



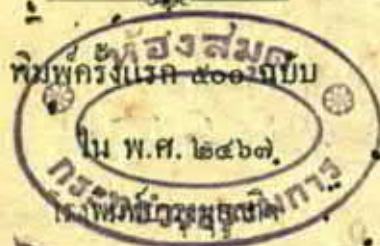
ตำราเรขาคณิต.

เล่ม ๔

นายร้อยเอก หลวงพสุธาวิภาค

(สด เจนภูมิศาสตร์)

ผู้ช่วยหัวหน้าพแมกวาง ไคร่งเร้งฐานแผนที่กรมแผนที่
เรียบเรียง



ก 03320



คำสั่งและคำชี้แจง

ตำราเรขาคณิตเล่ม ๔ ซึ่งสายร้อยเอก หอวังพลุชาวิภาค (ศักดิ์ เจริญภูมิศาสตร์) ผู้ช่วยหัวหน้าแผนกวางโคโรงหลักฐานแผนที่ กรมแผนที่เรียบเรียงขึ้นนี้ เจ้าน้ำที่ในกระทรวงกระดาใหม่ได้ตรวจแล้ว เห็นว่าจะเป็นประโยชน์ในการศึกษา เพราะฉะนั้นให้ผู้นี้มีหน้าที่ใช้ตำรานี้ประกอบในการศึกษาเจ้าเรียน.

รับคำสั่งตั้งนามบัตรกระทรวงกระดาใหม่

(ลงพระนาม) อ. บริพัตร

เจ้ากรมการทหารบก

เจ้าตำรากระทรวงกระดาใหม่ ในพระนคร

วันที่ ๑๐ มิถุนายน พ.ศ. ๒๔๖๗

ตรวจถูกต้องกับต้นฉบับแล้ว

นายพลตรี พระยา อิศรา

เจ้ากรมตำราทหารบก

แจ้งความ

ตำราเรขาคณิตเล่ม ๔ นี้ นายร้อยเอก หลวงพลุฑาวิภาค
(ยศ เสนาภิบาล) ผู้ช่วยหัวหน้าแผนกวางโครงการฐานแผนที่
กรมแผนที่เรียบเรียงขึ้น และมอบกรรมสิทธิ์ให้กระทรวงกระดาใหม่
จึงได้ตั้งทุนพิมพ์ขึ้นไว้สำหรับราชการทหารบก และได้จดทะเบียน
เป็นกรรมสิทธิ์แล้ว

เพราะฉะนั้นห้ามมิให้ผู้อื่นใดลอกคัดหรือพิมพ์ตำราขึ้นจำหน่าย
ก่อนได้รับอนุญาตจากกระทรวงกระดาใหม่เป็นอันขาด.

(ลงนาม) นายพลตรี พระยาอินทรวชิต

เจ้ากรมตำรวจทหารบก

ที่ว่าการกรมตำรวจทหารบก ในพระนคร

วันที่ ๑๐ มิถุนายน พระพุทธศักราช ๒๔๖๗

ขอให้ ให้ แก่ เป็น ธรรมดา ที่ ทุก

พ. ๒๕๖๓

ค่าน้ำ

๒๕๖๓

๒๕๖๓

๒๕๖๓

๒๕๖๓

๒๕๖๓

๒๕๖๓

๒๕๖๓

ตำราเรขาคณิตเล่มนี้ จะจัดให้อยู่ในจำพวกตำราวิชาคำนวณ
ที่บริบูรณ์ และอาจนำไปใช้สำหรับทุกโรงเรียน เช่นตำราอื่น ๆ
ที่มียกย่องกันไม่ได้ ด้วยก่อนที่จะได้เรียบเรียงจนเป็นเล่มนี้นั้น
ข้าพเจ้าได้ตั้งใจจะเขียนคำนำโดยตรง แต่เป็นเพราะข้าพเจ้าได้
รับหน้าที่เป็นผดุงวิชาเรขาคณิต ในแผนกศึกษาของกรมแผนที่
เท่านั้น

อนึ่งความประสงค์ของหลักสูตร ในกรมนี้ว่า ให้นักเรียน
ชั้นมัธยมได้เรียนวิชาเรขาคณิตที่ตรงด้วย เพื่อจะได้เป็นทุนต่อไป
ในการศึกษาวิชาตรีโกณมิติที่ตรงตาม แต่ในขณะนั้นยังขาดตำรา
เรขาคณิตที่ตรงอยู่ ข้าพเจ้าจึงได้เลือกเฟ้นและเพาะสั่งทำเป็น
เท่านั้น มาจัดลงเป็นหัวข้อ และนำมาใช้สอนนักเรียน ภายหลัง
เมื่อต้นฉบับแล้ว จึงได้คิดว่า ถ้าได้ตกแต่งเพิ่มเติมขึ้นอีกบาง
กัปกอาจจะทำให้หัวข้อเหล่านั้นกลายเป็นตำรา และใช้เป็นคู่มือของ
นักเรียนได้ จึงได้พยายามรวบรวมขึ้น แม้ว่าจะยังไม่บริบูรณ์
เต็มที่ ก็ยังสามารที่จะใช้ให้เป็นกันทั่ว สำหรับผู้ที่ศึกษาวิชา

๒๕๖๓

แผนที่ หรือวิศวกรรมศาสตร์เพื่อบรรลุดังผลตามความประสงค์ ได้
ฉะนั้นมีทำขึ้น โดยเห็นความขาดตกบกพร่องหรือผิดเพี้ยน ใน
รายละเอียดของแผนที่ ในนามศัพท์ต่าง ๆ ที่ได้ ขอบได้ โปรดให้
อภัยด้วย.

นายร้อยเอก ทดวงพสุธาวิภาค

บอกแก่คำผิด

หน้า

บรรทัด

ทำเต็ม

แก้เป็น

๘ ๖-๑๒

ย่อมเป็น

คือ

๑๑ ๑๑

ก

ก

๒๒ ๑๒

Perpendieular

Perpendicular

๓๒ ๗

$PA > PC$

$PA > PC$

๓๔ ๖-๑๓

ย่อมเป็น

คือ

๓๕ ๔

ย่อมเป็น

คือ

๓๗ ๖

(๘๘)

(อ.น. ๓)

๔๒ ๔

ฉากของ

ฉากกับ

๕๔ ๑๖

เต็มข้างท้ายบรรทัดว่า

(อ.น. ๑๒)

๖๑ ๑๗

ก

ก็ตาม

๖๒ ๑๕

อยู่ที่

ที่

๖๔ ๑

$$= \frac{\angle ABC}{\angle ABD}$$

$$= \frac{\angle ABD}{\angle ABD}$$

๗๑ ๘

(๘๗)

(๘๓)

๗๔ ๒-๓

จะเป็น

คือ

๗๗ ๑๑

เต็มข้างท้ายบรรทัดว่า

(อ.น. ๑๔)

หน้า	บรรทัด	คำเดิม	แก้เป็น
๗๙	๙	(อน ๑ อ.น. ๑๗) (อน ๒ อ.น. ๑๗)	
๘๐		ท่มมรูป ๓๘ ข้างขวาตอนใด ให้เติมอักษร N	
๘๙	๑๒	รวม	รวม
๙๔	๑๐	ม่ม	มียอดม่ม
๙๔	๑๒	อีย	อีย
๙๙	รูป ๔๘ ก	F	F
๑๐๐	๗	VA', VB', VC', VA', VB', VC'	
๑๐๐	๑๕	เดิน	เดิน
๑๐๓	๓	๓	๒
๑๐๓	๙	ขีดคำว่า “จากยอดม่ม” ออกเสีย	
๑๐๓	๑๐	ข้อ ๑๕๐ และ ๑๕๓ ข้อ ๑๐๑ และ ๑๐๒	
๑๑๕	๖	ใด	ไร
๑๑๗	๘	คน	คน
๑๑๗	๑	เนอท์	พมท์
๑๒๐	๕	หน่วยของส่วนๆ หน่วยของส่วนๆ หรือเนอท์	
๑๒๐	๖	ส่วนๆ	ส่วนๆหรือเนอท์
๑๒๑	๕	ส่วนๆ	ส่วนๆหรือเนอท์

ก

คำเดิม

แก้ไข

นำ

บรรทัด

ถ้วน

เนื้อ

รูป

รูป

ทบ

ทบ

(๒๓ ๑ ๒.๓.๓)

(๒๓ ๑ ๒.๓.๓๐)

รูป

รูป

รูป

รูป

ทว

ทว

ตามข้อ (๑๗๖)

ตามข้อ (๑๑๙)

กรวยคตขนาน

กรวยเหลี่ยมคตขนาน

คณ.

คณ.

เท่าใด

เท่าไร

เท่าใด

เท่าไร

รูป

รูป

$\sqrt{bb}$

$\sqrt{bb}$

มีแปด

มีแปด

ปาด

ปาด

โดยอาการทรง

ซึ่งทรง

หน้า	บรรทัด	คำเดิม	แก้เป็น
๑๙๓	๑	Circumscribed	Circumscribed
๑๙๔	๓	Cylindras	Cylinder as
๑๙๕	๒	ภายนอกน	ภายนอก
๑๙๘	๑	รูป	รูป
๒๐๒	๑	ผนัง	ผนัง
๒๐๒	๘	เท่าใด	เท่าไร
๒๑๗	๖	ระยะตั้งฉาก	พหุคูณฉาก
๒๒๑	๑๗	เพราะพ	เพราะพหุ
๒๒๑	๑๗	(๑๑)	(๗๗)
๒๒๒	๓	นูนเรียบ	เรียบ
๒๒๕	๓	$\frac{๑}{๓} \pi r^2 a$	$\frac{๑}{๓} \pi r^2 a$
๒๒๕	๓	$\frac{๑}{๓} \pi r^2 a$	$\frac{๑}{๓} \pi r^2 a$
๒๒๗	๔	ทราง	ทราง
๒๒๗	๕	$\pi r r'$	$\pi r r'$

๒๓๐ ๑๔-๑๕-๑๖ นเพราะที่ b และ b' นที่ใดก็ยกขยับ
 ข.ม. และ น, ให้แก้
 เป็น ตาราง ข.ม.
 และ ตาราง น.

หน้า	บรรทัด	คำเดิม	แก้เป็น
๒๓๓	๖-๑๒-๑๗	เท่าใด.	เท่าไร
๒๓๓	๗	รูป	รูป
๒๓๖	๗	เท่าใด	เท่าไร
๒๓๘	๔	ระยะจาก	ระยะห่างจาก
๒๓๘	๘	ครึ่งหนึ่งของรูปทรงกลม	ครึ่งหนึ่งของรูปทรงกลม
๒๔๒	๗	รูป	รูป
๒๔๗	๕	Sphere	Sphere
๒๔๙	๘	รูปกลม	รูปทรงกลม
๒๖๐	๙	(๕๐)	(๘๓)
๒๖๒	๑๒	BOACOB	BOA, COB
๒๖๓	๑๗	ใด	ใด
๒๖๖	๑๑	หนึ่ง	หนึ่ง
๒๖๘	๖-๙	เท่าใด	เท่าไร
๒๗๑	ในรูป	D	D
๒๗๔	๑	A + B + c	A + B + C
๒๗๙	๘	ณ	ณ
๒๘๑	๓	PA, P, PBC	PA, PB, PC

หน้า บรรทัด

คำเต็ม

แถบ

๒๘๓ ๑

A B

A B C

๒๘๔ ในรูป

x

x

๒๘๕ ๑๕

เติมข้างท้ายบรรทัดว่า (อน. อ.น. ๒๗)

๒๘๖ ๒

ส่วนของเส้น

ส่วนของเส้น

๒๘๗ ๑

ของน

ของน

๓๐๗ ๑

รูป

รูป

๓๑๑ ๔

รูป

รูป

๓๑๔ ๑๘

l s

l s

๓๑๗ ๒

S

S

๓๑๗ ๗

วงกลมวงหนึ่ง

วงกลมใหญ่วงหนึ่ง

๓๑๘ ๕

๗๕, ๕๔

๗๕, ๕๔

๓๓๑ ๑๑

๓๖๓)

๓๖๓)

๓๓๒ ๔

$\frac{4}{3} \pi r^3$ (จำนวนเต็ม)

$\frac{4}{3} \pi r^3$

๓๓๕ ๑๒

เท่าใด

เท่าใด

๓๔๐ ๑๔

$(2\sqrt{3}:3)$

$2\sqrt{3}$

สารบัญ

สรุปเรขาคณิตพหุคูณ

ว่าด้วยพหุคูณ

ว่าด้วยพหุคูณและเส้นตรง

ว่าด้วยพหุคูณขนาน

หน้า

๑-๑๖

๑๗

๒๑

๒๓

๒๕

๒๗

๒๙

๓๑

๓๒

๓๔

๔๑

๔๓

๔๖

๔๙

๕๑

๕๓

๕๕

ป.น. ๑

ป.น. ๒

ป.น. ๓

ป.น. ๔

ป.น. ๕

ป.น. ๖

ป.น. ๗

ป.น. ๘

ป.น. ๙

ป.น. ๑๐

ป.น. ๑๑

ป.น. ๑๒

ป.น. ๑๓

ป.น. ๑๔

ว่าด้วยมนต์ของน้ำ

๕๕

ป.น. ๑๕ ๖๓

ป.น. ๑๖ ๖๔

ป.น. ๑๗ ๖๕

ป.น. ๑๘ ๗๐

ป.น. ๑๙ ๗๓

ป.น. ๒๐ ๗๔

ป.น. ๒๑ ๗๖

ว่าด้วยการนายจตุตถะเต็น

ป.น. ๒๒ ๗๘

ป.น. ๒๓ ๘๐

ป.น. ๒๔ ๘๕

ว่าด้วยมนต์หยาน้ำ

๘๘

ป.น. ๒๕ ๙๑

ป.น. ๒๖ ๙๔

ป.น. ๒๗ ๙๕

ว่าด้วยรูปก้อนเหล็กน

๑๐๔

ว่าด้วยรูปแท่งเหล็กน

๑๑๐

ป.น. ๒๘ ๑๑๓

ป.น. ๒๙ ๑๑๕

ว่าด้วยรูปหกด้านขนาน

๑๑๙

ว่าด้วยรูปลูกบาศก์และเนือท

๑๒๐

ว่าด้วยรูปทแยงกันและเหลี่ยมกัน

ป.น. ๓๐

๑๒๑

ป.น. ๓๑

๑๒๔

ป.น. ๓๒

๑๒๖

ป.น. ๓๓

๑๒๗

ป.น. ๓๔

๑๓๒

ป.น. ๓๕

๑๓๖

ป.น. ๓๖

๑๓๘

ป.น. ๓๗

๑๔๐

ป.น. ๓๘

๑๔๕

ป.น. ๓๙

๑๔๖

ว่าด้วยรูปทแยงเหลี่ยม

๑๕๐

ว่าด้วยรูปทแยงเหลี่ยมคดขนาน

๑๕๔

ป.น. ๔๐

๑๕๖

ป.น. ๔๑

๑๕๘

ป.น. ๔๒

๑๖๒

วาทวิรูปกอนเหตุยมเรียบ	ป.น. ๔๓	๑๖๗
วาทวิรูปกระบอก	ป.น. ๔๔	๑๖๘
	ป.น. ๔๕	๑๖๙
		๑๗๐
		๑๗๕
	ป.น. ๔๖	๑๗๗
	ป.น. ๔๗	๑๗๘
	ป.น. ๔๘	๑๗๖
	ป.น. ๔๙	๑๗๗
	ป.น. ๕๐	๑๗๘
วาทวิรูปกรวย		๒๐๓
	ป.น. ๕๑	๒๐๘
	ป.น. ๕๒	๒๑๐
วาทวิรูปกรวยคัตรนาน		๒๑๔
	ป.น. ๕๓	๒๑๖
	ป.น. ๕๔	๒๒๐
	ป.น. ๕๕	๒๒๓

