

$$= \frac{a}{2} \times a \times \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2a}}$$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

จึงได้กฎสำหรับหาพื้นที่ Δ ในเมื่อทราบด้าน ๓ ด้านดังนี้

$$\Delta = \frac{a}{2} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

ขอผู้เรียนจงสังเกตไว้ว่า วงเล็บนั้นนับวกกันทั้งสามด้าน ครั้นต่อมาผลตัดกันลบครึ่งละด้าน จนหมดสามด้านจึงเป็น ๔ วงเล็บ

แบบฝึกหัด

(ก) ให้หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมตามวิธีข้างบน ด้านทั้งสามยาวดังต่อไปนี้

(๑) ๒๐ วา, ๑๓ วา, ๑๑ วา

(๒) ๑๕ เส้น, ๑๔ เส้น, ๑๓ เส้น

(๓) ๒๑ เมตร, ๒๐ เมตร, ๑๓ เมตร

(๔) ๓๐ เซ็นติเมตร, ๒๕ เซ็นติเมตร, ๑๑ เซ็นติเมตร

(๕) ๓๗ ฟุต, ๓๐ ฟุต, ๑๓ ฟุต

(๖) ๕๑ ศอก, ๓๗ ศอก, ๒๐ ศอก

(ก) ถ้าด้านทั้งสาม ยาว a , b , และ c ,

$$\text{ให้พิสูจน์ (ก) } y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c}$$

$$(ข) x^2 = b^2 - \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c} \right\}^2$$

$$(ค) \text{ รูปสามเหลี่ยม } =$$

$$\frac{๑}{๔} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

แบบฝึกหัด

(คำนวณ)

(๑) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม $A B C$ ให้มุม C เป็นมุมฉากด้วยสิ่งต่าง ๆ กำหนดให้ต่อไปนี้

(ก) $a = ๓$ เซนติเมตร, $b = ๔$ เซนติเมตร

(ข) $A = ๒.๕$ เซนติเมตร $B = ๖.๐$ เซนติเมตร

(ค) $A = ๑.๒$ นิ้ว $B = ๓.๕$ นิ้ว

ในทุก ๆ ข้อนี้ ให้คำนวณความยาวด้านตรงข้าม (c) แล้วให้วัดสอบดู

(๒) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม $A B C$ ให้ C เป็นมุมฉาก กำหนด (ก) c ยาว ๓.๔ นิ้ว

a ,, ๓.๐ นิ้ว (ร.น. ที่ ๑๐)

(ข) ยาว ๕.๓ ซม. b ๔.๕ ซม.

ทั้งสองข้อนี้ให้คำนวณความยาว ของด้านที่ยังไม่ได้กำหนด

ให้แล้ววัดสอบดู

ข้อต่าง ๆ ที่ระกถาวรางด่างนี้ ให้ทำโดยวิธีคำนวณตามข้อ
บังคับ แต่ควรเขียนแผนที่ให้มีมาตราส่วนบ้าง, บางข้อ แล้ว
วัดสอบดู

(๓) บันไดหนึ่งฝั่งเวียนเชิงห่างเวียนอยู่ ๙ ศอก พาดถึง
หน้าต่าซึ่งสูงจากพื้นดิน ๔๐ ศอก, บันไดยาวเท่าใด

(๔) เรือกลไฟออกจากท่าแฉ่นไปข้างทิศใต้ ไปไกล ๓๓๐ เส้น
แล้วบ่ายหัวเรือไปข้างทิศตะวันตกใช้จักรไปได้ ๕๖๐ เส้น เวลานั้นไกล
จากท่ากี่เส้น

(๕) เรือสองลำ ๆ หนึ่งแฉ่นไปข้างทิศตะวันตกเฉียงเหนือ
ไกลจากตลำนี ๖.๐ กิโลเมตร อีกลำหนึ่งไปข้างทิศตะวันตกเฉียงเหนือ
ไกลจากตลำนี ๑.๑ กิโลเมตร ถามว่าเรือทั้งสองลำนี้ไกลจากกัน
เท่าใด

(๖) บันไดยาว ๖๔ ศอก ฝั่งเวียนถึงหน้าต่า ซึ่งสูง
จากพื้นดิน ๖๓ ศอก เชิงบันไดห่างเวียนอยู่กี่ศอก

(๗) ชายผู้หนึ่งออกเดินจากตำบลหนึ่งไปข้างทิศใต้ ได้ ๒๗
เส้น แล้วเดินต่อไปทางทิศตะวันตกได้ ๒๔ เส้น เดินต่อไปอีก
ทางทิศเหนือได้ ๒๐ เส้น เมื่อมาถึงที่นี้ ไกลจากตำบลที่ออกเดินเท่าใด

(๘) ถ้าข้าพเจ้าออกเดินจากตำบล ก. ไปทางทิศตะวันตกได้ ๒๕ เมตร ต่อไปทางเหนือได้ ๖๐ เมตร ต่อไปทางทิศตะวันออกได้ ๘๐ เมตร และเดินต่อไปอีกทางทิศใต้ได้ ๑๒ เมตร ข้าพเจ้าไกลจากตำบล ก. เท่าใด

(๙) ตำบล ข. ข้างทิศตะวันออกของตำบล ก. ไกลกันเท่าใด ไม่ทราบ แต่ ค. ข้างทิศใต้ของ ข. ไกลจาก ข. ๕๕ เมตร และ ก. ถึง ค. ไกลกัน ๗๓ เมตร ก. กับ ข. ห่างกันเท่าใด

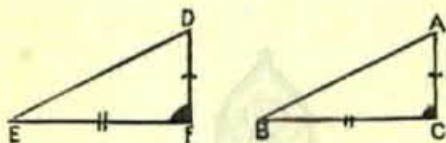
(๑๐) ออกเดินจากตำบล ด. ไปทางทิศตะวันตกได้ ๕๐ เมตร เดินต่อไปข้างทิศเหนือได้ ๑๒๐ เมตร ต่อไปข้างทิศตะวันออกได้ ๑๖๐ เมตร แล้วเดินตรงไปข้างทิศใต้ได้ ๒๔ เมตร เวลานี้ไกลจากตำบล ด. เท่าใด



อุปมาณิเทศที่ ๓๑ (ยุคลิเต็ม ๑ บท ๔๘)

ใน $\triangle$ ใดๆ ถัดกันหนึ่งตารางเหลี่ยมบวกอีกด้านหนึ่ง ตาราง
เหลี่ยมเท่ากับด้านที่เหลือนั้นตารางเหลี่ยม มุมในระหว่างสองด้านก่อน
เป็นมุมฉาก

ถ้า $a^2 + b^2 = c^2$ มุมในระหว่าง a กับ $b = 90^\circ$



สมมุติให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มี $BA^2 = AC^2 + BC^2$

ให้พิสูจน์ C เป็นมุมฉาก

ขีดเส้นตรง $EF = BC$

ลากเส้น $FD \perp EF$ ตัดให้ $FD = CA$ ขีดเส้น DE ใน

$\triangle ABC$ กับ DEF

เพราะว่า $\begin{cases} AC = DF \\ CB = FE \end{cases}$ (สร้าง)

$$\begin{cases} AB = DE \\ \therefore BC^2 = FE^2 + CA^2 = FD^2 \\ \therefore BC^2 + CA^2 = EF^2 + FD^2 \\ \text{คือ } AB^2 = DE^2 \end{cases}$$

$$\therefore \hat{C} = \hat{F} \text{ (สามด้านเท่า) } = 90^\circ$$

การที่สร้างรูป $\triangle$ ข้างขวามือนั้นก็หมายความว่าพิสูจน์ให้มุม $C = \hat{F}$

$\therefore \hat{F}$ ได้ทำให้เป็นมุมฉากแล้วถ้า $\hat{C} = \hat{F}, \hat{C}$ ก็เป็นมุมฉากด้วย

แต่ที่ $\hat{C}$ จะ $= \hat{F}$ ได้, $\triangle$ ทั้งสองต้องเท่ากันสนิทเสียก่อนแต่ที่ $\triangle$ จะเท่ากันสนิทต้องอาศัย อ.น. ๔ หรือ อ.น. ๗ หรือ อ.น. ๑๑ แต่ที่จะอาศัย

อ.น. ๔ ต้องมีด้านเท่ากัน ๒ ด้านมุมในระหว่าง, เท่ากัน

อ.น. ๗ ด้านเท่ากัน ๓ ด้าน อ.น. ๑๑ มุมเท่ากัน ๒ มุม ด้านเท่ากัน

ด้านหนึ่ง ในที่นี้มีเพียงด้านเท่ากันสองด้านเท่านั้น

$\therefore$ ได้สร้างให้ $EF = BC$ และได้ตัดให้ $DF = AC$ นอกนั้นไม่ทราบ
เลยว่าจะจะเป็นอันพึงไม่ได้ทั้งสาม อ.น.

แต่ที่จะพึงให้ได้ต้องหาองค์มาให้ครบชุดแต่จะใช้ อ.น. โค้งแล้วแต่สะดวก

แต่ใช้ อ.น. ๗ เป็นสะดวก เพราะอีกด้านเดียวก็พอ

ถ้าพูดได้ว่า $ED = AB$ ก็เป็นอันสำเร็จลงมือพิสูจน์ให้ $ED = AB$ โดยทำนองนี้

เมื่อ $BC = EF, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$

,, $AC = DF, \hat{A} = \hat{D}$, ,, $= DF$

၂၀၀၄

$$\therefore B C^h + A C^h$$

$$\hat{n} = E F^h + D F^h$$

$$\therefore A B^h$$

$$E D^h$$

(၂၀၀၄)

(B. M. ၁၀၀)

$$\therefore A B \hat{C} = E D$$

$$\Delta A B C \hat{C} \equiv D E F$$

$$\hat{C} \hat{C} = \hat{F} = \hat{C}$$

T. M. W.



แบบฝึกหัด

(อ. น. ๓๐ กับ อ. น. ที่ ๓๑)

(พิสูจน์)

(๑) ให้พิสูจน์รูปจตุรคี่สร้างขึ้นบนเส้นทแยงมุมของรูปจตุรคี่ใด ๆ ว่าจุดที่สองเท่ารูปจตุรคี่เดิม

(๒) ในรูปสามเหลี่ยม ABC ขีดเส้น AD ตั้งฉากกับฐาน BC ถ้าด้าน c ยาวกว่าด้าน b

$$\text{ให้พิสูจน์ } c^2 - b^2 = BD^2 - DC^2$$

(๓) ให้แบ่งเส้นตรงออกสองส่วน ถ้าวางรูปจตุรคี่บนส่วนยาวก็จะได้จุดที่สองเท่าจตุรคี่บนส่วนสั้น

(๔) ให้สร้างรูปจตุรคี่จุดที่สองเท่ากันของรูปจตุรคี่สองรูปที่กำหนดให้ รวมกัน

(๕) ให้แบ่งเส้นตรงออกสองส่วน เมื่อสร้างรูปจตุรคี่สองรูปบนส่วนทั้งสองนี้ ให้ใด ๆ พนที่รวมกันเท่าพนที่รูปจตุรคี่ที่กำหนดให้ (กับให้บอกด้วยว่าเมื่อใดจะทำไม่ได้)

(เขียนรูปและคำนวณ)

(๖) ให้พิจารณาว่า ข้อใดในข้อข้างต้นนี้ รูปสามเหลี่ยมจึงจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(ก) $a = ๑๔$ ท.ม. $b = ๔๘$ ท.ม. $c = ๕๐$ ท.ม.

(ข) $a = ๔๐$ ท.ม. $b = ๑๐$ ท.ม. $c = ๔๑$ ท.ม.

(ค) $a = ๒๐$ ท.ม. $b = ๔๔$ ท.ม. $c = ๑๐๑$ ท.ม.