ว่าด้วยรูปทรงกลม

ป.น. ๕๖ ๒๒๕

ป.น. ๕๗ ๒๒๘

ป.น. ๕๘ ๒๓๐

ป.น. ๕๙ ๒๔๔

ป.น. ๖๐ ๒๔๖

ป.น. ๖๑ ๒๔๘

ป.น. ๖๒ ๒๕๐

ป.น. ๖๓ ๒๕๓

ป.น. ๖๔ ๒๕๔

ป.น. ๖๕ ๒๕๙

ว่าด้วยรูปเหลี่ยมทรงกลม

๒๖๑

ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยมทรงกลม

๒๖๓

ป.น. ๖๖ ๒๖๔

ป.น. ๖๗ ๒๖๕

ป.น. ๖๘ ๒๖๘

ป.น. ๖๙ ๒๗๐

ป.น. ๗๐ ๒๗๗

ว่าด้วยรูปตามเหลี่ยมทรงกลม

วิมเนตริก

๒๗๖

๒๗๗

๒๗๘

บ.น. ๗๑

๒๘๐

๒๗๙

๒๘๐

บ.น. ๗๒

๒๘๒

๒๘๑

๒๘๑

บ.น. ๗๓

๒๘๔

๒๘๒

๒๘๒

บ.น. ๗๔

๒๘๖

๒๘๓

๒๘๓

บ.น. ๗๕

๒๘๘

๒๘๔

๒๘๔

บ.น. ๗๖

๒๙๑

๒๘๕

๒๘๕

บ.น. ๗๗

๒๙๓

๒๘๖

๒๘๖

บ.น. ๗๘

๒๙๕

๒๘๗

๒๘๗

บ.น. ๗๙

๒๙๗

ว่าด้วยรูปปลอกทรงกลม

๓๐๒

ว่าด้วยรูป

๓๐๔

๓๐๕

๓๐๕

บ.น. ๘๐

๓๐๕

๓๐๖

๓๐๖

บ.น. ๘๑

๓๐๘

ว่าด้วยเส้นทรงกลม

๓๑๒

๓๑๓

๓๑๓

บ.น. ๘๒

๓๑๓

๓๑๔

๓๑๔

บ.น. ๘๓

๓๑๕

๓๑๕

๓๑๕

บ.น. ๘๔

๓๑๖

๓๑๖

๓๑๖

บ.น. ๘๕

๓๑๗

Veritas

จักรวาล แก่นแท้ จักรวาล

สรุปเรขาคณิตพื้นราบ สำหรับใช้ในเรขาคณิตมิติทรง

- ๑) พื้นที่ที่มีเส้นตรง n เส้นกันเป็นเลขตรรกยะโดยรอบ เรียกว่า รูปสามเหลี่ยม
- ๒) ให้เส้นตรงเส้นหนึ่งหมุนเวียนรอบจุดที่ปลายข้างหนึ่งไปตามพื้นราบ เมื่อเคลื่อนที่ไปก็จะทำให้ยังเกิดมุมขึ้นในระหว่างที่ซึ่งอยู่แต่เดิมกับที่ซึ่งได้เคลื่อนไปอยู่ใหม่ และมุมนี้ถ้าเส้นนั้นยังเคลื่อนที่ไปมากขึ้นก็ยิ่งใหญ่ขึ้นเป็นลำดับ เมื่อเส้นนั้นหมุนไปได้รอบตัว เรียกว่าหนึ่งจกัรวา ดังนั้น หนึ่งจกัรวาจึงเท่ากับ ๒ มุมตรง หรือ ๔ มุมฉาก
- ๓) อักษิโอม (Axioms ความจริงอันปรากฏเชิง) ต่าง ๆ ที่ใช้
อยู่โดยมากในวิชาเรขาคณิต คือ
 - (๑) สิ่งที่เท่ากัน ถ้าต่างก็บวกเข้ากับสิ่งอันที่เท่ากัน ผลที่ได้ก็จะคงเท่ากัน

แอกเซียม

(๒) สิ่งที่ไม่เท่ากัน ถ้าต่างก็หักออกจากสิ่งอื่นที่ไม่เท่ากัน ผลที่ได้ก็คงจะเท่ากัน

(๓) สิ่งที่ไม่เท่ากัน ถ้าต่างก็คูณด้วยสิ่งอื่นที่ไม่เท่ากัน ผลที่ได้ก็คงจะเท่ากัน

(๔) สิ่งที่ไม่เท่ากัน ถ้าต่างก็หารด้วยสิ่งอื่นที่ไม่เท่ากัน ผลที่ได้ก็คงจะเท่ากัน (ในการหาร ความธรรมดาควรวaryยอม ไม่เป็นจำนวนสูง)

(๕) สิ่งที่ไม่เท่ากัน ถ้าต่างก็ยกกำลังขึ้นให้เท่ากัน หรือต่างก็ถอดรากของกรณที่ออกให้เท่ากัน ผลที่ได้ก็คงจะเท่ากัน (ในเรขาคณิตเราจะใช้แต่รากยกเท่านั้น)

(๖) สิ่งที่ไม่เท่ากัน ถ้าเราเอาสิ่งอื่นที่เป็นจำนวนบวกและเท่ากันมาทำวิธีคำนวณอย่างเดียวกัน ผลที่ได้ก็จะเป็นสิ่งที่ไม่เท่ากัน

เช่นถ้า $a > b$ และให้ $x = y$

จะได้ $a + x > b + y ; a - x > b - y$

$ax > by \quad | a : x > b : y$

(๗) ถ้าเอาสิ่งที่ไม่เท่ากัน บวกกับสิ่งที่ไม่เท่ากัน โดยที่เอาใหญ่กับใหญ่ และเล็กกับเล็กบวกกัน ผลที่ได้ก็ย่อมเป็นสิ่งที่ไม่เท่ากัน โดยที่ใหญ่กับใหญ่ ย่อมใหญ่กว่าเล็กกับเล็กบวกกัน ถ้าเอาสิ่งที่

ไม่เท่ากันลบสิ่งทีเท่ากัน ผลที่ได้ก็จะเป็นสิ่งที่ไม่เท่ากัน โดยผลที่ได้จากการลบด้วยสิ่งที ใหญ่กว่าย่อมเล็กกว่าผลที ได้จากการลบด้วยสิ่งที เล็กกว่า

เช่นให้ $a > b$; $c > d$ และ $x = y$

ดังนั้น $a + c > b + d$ แต่ $x - a < y - b$

(๙) สิ่งต่าง ๆ ที่ต่างกันก็เท่ากับกับสิ่งอื่นอีกสิ่งหนึ่ง หรือหลายสิ่งทีเท่ากัน สิ่งเหล่านั้นก็ย่อมเท่ากันเองด้วย

(๑๐) สิ่งใดสิ่งหนึ่ง เราจะใช้แทนอีกสิ่งหนึ่ง ซึ่งมีราคาเท่ากันได้ ในวิธีใช้ตราชื้อ หรือวิธีต่างกัน

เช่นถ้า $x = b$ และถ้า $a + x = c$

ดังนั้น $a + b = c$ และถ้า $a + x > c$

ดังนั้น $a + b > c$

(๑๐) ในระหว่างสิ่ง ๓ สิ่ง ถ้าสิ่งที ๑ ใหญ่กว่าสิ่งที ๒ และสิ่งที ๒ ใหญ่กว่าสิ่งที ๓ สิ่งที ๑ ก็ต้องใหญ่กว่าสิ่งที ๓ ด้วย

เช่น $a > b$ และ $b > c$ ดังนั้น $a > c$

(๑๑) จำนวนเต็ม ย่อมใหญ่กว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของจำนวนเต็มนั้น และจำนวนเต็มมีราคาเท่ากับผลบวกของส่วนต่าง ๆ ของจำนวนเต็มนั้นเอง

๔) รูปใดรูปหนึ่งก็ดี เราสามารถจะยกเลื่อน ไปจากที่หนึ่งยังอีก
ที่หนึ่งได้ โดยมิได้เปลี่ยนแปลงลักษณะและขนาด

๕) ทุก ๆ มุมฉากย่อมเท่ากัน

๖) จากจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่งในเส้น ๆ หนึ่ง เราจะสามารถ
สร้างเส้นตั้งได้มากได้แต่ละเพาะเส้นเดียวเท่านั้น

๗) ถ้าเส้น ๒ เส้นตัดกัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน

๘) สิ่ง ๒ สิ่งที่มีรูปอย่างเดียวกันและมีขนาดเท่ากัน ทั้ง
สามารถวางให้ตั้งรอยกันสนิทได้ตามลำดับส่วนของสิ่งนั้น ๆ แล้ว ๒ สิ่ง
นั้นเรียกว่าเหมือนกัน

๙) ส่วนที่ตรงตามลำดับเดียวกันของรูปที่เหมือนกัน ย่อม
เท่ากัน

๑๐) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้าด้าน ๒ ด้าน
และมุมในระหว่างด้านทั้ง ๒ นั้นของรูปหนึ่ง ตรงก็เท่ากันกับด้าน
๒ ด้านและมุมในระหว่างด้านทั้ง ๒ นั้นโดยลำดับของอีกรูปหนึ่ง

๑๑) รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้าด้านทั้ง
๒ ที่ประกอบมุมฉากของรูปหนึ่ง ตรงก็เท่ากันโดยลำดับกับด้านทั้ง ๒
ที่ประกอบมุมฉากของอีกรูปหนึ่ง

identically equal to 111222 (หนึ่งพันหนึ่ง
พันสองพันสอง) = 111222

๑๒) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้ามุม ๒ มุมและ
ด้านในระหว่างมุมทั้ง ๒ นั้นของรูปหนึ่ง ต่างก็เท่ากับ
มุม ๒ มุมและด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้ง ๒ นั้นของอีกรูปหนึ่ง

๑๓) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้าด้านทั้ง ๓ ของ
รูปหนึ่ง ต่างก็เท่ากับด้านทั้ง ๓ ของอีกรูปหนึ่ง

๑๔) จากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้อยู่บนอกเส้นหนึ่งเส้นใด
ลากเส้นให้ตั้งฉากกับเส้นนั้นได้แค่เส้นเดียวเท่านั้น

๑๕) ถ้าเส้นตรง ๒ เส้นที่ลากจากจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ในเส้นตั้ง
ฉากกับอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ ไปตัดเส้นนั้นในระยะห่างจากเชิง
ของเส้นตั้งได้ฉากไม่เท่ากัน เส้นที่ไปตัดในระยะไกลกว่า จะยาวกว่า

๑๖) รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้าด้านตรง
ฉากกับอีกด้านหนึ่งของรูปหนึ่ง ต่างก็เท่ากับด้านตรง
ฉากและอีกด้านหนึ่งของอีกรูปหนึ่ง

๑๗) เส้นตรง ๒ เส้นที่อยู่ในพื้นราบอันเดียวกัน ถ้าแนวจะ
ตัดออกไปทั้ง ๒ ข้างสักเท่าใดก็ได้ จะไม่ตัดกันเลย เส้นทั้ง ๒ นี้
เรียกว่า ขนานกัน

๑๘) ผ่านจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ จะลากเส้นตรงให้ขนาน
กับอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ ได้แต่เส้นเดียวเท่านั้น

๑๙) เส้นตรง ๒ เส้นที่อยู่ในพื้นราบอันเดียวกัน ถ้าต่างก็
ตั้งฉากกับอีกเส้นหนึ่ง เส้นทั้ง ๒ นั้นจะขนานกัน

๒๐) ถ้าเส้น ๆ หนึ่งตั้งฉากกับเส้นหนึ่ง ซึ่งเป็นเส้นขนาน
กับอีกเส้นหนึ่ง เส้นแรกที่ตั้งฉากนั้น จะตั้งฉากกับเส้นหลังนั้นด้วย

๒๑) ผลบวกของด้าน ๒ ด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ย่อม
ยาวกว่าด้านที่เหลืออยู่ และผลลบในระหว่าง ๒ ด้าน ย่อมสั้นกว่า

๒๒) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป ถ้าในรูปหนึ่งมีด้าน ๒ ด้าน
เท่ากับด้าน ๒ ด้านของอีกรูปหนึ่งนั้นเป็นลำดับ แต่ในรูปที่ ๑
ด้านที่เหลืออยู่นั้นยาวกว่าในรูปที่ ๒ มุมที่ตรงข้ามกับด้านนั้นใน
รูปที่ ๑ จะใหญ่กว่าในรูปที่ ๒

๒๓) รูปสี่เหลี่ยมชนิดที่มีด้านขนานกันแค่ ๒ ด้าน เรียกว่า
สี่เหลี่ยมขนานคู่กันไม่เท่า ถ้ามีด้านตรงข้ามขนานกันทั้งคู่จะต้อง
เรียกว่า สี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่ถ้าไม่มีด้านใดขนานกันเลย เรียกว่า

รูปสี่เหลี่ยม

๒๔) ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมเท่ากัน

๒๕) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมแบ่งรูป
ในออกเป็นรูปสามเหลี่ยม ๒ รูปที่เหมือนกัน (เช่นรูปของด.ดร.)

๒๖) ส่วนของเส้นขนานกันคู่หนึ่ง ซึ่งอยู่ในระหว่างเส้นขนาน
อื่นอีกคู่หนึ่งซึ่งตัดกับกับคู่หนึ่ง ย่อมเท่ากัน

๒๗) ถ้า ๒ ด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งขนานกันและเท่ากัน
แล้ว อีก ๒ ด้านที่เหลือจะขนานกันและเท่ากันด้วย ผลรูปสี่
เหลี่ยมนี้จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๒๘) เส้นทแยงมุมทั้ง ๒ เส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
ย่อมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

๒๙) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้าด้าน
๒ ด้านและมุมในระหว่างนั้นของรูปหนึ่ง เท่ากับเท่ากันเป็นลำดับ
กับอีก ๒ ด้านและมุมในระหว่างนั้นของอีกรูปหนึ่ง

๓๐) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้ามีด้านฐาน
และด้านสูงเท่ากัน

๓๑) ในรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าลากเส้นตรงให้ผ่านจุด

กึ่งกลางของด้าน ๒ ด้าน ส่วนที่อยู่ระหว่าง ๒ จุดนั้น จะขนาน
และเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่ตัดอยู่

๓๒) รูปเหลี่ยม ๒ รูป จะเรียกว่ามีมุมเท่าซึ่งกันและกัน
ถ้ามุมของรูปหนึ่งต่างก็เท่ากับเป็นลำดับและทางเดียวกัน กับมุมของ
อีกรูปหนึ่ง จะเรียกว่าด้านเท่าซึ่งกันและกัน ถ้าด้านของรูป
หนึ่งต่างก็เท่ากับเป็นลำดับและทางเดียวกัน กับด้านของอีกรูปหนึ่ง
และจะเรียกว่าเหมือนกัน ถ้าเป็นมุมเท่าซึ่งกันและกัน และด้าน
เท่าซึ่งกันและกัน

๓๓) มุม ๆ หนึ่งของรูปเหลี่ยมเรียบที่มี n ด้าน ย่อมเท่ากับ
$$\frac{2(n-2)}{n}$$
 มุมฉาก

๓๔) ผลบวกของมุมภายในของรูปเหลี่ยม ซึ่งเกิดขึ้นโดย
ตัดด้านทุกด้านของรูปเหลี่ยมออกไปเป็นลำดับนั้น ย่อมเท่ากับ
มุมฉาก

๓๕) ถ้าเมื่อจะตั้งพิสูจน์ว่า เส้นใดหรือมุมของเส้นใด จะ
เป็นเส้นหรือมุมของเส้นที่เป็นวัตถุของจุด ๆ หนึ่ง ที่ใดเกิดขึ้นต่อไป
และทำให้เกิดเส้นนั้น ๆ ขึ้น ตามลักษณะข้อความต่าง ๆ ที่กะให้
นั้นแล้ว จำเป็นที่จะต้องพิสูจน์ข้อสำคัญ ๒ ข้อ ก็คือ

(๑) ว่าจุดใดจุดหนึ่งก่อกั้น ที่อยู่ในตัวบดที่เราขนานนามว่า
เป็นวัตถุนั้นแล้ว จะต้องมณฑลขณะตามเร็วความต่าง ๆ ที่กำหนดให้

(๒) ว่าจุดอื่น ๆ ที่อยู่นอกออกไปจากวัตถุนั้น จะไม่มีลักษณะ
ตามข้อความที่กำหนดให้

๓๖) วัตถุของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากจุดปลายทั้ง
๒ ของเส้นที่กำหนดให้เท่ากันเสมอ นั่นคือ ~~เมื่อเราลากเส้นตรงใดลากและ~~
ผ่านตรงจุดกึ่งกลางของเส้นที่กำหนดให้

๓๗) จุด ๒ จุด ที่ต่างกันระยะห่างจากจุดปลายทั้ง ๒ ของ
เส้นหนึ่งเท่ากัน เมื่อเราลากเส้นผ่านจุดทั้ง ๒ ที่กล่าวมานั้น เส้นนั้นจะ
ตั้งฉากและแบ่งครึ่งเส้นก่อน

๓๘) วัตถุของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างเท่ากันเสมอจาก
เส้นที่กำหนดให้ ๒ เส้นที่ตัดกัน ~~ที่อยู่นอกเส้น~~ ๒ เส้น ที่ต่าง
กัน ~~ที่~~ ครึ่งมุมซึ่งเกิดจากเส้น ๒ เส้นที่กำหนดให้ นั่นคือ

๓๙) ถ้าเส้นโค้งใด ที่อยู่บนพื้นราบ มีลักษณะว่าทุก ๆ จุด
บนเส้นโค้งนั้น ต่างกันระยะเท่ากันเสมอจากจุดใดจุดหนึ่งที่กำหนด
ให้อยู่บนพื้นราบภายในเส้นโค้งนั้น เส้นโค้งนั้นเรียกว่า วงกลม

๔๐) รัศมีทุกเส้นของวงกลมวงเดียวกัน หรือของวงกลมที่เท่ากัน ย่อมเท่ากันเสมอ และวงกลมทุก ๆ วงที่มีรัศมีเท่ากัน ย่อมเท่ากัน

๔๑) ในวงกลมวงเดียวกัน หรือในวงกลมที่เท่ากัน ถ้าส่วนของเส้นรอบวงเท่ากัน มุมที่เกิดขึ้นตรงศูนย์กลางจะเท่ากัน และถ้าส่วนของเส้นรอบวงนั้นไม่เท่ากัน มุมที่ศูนย์กลางที่ตรงับส่วนของเส้นรอบวงที่ยาวกว่าจะใหญ่กว่า

๔๒) ในวงกลมวงเดียวกัน หรือในวงกลมที่เท่ากัน ถ้าส่วนของชะยาเท่ากัน มุมที่เกิดขึ้นตรงศูนย์กลางจะเท่ากัน และถ้าชายนั้นไม่เท่ากัน มุมที่ตรงกับชะยาที่ยาวกว่าจะใหญ่กว่า

๔๓) เส้นศูนย์กลางของวงกลม ที่ตั้งฉากกับชะยาเส้นใดเส้นหนึ่ง ย่อมแบ่งครึ่งชะยา และส่วนของเส้นรอบวงที่ประกอบชะยานั้น

๔๔) ในวงกลมวงเดียวกัน หรือในวงกลมที่เท่ากัน ชะยาที่เท่ากัน ย่อมห่างจากศูนย์กลางเป็นระยะที่เท่ากัน หรือตรงกันข้าม ถ้าชะยามีระยะเท่ากันจากศูนย์กลาง ชะยานั้นจะยาวเท่ากัน