(๗) ถ้ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มีมุม C เป็นมุมฉากให้พิสูจน์โดยใช้ อ.น. ที่ ๓๐ ว่า $AB^2 = ๒ AC^2$ เขียนรูปประกอบคำตอบ และขีดเส้นทแยงมุมแห่งรูปจัตุรัส AB ทั้งสองเส้น แต่ส่วนรูปจัตุรัส AC นั้นให้ขีดแค่เส้นเดียว

ถ้า $AB = BC = ๒$ นิ้ว ให้คำนวณหาส่วนยาวของเส้น AC แล้ววัดตอบดู

(๘) ให้สร้างรูปจัตุรัส บนเส้นทแยงมุมอันยาว ๖ เซนติเมตร แล้ววัดดูว่าด้านหนึ่งจะยาวเท่าใด กับให้คำนวณหาพื้นที่ด้วย

$$PB^2 = OB^2 + OP^2$$

$$\text{แต่ } OB^2 = PA^2 = 2 OP^2 \quad (\text{พิสูจน์})$$

$$\therefore PB^2 = 2 OP^2 + OP^2$$

$$PB^2 = 3 OP^2 \quad (\text{๓ เท่า}) . \text{ ต่อ ๆ ไปดังนี้}$$

อีกประการหนึ่งสมมติให้ OP ยาว ๑ ยูนิต

$$OP^2 \text{ ก็ } = 1 \text{ ตารางยูนิต}$$

$$\therefore PA^2 = 2 \text{ ตารางยูนิต} \quad (\because 2 OP^2 = 2)$$

$$\therefore PA = \sqrt{2}$$

และ PB ก็ $= \sqrt{3}$ ดังนั้นต่อ ๆ ไป ถ้าต้องการราคา $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ฯลฯ ก็ให้วัด PA, PB ฯลฯ

(ยูนิต คือ มาตรการที่เราไปวัด ดูตารางตรีโกณมิติ โดยนาขร้อยเอกลงบนแน่อำนาจอ)

แก้

เมื่อสร้างเส้น $OX \perp OP$ และตัด OX ที่จุด A ได้ $OA = OP$ แล้ว

$OA^2 \text{ ก็ } = OP^2$ ครั้นขีดเส้น PA แล้ว

$$PA^2 \text{ ก็ } = OA^2 + OP^2 \quad (\text{อ.น. ๒๘}) \quad PA^2 \text{ ก็ } = OP^2 + OP^2 = 2 OP^2$$

เมื่อตัด OX อีกที่จุด B ได้ $OB = PA, OB^2 = PA^2$ ครั้นขีดเส้น PB แล้ว

$$PB^h \text{ ที่ } = OP^h + OB^h$$

$$PB^h \text{ ,, } = OP^h + PA^h$$

$$PB^h \text{ ที่ } = OP^h + ๒ OP^h (\because PA^h = ๒ OP^h)$$

$$PB^h \text{ ,, } = ๓ OP^h$$

เมื่อตัด OX อีกที่จุด C ได้ $OC = PB$.

$$OC^h = PB^h \quad \text{ครึ่งจุดเส้น } PC \text{ แล้ว,}$$

$$PC^h = OC^h + OP^h \quad (\text{ธ. น. ๓๐})$$

$$PC^h = PB^h + OP^h$$

$$PC^h = ๓ OP^h + OP^h \quad (\because PB^h = ๓ OP^h)$$

$$PC^h = ๔ OP^h$$

ต่อ ๆ ไปดังนี้



แบบฝึกหัดที่ ๓๐ กับ ๓๑

(๙) ABC คือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า, ด้านหนึ่งยาว $2x$ นิ้ว, คืบ, ศอก, วา

ระยะสูงยาว y นิ้ว, คืบ, ศอก, วา

ให้พิสูจน์ $y = x \sqrt{3}$. แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านยาว

๘ เซนติเมตรตอบ

(๑๐) ให้หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

(ก) $a = ๑๗$ นิ้ว, $b = ๑๐$ นิ้ว, $c = ๙$ นิ้ว

(ข) $a = ๒๕$ ศอก, $b = ๑๗$ ศอก, $c = ๑๒$ ศอก

(ค) $a = ๔๑$ ซม., $b = ๒๘$ ซม., $c = ๑๕$ ศอก

(ง) $a = ๔๐$ วา, $b = ๓๗$ วา, $c = ๑๓$ วา

(๑๑) ให้พิสูจน์ต่อไปนี้

เส้นทแยงมุมของรูปจัตุรัส = ด้าน $\times \sqrt{2}$ โดยกฎนี้ ให้หาความยาวของเส้นทแยงมุมรูปจัตุรัส ด้านยาว ๕๐ เมตร

(เขียนแผนที่ใช้น้ำตรางส่วน ๑ คือ ๑๐๐๐ แล้ววัดส่วนยาวของเส้นทแยงมุม)

(๑๒) ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใต้จุด D บน AC ที่
ได้ฉากกับ BC

$$\text{ให้พิสูจน์ } c^2 - BD^2 = b^2 - CD^2$$

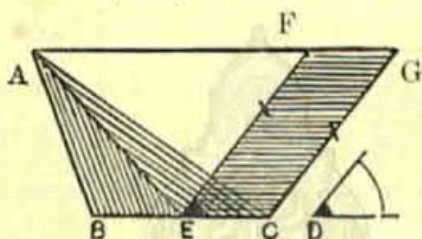
ถ้า a ยาว ๕๑ เซนติเมตร $b = ๒๐$ เซนติเมตร และ $c = ๓๗$ เซนติเมตร
ให้หาความยาวของเส้น AD กับคำนวณพื้นที่รูป
สามเหลี่ยม



เรขานิเทศว่าด้วยพื้นที่

เรขานิเทศที่ ๑๗

ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุนพื้นที่เท่าพื้นที่รูปสามเหลี่ยม
กำหนดให้และมีมุม ๆ หนึ่งเท่ามุมที่จะให้
สร้าง $\square$ ขนานเท่า $\triangle$, มุมเท่ามุมที่จะให้



สมมติให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ และ D เป็นมุมที่กำหนดให้
ให้สร้าง $\square$ ขนานจุนพื้นที่เท่า $\triangle ABC$ และให้มีมุม ๆ หนึ่ง
เท่ากับ D

(วิธีสร้าง) แบ่งครึ่ง BC ที่จุด E และทำมุมที่จุดนั้นให้
เท่า $\hat{D}$ (สร้างมุมเท่าๆ) ชีตเส้นตรงผ่านจุด $A \parallel BC$ ไปผ่าน
ขาของมุมนี้ (คือที่ F) จากจุด C ชีตเส้นตรง $\parallel EF$ ไปผ่าน
เส้นจาก A (คือที่ G) $EFCG$ คือ $\square$ ขนานที่ประสงค์

(พิสูจน์) ถากเส้น AE

$$\triangle ABE = \triangle AEC \quad (\text{ฐานเท่าระหว่างขนานคู่เดียว})$$

$$\therefore \triangle ABC = 2 \triangle AEC$$

$$\text{แต่ } FECE = 2 \triangle AEC \quad (\text{ฐานเดียวระหว่างขนานคู่เดียว})$$

$$\therefore \square \text{ ขนาน } FECE = \triangle ABC \text{ และ } CEF = D \quad (\text{สร้าง})$$