บทที่ ๑๑

สมมติ ให้แก้ปณิ สมมติ

๑๑

๔๕) เส้นใดเส้นหนึ่งที่มีผลกับวงกลม ย่อมคงได้ฉากกับ
รัศมีที่ตรงจุดสัมผัสของวงกลมนั้น

๔๖) ถ้าวงกลม ๒ วงตัดกัน เส้นตัดสองเส้นจะตั้งได้ฉาก
และแบ่งครึ่งระยะยาวของวงกลมทั้ง ๒

๔๗) เมื่อจำนวนเปลี่ยนแปลงจำนวนหนึ่ง . เปลี่ยนราคาเรียบ
ใกล้จำนวนคงที่อีกจำนวนหนึ่งเข้าไปทุกที ความต่างกันของจำนวน
ทั้ง ๒ นั้นย่อมน้อยลงไปได้ทุกทีเป็นธรรมดา จนถึงกับสามารถจะ
คงตัวและยังน้อยกว่าเลขจำนวนบวกอีกจำนวนหนึ่ง ที่เราจะฉันทิ
ให้น้อยเท่าใดก็ตามได้เสมอ จำนวนคงที่จำนวนนี้เราเรียกว่าเป็น
จำนวนพิภคของจำนวนเปลี่ยนแปลง *limit*

๔๘) ถ้าในขณะเมื่อจำนวนเปลี่ยนแปลงหลายจำนวน ต่างก็
เรียบราคาเลือนใกล้จำนวนพิภคของมันเข้าไปทุกที และจำนวน
เปลี่ยนแปลงทั้งหลายนี้ตั้งก็มีราคาเท่ากันน้อยเต็มด้วย จำนวนพิภค
ของจำนวนเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ ก็ย่อมเท่ากันด้วย

๔๙) ในวงกลมวงเดียวกัน หรือในวงกลมที่เท่ากัน มุมที่
ศูนย์กลาง ๒ มุมหารกัน จะมีผลหารเช่นเดียวกันกับผลหารของ
ความยาวของเส้นรอบวงที่หารของมุมนั้น ๆ มาคิด เมื่อหารโดย
ทำนองเดียวกัน

ควรแก้ไข ปฏิภาค ทุกแห่ง

๑๒

๕๐) มุมที่มุมบักดาง อาจวัดได้ โดยวิธีวัดความยาวของเส้นรอบวงที่ราบของมุมนั้นคัต

๕๑) ในบัญญัติสัมพัทธ์ (Proportion) ใด ๆ ก็ที่ ผลคูณของตำแหน่งนอกทั้ง ๒ นั้น ย่อมเท่ากับผลคูณของตำแหน่งในทั้ง ๒

๕๒) ตำแหน่งในของบัญญัติสัมพัทธ์ (The mean proportional) ระหว่างจำนวน ๒ จำนวนนั้น ย่อมเท่ากับบรรทัดที่ ๒ ของผลคูณของจำนวนทั้ง ๒ นั้นเอง

๕๓) ถ้ามีผลหารที่เท่ากันหลายจำนวน ของจำนวนต่าง ๆ และเมื่อจัดให้เป็นบัญญัติสัมพัทธ์ เช่นแล้ว ผลบวกของตำแหน่งนำทั้งหมดหารด้วยผลบวกของตำแหน่งหลังทั้งหมด จะเท่ากับตำแหน่งนำตัวใดตัวหนึ่ง หารด้วยตำแหน่งหลังของมัน

๕๔) ในตำแหน่งต่าง ๆ ของบัญญัติสัมพัทธ์ชุดหนึ่ง ถ้ายกกำลังขึ้นเท่า ๆ กันแล้ว จำนวนผลที่ได้ ใหม่นี้จะยังเป็นบัญญัติสัมพัทธ์ ได้อีก

๕๕) ในรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าเราลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง

ให้ตัด ๒ ด้านของสามเหลี่ยม และให้ขนานกับด้านที่ ๓ แล้ว ส่วน
ทั้ง ๒ ของด้านทั้ง ๒ ที่ถูกตัดนั้น จะสัมพันธ์กัน *หรือ* *คล้ายกัน*

๕๖) ถ้าด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง หารด้วยส่วน
ใดส่วนหนึ่งในด้านนั้น ที่เกิดขึ้นโดยมีเส้นตรงซึ่งขนานกับด้านฐานเดิม
หนึ่งมาตัดย่อมเท่าอีกด้านหนึ่ง หารด้วยส่วนของมันที่ตรงกันกับ
ที่ไปหารด้านที่ ๑ เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน

๕๗) ถ้ามีเส้นตรง ๒ เส้น ที่ถูกตัดโดยออกเป็นส่วนด้วยหมัดเส้น
ขนานหมัดหนึ่ง ส่วนต่าง ๆ เหล่านี้ของเส้นหนึ่ง จะสัมพันธ์กับ
ส่วนต่าง ๆ ของอีกเส้นหนึ่ง

๕๘) รูปเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันเป็นลำดับ และด้านต่าง ๆ
สัมพันธ์กันเป็นลำดับ รูปทั้ง ๒ นี้เรียกว่า คล้ายกัน *similar*

๕๙) รูปสามเหลี่ยมมุมเท่า ๒ รูป ย่อมเป็นรูปคล้ายกันเสมอ

๖๐) ถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูป มีมุม ๆ หนึ่งเท่ากัน กับด้าน
ทั้ง ๒ ของประกอบมุมนั้นสัมพันธ์กัน รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ จะคล้ายกัน

๖๑) ถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูป มีด้านทั้ง ๓ สัมพันธ์กันกับ
ด้านทั้ง ๓ โดยเรียงเป็นลำดับ รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ จะคล้ายกัน

๖๒) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป ที่มีด้านทั้ง ๓ ขนานกันกับด้าน

ทั้ง ๓ เป็นลำดับ หรือตั้งได้มากกว่ากันเป็นลำดับ รูปสามเหลี่ยม
ทั้ง ๒ ย่อมคล้ายกัน

๖๓) ในรูปเหลี่ยมคล้ายกัน ๒ รูป เราสามารถจะแบ่งออก
ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกันได้หลายรูป โดยมีจำนวนเท่ากันและ
เรียงรายอยู่เป็นลำดับเดียวกันด้วย

๖๔) ถ้าเราลากเส้นจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลม
มาทำให้ตั้งฉากกับเส้นศูนย์กลางเส้นหนึ่ง ระยะเวลาจากจุดบนเส้นรอบ
วงนั้นถึงจุดปลายเส้นศูนย์กลางข้างใดข้างหนึ่งก็ตั้ง จะเป็นค่าหนึ่งใน
แห่งบัญญัติสัมพันธ์ (Mean proportion) ของระหว่างเส้นศูนย์
กลาง และเส้นตายของระยะนั้นเองบนเส้นศูนย์กลาง

๖๕) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมเท่ากับผลคูณของ
ด้านฐานและระยะสูง

๖๖) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ๒ รูป ที่มีด้านฐานและระยะสูง
เท่ากัน ย่อมเท่ากัน

๖๗) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของผล
คูณของด้านฐานและระยะสูง

๖๘) รูปสามเหลี่ยม ที่มีด้านฐานและระยะสูงเท่ากัน ย่อม
เท่ากัน

๖๙) ผลหารของพหุคูณรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเท่ากัน ย่อม
เท่ากับผลหารของระยะสูงที่หาร โดยทำนองเดียวกัน ผลหารของ
พหุคูณรูปสามเหลี่ยมที่มีระยะสูงเท่ากัน ย่อมเท่ากับผลหารของ
ด้านฐานที่หาร โดยทำนองเดียวกัน ผลหารของรูปสามเหลี่ยม ๒ รูป
ใด ๆ ย่อมเท่ากับผลหารของผลคูณระหว่างฐานและระยะสูงของรูป
หนึ่ง กับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูงของอีกรูปหนึ่ง เมื่อหาร
โดยทำนองเดียวกัน

๗๐) พหุคูณรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า ย่อมเท่ากับครึ่ง
หนึ่งของผลคูณระหว่างระยะสูงกับผลบวกของฐาน

๗๑) ผลหารของพหุคูณรูปสามเหลี่ยม ๒ รูป ที่มีมุมหนึ่ง
เท่ากัน ย่อมเท่ากับผลหารของผลคูณระหว่างด้านทั้ง ๒ ที่ประกอบ
มุมนั้นของรูปหนึ่ง กับผลคูณของด้านเช่นเดียวกันของอีกรูปหนึ่ง
เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน

๗๒) ผลหารของพหุคูณรูปเหลี่ยมที่คล้ายกัน ย่อมเท่ากับ
ผลหารของด้านใดด้านหนึ่งของรูปหนึ่งกำลังสอง กับอีกด้านหนึ่ง
ตรงที่เดียวกันของอีกรูปหนึ่งกำลังสอง เมื่อหาร โดยทำนองเดียวกัน

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำลังสองของด้านตรงฉาก ย่อมเท่ากันกับผลบวกของด้านทั้งกำลังสอง กับด้านฐานกำลังสอง

๗๓) ถ้าจำนวนด้านของรูปเหลี่ยมเวียน ที่บรรจุอยู่ในวงกลมวงหนึ่ง ทอมากจนทุกทงไม่หมดสุด เดิมที (The apothem) ของรูปเหลี่ยมเวียนจะเวียนใกล้เกือบเข้ารัศมีของวงกลมนั้นเข้าไปทุกที และราคาของรัศมีนั้นเป็นจำนวนพหุคูณ

๗๔) ถ้าแนวด้านของรูปเหลี่ยมเวียนใดๆ ที่บรรจุอยู่ในวงกลม หรือที่ล้อมรอบวงกลม ต่างก็ทอมากจนทุกทงไม่หมดสุด วงกลมนั้นจะเป็นจำนวนพหุคูณของรูปเหลี่ยมเวียน

พื้นที่ของวงกลมจะเป็นจำนวนพหุคูณของพื้นที่ของรูปเหลี่ยม ที่บรรจุอยู่ในวงกลม หรือที่ล้อมรอบวงกลมอยู่ ถ้าด้านของรูปเหลี่ยมเวียนทอจน

๗๕) เส้นรอบวง ๒ เส้นหารกัน ย่อมมีผลเท่ากับรัศมีของวงกลมทั้ง ๒ นั้นหารกัน เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน

๗๖) เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งยาวเท่ากับ $2\pi R$

๗๗) พื้นที่ของวงกลมเท่ากับ πR^2

เรขาคณิตมิติทรง

(Solid Geometry)

มาตรา ๑

๗๘) เรขาคณิตมิติทรง (Solid Geometry) วิชาเรขาคณิตที่เราได้เคยเรียนมาแล้วแต่เบื้องต้นนั้น เราได้ศึกษาถึงเรื่องรูปต่างๆ ที่บรรจุอยู่ในพื้นราบ ว่ามีลักษณะอย่างไร มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และถึงรูปต่างๆ นั้นด้วย ส่วนในวิชาเรขาคณิตมิติทรงต่อไปนี้ เราจะได้ศึกษาสิ่งต่างๆ อย่างเดียวกัน แต่ว่ารูปที่เราจะต้องศึกษานั้น ห้ามแต่ ๒ ขสาคคือกว้างและยาวเท่านั้นไม่เรขาคณิตจึงต้องศึกษาถึงรูปที่มี ๓ ขนาด คือความสูงอีกด้วย

๗๙) พื้นราบ (Plane) พื้นที่ใด ๆ ที่เมื่อลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุด ๒ จุด ที่อยู่บนพื้นนั้น เส้นตรงนั้นทั้งเส้นจะมีจุดบรรจุอยู่ได้ โดยตลอด พื้นทึมนั้นเรียกว่าพื้นราบ

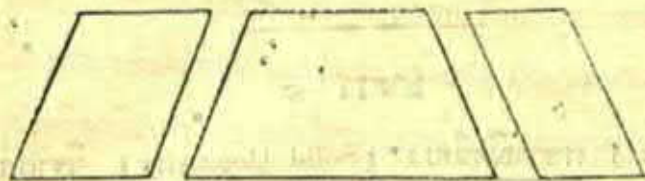
เมื่อกล่าวถึงพื้นราบ ตามธรรมเนียมของเรากล่าวว่า แผ่กว้างออกไปทุกทิศทุกทางไม่มีที่สิ้นสุด แต่เพื่อให้เป็นการสะดวกแก่การ

๑๘

เขียนและให้มองเห็นได้ง่าย

ย่อมชัดเจนพราวให้เป็นเหมือนรูปดี

เหลี่ยม ดิ่ง



รูป ๑

๘๐) การกำหนดพวราบ (Determining a Plane) เรา

ใช้วิธีกำหนดพวราบ โดยอาศัยอย่างน้อยสามจุด คือเมื่อได้กำหนดจุดหรือเส้นตรงแล้ว พวราบใดที่ผ่านจุดหรือเส้นตรงและจุดที่กำหนดให้ก็ได้ กับทั้งไม่มีพวราบอื่นที่ผ่านจุดหรือเส้นตรงและจุดนั้นอีกเลย พวราบนั้นจะเรียกว่าได้กำหนดแล้ว

เมื่อเราจะตั้งสมมุติให้พวราบขึ้นพวบทหนึ่ง บรรลุเส้นหรือจุดที่กำหนดให้แล้ว เราเรียกว่า สร้างพวราบบรรลุเส้น หรือ จุดนั้น เส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ลากมาจากจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่นอกพวราบจนถึงพวราบ จุดที่ตรงเส้นตรงมาเจาะพวราบนั้น เราเรียกว่า เจาะ

๘๑) เส้นรอยตัดระหว่างพวราบ (Intersection of Planes)

เส้นใดที่มีจุดทุก ๆ จุด เป็นจุดร่วมของพหุราบทั้ง ๒ เราเรียกว่า
เส้นนั้นเป็นเส้นรอยตัดระหว่างพหุราบทั้ง ๒

(๘๒) ลักษณะความเป็นจริงของพหุราบ (Postulate of

Planes) ตามที่เราได้เรียนมาแล้วว่า จากจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่งถึง

จุดที่กำหนดให้ อีกจุดหนึ่ง ย่อมลากเส้นตรงได้แต่เส้นเดียวเท่านั้น
ถ้าลากวงพหุราบกับพหุราบเดียวกัน ที่เราสามารถจะสร้างให้
บรรจบเส้นตรง ๒ เส้นที่ตัดกันอยู่ได้

ตามที่เราจะเห็นได้อย่างง่ายดาย โดยอาศัยรูป ๒ ก ดังนี้

เส้นตรง AB แต่เส้นเดียว เราสามารถจะสร้างพหุราบให้ผ่านมา

บรรจบเส้นตรง AB ได้หลาย

พหุราบ (รูป ๒ ก) แต่ถ้า

CD ตัดกับ AB ที่ P แล้ว

เช่นในรูป ๒ ข จะเกิดการ

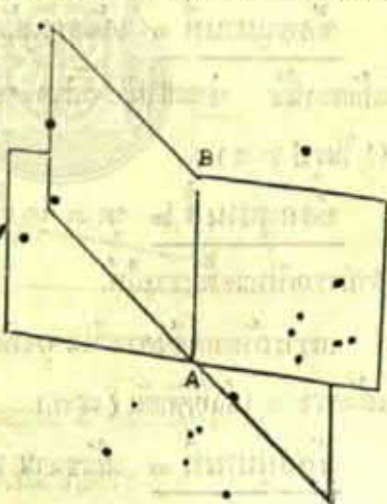
จากคั่นวง พหุราบนั้นจะ

ต้องบรรจบ CD ด้วย ดังนั้น

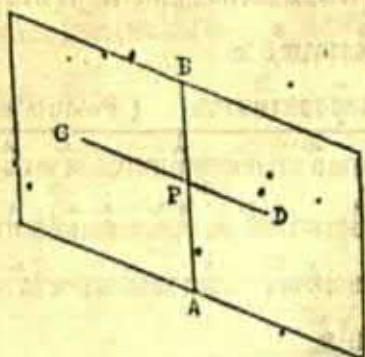
พหุราบหนึ่งหมุนไปรอบ

ตัวโดยอาศัย AB เป็นแกน

จนกว่าจะบรรจบ C และ P แล้ว



รูป ๒ ก



ก็จะบรรจบ D ด้วย ตาม
ข้อ ๑๗ แต่กำหนดต่อไปอีก
แนแต่เจกษณอย่งสักเพียงใดก็
จะไม่บรรจบ C ได้อีก จึง
เห็นได้ว่า มีจุดพบรวมเดียว
เท่านั้น

รูป ๒ ข

ข้ออนุมานที่ ๑ เส้นตรงเส้นหนึ่ง กับจุด ๆ หนึ่งที่ไม่อยู่ใน
เส้นตรงนั้น ย่อมสามารถกำหนดพหุรวมได้ (เช่นเส้น AB กับจุด
C ในรูป ๒ ข)

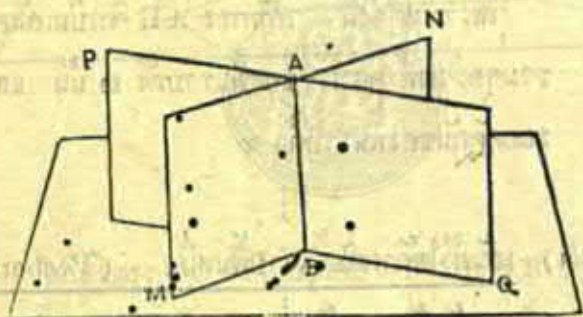
ข้ออนุมานที่ ๒ จุด ๓ จุด ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ย่อม
สามารถกำหนดพหุรวมได้

เพราะถ้าลากเส้นตรงผ่านจุดเหล่านี้สองต่อสอง ก็จะกลายเป็น
เส้นตรง ๒ เส้นที่ตัดกัน (๘๒)

ข้ออนุมานที่ ๓ เส้นขนาน ๒ เส้น ย่อมสามารถกำหนดพหุ
รวมได้

เพราะเส้นที่ขนานกัน ย่อมอยู่ในพนราบอันเดียวกัน ตาม (๑๗)
 อนึ่งถ้าพนราบหนึ่ง ทับบรรจุเส้นตรงเส้นหนึ่งอยู่แล้ว จะต้องบรรจุ
 จุดใดจุดหนึ่ง ของอีกเส้นหนึ่งทขนานอยู่นั้นอีก ถิ่นว่าเป็นเช่นกำหนด
 พนราบใดตาม (อน ๑ ข้อ ๕๒)

อุปพระมัยนิเทศที่ ๑ ถ้าพนราบ ๒ พนติดกัน เส้นรอยคั
 กนั้นจะเป็นเส้นตรง



รูป ๓

ให้ MN และ PQ เป็นพนราบ ๒ พนติดกัน

จงพิสูจน์ว่า พนราบทั้ง ๒ พนติดกันเป็นเส้นตรง

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นจุดร่วมของพนราบทั้ง ๒ พน ถ้าเส้น

ตรงให้ผ่านจุด A และ B ดังนั้น เส้นตรง AB ย่อม
บรรจุอยู่ในพื้นราบทั้ง ๒ (๗๙)

(เพราะทั้ง ๒ จุดต่างก็อยู่ในพื้นราบทั้ง ๒) ไม่มีจุด
ใดจุดหนึ่งอีก ที่อยู่นอกเส้น AB จะเป็นจุดร่วมในพื้นราบ
ทั้ง ๒ ได้ เพราะมีพื้นราบเพียงอย่างเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดบรรจุ
เส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด ๆ หนึ่งที่อยู่นอกเส้นตรงนั้นใน
ขณะเดียวกันได้

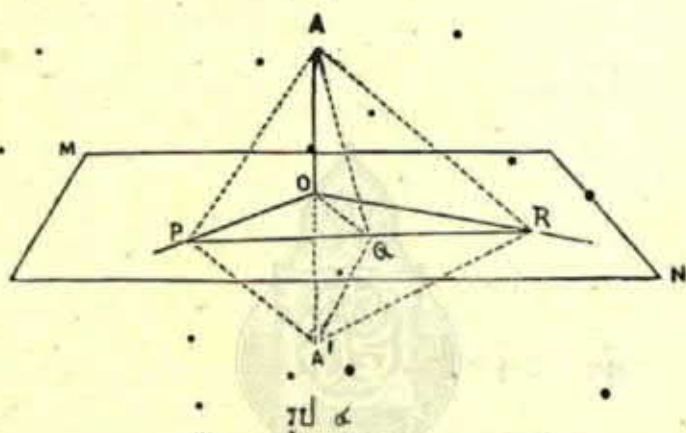
เพราะเหตุดังนี้ เส้นตรง AB จึงเป็นเส้นตรงที่รวม
รวมจุดร่วมทั้งหลาย ของพื้นราบทั้ง ๒ นั่น และเป็นเส้น
รอยตัดกันของพื้นราบทั้ง ๒ (๘๑)

ช.ต.พ.

๘๓) เส้นตั้งฉากกับพื้นราบ (Perpendicular
to a Plane) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งลากมาจากจุดลงบนพื้นราบ และ
ตั้งฉากกับเส้นตรงทุก ๆ เส้น ที่บรรจุอยู่ในพื้นราบ และที่ผ่าน
เชิงของเส้นที่ลากมานั้น เส้นตรงนั้นเรียกว่า ตั้งฉากกับพื้นราบ
เมื่อเส้นตรงตั้งฉากกับพื้นราบแล้ว พื้นราบก็ตั้งฉากกับ
เส้นตรงด้วย

อุประมายนี้เทศที่ ๒๒ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตั้งฉากกับเส้น

ตรงออก ๒ เส้นที่ตรงจุดที่เส้นทั้ง ๒ นั้นตัดกัน จะตั้งได้มากกับพื้นราบ
ที่บรรจุเส้นตรงทั้ง ๒ นั้นด้วย รป ๔ :



ให้เส้นตรง AO คงได้ฉากกับ OP และ OR ทั้งคู่ตัดกัน O
จึงพิสูจน์ว่า AO คงได้ฉากกับพหุคูณ MN ที่มีวงเส้น OP
และ OR

พิสูจน์ ผ่านจุด O บนพรมาย MN ให้ลากเส้นตรงเส้นใดเส้น
 หนึ่ง เป็นต้นว่า OQ และลากเส้น PR ให้ตัดเส้น OP ,
 OQ , OR ที่จุด P, Q, R ,

ต่อเส้น AO ตรงลงไปถึงที่ A' ให้มีระยะเท่ากับ OA
แล้วจากจุด A และ A' ตลากเส้นตรงต่าง ๆ ไปยังจุด
 P, Q, R

ดังนั้น OP และ OR ต่างก็ตั้งฉากกับเส้น AA'
ที่ตรงจุดกึ่งกลาง

$$\therefore AP = A'P \text{ และ } AR = A'R \quad (๓๖)$$

$$\therefore \triangle APR \text{ จะเหมือนกับ } \triangle A'PR \quad (๓๗)$$

$$\therefore \angle RPA = \angle RPA'$$

$$\text{หรือ } \angle QPA = \angle QPA'$$

$$\therefore \triangle QPA \text{ จะเหมือนกับ } \triangle QPA' \quad (๓๘)$$

$$\therefore AQ = A'Q \text{ (๔๐) และ } OQ \perp AA' \text{ ที่ } O \quad (๓๙)$$

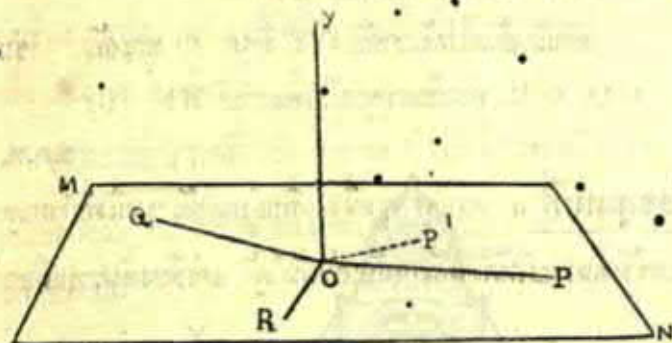
ดังนั้น AO จะตั้งฉากกับเส้นทุกเส้นที่อยู่ในพื้นราบ MN

และที่ผ่านจุด O

$$\therefore AO \text{ จะตั้งฉากกับพื้นราบ } MN \quad (๔๓)$$

อุปมาขณิกเทศที่ ๓ บรรดาเส้นที่เราสามารถสร้างขึ้นได้ ให้

ตั้งได้ฉากกับอีกเส้นหนึ่ง ที่ตรงจุดที่กำหนดให้นั้น ย่อมบรรจุอยู่ใน
 พนราบเพียงอย่างเดียว ที่ตั้งได้ฉากกับเส้นที่กำหนดให้ ที่ตรงจุดนั้น



รูป.๕

ให้พินราบ MN ซึ่งตั้งได้ฉากกับเส้น OY ที่ตรงจุด O (รูป.๕)

จึงพิสูจน์ว่า. OP ซึ่งอยู่บนเส้นใดเส้นหนึ่ง ตั้งได้ฉากกับ OY ที่ O

บรรจุอยู่ในพินราบ MN จึง

พิสูจน์ได้มุมให้พินราบกับบรรจุเส้น OY และ OP นั้น ฉากกับ

พินราบ MN ตามเส้น OP' ดังนั้น OY จะตั้งได้ฉากกับ

OP' (๘๓)

ในพนรว POY จะลากเส้นตรงให้ตั้งฉากกับ OY ที่จุด O ได้ แต่เส้นเดียวเท่านั้น (๖)

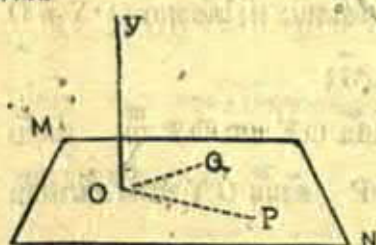
ดังนั้น OP และ OP' จะเป็นเส้นเดียวกัน
และ OP จะบรรจุอยู่ในพนรว MN

ดังนั้นเส้นตั้งฉากกับ OY ที่จุด O ทุกเส้น เช่น OQ, OR , ต่างก็บรรจุอยู่ในพนรว MN

ช.ต.พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ตรงจุดๆหนึ่ง ที่อยู่บนเส้นๆหนึ่งที่กำหนดให้ จะสร้างพนรวให้ตั้งฉากกับเส้นนั้นได้ แต่เพียงพนรวเดียวเท่านั้น

ข้ออนุมานที่ ๒ เราจะสร้างพนรวให้บรรจุจุดๆหนึ่ง และให้ตั้งฉากกับอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ ได้แต่เพียงพนรวเดียวเท่านั้น



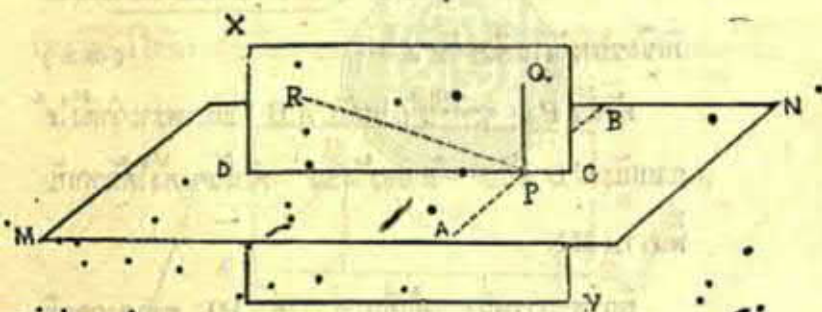
รูป ๖

ให้เส้นตรง OY และจุด P (รูป ๖) ลาก $PO \perp$ กับ OY และ $OQ \perp OY$ ดังนั้น OP และ OQ จะกำหนดพนรวที่บรรจุ P และ $\perp OY$ ได้ ในขณะเดียวกัน

พหุรูปชนิดนี้ จะสร้างได้แต่พหุรูปเดียว เพราะจากจุด P จะลากเส้นตั้งได้ฉากมายัง OY ได้แค่เส้นเดียว (๑๔)

๘๔) เส้นเอียง (Oblique line) เส้นตรงใด ๆ ที่ลากมาจุดกับพหุรูปหนึ่ง แต่ไม่ตั้งได้ฉากกับพหุรูป เส้นตรงนั้นเราเรียกว่าเป็น เส้นเอียง บนพหุรูป

อุปมาขณิเทศที่ ๕ จากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ ทอยบนพหุรูปพหุรูปหนึ่ง เราจะยกเส้นให้ตั้งได้ฉากกับพหุรูป ได้แค่เพียงเส้นเดียวเท่านั้น



รูป ๗

ให้ P เป็นจุดที่กำหนดให้ บนพหุรูป MN (รูป ๗)

จึงพิสูจน์ว่า เราสามารถจะยกเส้นตั้งได้ฉากกับพหุรูป MN จาก

จุด P ได้ แต่เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ลากเส้น ๆ หนึ่ง บนพื้นราบ MN ผ่านจุด P เป็นต้น
 ว่า AB และสร้างพื้นราบ XY ขึ้นอีกพื้นหนึ่ง ให้บรรจุ
 P ด้วย และตั้งได้ฉากกับ AB ตัดพื้นราบ MN ตาม
 เส้นตรง CD

อน ๑. ๒. ๓.

ที่จุด P ในพื้นราบ XY ยกเส้น PQ ขึ้นให้ตั้งได้ฉาก
 กับเส้น CD

โดยที่เส้น AB ตั้งได้ฉากกับพื้นราบ XY เพราะ
 สร้างขึ้น จะตั้งได้ฉากกับ PQ ด้วย ซึ่งเป็นเส้นที่ผ่านไป
 ที่เชิงของมันในพื้นราบ XY (๘๓)

ดังนั้น PQ จะตั้งได้ฉากกับ AB และเพราะว่าตั้งได้
 ฉากกับ CD ด้วย โดยสร้างขึ้น ดังนั้นจะตั้งได้ฉากกับ
 พื้นราบ MN

อีกประการหนึ่ง เส้นอื่น ๆ เช่น PR ลากจากจุดที่
 กำหนดให้ P จะเป็นเส้นเอียงบนพื้นราบ MN เพราะว่า
 PQ และ PR ตัดกัน ที่จุด P จะทำให้เกิดพื้นราบได้พื้น
 หนึ่ง

เพื่อให้กระจ่างขึ้นอีก • ให้สร้างพหุรูปนอกพหุรูป
หนึ่ง ที่บรรจบเส้น PQ และ PR สันนิษฐานให้เป็น XY
นั่นเอง พหุรูปนี้จะตัด MN ตามเส้น CD

ดังนั้น เมื่อ $PQ \perp$ กับ MN จะ $\perp$ กับ CD ด้วย (๘๓)

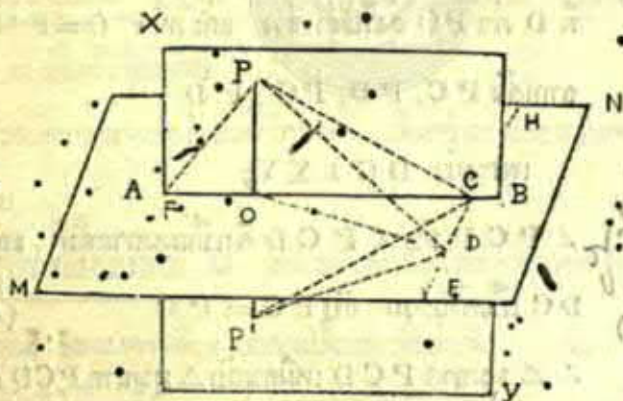
ดังนั้น PR จะเป็นเส้นเอียงบนเส้น CD (๖)

$\therefore PR$ เป็นเส้นเอียงบนพหุรูป MN (๘๔)

และด้วยเหตุนี้ PQ จึงเป็นเส้นตั้งฉากกับพหุรูป
 MN ที่ตรงจุด P ที่กำหนดให้ แต่เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ช.ค.พ.

อุประมายนิเทศที่ ๕ จากจุดๆ หนึ่ง เราจะลากเส้นให้ผ่านไป
และให้ตั้งฉากกับพหุรูปพหุหนึ่ง ที่กำหนดให้ ได้แค่เส้นเดียวเท่านั้น



ให้พหุราบ MN และจุด ๆ หนึ่ง P (รูป ๘)

จงพิสูจน์ว่า เราสามารถจะลากเส้นตรง ผ่านจุด P และให้ไป
ตั้งฉากกับพหุราบ MN ได้แต่เส้นเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ในพหุราบ MN ลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง เป็นต้นว่า EH และ
สร้างพหุราบ XY ขึ้น ให้ผ่านจุด P และตั้งฉากกับ
EH ตัดพหุราบ MN ตามเส้น AB และ EH ที่ C ลาก
เส้น $OP \perp AB$ และบนพหุราบ MN ลากเส้นใด ๆ ขึ้น
อีกเส้นหนึ่ง เป็นต้นว่า OD ให้ผ่านจุด O และตัด EH
ที่ D ต่อ PO ลงไปข้างล่าง และให้ $P'O = PO$ แล้ว

ลากเส้น PC, PD, P'C, P'D

เพราะว่า $DC \perp XY$;

$\angle PCD$ กับ $\angle P'CD$ จึงเป็นมุมฉากทั้งคู่ และเมื่อ
DC เป็นด้านร่วม กับ $PC = P'C$ (๓๖)

$\therefore \triangle$ มุมฉาก PCD เหมือนกับ $\triangle$ มุมฉาก P'CD (๑๑)

$\therefore PD = P'D$ (๔)

$\therefore OD \perp PP'$ ที่จุด O (๓๗)

$\therefore PO \perp MN$ เพราะ $\perp OD$ และ AB (ข้อ. ๒)

แต่เส้นอื่น ๆ เป็นต้นว่า PF จาก P ไปยังพหุราบ MN จะ
เป็นเส้นเอียงบนพหุราบ MN

(ให้นักเรียนพิสูจน์)

$\therefore PO$ ที่ลากจากจุด P เป็นเส้นตั้งได้ฉากกับพหุราบ
แต่เส้นเดียว

ช.ต.พ.