แก้

$\therefore$ มีความรู้ยู่ไว้ ถ้า $\triangle$ กับ $\square$ ขนาน, ฐานเท่ากันหรือเดียวกัน
ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกันแล้ว $\square$ ขนานย่อมเป็น ๒ เท่า $\triangle$ ที่ตั้ง
การจะให้ $\square$ ขนาน = $\triangle$ (ไม่ใช่ ๒ เท่า) ก็ย่อมทราบได้ว่าฐานของ $\square$
ขนานต้องเพียงครึ่งฐาน $\triangle$ มิฉะนั้นถ้าจะให้ฐานเท่าระยะสูงของ $\square$ ขนาน ก็
ต้องเพียงครึ่งของ $\triangle$ ประการใดประการหนึ่ง แต่ที่จะให้ระยะสูงทั้งของ $\triangle$
นั้นออกจะไม่สะดวกเท่า เอาครึ่งของฐาน

$\therefore$ จึงถืองมือแบ่งครึ่งฐาน $\triangle$ แล้วเอาแค่ส่วนเดียว, สร้างมุมให้เท่า
ที่กะ แล้วขีดแต่ปลายฐาน อีกข้างหนึ่งขนานกับขาของมุมที่สร้างใหม่นี้ แล้ว
จึงขีดเส้นขนานกับฐานสูงเสมอจอม $\triangle$ (คือให้สูงเท่า) เป็นอันสำเร็จวิธีสร้าง
เวลาพิสูจน์ เหยียดให้ $\triangle ABC$ เป็น ๒ เท่า $\triangle AEC$
เสียก่อนแล้วก็จะพูดได้ว่า = $\square$ ขนาน $\therefore \square$ ขนานนั้นเป็น ๒ เท่า $\triangle$
 AEC อยู่แล้ว โดยที่สร้างขึ้นบนฐานเดียวกัน ระยะสูงเดียวกัน.

แต่ $\triangle ABC$ จะเป็น ๒ เท่า $\triangle AEC$ ได้นั้น

$\therefore \triangle ABE = \triangle AEC$ โดยที่ฐานเท่ากันระยะสูงเท่ากัน
ค่าที่จอมจุดแห่งเดียวกัน.

๒๔๕

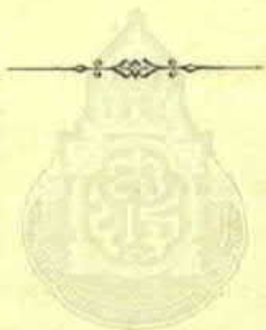
เมื่อ $\triangle ABE = \triangle AEC$ แล้ว (๐)

และ $\triangle ABC = \triangle ABE + \triangle AEC$

$\triangle ABC = \triangle AEC + \triangle AEC$ (ท.๐)

$\triangle ABC = ๒ \triangle AEC$

จึงได้ว่า $\square$ ขนานนั้น,

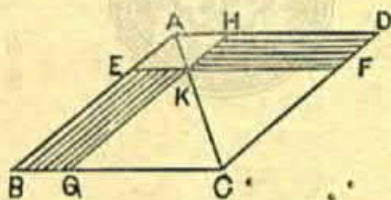


แบบฝึกหัด

(เขียนรูป)

(๑) ให้สร้างรูปจตุรศ ด้านยาว ๕ เซนติเมตร แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานพื้นที่เท่าจตุรศกับให้มุม ๆ หนึ่ง 45° แล้วคำนวณหาความยาวของด้านแห่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานกับให้วัดสอบดูด้วย

(๒) ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A B C D$ ให้ AB ยาว $2\frac{1}{2}$ นิ้ว และ AD ยาว ๒ นิ้ว แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าบนฐานร่วมกัน AB และมีพื้นที่เท่ากัน



แสดงศัพท์ ตามในรูปนี้

□ $A B C D$ ขีดเส้นทแยงมุมแล้ว กำหนดจุด K ใดภายใน, ขีดเส้นตรง EF กับ $H G \parallel$ ด้าน, ผ่านจุด K □ $E H$ กับ $G F$ ให้ชื่อว่า

“สี่เหลี่ยมด้านขนานตรงเส้นทแยงมุม”

(parallelograms about the diagonals) และ $\square$ EG กับ HF นั้นให้เรียกว่า “รูปเสริม” (complements)

(๓) ในรูปข้างบน จงใช้ อ.น. ที่ ๒๒ มาพิสูจน์ให้เห็นว่ารูปเสริม EG กับ HF นั้นเท่ากัน

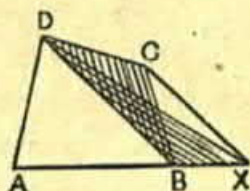
(๔) ให้สร้าง $\square$ นาก ได้พื้นที่เท่า $\square$ CDEF กับให้ด้านยาวเท่าด้าน AB ถ้า $AB = ๖$ เซนติเมตร $CD = ๘$ เซนติเมตร $CF = ๓$ เซนติเมตร ให้วัดด้านอื่น ๆ ในรูปสี่เหลี่ยมที่สร้างขึ้นมาว่ายาวเท่าใด

(๕) ให้สร้าง $\square$ นากด้านยาว ๕ เซนติเมตร กับให้ได้พื้นที่เท่า พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านหนึ่งยาว ๖ เซนติเมตร ในรูปสี่เหลี่ยมที่สร้างขึ้นมา ให้วัดด้านอีกด้านหนึ่งแล้วคำนวณพื้นที่

เรขาคณิตที่ ๑๘

จงทอน $\square$ เป็น $\triangle$ พื้นที่เท่าเดิม

ทอน $\square$ เป็น $\triangle$



ดมมตให้ $ABCD$ เป็น $\square$ ที่กำหนดให้ ให้สร้าง $\triangle$ มีพื้นที่เท่ารูปสี่เหลี่ยม

(วิธีสร้าง) ถากเส้น DB , ขีดเส้น CX ผ่านจุด $C \parallel DB$ เติงไปจดเส้น AB (เมื่อตัดออกไปแล้ว) ที่จุด X ถากเส้น DX , $\triangle DAX$ คือ $\triangle$ ที่ต้องการ

(พิสูจน์) $\triangle XDB = \triangle CDB$ (ฐานเดียว DB ระหว่างขนานคู่เดียว DB กับ CX)

$\therefore \triangle XDB + \text{รูป } \triangle ADB = \triangle CDB + \text{รูป } ADB$ คือ $\triangle DAX = \square ABCD$

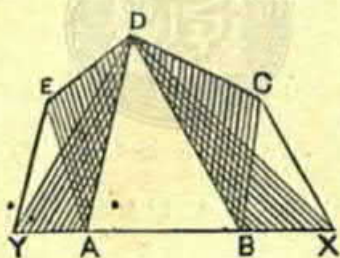
แก้

เวลาสร้างให้ขีดเส้นทแยงมุมแบ่ง $\square$ ออกเป็น $\triangle$ ให้ได้ $\triangle$ ที่เล็กที่สุดได้เป็นคี่. แล้วขีดเส้นผ่านจุด $\triangle$ เล็กที่สุดนี้ (เอาเส้นที่ขีดแรกเป็นฐาน) ให้ $\parallel$ เส้นที่ขีดแรกแล้วต่อด้านที่นำจะไปตัดเส้นผ่านจุดนี้ให้ไปชนกัน แล้ว

ชี้แต่จุดที่จุดกันนี้ไปสู่แห่งแรก (คือ D) ในเวลาพิสูจน์จึงรูปที่วางอยู่ไม่ได้ยังเส้นมาก เช่นรูป $\triangle ADB$ แล้วทำ $\triangle$ ที่เมื่อบวกกับ $\triangle ADB$ แล้วเป็น $\square ABCD$ ไป รูปหนึ่งกับที่เมื่อบวกกับ $\triangle ADB$ แล้วเป็น $\triangle DAX$ ไป จึงได้ $\triangle XDB$ กับ $\triangle CDB$ แล้วพิสูจน์ให้เท่ากัน จึงจะได้ผลในเมื่อบวกกับรูป $\triangle ADB$ แล้วว่าผลบวก (คือ $\square$ กับ $\triangle$) นั้นเท่ากัน แต่ $\triangle$ ทั้งสองที่หาได้ก็เท่ากันได้ เพราะอยู่บนฐานเดียวกัน DB ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน DB กับ CX .

$\therefore$ เป็นอันได้ว่า $\square ABCD = \triangle DAX$

ข้ออนุมาน โดยวิธีเดียวกับ ร.น. ๑๘ นี้ก็สามารถจะทอนรูปเหลี่ยมต่าง ๆ ให้เป็นรูปน้อยเหลี่ยมลงได้จะให้เหลือเพียง $\triangle$ กเดียว



ตามรูปนี้ $\square EDXA =$ รูปห้าเหลี่ยม $A B C D E$

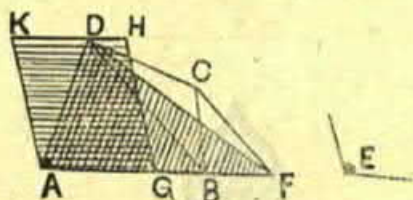
และ $\triangle DXY = \square EDXA$ (ร.น. ๑๘) ดังนั้น

เรขานิกเทศที่ ๑๔

ให้ทอนรูปเหลี่ยมเป็น $\square$ ขนาดพื้นที่เท่าเดิมกับให้มีมุม ๆ หนึ่ง

ตามกะ

ทอนรูปเหลี่ยมเป็น $\square$ ขนาดมีมุม ๆ ๑ เท่ากะ



สมมุติให้ $ABCD$ เป็นรูปเหลี่ยมและ E เป็นมุม ที่กำหนดให้

ให้สร้าง $\square$ ขนาดเท่า $ABCD$ มีมุมเท่า $\hat{E}$

(วิธีสร้าง) ให้ทอน $ABCD$ เป็น $\triangle$ คือ DAF

(ทอนรูปเหลี่ยมเป็น $\triangle$) แล้วสร้าง $\square$ ขนาด คือ $KHGA =$

$\triangle DAF$ มีมุม ๆ หนึ่ง $= \hat{E}$ (สร้าง $\square$ ขนาด $= \triangle$ มุมกะ)

แก้

เรขานิกเทศนี้ไม่ต้องพิสูจน์ เพราะเมื่อสร้างมีหลักฐานเพียงพอแล้ว
ที่จริงเรขานิกเทศที่ ๑๔ ไม่มีอะไรใหม่ เป็นแต่เอา ร.น. ๑๘ กับ ๑๑ มาประกอบ
กันเข้าเท่านั้น จะให้เป็นข้ออนุมาณของ ร.น. ๑๘ ก็ได้ แต่เห็นว่าจะใหญ่โตไป

หมายเหตุ ถาดานของรูปเทวดามที่กำหนดให้มัน เถินกว่า
 ๑๕ ขึ้นไป ก็ให้ทอนลงมาครั้งละขึ้น ๆ คือคราวละด้านจนกระทั่งถึง
 รูปตามเทวดามเป็นที่สุด



แบบฝึกหัด

(ทอกรูปเหลี่ยมลงเป็นรูปสามเหลี่ยม)

(๑) ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยม $A B C D$ จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$A B = B C = ๔.๕ \text{ เซ็นติเมตร}$$

$$C D = D A = ๔.๕ \text{ เซ็นติเมตร} \quad \text{มุม } A = ๗๕^{\circ} \text{ ทอน}$$

รูปสี่เหลี่ยมลงเป็นรูปสามเหลี่ยมพื้นที่เท่ากัน วัตถุประสงค์และระยะสูง
ของรูปสามเหลี่ยมแล้วคำนวณพื้นที่(๒) ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยม $A B C D$

$$\text{เมื่อ } A B = ๒.๘ \text{ นิ้ว, } B C = ๓.๒ \text{ นิ้ว, } C D = ๓.๓ \text{ นิ้ว,} \\ D A = ๓.๖ \text{ นิ้ว เส้นทแยงมุม } B D = ๓.๐ \text{ นิ้ว}$$

ทอกรูปสี่เหลี่ยมลงเป็นรูปสามเหลี่ยม แล้วคำนวณพื้นที่ของรูป
สี่เหลี่ยมนี้(๓) นารูปสี่เหลี่ยม $A B C D$ กว้างยาวดังต่อไปนี้ $A B$
 $= ๔๕๐$ เมตร, $B C = ๓๘๐$ เมตร, $C D = ๓๓๐$ เมตร $A D$
 $= ๓๙๐$ เมตร เส้นทแยงมุม $A C = ๖๖๐$ เมตร เขียนแผนที่ใช้
มาตราส่วน ๑ คือ ๕๐๐๐ ทอนแผนที่นี้ลงเป็นรูปสามเหลี่ยม วัตถุประสงค์
ระยะสูงแล้วคำนวณพื้นที่