ข้ออนุมาน จากจุด ๆ หนึ่ง ถึงพหุราบพหุหนึ่ง เส้นที่ตั้งได้

ฉาก จะเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

ระยะความยาวของเส้นตั้งได้ฉากนี้ เรียกว่าระยะระหว่างจุดกับ

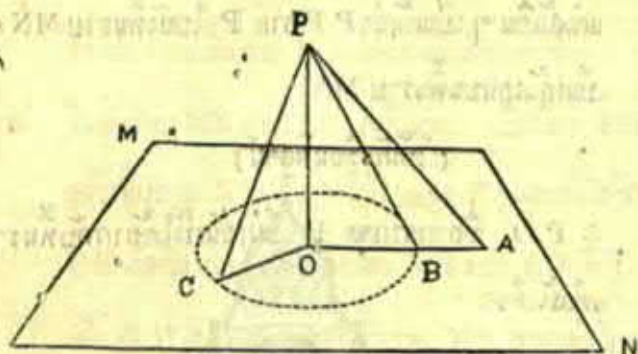
พหุราบ

อุประมาณียะที่ ๒ เส้นเอียงหลายเส้นที่ลากจากจุด ๆ หนึ่ง

มาถึงพหุราบและเจาะพหุราบออกเป็นระยะที่เท่ากัน นับจากเชิง

ของเส้นตั้งได้ฉากที่ลากจากจุดเดียวกันนั้นมายังพหุราบ เส้นเอียง

เหล่านี้น้อยมยาวเท่ากัน แต่ถ้าเป็นระยะที่ไม่เท่ากัน เส้นใดมาเจาะ
เป็นระยะยาวก็ว่า ย่อมยาวกว่า



รูป ๕

ให้พื้นราบ MN และเส้นตั้งฉาก PO , เส้นเอียงต่าง ๆ PA , PB , PC ; ระยะที่เท่ากัน OB , OC , และระยะที่ไม่เท่ากัน OA , OC , โดย OA นานกว่า OC (รูป ๕)

จงพิสูจน์ว่า $PB = PC$ และ $PA > PC$

พิสูจน์ ใน $\triangle OBP$ และ $OC P$

OP เป็นด้านร่วม

$$OB = OC$$

(ให้)

$$\text{และ } \angle BOP = \angle POC$$

(๕)

$\therefore \triangle OBP$ เหมือนกับ $\triangle OCP$ (๑๑)

$$\therefore PB = PC$$

ดังนั้นให้ A, B, O ต่างก็อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน ดัง
นั้น $OA > OC$ (ให้)

$$\therefore OA > OB \quad \text{จริง (๙)}$$

$$\therefore PA > PB \quad (๑๕)$$

$$\therefore PA > PC \quad \text{จริง (๑๖)}$$

ช.ค.พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ เส้นเอ็นที่เท่ากัน ที่ลากมาจากจุด ๆ หนึ่ง

ย่อมมาเจาะพรมรอบพรมหนึ่ง เป็นระยะที่เท่ากัน นับจากเชิงของเส้น
ตั้งใดฉากที่ลากมาจากจุดนั้น และถ้าเป็นเส้นเอ็น ๒ เส้นที่ไม่เท่า
กัน เส้นที่ยาวกว่า จะมาเจาะพรมเป็นระยะที่ไกลกว่า

ในรูป ถ้า PB เป็นเส้นที่กำหนดให้ และเท่ากัน
กับ PC ดังนั้น เมื่อ $P'O = PO$ และมุมที่ O เป็นมุม
ฉาก

$\therefore \triangle OBP$ และ $\triangle OCP$ เป็นอย่างไรกัน ?

และ OB กับ OC เป็นอย่างไรกัน ?

๕ :

อีกประการหนึ่ง ถ้า $P'A > P'C$ ต้องทราบว่า PA และ PB' เป็นอย่างไรกัน ?

และต่อไป OA กับ OB เป็นอย่างไรกัน ? ทำไม ?

และในที่สุด OA เปรียบเทียบกับ OC ?

ข้ออนุมานที่ ๒ วัตถุของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นรอบวงเท่ากันเสมอคือ เส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับรัศมีวงกลมนั้น

ในรูป ๕ ในการที่จำกัดข้อพิสูจน์ว่า PO เป็นวัตถุของจุดที่คั่นมีลักษณะตามที่กล่าวในข้ออนุมาน ควรจำกัดข้อพิสูจน์ว่า จุดใดจุดหนึ่งบนเส้น PO เป็นอย่างไร ? ตามข้อ ๓๕ และทุก ๆ จุดนอกเส้น PO เป็นอย่างไร ? ต้องพิสูจน์ทั้ง ๒ ข้อ

ข้ออนุมานที่ ๓ วัตถุของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากจุดนอกมุมทั้ง ๓ ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันเสมอ คือ เส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ลากผ่านศูนย์กลางของวงกลม ที่ล้อมสามเหลี่ยมนั้น และตั้งฉากกับเส้นรวมที่บรรจรูปสามเหลี่ยมนั้นเอง

สังเกตให้เห็นว่าข้อนี้ สืบต่อกันมาจากข้ออนุมานที่ ๒ อย่างไร ?

อนึ่งถ้าเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ลากผ่านศูนย์กลางของวงกลม ที่

บรรจุน้อยภายในรูปสามเหลี่ยม และตั้งฉากกับพหุราบ ที่บรรจุน้อยภายในรูปสามเหลี่ยมนี้ เส้นตรงนี้จะแบ่งครึ่งของจุดที่มีลักษณะอย่างไร ?

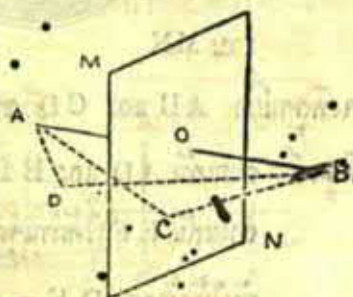
ข้ออนุมานที่ ๔ วัตถุของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากจุด ๒ จุดที่กำหนดให้เท่ากันเสมอ ย่อมเป็นพหุราบพหุหนึ่ง ที่ตั้งฉากกับกึ่งกลางของเส้นตรงที่ขยระหว่างจุดทั้ง ๒ ที่กำหนดให้ นั้น รูป ๑๐ เพราะจุดใดจุดหนึ่งเช่นจุด C ในพหุราบนี้ ต่างกับบรรจุน้อยในเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ตั้งฉากกับ AB ที่ Q, จุดกึ่งกลางของ AB (๘๓)

ดังนั้น CA กับ CB เป็นอย่างไรกัน ?

ส่วนจุดอื่น ๆ เช่น D ที่อยู่นอกพหุราบ MN จะไม่บรรจุน้อยในเส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ตั้งฉากกับ AB ที่ Q.

เมื่อเส้นตรง MN ระยะจาก D ถึง A และถึง B เป็นอย่างไรกัน ?

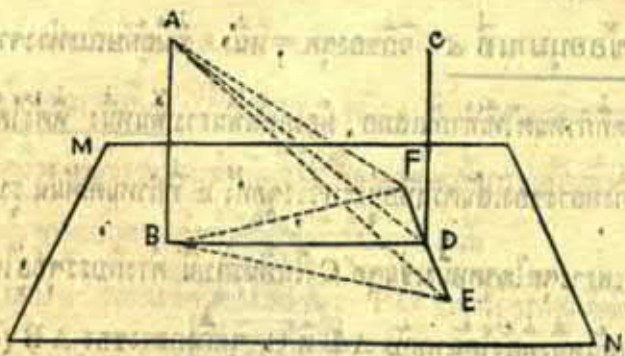
(๓๖)



รูป ๑๐

อุปมาขัณฑ์ที่ ๗ เส้น ๒ เส้น ที่ต่างก็ตั้งได้ฉากกับพื้น

ราบพินเดียวกัน จะรนากัน รูป ๑๑



รูป ๑๑

ให้เส้นตรง AB และ CD ซึ่งต่างก็ตั้งได้ฉากกับพื้น

ราบ MN

จงพิสูจน์ว่า AB และ CD รนากัน

พิสูจน์ จากเส้น AD และ BE , บนพื้นราบ MN

ลากเส้น EF ให้ผ่านจุด D และ $\perp$ กับ BD

กับให้มึระยะ $DE = DF$ จากเส้น BE, AE, BF, AF .

ต่อไปให้พิสูจน์ว่า $\triangle BDE$ และ $\triangle BDF$ เหมือนกัน

โดย

แล้วและพิสูจน์ว่า $\angle ADE$ กับ $\angle ADF$ เป็นมุมฉาก

ทั้งคู่

ให้บอกว่า BD, CD, AD ทำไมจึงอยู่บนพหุราบเดียวกัน

กันโดยอาศัย

แต่ AB ก็อยู่ในพหุราบด้วย

และ AB กับ CD ต่างก็ $\perp BD$

$\therefore AB \parallel CD$

(๑๑)

(๑๒)

(๑๓)

(๑๔)

(๑๕)

(๑๖)

ช.ต.พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้าเส้นหนึ่ง ของเส้นขนานหนึ่ง ตั้งฉาก

กับพหุราบหนึ่งแล้ว อีกเส้นหนึ่ง ก็จะตั้งฉากกับพหุราบนั้นด้วย

รูป ๑๒

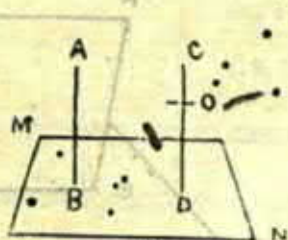
เพราะจากจุดใดจุดหนึ่ง O บนเส้น

CD ถ้าลากเส้นตรงมาให้ตั้งฉาก

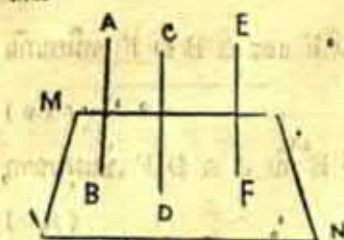
กับพหุราบ MN เส้นนั้นจะเป็นอย่างไร

กันกับเส้น AB ? อ.น. ๗ และข้อ

ไปโดยอาศัยข้อ (๑๘)



รูป ๑๒



ข้ออนุมานที่ ๒ ถ้าเส้น ๒

เส้นต่างขนานกับอีกเส้นหนึ่ง ทั้ง

๒ เส้นก่อนก็จะขนานกันด้วย รูป ๑๓

เพราะพื้นราบหนึ่ง MN ดังได้

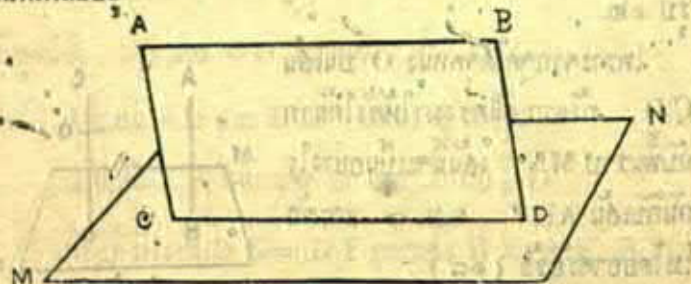
รูป ๑๓

ฉากกับ CD ย่อมตั้งฉากกับ AB และ EF เช่น ฉ.

๘๕) เส้นตรงและพื้นราบที่ขนานกัน (Line and Plane-

Parallel) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง กับระนาบพื้นราบหนึ่งให้
ยาวและกว้างใหญ่เท่าไรก็ตามจะไม่พบหรือเจาะกันเลย เส้นตรงกับ
พื้นราบนี้ เรียกว่าขนานกัน

อุปมัยนิเทศที่ ๘ ถ้าเส้น ๒ เส้นขนานกัน ทุก ๆ พื้นราบ
ที่บรรจบเส้นใดก็ดี ของทั้ง ๒ นั้นแต่เพียงเส้นเดียวเท่านั้น จะขนานกับ
เส้นที่เหลือนอชย



รูป ๑๔

ให้เส้นที่ขนานกัน AB และ CD กับพหุรูป MN ที่

บรรจุ CD แต่เส้นเดียว รูป ๑๔

จึงพิสูจน์ว่า พหุรูป MN จะขนานกับเส้น AB

พิสูจน์ AB และ CD ย่อมจะอยู่ในพหุรูปที่เดียวกัน AD (๑๗)

• พหุรูป AD ตัดกับพหุรูป MN ตามเส้น CD (ให้)

แต่ AB จะบรรจุอยู่ในพหุรูป AD เสมอ แม้ว่าจะต่อ

ออกให้ยาวสักเพียงใดก็ตาม . (๑๘)

ดังนั้นถ้าแม้ว่าเส้น AB จะตั้งฉากกับพหุรูป MN จักมี

เจานั้นจำเป็นจะต้องอยู่ในเส้น CD (๑๘)

แต่เมื่อ $CD \parallel AB$ (ให้)

$\therefore AB$ จะไม่ตัด CD เลย (๑๗)

$\therefore AB$ ไม่สามารถจะเจาะพหุรูป MN

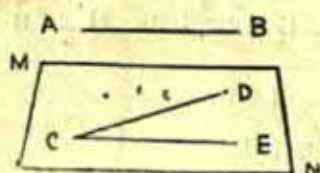
$\therefore NM \parallel AB$ (๑๕)

ข. ท. พ.

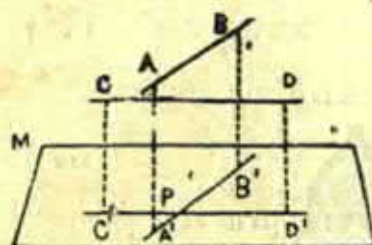
ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้ามีเส้น ๒ เส้น ที่ไม่ได้อยู่ในพหุรูปเดียวกัน

กัน เราสามารถจะสร้างพหุรูป ให้บรรจุเส้นทั้งสองเส้นทั้ง ๒ นั้น

กับให้ขนานกับอีกเส้นหนึ่งที่เหลืออยู่ได้แค่พหุรูปเดียวเท่านั้นรูป ๑๕



รูป ๑๕



รูป ๑๖

และทำไมจึงมีแค่พื้นราบเดียวเท่านั้นที่มีลักษณะอย่างนี้?

ข้ออนุมานที่ ๒ เราสามารถจะสร้างพื้นราบ ให้บรรจบจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ และให้ขนานกับเส้น ๒ เส้นใด ๆ ที่กำหนดให้ ได้แค่พื้นราบเดียวเท่านั้นรูป ๑๖

ให้ P เป็นจุด และ AB กับ CD เป็นเส้นที่กำหนดให้ ต่อไปถ้าเราสมมุติลากเส้นตรงให้ผ่านจุด P คือเส้น $A'B'$ ให้ขนานกับ AB และอีกเส้นหนึ่ง $C'D'$ ให้ขนานกับ CD เส้นทั้ง ๒ นี้จะกำหนดพื้นราบหนึ่ง

(๔๒)

ถ้า AB และ CD เป็นเส้นที่กำหนดให้ และถ้าเราสร้างพื้นราบหนึ่งให้บรรจบ CD กับอีกเส้นหนึ่ง CE ที่สมมุติสร้างขึ้นให้ขนานกับ AB เราจะสามารถได้ว่าพื้นราบ $M'N'$ ที่บรรจบเส้น CD และ CE นี้ เป็นอย่างไรกันกับเส้น AB ?

ดังนั้นเราจะบอกได้ว่าพหุราบนี้ เป็นอย่างไรกันกับเส้น AB และ CD ? และทำไมจึงมีแค่เพียงพหุราบเดียวเท่านั้น ที่มีลักษณะดังนี้ ?

๔๖) พหุราบขนาน (Parallel Plane) แม้จะขยายพหุราบ ๒ พหุราบออกไปให้ ใหญ่กว้างสักเพียงใดก็ยังคงหาคัดกันไม่ พหุราบทั้ง ๒ นี้ เรียกว่าขนานกัน

แบบฝึกหัดที่ ๑

๑. จงอธิบายว่า เมื่อเราพับกระดาษแผ่นหนึ่งเข้า เป็นเพราะเหตุไรรอยพับนั้นจึงเป็นเส้นตรงเสมอ ?

๒. เส้นเอชหลายเส้นที่เท่ากัน ซึ่งต่างก็ลากจากจุดหนึ่งที่กำหนดให้ภายนอกพหุราบลงมายังพหุราบพหุหนึ่ง และอีกเส้นหนึ่งจากจุดอื่น ให้ตั้งฉากกับพหุราบ เส้นเอชทั้งหลายนั้นต่างก็จะตัดกันเป็นมุมกับเส้นตรงต่าง ๆ ในพหุราบ ที่ลากจากจุดซึ่งอยู่เส้นเอชทั้งหลายนั้นไปยังเชิงของเส้นตั้งฉาก มุมทั้งหลายเหล่านี้ย่อมเท่ากัน.

๓. ถ้าจากจุดแข็งของเส้นตั้งได้ฉากกับพหุราบพื้นหนึ่ง ถ้า
เส้นตั้งเส้นหนึ่งให้ ไปตั้งได้ฉากกับอีกเส้นใดเส้นหนึ่งในพหุราบนั้น
เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่ลากจากจุดตกคั่นของเส้นตั้ง ๒ ทอดผ่านตัวนั้น
ไปยังจุดใดจุดหนึ่งในเส้นตั้งได้ฉากของพหุราบ เส้นตรงที่ลากใหม่นี้
ย่อมตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่บรรจุอยู่ในพหุราบแต่เดิม.

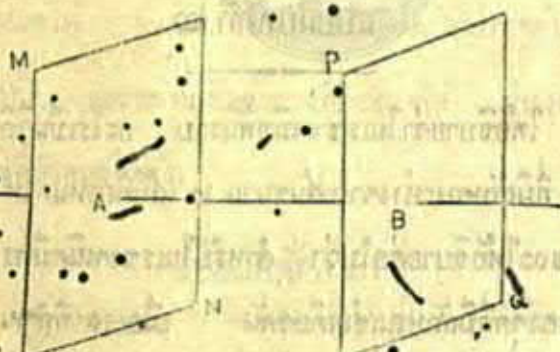
๔. ถ้าลากเส้น ๒ เส้นจากจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ภายนอกพหุราบ
ให้เส้นหนึ่งตั้งได้ฉากกับพหุราบ อีกเส้นหนึ่งได้ฉากกับเส้นตรง
ที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง ที่บรรจุอยู่ในพหุราบนั้น เส้นตรงที่ลากให้
ผ่านจุดแข็งของเส้นตั้งได้ฉากทั้ง ๒ นั้น ย่อมตั้งได้ฉากกับเส้นตรง
ที่กำหนดให้.