(๔) ให้สร้าง "รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า" ลงบนฐาน AB ยาว ๔ เซนติเมตร มุม A กับมุม B ขนาดมุมละ ๑๐๘° ทอนลงเป็นรูปสามเหลี่ยม วัดเส้นฐานและระยะสูงแล้วคำนวณพื้นที่

(โดยยัดเข้าไปในบ็อกซ์สร้างรูป และพิสูจน์ให้ด้วย)

(๕) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมกำหนดระยะสูงให้ กับให้มีพื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยมที่ได้สร้างไว้ให้

(๖) กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC กับจุด X ให้ ๆ สร้างรูปสามเหลี่ยมจตุรัสจุด X ฐานคือกับฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นแนวตรง ทั้งให้พื้นที่เท่ารูปสามเหลี่ยม ABC ด้วย

(๗) ให้ตัดวงเวียนแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นจำนวน n ส่วนให้เท่ากันทุกส่วน โดยขีดเส้นตรงจากมุมใดมุมหนึ่ง

(๘) ให้ ขีดเส้นตรงจากจุดที่กำหนดไว้ในด้านหนึ่งแห่ง รูปสามเหลี่ยมไปแบ่งรูปสามเหลี่ยมนั้นออกสองส่วนเท่า ๆ กัน

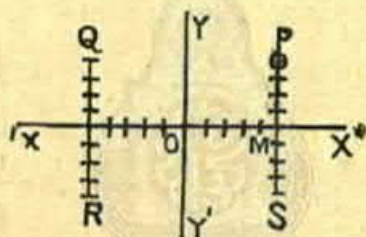
(๙) ให้แบ่งรูปสามเหลี่ยมออก สามส่วนเท่า ๆ กัน โดยขีดเส้นตรงจากจุดที่กำหนดไว้ในด้านหนึ่ง แห่งรูปสามเหลี่ยมนั้น

แกนพิกัด

(แอ็กซีซของพหุเฟอเรนซ์ หรือ, โคออดิเนทซ์,

(axes of reference or coordinates)

เมื่อมีเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันเป็นมุมฉากแล้ว ก็สามารถ
จะหาตำบลหนึ่งตำบลใดในบริเวณเส้นตรงสองเส้นนั้นได้ ในเมื่อ
ทราบตำบลหนึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงสองเส้นนั้นเท่าใด



กล่าวคือ :— ให้เส้นตรง $XO X'$ กับ $YO Y'$ ตัดกันเป็น
มุมฉากที่จุด O . ตาบด P ก็อาจจระรวมได้ เมื่อรู้ว่า P ห่าง
จาก $XO X'$ กับ $YO Y'$ เท่าใด

เส้นตรง $XO X'$ กับ $YO Y'$ ตัดกันที่ O แกนพิสัย

(axes of reference)

เช่น $X \circ X'$ ให้ชื่อว่า แกน X

เส้น YOY' ให้เรียกว่า แกน Y

จุดที่เส้นตรงสองเส้นนั้นตัดกัน (จุด O) ให้ชื่อว่า
กำเนิดแกนพิกัด (origin)

เส้น ' $X O X$ ' มักขีดเป็นเส้นระดับและ ' $Y O Y$ ' เป็นเส้นตั้ง
จุด P จะห่างจาก แกน เท่าใดนั้นอาจทราบได้ โดยวิธีนี้ :— ตั้งต้น
ที่จุด P ขีดเส้นตรงลงมาถึงได้ฉากกับ ' $X X$ ' ที่จุด M ก็เป็นอัน
ทราบว่า P ห่างจากแกนเท่าใด O M ให้เรียกว่า พิกัดราบ
(abscissa) P M ให้เรียกว่า พิกัดตั้ง (ordinate) พิกัดราบ
พิกัดตั้ง เรียกรวมกันว่า พิกัด

ถ้าทราบ พิกัด แห่งจุดหนึ่งจุดใด ก็สามารถจะหาค่าของ
จุดนั้นได้ เช่น

(ตัวอย่าง) พิกัดของจุด ๆ หนึ่งเท่ากับ (๕, ๔) ยูนิต
ให้หาค่าของจุดนั้น

ตั้งต้นแต่จุด O กระ $O X$ ออก ๕ ระยะเท่ากันทุกระยะ
ระยะละยูนิตที่สุดแห่งระยะปลาย ก็คือจุด M, ที่จุด M ขีดเส้น
ตั้งได้ฉากขึ้นไปแล้วตั้งต้นแต่ M ขึ้นไป กระออก ๔ ระยะเท่า ๆ กัน
ระยะละยูนิต

จุด P คือจุดที่ประสงค์ซึ่งได้ พิกัด $(\pm, \pm)$ บนแกนพิกัด แบ่งพื้นราบออกเป็น ๔ ส่วน ๆ หนึ่ง ๆ ให้ชื่อว่า จัตุรภาคคด หรือ เชี้ยววงกลม (quadrant)

และ $X'OY$ ชื่อว่า จัตุรภาคคดที่ ๑

$Y'OX'$ " จัตุรภาคคดที่ ๒

$X'OY'$ " จัตุรภาคคดที่ ๓

$Y'OX$ " จัตุรภาคคดที่ ๔

ตามโจทย์ที่ให้หา P ซึ่งได้พิกัด $(\pm, \pm)$ นั้น ถ้าสังเกต ในบันทึกก็จะเห็นได้ว่า จุดที่ต้องการมีอยู่ทุกจัตุรภาคคดไป แต่ไม่ประสงค์มากมายเช่นนั้น จึงต้องให้ มติชัดเจนไว้ว่าจะอยู่ใน จัตุรภาคคด ไหนแน่ โดยเหตุนี้จึงกำหนดให้ ใช้เครื่องหมาย บวก, กับ ลบ แสดงจัตุรภาคคดตามกฎต่อไปนี้