๕. จากจุดยอดมุม ๒ จุดของรูปสามเหลี่ยมมุม ๑ ถ้า
เส้นให้ตั้งได้ฉากกับด้านทั้ง ๒ ที่ตรงข้ามกับมุมนั้น ๆ ตรงที่เส้น
ทั้ง ๒ นี้ ตัดกัน ยกเส้นตรงขึ้นให้ตั้งได้ฉากกับพหุราบที่บรรจุสาม
เหลี่ยมนั้นอยู่ จึงพิสูจน์ว่าเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ลากจากจุดใดจุดหนึ่ง
ในเส้นตั้งได้ฉากนี้ ไปยังยอดมุมใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมนั้น ย่อม
ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่ลากให้ผ่านจุดยอดมุมนั้น และ
ขนานกับด้านที่ตรงข้าม.

๖. จงหาจุดในพหุราบหนึ่ง ที่เมื่อลากเส้นตรงมาจรดจุดที่กำหนดให้ ๒ จุดที่อยู่ภายนอกพหุราบจะข้างเดียวกัน มายังจุดนั้น ผลบวกของเส้นตรงทั้ง ๒ นั้น จะเป็นเส้นที่สั้นที่สุด.

๗. ถ้าลากเส้นเชื่อมสามเส้นที่เท่ากัน มาจากจุด ๆ หนึ่งที่อยู่ภายนอกพหุราบหนึ่ง เส้นทั้งสามลากกับพหุราบที่ลากมาจากจุดนั้น ย่อมเจาะตรงจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรูปสามเหลี่ยม ที่มียอดมุมอยู่ที่จุดเชิงของเส้นเหล่านั้นเอง.

อุปมาขนิเทศที่ ๘ พหุราบ ๒ พหุราบ ที่ต่างก็ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นเดียวกัน ย่อมขนานกัน.



ให้พิจารณา MN และ PQ ซึ่งต่างก็ตั้งฉากกับเส้น AB รูป ๑๗
จึงพิสูจน์ว่า พนราบ MN และ PQ ทั้ง ๒ นั้นขนานกัน

พิสูจน์ ถ้า MN และ PQ ไม่ขนานกัน จะต้องตัดกัน แต่ถ้าตัด
กันแล้ว เราจะมีพนราบ ๒ พนราบที่ต่างกับบรรทัด
เดียวกัน — คือเส้นรอยตัดกันนั้น — มาตั้งฉากกับเส้นตรง
เส้นเดียวกัน.

แต่ข้อนี้เป็นไปไม่ได้

อน ๒. อ.น. ๓'

∴ MN และ PQ ขนานกัน

(๘๖)

ช. ค. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๒

๑. ให้อธิบายว่าในเรขาคณิตพนราบ อะไรเป็นวิถีของจุดๆ
หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากเส้นขนาน ๒ เส้นที่กำหนดให้ เท่ากัน
เส้นนี้ และให้อธิบายต่อไปว่า สำหรับในเรขาคณิตทรงนี้ อะไร
เป็นวิถีของจุดที่มีลักษณะเช่นเดียวกัน เมื่อเวลาที่กำหนดพนราบ
ที่ขนานกัน ๒ พนให้แทนเส้นขนาน จงเขียนรูปให้ดูโดยไม่ต้อง
พิสูจน์.

๒. ให้หาวัตถุของจุด ๆ หนึ่ง^๕ ในพรม^๕ ที่มีลักษณะ^๕ ห่างจาก
จุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ภายนอกพรม^๕ เป็นระยะเท่ากันเสมอ^๕ และ
ตัดฉากกับขอบ^๕ ในเรขาคณิตพรม^๕ ว่าอะไร? /

๓. ถ้าเส้น ๆ หนึ่งที่กำหนดให้^๕ เป็นเส้นที่ขนานกับพรม^๕
หนึ่งที่กำหนดให้^๕ เส้นรอยตัดกันระหว่างพรม^๕ กับพรม^๕ ใด ๆ
ที่บรรจบเส้นตรงที่กำหนดให้^๕ ย่อมเป็นเส้นที่ขนานกันกับเส้นตรงที่
กำหนดให้^๕ นั้นด้วย

๔. ถ้าเส้นตรงหนึ่งที่กำหนดให้^๕ เป็นเส้นที่ขนานกับพรม^๕
หนึ่งที่กำหนดให้^๕ เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่ลากให้ผ่านจุดใดจุดหนึ่ง
ในพรม^๕ นี้ และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้^๕ ย่อมบรรจบอยู่
ในพรม^๕ ที่กำหนดให้^๕ นั้น.

แบบฝึกหัดที่ ๓

๑. ให้อธิบายว่าอะไรเป็นวัตถุของจุด ๆ หนึ่ง^๕ ที่มีลักษณะ^๕
ห่างจากจุดที่กำหนดให้ ๒ จุด เป็นระยะที่เท่ากันเสมอ^๕ กับใน

ขณะเดียวกัน จะต้องห่างจากอีก ๒ จุดที่กำหนดให้ เป็นระยะ
ที่เท่ากันเสมอด้วย ?

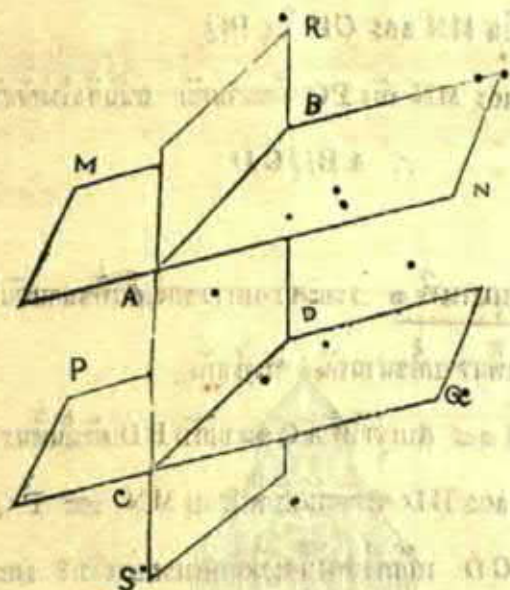
๒. ให้อธิบายว่าอะไรเป็นวิถีของจุดๆ หนึ่ง ที่มีระยะห่าง
จากพหุราบ P เป็นระยะ d และห่างจากพหุราบ P' เป็นระยะ d'
ทั้งนี้ที่กำหนดให้เสมอ ?

๓. ให้อธิบายว่าอะไรเป็นวิถีของจุดๆ หนึ่ง ที่ต้องมีระยะ d
ห่างจากพหุราบ P ที่กำหนดให้ และในขณะเดียวกันห่างจากจุด
ที่กำหนดให้ ๒ จุดเท่ากันเสมอ ?

๔. จงหาตำแหน่งของจุดๆ หนึ่ง ที่ต้องห่างจากพหุราบ P ที่
กำหนดให้เป็นระยะ d และห่างจากพหุราบ P' ที่กำหนดให้เป็นระยะ
 d' และในขณะเดียวกันต้องห่างจากจุด ๒ จุดที่กำหนดให้เป็นระยะ
เท่ากันด้วย จะมีแค่เพียงจุดเดียวเท่านั้นหรือ ที่มีลักษณะความที่บ่ง
ไว้ไหม ? ให้เขียนรูปโดยไม่ต้องพิสูจน์

อุประมาณียะเทศที่ ๑๐ พหุราบ ๒ พหุราบ ที่ขนานกันอยู่

ถ้ามีพหุราบหนึ่ง มาตัดพหุราบขนานทั้งสองนั้น เส้นรอยตัด
กันนี้ทั้งสองเส้นจะขนานกัน รูป ๑๘



รูป ๑๘

ให้พื่นราบที่ขนานกัน MN และ PQ และพื่นรวม RS ที่มา
ตัดกับพื่นราบขนานกันตามเส้น AB และ CD

จึงพิสูจน์ว่า เส้นรอยตัดกันทั้งสองคือ AB และ CD นั้นขนานกัน

พิสูจน์ AB และ CD อยู่ในพื่นรวมอันเดียวกัน RS (ให้)

ถ้า AB และ CD จะต้องตัดกัน พื่นราบ MN

และ PQ จะต้องตัดกันด้วย แต่ AB ไม่บรรจบ

ใน MN และ CD ใน PQ (๗๕)

และ MN กับ PQ ก็ขนานกัน ฉะนั้นจึงไม่ตัดกัน (๗๖)

$\therefore AB \parallel CD$ (๑๗)

ร. ต. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ระยะความยาวของเส้นที่ขนานกัน ซึ่งอยู่
ในระหว่างพื้นที่ขนานกัน จะเท่ากัน

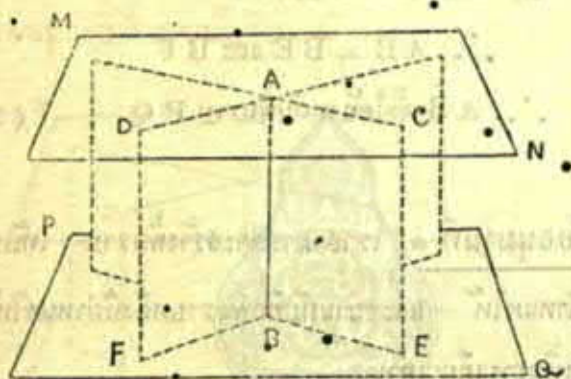
ในรูป ๑๘ สมมติให้ AC ขนานกับ BD ดังนั้นพื้นที่บรรจุ
เส้น AC และ BD จะตัดกันกับพื้นที่ MN และ PQ ตามเส้น
AB และ CD เส้นทั้งสองนี้จะมีลักษณะอย่างไร? และ ACDB
จะเป็นรูปชนิดใด?

ข้ออนุมานที่ ๒ พื้นที่ ๒ พื้นที่ที่ขนานกัน ย่อมมีระยะ
ห่างจากกันและกันเท่ากันเสมอไม่ว่าที่ไหน

จากจุดต่างๆ ในพื้นที่ MN ถ้าเส้นตั้งใดฉากมายังพื้นที่
PQ รูป ๑๘ และพิสูจน์ได้ว่าเส้นทั้งหลายนี้ ต่างก็ขนานกัน ภาย
หลังโดยอาศัยข้ออนุมานที่ ๑ เส้นเหล่านี้ต่างก็เท่ากันหมด

อุประมาณิเทศที่ ๑๑ เส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งตั้งได้ฉากกับ

พื้นราบหนึ่ง ของพื้นราบขนานคู่หนึ่งแล้ว จะตั้งได้ฉากกับอีก
พื้นราบหนึ่งด้วย



รูป ๑๑

ให้เส้นตรง AB ซึ่งตั้งได้ฉากกับพื้นราบ MN และพื้น
ราบ PQ ซึ่งขนานกับพื้นราบ MN รูป
จึงพิสูจน์ว่า AB ตั้งได้ฉากกับพื้นราบ PQ ด้วย
พิสูจน์ สร้างพื้นราบให้บรรจบเส้น AB ๒ พื้นราบ

AF และ AF ซึ่งตัดกับ MN ตามเส้น AC

และ AD และตัด PQ ตามเส้น BE และ BF

ดังนั้น $AC \parallel BE$ และ $AD \parallel BF$ (อ.น. ๑๐)

แต่ $AB \perp AC$ และ AD (๘๓)

$\therefore AB \perp BE$ และ BF (๒๐)

$\therefore AB$ ตั้งฉากกับพหุราบ PQ (อ.น. ๒)

ธ. ค. พ.

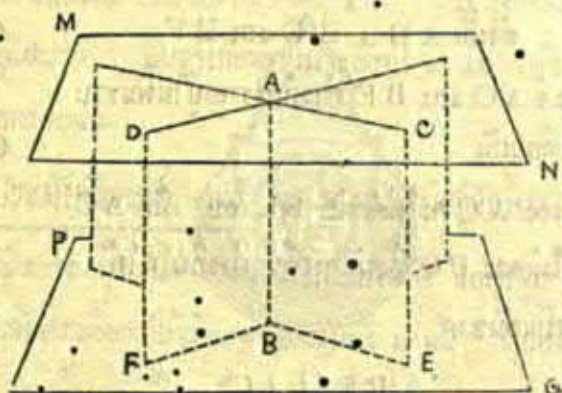
ข้ออนุมานที่ ๑ เราสามารถจะสร้างพหุราบ ให้บรรจุจุดๆ
หนึ่งที่กำหนดให้ และขนานกับอีกพหุราบหนึ่งที่กำหนดให้ ได้
แต่เพียงพหุราบเดียวเท่านั้น

ข้ออนุมานที่ ๒ วัตถุของจุดๆ หนึ่งที่ มีลักษณะห่างจากพหุราบ
ขนาน ๒ พหุราบเท่ากันเสมอ ย่อมเป็นพหุราบพหุหนึ่ง ซึ่งตั้ง
ได้ฉากกับเส้นตรงที่คงได้ฉากกับพหุราบทั้ง ๒ นั้น ตรงกับกลางของ
เส้นตรงที่อยู๋ในระหว่างพหุราบขนาน

ข้ออนุมานที่ ๓ วัตถุของจุดๆ หนึ่งที่ มีลักษณะห่างจากเส้นตรง
ที่ขนานกัน ๒ เส้นเท่ากันเสมอ ย่อมเป็นพหุราบพหุหนึ่ง ซึ่งตั้งได้ฉาก

กับเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นขนานทั้ง ๒ นั้นตรงกึ่งกลางของเส้นตรง
ที่อยู่ระหว่างเส้นขนาน

อุปมาณียะที่ ๑๒ ถ้าเส้นตรง ๒ เส้นตัดกัน ต่างก็เป็น
เส้นขนานกับพหุราบเดียวกันหนึ่ง พหุราบที่บรรจุเส้นตรงทั้ง
๒ นั้นก็ย่อมขนานกับพหุราบนั้นด้วย



รูป ๒๐

ให้เส้นตรง ๒ เส้นตัดกัน AC และ AD ซึ่งต่างก็ขนานกับพหุ
ราบ PQ และให้ MN เป็นพหุราบซึ่งบรรจุเส้น AC และ AD

รูป ๒๐

จึงพิสูจน์ว่า MN ขนานกับ PQ ด้วย

พิสูจน์ ถ้าเส้น AB ให้ตั้งฉากกับพหุราบ PQ

สร้างพหุราบหนึ่งให้บรรจุ AB และ AC ซึ่งมาตัดกับพหุราบ PQ ตามเส้น BE กับอีกพหุราบหนึ่งให้บรรจุ AB และ AD ซึ่งตัดกับพหุราบ PQ ตามเส้น BF

ดังนั้น $AB \perp BE$ และ BF (๘๓)

แต่ AC และ BE ต่างก็บรรจุอยู่ในพหุราบเดียวกัน (สร้าง)

และ AC จะไม่ตัดกับ BE เลย เมื่อ AC ไม่เจาะ PQ ซึ่งมันจะเป็นอย่างอื่นไม่ได้ เป็นอัมชิต (๘๔)

$\therefore BE \parallel AC$

โดยทำนองเดียวกัน $BF \parallel AD$

$AB \perp AC$ และ AD (๒๐)

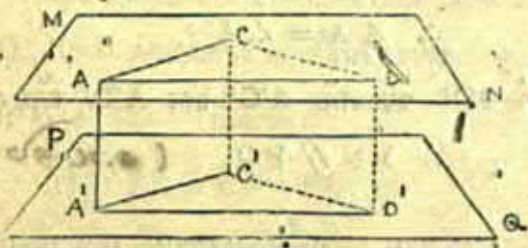
$\therefore AB$ ตั้งฉากกับพหุราบ MN (อ.น. ๒)

$\therefore MN \parallel PQ$ (อ.น. ๔)

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้ คือ

สำหรับอุประมาณียุทธที่ ๑๒ เห็นได้ง่ายว่าตำแหน่งของจุด A นั้น ไม่เป็นข้อสำคัญเลย เป็นต้นว่า สมมติให้ C และ D คงที่อยู่ตามเดิม แต่ A อาจเลื่อนไปยาวสักเท่าใดก็ตามที คือ AC และ AD ก็อาจจะกลายเป็นเส้นที่ขนานกัน แต่ถึงกระนั้นก็ ถ้าเส้นทั้ง ๒ นั้นยังคงจะต้องตัดกันอยู่ครบใด เราก็คงจะต้องแน่ใจอยู่เสมอว่า พื่นราบที่กล่าวมาแต่ทั้ง ๒ นั้น ต้องขนานกันอยู่เสมอครบถ้วน

อุประมาณียุทธที่ ๑๓ มุม ๒ มุมที่ไม่อยู่ในพื้นราบอันเดียวกัน ถ้ามีขนาดของมุมนี้ต่างกัขนานกันเป็นลำดับ และอยู่ทางข้างเดียวกันของเส้นตรงที่ลากให้ผ่านจุดยอดมุมทั้ง ๒ นั้น มุมทั้ง ๒ นั้นจะเข้ากัน และพื้นราบทั้ง ๒ ที่บรรจุมุมอยู่นั้นก็จะขนานกันด้วย



รูป ๒๑

ให้มุม A และ A' ในพหุรูป MN และ PQ ขาของ
มุมทั้ง ๒ นั้น ต่อกันจนยาวกันเป็นเส้นตรง และอยู่ทางข้าง
เดียวกันของเส้น AA' (รูป ๒๑)

จงพิสูจน์ว่า $\angle A = \angle A'$ และพหุรูป $MN \parallel PQ$
พิสูจน์ ตัดเส้น AD ให้เท่ากับ $A'D'$ และ AC ให้เท่ากับ
 $A'C'$ ตากเส้น $DD', CC', CD, C'D'$ เมื่อ
 AD ยาวและเท่ากับ $A'D'$ แล้ว AA' จะยาว
และเท่ากับ DD' ด้วย (๒๗)

โดยทวนของเส้นทวน AA' จะยาวและเท่ากับ CC'

$\therefore DD'$ กับ CC' จะเท่ากัน และ DD' กับ CC'
จะขนานกันด้วย (บ.น. ๒ อ.น. ๗)

$$\therefore CD = C'D' \quad (๒๗)$$

$\therefore \triangle ADC$ จะเหมือนกันกับ $\triangle A'D'C'$ (๑๓)

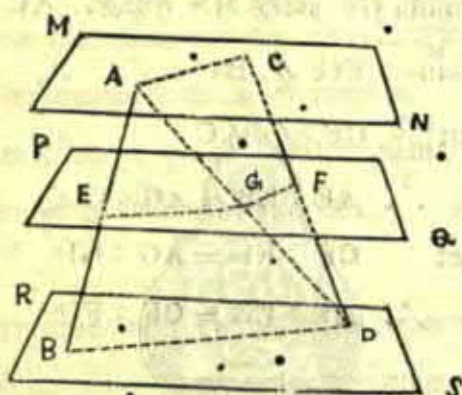
$$\therefore \angle A = \angle A' \quad (๔)$$

แต่ MN ขนานกับ $A'C'$ และ $A'D'$ ด้วย (บ.น. ๕)

$$\therefore MN \parallel PQ \quad (๑.น.๑๖)$$

อุประมาณียะเทศที่ ๑๔ ถ้าตัดเส้นตรง ๒ เส้นออกจากส่วน ๆ

โดยพื้นราบที่ขนานกัน ๓ พื้นราบ ส่วนต่าง ๆ ของเส้นตรงนั้น จะ
 มีพื้นที่กันตามลำดับ



รูป ๒๒

ให้เส้นตรง AB และ CD กับพื้นราบที่ขนานกัน MN ,
 PQ , RS . ตัดเส้นตรง ๒ เส้นที่ตรงจุด A , E , B
 และ C , F , D . เป็นลำดับ (รูป ๒๒)

จงพิสูจน์ว่า $AE : EB = CF : FD$

พิสูจน์. ถากเส้น AD ซึ่งมาเจาะกับพื้นราบ PQ ที่ G , ดัง

พินิจให้บรรจุ AB และ AD ซึ่งมาตัดพินิจ PQ
ตามเส้น EG และตัดพินิจ RS ตามเส้น BD ซึ่งพิน
ิจอย่างเดียวกันให้บรรจุ AD และ CD ซึ่งมาตัด PQ
ตามเส้น GF และตัด MN ตามเส้น AC

ดังนั้น $EG \parallel BD$

และ $GF \parallel AC$

(อ.ม. ๑๐)

$\therefore AE : EB = AG : GD$

และ $CF : FD = AG : GD$

(๕๕)

$\therefore AE : EB = CF : FD$

(จริง ๘)

ข.ค.พ.