• พิกัดราบ ซึ่งวัดไปตาม แกน X นั้น ถ้าวัดไปทางขวาของ กำเนิดแกนพิกัดเป็น $+$ (บวก) ถ้าไปข้างซ้ายเป็น $-$ (ลบ) พิกัด ตั้งซึ่ง $\perp$ แกน X ถ้าอยู่เหนือแกน X (คือในจัตุรภาคคดที่ ๑ กับที่ ๒) เป็น $+$ (บวก) ถ้าอยู่ใต้ (คือในจัตุรภาคคดที่ ๓ กับที่ ๔) เป็น $-$ (ลบ)

เพราะฉะนั้นพิกัดของจุด P จึงเป็น $(\pm, \pm)$

" " " " $(-\pm, \pm)$

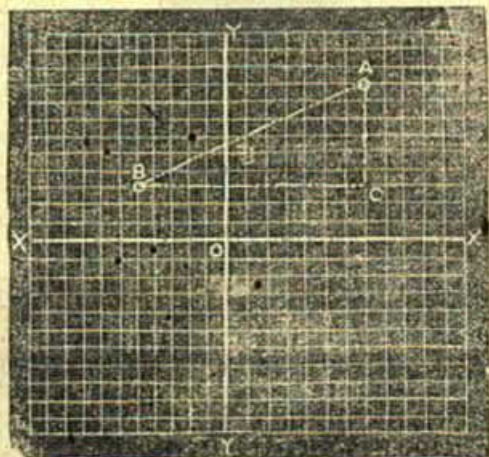
ของจุด R (จึงเป็น $(-๕, -๔)$)

“ “ S “ $(๕, -๔)$

หมายเหตุ พิกัดของจุดกำหนดแกนพิกัดเท่ากับ $(๐, ๐)$

การฝึกหัดในชั้นต้น ควรใช้ตารางในกระดานตาราง เลือกเอาเส้นที่ตัดกันต้องเส้นในตารางนั้นเป็นแกน และเพื่อเป็นที่สังเกตได้ว่าเส้นใด ให้เอาดินสอขีดเส้นข้างไปให้ต่ำกว่าเส้นอื่น ในการแบ่งหรือวัดใช้นับตารางเป็นตา ๆ ไป ก็แล้วกัน ตารางนั้นตาหนึ่ง ๆ ควรให้กว้าง .๑ นิ้วยาว .๑ นิ้วเป็นอย่างดีทุก

ตัวอย่างที่ ๑, พิกัดแห่งจุด A เท่ากับ $(๗, ๘)$ จุด B = $(-๕, ๓)$ จงหาค่ามดแห่งจุดทั้งสองนี้ และให้ทราบด้วยว่าห่างกันเท่าใด



เมื่อหาค่าบดของจุด A กับจุด B ได้แล้ว เราก็อาจทราบว่า
เส้น A B ยาวเท่าใดได้ โดยวัดเขาที่เดียวหรือใช้วิธีต่อไปนี้ก็ได้
ขีดเส้นผ่าจุด B ขนานกับ XX' ไปบรรจบกับ พิกัดตั้งของจุด A
ที่จุด C

เพราะฉะนั้น A B C จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

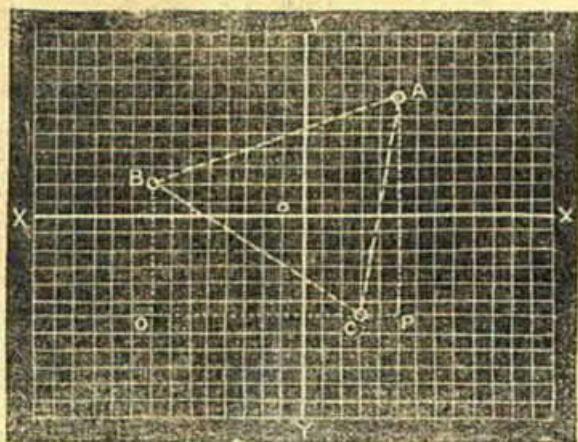
BC ยาว ๑๒ ($\because$ พิกัดราบของ A = ๓ พิกัดราบของ B = ๙)

AC ยาว ๕ ($\because$ แกนตั้งของ A = ๘ พิกัดตั้ง " B = ๓)

$$\begin{aligned}\therefore AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= (12^2) + 5^2 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169\end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{169} = 13$$

ตัวอย่างที่ ๒ พิกัดของจุด A, B, กับ C เท่ากับ
(๕, ๗), (-๘, ๒), (๓, -๕) ให้หาค่าบดของจุดทั้งสาม
แล้วให้หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นโดยขีดเส้นตรงต่อจุดทั้งสามนั้น



เมื่อหาค่าบทรองจุดทั้งสามเสร็จแล้ว ให้ตั้งมือวัดเส้นฐาน
 ก่อนแล้ววัดระยะส่งวัดดูว่าเท่าใดแล้วจึงคำนวณพื้นที่หรือจะใช้วิธี
 ก็ได้:—วัดเส้น AP ผ่านจุด $A \parallel YY'$ แล้ววัด BO ผ่านจุด
 $B \parallel YY'$ แล้ววัดเส้นตรงผ่านจุด C ขนานกับ XX' ไปจุด BO ที่จุด O
 จุด AP ที่จุด P , $\triangle ABC = \square$ ขนานด้านไม่เท่า AP
 $BO - \triangle$ หาก $APC - \triangle$ หาก $BOC = \frac{1}{2} OP$
 $(AP + BO) - \frac{1}{2} AP \cdot PC - \frac{1}{2} BO \cdot OC$
 $= \frac{1}{2} \times 13 \times 15 - \frac{1}{2} \times 12 \times 2 - \frac{1}{2} \times 7 \times 11$
 $= 77$ ยูนิตตารางเหลี่ยม

แบบฝึกหัด

(๑) ให้หาคำบาลของจุดตามลำดับของพิกัดต่อไปนี้

(ก) $(๖, ๔)$, $(-๖, ๔)$, $(-๖, -๔)$, $(๖, -๔)$

(ข) $(๘, ๐)$, $(๐, ๘)$, $(-๘, ๐)$, $(๐, -๘)$

(ค) $(๑๒, ๕)$, $(๕, ๑๒)$, $(-๑๒, ๕)$, $(-๕, ๑๒)$

(๒) ให้หาคำบาลของจุดต่อไปนี้ กับให้แสดงให้เห็นโดยวิธีทดลองว่าลำดับหนึ่งก็อยู่เรียงกันเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