ข้อที่ควรวินิจฉัยต่อไป

อุปมาขึ้นเทศที่ ๑๔ นี้ มีความเห็นเดียวกับข้อ ๕๗

แต่กันความกว้างออกอีกเป็นอันมาก แท้จริงเราควรจะขยาย

อุปมาขึ้นเทศขึ้นให้กว้างขวางมากขึ้นไปกว่านี้ได้อีก คือ ถ้าเส้น

ตรง ๒ เส้นต้องถูกตัดออกเป็นส่วน ๆ โดยพินิจที่ขนานกันก็พิน

ิจตาม ส่วนต่าง ๆ เป็นลำดับกันของเส้นตรงนั้น จะสัมพันธ์กัน

และควรพิจารณาหัดถึงข้อที่จะเพาะลงไปอีก คือเมื่อ AB และ CD เป็นเส้นที่ตัดกันขึ้นในระหว่างพื้นราบขนานนั้น

แบบฝึกหัดที่ ๔



๑. จงหาวิถีของเส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่ลากไปให้ผ่านจุด ๆ หนึ่ง ที่กำหนดให้ และให้ขนานกับพื้นราบหนึ่งที่กำหนดให้

๒. จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ในพื้นราบหนึ่งที่กำหนดให้ ที่มีลักษณะห่างจากจุด ๒ จุดที่กำหนดให้เท่ากันเสมอ ภายนอกพื้นราบนั้น

๓. จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากจุด ๓ จุดที่กำหนดให้ ซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงอันเดียวกันเท่ากันเสมอ

๔. จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากพื้นราบที่ขนานกัน ๒ พื้นราบที่กำหนดให้เท่ากันเสมอ และในขณะเดียวกันมีระยะห่างจากจุดอีก ๒ จุดที่กำหนดให้เท่ากันเสมอด้วย

๕. ให้อธิบายว่าอะไรเป็นวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ในพื้นราบพื้นหนึ่งที่ห่างจากเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ ในพื้นราบนั้นเป็นระยะเท่ากับที่กำหนดให้

เสมอ และอะไรเป็นวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีระยะห่างจากพื้นราบหนึ่ง ที่กำหนดให้ เป็นระยะเท่ากับที่กำหนดให้เสมอ

๖. เส้นตรง AB ตัดกันกับพื้นราบที่ขนานกัน ๓ พื้นราบ ตามจุด A, E และ B กับเส้นตรง CD อีกเส้นหนึ่ง ตัดกับพื้นราบเหล่านั้น ตามจุด C, F และ D ถ้า $AE=6$ ซม. $EB=8$ ซม. และ $CD=12$ ซม. จงหา CF และ FD

๗. เส้นตรง AB ตัดกันกับพื้นราบที่ขนานกัน ๓ พื้นราบ ตามจุด A, E และ B กับเส้นตรง CD อีกเส้นหนึ่ง ตัดกับพื้นราบเหล่านั้นตามจุด C, F และ D ถ้า $AB=8$ ซม. $CF=5$ ซม. และ $CD=9$ ซม. จงหา AE และ EB

๘. จากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ นอกพื้นราบหนึ่งที่กำหนดให้ จงลากเส้นตรงให้ตั้งได้ฉากกับพื้นราบนั้น

๙. จงบอกเส้นตั้งได้ฉากกับพื้นราบหนึ่งซึ่งกำหนดให้ จากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ภายในพื้นราบนั้น

๑๐. ตามวิชาเรขาคณิตพื้นราบ ได้เคยพิสูจน์มาแล้วว่า ถ้าเส้นตรงที่ขนานกัน ๓ เส้นหรือมากกว่านั้น ตัดเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง เป็นส่วน ๆ ที่เท่ากันทั้งสิ้น เส้นขนานเหล่านั้นจะตัดเส้นตรงทุกเส้น

ที่ผ่าหมุดเส้นขนานนั้นมา ออกเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากันหมดด้วย จึงพยายามตั้งอุปกรณ์นิเทศที่มีลักษณะเช่นเดียวกันนี้ ในวิชาเรขาคณิต มีทรง และพิสัยนำมาด้วย

๔๘) มุมสองหน้า (Dihedral Angle) ที่วางระหว่างพื้นราบ

สองพื้นราบที่ติดกัน เรียกว่ามุมสองหน้า

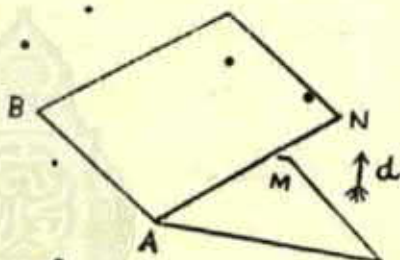
ในรูป ๒๓ นี้ พื้นราบ

AM และ BN เรียกว่า หน้า

ของมุมสองหน้า และเส้นรอย

ติดกัน AB นั้น เรียกว่าเส้น

ของมุมสองหน้า



รูป ๒๓

เราใช้วิธีบอกมุมสองหน้ามุมหนึ่ง โดยอาศัยบอกอักษรที่หมายเส้นของมุมนั้น หรืออักษรที่หมายหน้าและเส้นของมุม หรือแต่เพียงอักษรเล็ก ที่อยู่ภายในมุมนั้น เช่นมุมสองหน้าในรูปนี้ เราเรียกว่า $A-B$ หรือ $M-AB-N$ หรือแต่เพียง d

๔๙) ขนาดของมุมสองหน้า (Size of a Dihedral Angle)

ขนาดของมุมสองหน้ามุมหนึ่งนั้น ย่อมแล้วแต่ระยะที่หน้าของมุมข้าง

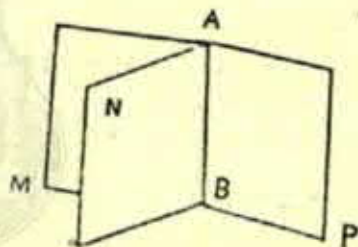
หนึ่งนั้นจะต้องหมุนไปโดยอาศัยเส้นของมุมนั้นเป็นแกนหมุน จนกว่าจะไปหยุดอยู่ในตำแหน่งที่เป็นขนาดของมุมนั้น

(๘๙) มุมสองหน้าข้างเคียง (Adjacent Dihedral Angle)

ถ้ามุมสองหน้า ๒ มุม คือต่างก็เป็นมุมข้างเคียงซึ่งกันและกัน มีเส้นร่วมกัน กับมีหน้าหนึ่งรวมกัน มุมสองหน้าที่ ๒ นั้น เรียกว่ามุมสองหน้าข้างเคียง

เป็นต้นว่าในรูป ๒๔

M—AB—N เป็นมุมสองหน้าข้างเคียงของ N—BA—P และกลับกัน



รูป ๒๔

(๙๐) มุมสองหน้าฉาก (Right Dihedral Angle) ถ้าพื้น

พื้นหนึ่ง ตั้งฉากกับพื้นราบอีกพื้นหนึ่ง ทำให้เกิดมุมสองหน้าข้างเคียงขึ้น ๒ มุมเท่ากัน มุม ๆ หนึ่งนี้ เรียกว่ามุมสองหน้าฉาก การเรียกมุมสองหน้าจะเป็นมุมสองหน้าฉาก แผลม, บ้าน, เกิน, คั่วฉาด, คั่วฉมจักร, คั่วจักรวาล หรือคั่วฉมฉม ก็เป็นทำนองเดียวกันกับมุมตามพื้นราบ แต่ควรต้องบอกให้รู้ว่าเป็นมุมสองหน้าเสมอ

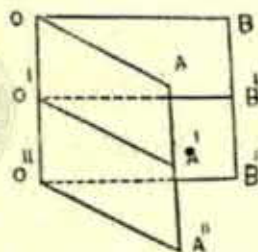
๔๑) พื้นราบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (Perpendicular planes)

ถ้าพื้นราบ ๒ พื้นราบตัดกัน ทำให้เกิดมุมสองหน้าฉากขึ้น พื้นราบทั้ง ๒ นี้ เรียกว่า ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

๔๒) มุมราบของมุมสองหน้า (Plane Angle of a Dihedral Angle)

มุมราบที่เกิดขึ้นโดยเส้นตรงสองเส้น ซึ่งไม่อยู่ในพื้นราบเดียวกัน แต่ตั้งฉากกับสันของมุมสองหน้า ที่ตรงจุดเดียวกันเรียกว่ามุมราบของมุมสองหน้า

เป็นต้นว่า มุม AOB เป็นมุมราบของมุมสองหน้า OO'' ถ้า AO และ BO ตั้งฉากกับ OO''



ข้ออนุมาน มุมราบของมุมสองหน้า

รูป ๒๕

จะมีขนาดเท่ากันเสมอ แม้ว่าจะลากเส้นตั้งฉากที่เป็นขาของมุมราบนี้ ที่ตรงจุดใด ๆ ของสันของมุมสองหน้านั้นก็จริง

๔๓) ความเกี่ยวข้องระหว่างมุมสองหน้า กับมุมราบตามที่ได้แสดงมาแล้วนั้น ทำให้เราเห็นได้ว่า การพิสูจน์คุณลักษณะต่าง ๆ

ของมมสองน้ำ ย่อมเป็นไปโดยทำนองเดียวกัน กับที่ได้พิสูจน์
มาแล้ว เมื่อกล่าวถึงมมรวบ

ในต่อไปนี้จะ ได้ยกกล่าว แต่คุณลักษณะที่สำคัญที่ควรจะมี
ถือเขาเป็นหลัก หรือใช้เป็นแบบฝึกหัดได้

๑. ถ้าพนรวบหนึ่งติดกันกับอีกพนรวบหนึ่ง ย่อมทำให้เกิดมม
สองน้ำข้างเคียงกัน ๒ มม ผลบวกของมมสองน้ำทั้ง ๒ นั้นย่อม
เท่ากับมมสองน้ำมาก ๒ มม

๒. ถ้าผลบวกของมมสองน้ำข้างเคียง ๒ มมรวมกัน ได้
เท่ากับมมสองน้ำมาก ๒ มมพอดี น้ำของมมภายนอกทั้ง ๒ นั้น
จะเห็นพนรวบเดียวกัน

๓. ถ้าพนรวบ ๒ พนรวบติดกัน มมสองน้ำที่ตรงข้ามย่อม
เท่ากัน

๔. ถ้าพนรวบหนึ่ง ไปติดกันกับพนรวบที่ขนานกัน ๒ พนรวบมม
สองน้ำภายในก็แย้งกันย่อมเท่ากัน มมสองน้ำภายในและภายนอก
อยู่ข้างเดียวกันย่อมเท่ากัน และมมสองน้ำภายในที่อยู่ข้างเดียวกัน
ย่อมเป็นคู่ตรงกัน

ให้มุมราบ ABD และ $A'B'D'$ ที่เท่ากันของมุม

สองหน้า ๒ มุม รูป ๒๖—๒๗

จงพิสูจน์ว่า มุมสองหน้า d และ d' เท่ากัน

พิสูจน์ ขนมุมสองหน้า d ขั้ดกับมุมสองหน้า d ให้มุมราบ $A'B'D'$ ขั้ดกับมุมที่เท่ากัน ABD ดังนั้นเมื่อ $B'C' \perp$ กับ $A'B'$ และ $D'B'$ แล้ว (๔๒)

$B'C' \perp$ กับพื้นราบ ABD (ข.น. ๒)

และ $B'C' \perp$ กับพื้นราบ ABD ที่ตรง B ด้วย

$\therefore B'C'$ จะกับตรงลงพอดีกับ BC (ข.น. ๔)

ดังนั้นพื้นราบ $A'B'C'$ กับ ABC มีเส้นรอยตัดกัน AB และ BC รวมกัน จะทับกันสนิท (๔๒)

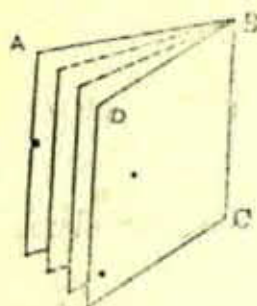
โดยทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า $D'B'C'$ จะทับกันสนิท กับ DBC ดังนั้นมุมสองหน้า d และ d' จะทับกันสนิท จึงเท่ากัน

.จ.ก.พ.

อุประมาณินิเทศที่ ๑๖ มุมสองหน้า ๒ มุม ย่อมมีผลหาร

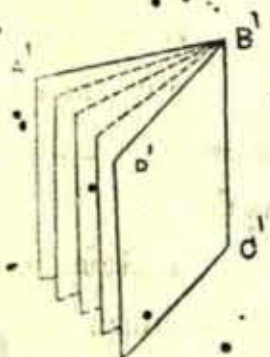
เช่นเดียวกันกับผลหารของมุมราบของมุมสองหน้านั้น

৩১ নং

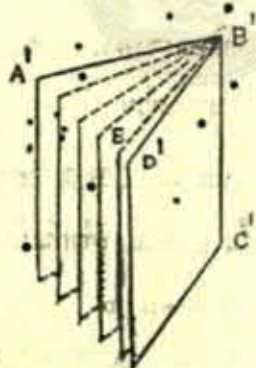


৩২

৩২ নং



৩৩ নং



ให้มุม ๒ หน้า BC และ $B'C'$ กับให้ ABD เป็นมุม
ภายนอกของมุม ๒ หน้า BC และ $A'B'D'$ เป็นมุมภายนอกของ

$B'C'$ รูป ๒๘-๒๘

จงพิสูจน์ว่า $\angle B'C' : \angle BC = \angle A'B'D' : \angle ABD$

พิสูจน์

ชนิดที่ ๑

ถ้ามุม ABD และมุม $A'B'D'$ มีขนาดวัดได้รวม
กันเป็นมุม ABD ขวัญอยู่ m หน และในมุม $A'B'D'$
 n หน

ดังนั้น $\angle A'B'D' : \angle ACB = n : m$

ตามส่วนนี้ ให้เราแบ่งมุม ABD และ $A'B'D'$ ออก
และตรงจุดที่เป็นจุดแบ่งนี้ สร้างพรมายให้ผ่านไปทุก ๆ จุด และ
ให้บรรทัดของมุม ๒ หน้าขึ้นด้วย

พรมายเหล่านี้จะแบ่ง $\angle BC$ ออกเป็น m ส่วน และ
แบ่ง $\angle B'C'$ ออกเป็น n ส่วน เท่ากันเป็นลำดับ (อ.น. ๑๕)

$$\therefore \angle B'C' : \angle BC = n : m$$

$$\therefore \angle B'C' : \angle BC = \angle A'B'D' : \angle ABD$$

(จึง ๘)