(ก) $(๙, ๗)$, $(๐, ๐)$, $(-๙, -๗)$

(ข) $(-๙, ๗)$, $(๐, ๐)$, $(๙, -๗)$

แล้วให้อธิบายผลที่ได้

(๓) ให้หาจุดตามที่ได้กำหนดไว้เป็นคู่ ๆ ต่อไปนี้ แล้วขีดเส้นแต่จุดทั้งสองต้องต่อกัน แล้วให้หาพิกัดของจุดกึ่งกลางเส้นนั้น

(ก) $(๔, ๓)$, $(๑๒, ๗)$, (ข) $(๕, ๔)$, $(๑๕, ๑๖)$

เมื่อสำเร็จแล้วจงแสดงให้ทราบด้วย ว่าทำไมพิกัดของจุดใหม่จึงเป็นครึ่งหนึ่งของผลบวกแห่งพิกัดแรก และครึ่งหนึ่งของผลบวกแห่งพิกัดตั้งของจุดกำหนดให้

(๔) จงหาคำบาลของจุดเป็นคู่ ๆ ข้างล่างนี้ และจงหาพิกัดของจุดกึ่งกลางแห่งเส้นตรงในระหว่างจุดทั้งสองที่ได้ในข้อหนึ่ง ๆ

(ก) $(0,0)$, $(๘,๑๐)$, (ข) $(๘,๐)$, $(๐,๑๐)$,
 (ค) $(๐,๐)$, $(-๘,-๑๐)$, (ง) $(-๘,๐)$,
 $(๐,-๑๐)$

(๕) จงหาพิกัดของจุดที่แบ่งเส้นตรงในระหว่าง $(๐,๐)$
 กับ $(๑๘,๑๕)$ ออกสามส่วนเท่า ๆ กัน

(๖) จงหาจุดเหล่านี้ และบอกด้วยว่าแต่ละจุดห่างจากจุด
 กำเนิดแกนพิกัดเท่าใด

(ก) $(๑๕,๘)$ (ข) $(-๑๕,-๘)$, (ค) $(๒๔, ".๗")$,
 (ง) $(- ".๗", ๒.๔)$

(๗) จงหาค่าบดของจุดเป็นคู่ ๆ ตามข้อเหล่านี้ และจุด
 คู่กันในข้อหนึ่งห่างกันอยู่เท่าใด

(ก) $(๔,๐)$, $(๐,๓)$, (ข) $(๙,๘)$, $(๕,๕)$
 (ค) $(๑๐,๔)$, $(-๕,๑๒)$, (ง) $(๒๐,๘)$, $(-๑๕,๐)$

แล้ววัดกลับ

(๘) ให้สีแดงให้เห็นว่าจุดสามจุดที่ได้ พิกัดต่อไปนี้

$(-๓,๒)$, $(๓,๑๐)$, $(๗,๒)$ เป็นจุดตรงมุมทั้งสาม
 แห่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และในรูปสามเหลี่ยมนี้ ด้านที่เท่ากัน
 ด้านหนึ่งยาวเท่าใด

(๙) เขียนรูปชี้ให้เห็นว่าจุดต่าง ๆ ซึ่งได้พิกัดต่อไปนี้

(ก) $(a, 0)$ $(0, b)$,

(ข) $(b, 0)$ $(0, a)$

(ค) $(0, 0)$ (a, b)

ในลำดับหนึ่ง ๆ ห่างกัน เป็นระยะทางเท่ากันหมด

(๑๐) ชีตเส้นตรงต่อจุด

(ก) $(a, 0)$ กับ $(0, a)$ (ข) $(0, 0)$ กับ (a, a)

แล้วให้พิสูจน์เส้นตรงทั้งสองที่ได้นั้นตัดกันเป็นมุมฉาก

(๑๑) จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนไปเฉพาะให้ระยะทางแต่ $(0, 0)$ กับ $(\alpha, -\alpha)$ เท่ากันเสมอ วิถีของจุดนี้จะไปตัดแกนที่ตรงไหน

(๑๒) ให้แสดงให้เห็นว่า จุดเหล่านี้อยู่จัดไว้เป็นลำดับ ๆ แต่ละลำดับเนื่องกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และให้คำนวณพื้นที่ของรูปหนึ่ง ๆ

(ก) $(\alpha, 2)$, $(17, 11)$, $(17, 12)$, $(\alpha, 12)$

(ข) $(3, 2)$, $(3, 15)$, $(-6, 15)$, $(-6, 2)$

(ค) $(5, 1)$, $(-8, 1)$, $(-8, -8)$, $(5, -8)$

(๑๓) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมตามจุดต่าง ๆ ที่กำหนดให้

เป็นลำดับ ๆ กับให้พิสูจน์ด้านของรูปสามเหลี่ยมได้ โดยค่อจุดลำดับ
เหล่านี้ ฆนานกับแกนอยู่ด้านหนึ่งแล้วคำนวณพื้นที่

(ก) $(0,0)$, $(๑๒,๑๐)$, $(๑๒,-๖)$

(ข) $(0,0)$, $(๕,๘)$, $(-๑๕,๘)$

(ค) $(0,0)$, $(-๑๒,๑๒)$, $(-๑๒,-๘)$

(ง) $(0,0)$, $(-๖,-๘)$, $(๒๐,-๘)$

(๑๔) ให้สังเกตให้เห็นว่า จุดที่จัดไว้เป็นลำดับ ๆ เหล่านี้

เนื่องกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมฆนานด้านไม่เท่าทุกลำดับ แล้วคำนวณพื้นที่

(ก) $(๓,๐)$, $(๓,๓)$, $(๙,๐)$, $(๙,๖)$

(ข) $(๘,๔)$, $(๔,๔)$, $(๑๑,-๑)$, $(๓,-๑)$

(ค) $(๐,๓)$, $(-๕,๓)$, $(-๒,-๓)$, $(๐,-๓)$

(ง) $(๐,๐)$, $(-๑,๕)$, $(-๔,๕)$, $(-๘,๐)$

(๑๖) ให้สังเกตให้เห็นว่าจุดเหล่านี้ คือ:— $(-๕,๐)$,

$(๗,๕)$, $(๑๘,๐)$, $(๗,-๕)$ เป็นจุดตรงมุมทั้งสี่แห่ง

รูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า กับให้หาความยาวของด้านแล้วคำนวณพื้นที่

จบเรขาคณิตเล่มหนึ่ง

เล่มสองยังจะพิมพ์ต่อไป

Pr. 62