ชนิดที่ ๒

ในเมื่อมุมรวมทั้ง ๒ นั้น ไม่มีมาตรวจวัดรวมได้. รูป ๓๐
 พิสูจน์ แบ่ง $\angle ABD$ ออกให้เป็นหลายส่วนเท่า ๆ กันตามความ
 พอใจ แล้วเอาส่วนหนึ่งไปแบ่ง $\angle A'B'D'$ ใต้ก็
 ส่วนแล้วแต่ $A'B'D'$ สามารถจะบรรจุได้ แต่เมื่อ
 $\angle ABD$ และ $\angle A'B'D'$ วัดรวมกันไม่ได้แล้ว
 ส่วนที่วัดออกไปได้และลงตัว ก็จะไปหมดเพียง E ซึ่ง
 ทำให้เกิดมุม $A'B'E$ ขึ้น หมายความว่า $\angle ABD$
 และ $\angle A'B'E$ วัดรวมกันได้ ยังเหลือส่วน $\angle EB'D'$
 ซึ่งต้องเล็กกว่าส่วนหนึ่งที่ใช้แบ่งมานั้น สร้างพรมวหนึ่ง
 ให้บรรจุ $B'E$ และ $B'C'$ เมื่อมุมรวมของมุม ๒ หน้า
 $A-BC-D$ และ $A'-B'C'-E$ ต่างก็วัดรวมกันได้
 $A'-B'C'-E: A-BC-D = \angle A'B'E: \angle ABD$
 (ชนิดที่ ๑) ถ้าเราท้าวจำนวนส่วนจุดที่แบ่ง $\angle ABD$ นั้นให้
 มากขึ้นจนไม่มีที่สิ้นสุด นั่นก็คือลดส่วนที่แบ่งนั้นลงทุก ๆ ที่
 เราก็สามารถทำให้ $\angle EB'D'$ เล็กลงได้ตามความพอใจ
 จนถึงกับให้ลงตัวเล็กกว่า จำนวนส่วใด ๆ ที่เราจะสมมุติ
 ขึ้นให้เล็กสักเพียงใดก็ตาม

ดังนั้น $\angle E'B'D'$ ในขณะที่ส่วนหนึ่งทวนขึ้นก็จะ
 เขียนราคาใกล้ลงไปทุกที ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด และ
 เช่นเดียวกันมุม ๒ น้ $E-B'C'D'$ ก็เขียนราคาใกล้
 ลงไปทุกที ซึ่งเป็นจำนวนพิกัดด้วย (๔๗)

ดังนั้น $\angle A'B'E$ จะเขียนราคาใกล้ลงไปทุกที
 บั $\angle A'B'E$ ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด

และมุม ๒ น้ $A-B'C'E$ ก็เขียนราคาใกล้เข้าไป
 ทุกที $\angle A-B'C'D'$ ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด

∴ จำนวนเปลี่ยนแปลง $\frac{\angle A'B'E}{\angle ABD}$ เขียนราคาใกล้ลงไปทุก

ที $\frac{\angle ABD'}{\angle ABD}$ ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด และจำนวนเปลี่ยนแปลง

$\frac{\angle A-B'C'E}{\angle A-B'C-D}$ เขียนราคาใกล้ลงไปทุกที $\frac{\angle A-B'C-D'}{\angle A-B'C-D}$

ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด แต่ $\frac{\angle A'B'E}{\angle ABD} = \frac{\angle A-B'C'E}{\angle A-B'C-D}$ เสมอ

ในขณะที่ $\angle A'B'E$ เปลี่ยนแปลงราคาไป และเขียน
 ใกล้ $\angle A'B'D'$ ซึ่งเป็นจำนวนพิกัดนั้น (ชนิดที่ ๑)

$$\therefore \frac{\angle A'B'C'D'}{\angle A-BC-D} = \frac{\angle A'B'C'}{\angle ABD} \quad (๔๘)$$

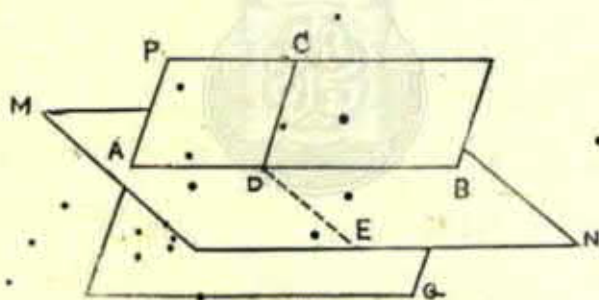
• • • ช. ท. ท.

ข้ออนุมาน โดยอาศัยข้อที่ได้พิสูจน์มาแล้ว เราสามารถจะ

ใช้มุมรอบข้อเมมสองหน้าเป็นมาตรฐานสำหรับวัดมุม ๒ หน้าได้

อุปมาขณินเทศที่ ๑๘ ถ้าพื้นราบ ๒ พื้นราบ ดังได้ฉาก

ซึ่งกันและกัน เส้นตรงเส้น ๑ ซึ่งบนรอยในพื้นราบพื้น ๑ และ
ตั้งได้ฉากกับเส้นรอยตัดกันของพื้นราบทั้ง ๒ นั้น • จะตั้งได้ฉากกับ
อีกพื้นราบ ๑ ด้วย



รูป ๓๑

ให้พื้นราบ MN และ PQ ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน และเส้น
CD ในพื้นราบ PQ ซึ่งตั้งได้ฉากกับเส้นรอยตัดกัน AB ของพื้น
ราบทั้ง ๒ นั้น รูป ๓๑

จึงพิสูจน์ว่า CD ตั้งฉากกับพื้นราบ MN

พิสูจน์ ในพื้นราบ MN ลากเส้น $DE \perp AB$ ที่จุด D

ดังนั้น $\angle EDC$ เป็นมุมฉาก (ข.น. ข.น. ๑๖)

และ $\angle CDA$ ก็เป็นมุมฉากด้วย (ให้)

$\therefore CD \perp$ กับพื้นราบ MN (ข.น. ๒)

ช. ค. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้าพื้นราบ ๒ พื้นราบ ตั้งฉากซึ่งกัน

และกัน เส้นตั้งฉากกับพื้นราบ ๑ ที่สองจุดใด ๆ ก็ตั้งฉากกับเส้นรอยตัดกันของพื้นราบทั้ง ๒ นั้น จะบรรจุอยู่ในพื้นราบอีกพื้น ๑ นั้น

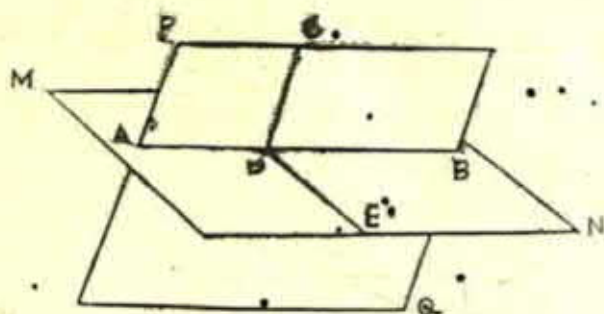
ข้ออนุมานที่ ๒ ถ้าพื้นราบ ๒ พื้นราบ ตั้งฉากซึ่งกัน

และกัน เส้นตั้งฉากกับพื้นราบพื้น ๑ ซึ่งลากจากจุดใดจุดหนึ่งบนพื้นราบอีกพื้น ๑ นั้น จะบรรจุอยู่ในพื้นราบนี้

อุประมาณินิเทศที่ ๑๘ ถ้าเส้นตรงเส้น ๑ ตั้งฉากอยู่กับ

พื้นราบพื้น ๑ ทุก ๆ พื้นราบที่สร้างขึ้นให้บรรจุเส้นตรงเส้นนั้นจะตั้ง

ฉากกับพื้นราบพื้นก่อน



รูป ๓๒

ให้เส้น CD ตั้งฉากกับระนาบ MN ที่จุด D และระนาบ PQ ตั้งฉากกับเส้น AB ที่จุด D ตามเส้น AB
รูป ๓๒

จงพิสูจน์ว่า ระนาบ PQ ตั้งฉากกับระนาบ MN

พิสูจน์ ลากเส้น DE ในระนาบ $MN \perp$ กับ AB

เมื่อ $CD \perp MN$ แล้ว (ให้)

$CD \perp AB$ (๘๒)

$\therefore \angle EDC$ จะเป็นมุมของมุม ๒ หน้า $N-AB-P$

(ขม. ข.น. ๑๖)

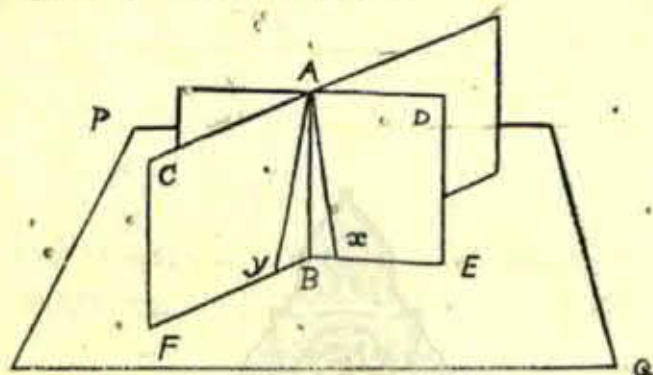
แต่ $\angle EDC$ เป็นมุมฉาก (๘๓)

$\therefore PQ \perp MN$ (๘๑)

จ.ต.ท.

อุปมาณิเทศที่ ๑๘ ถ้ามีพื้นราบที่ตัดกันอยู่ ๒ พื้นราบ

ต่างก็ตั้งได้มากกับพื้นราบอีกพื้น ๑ เส้นรอยตัดระหว่างพื้นราบทั้ง ๒
ก่อนนั้น จะตั้งได้มากกับพื้นราบหลังนี้ด้วย



รูป ๓๓

ให้พื้นราบสองพื้นราบ BC และ BD ซึ่งตัดกันตามเส้น
AB และพื้นราบทั้ง ๒ นี้ ต่างก็ตั้งได้มากกับพื้นราบ PQ

รูป ๓๓

จงพิสูจน์ว่า AB ตั้งได้มากกับพื้นราบ PQ

พิสูจน์ ให้พื้นราบ BC ตั้งกับพื้นราบ PQ ตามเส้น BF
และให้พื้นราบ BD ตั้งกับพื้นราบ PQ ตามเส้น BE
ถ้าหากว่าจากจุดใดจุดหนึ่ง เป็นต้นว่า A บนเส้น AB
ลากเส้น $AX \perp BE$ และเส้น $AY \perp BF$

ดังนั้น AX และ AY ทั้ง ๒ เส้น คงยาวจะตั้งฉาก
กับ PQ (ข.ม. ๑๗)

แต่จะลากเส้นตรงจากจุด A ซึ่งอยู่บนเส้นทแยง PQ มา
ตั้งฉากกับเส้นทแยง PQ เป็น ๒ เส้นไม่ได้ (ข.ม. ๕)

หรือจากจุดใดจุด ๑ ที่อยู่บนเส้นทแยง ก็ลากเส้นตั้ง
ฉากกับเส้นทแยง PQ เป็น ๒ เส้นไม่ได้ (ข.ม. ๔)

$\therefore AX$ และ AY จะต้องเป็นเส้นเดียวกัน แต่
 AX และ AY จะเป็นเส้นเดียวกันได้ก็ต่อเมื่อต่างกับวง
อยู่ในเส้นทแยงทั้ง ๒ นั้น ในขณะเดียวกัน

และทุกจุดก็เป็นจุดร่วมของเส้นทแยงทั้ง ๒ นั้น ก็
อยู่บนเส้น AB (ข.ม. ๑)

$\therefore AX$ และ AY ก็จะต้องเป็นเส้นเดียวกันกับ AB

$\therefore AB$ ตั้งฉากกับเส้นทแยง PQ

พิสูจน์ ตรงจุด O ให้พรมาน EOF ตั้งได้ฉากกับ AO
 ซึ่งเป็นเส้นรอยตัดกันระหว่างพรมาน AD และ AC
 เมื่อ $AO \perp$ กับพรมาน EOF แล้ว
 พรมาน AD, AM และ AC ก็จะต้องตั้งได้ฉากกับ
 พรมาน EOF ด้วย (ข.ม. ๑๘)

จากจุดใดจุด ๑ เช่นจุด P บนเส้นรอยตัดกันระหว่าง
 พรมาน AM และ EOF ลากเส้น $PF \perp OF$
 และ $PE \perp OE$

ดังนั้น PF จะ $\perp AD$ และ PE จะ $\perp AC$ (ข.ม. ๑๗)
 $\therefore PF$ และ PE เป็นระยะจากจุด P ถึงพรมาน AD
 และ AC

และเมื่อ $AO \perp$ กับ OF, OP และ OE แล้ว (๔๓)

OP จะแบ่งครึ่ง $\angle FOE$ (ข.ม. ๑๖)

$\therefore OP$ จะเป็นวิถีของจุด ๆ ๑ ที่มีระยะห่างจาก

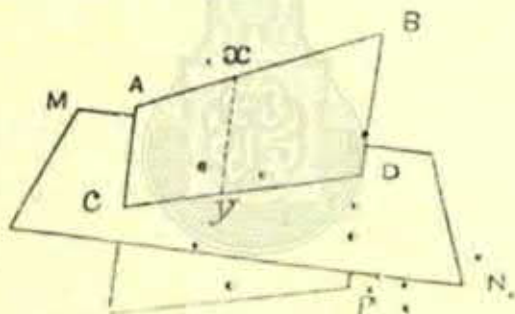
OF และ OE เท่ากันเสมอ (๓๔)

$\therefore AM$ ซึ่งเป็นพรมานที่บรรจุจุด P อยุ่ทั้งหมด จะ

แนวร่วมของจุดที่มีระยะห่างเท่ากันเสมอ จากพื้นราบ AD และ AC

ช. ค. พ.

อุปมาณียะที่ ๒๑ เราจะสร้างพื้นราบให้บรรจบเส้นตรง
เส้น ๑ ซึ่งไม่ตั้งฉากกับพื้นราบอีกพื้น ๑ ที่กำหนดให้ และ
ให้พื้นราบที่สร้างนั้น ตั้งฉากกับพื้นราบที่กำหนดให้ ได้แค่พื้น
ราบเดียวเท่านั้น



รูป ๓๔

ให้เส้นตรงเส้น ๑ AB ที่ไม่ตั้งฉากกับพื้นราบ MN

รูป ๓๕

จึงพิสูจน์ว่า เราสามารถจะสร้างพหุรูปให้บรรจบ AB และให้ตั้งได้
ฉากกับ MN ได้แต่เพียงพหุรูปเดียวเท่านั้น . . .

พิสูจน์ จากจุดใดจุดหนึ่งเช่นจุด X บนเส้น AB ลากเส้น $XY \perp$
กับพหุรูป MN และให้สร้างพหุรูป AP ที่บรรจบเส้น AB
และ XY (๘๒)

พหุรูป $AP \perp$ กับ MN เพราะว่าบนพหุรูปที่บรรจบเส้น XY
ซึ่งตั้งได้ฉากอยู่แล้วกับ MN . (อ.น. ๑๘)

อีกประการ ๑ ถ้าจะมีพหุรูปได้ ๒ พหุรูป ที่
บรรจบ AB และในขณะเดียวกันต่างก็ตั้งได้ฉากกับ MN แล้ว
 AB ซึ่งต้องเป็นเส้นรอยตัดกันระหว่างพหุรูปทั้ง ๒ นั้น ก็จะ
ตั้งได้ฉากกับ MN ด้วย

แต่จะเป็นไปเช่นนั้นไม่ได้ เพราะ AB ไม่ตั้งได้ฉาก
กับ MN . (๒)

ดังนั้น พหุรูปพหุเดียวเท่านั้น ที่อาจสร้างให้บรรจบ AB
และในขณะเดียวกัน ตั้งได้ฉากกับ MN (อ.น. ๑๘).

๔๔) จุดฉายของจุด ๆ ๑ (Projection of a Point)

เงาของเส้น ๆ ๑ ที่ลากจากจุด ๆ ๑ ที่กำหนดให้ มาตั้งได้ฉากกับพื้นฉายพื้น ๑ เรียกว่า จุดฉาย ของจุด ๆ นั้นบนพื้นฉาย

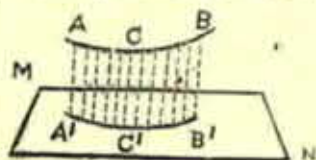
๔๕) เส้นฉายของเส้น ๆ ๑ (Projection of a Line)

วิธีของจุดฉาย ของจุดต่าง ๆ

ของเส้น ๆ ๑ บนพื้นฉายพื้น ๑

นั้น เรียกว่า เส้นฉายของเส้น

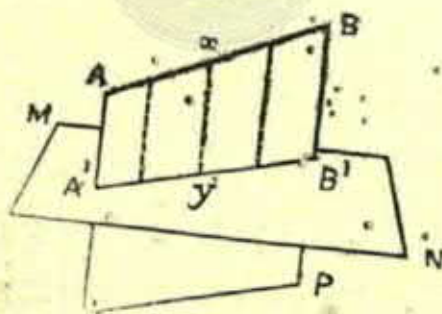
นั้น ๆ บนพื้นฉาย รูป ๓๖



รูป ๓๖

อุประมาณียเทศที่ ๒๒๒ เส้นฉายของเส้นตรงเส้น ๑ ซึ่ง

ไม่ตั้งได้ฉากกับพื้นฉายพื้น ๑ บนพื้นฉายนั้น ย่อมเป็นเส้นตรง



รูป ๓๗

ให้เส้นตรง AB ซึ่งไม่ตั้งฉากกับพื้นราบ MN และ

$A'B'$ เป็นเส้นฉายของเส้น AB บนพื้นราบ MN รูป ๓๘

จงพิสูจน์ว่า $A'B'$ เป็นเส้นตรง

พิสูจน์ จากจุดใดจุด ๑ เช่นจุด X บนเส้น AB ลากเส้น $XY \perp MN$ สี่เหลี่ยม AP ให้บรรจุเส้น AB และ XY (๘๒) พื้นราบ AP จะตั้งฉากกับพื้นราบ MN (อ.น. ๑๘) และพื้นราบ AP จะเป็นพื้นราบที่บรรจุเส้นตรงทั้งหมดที่ลากจากจุดต่าง ๆ บนเส้น AB มาตั้งฉากกับ MN (อ.น. ๑๘) (อ.น. ๑๘)

ดังนั้น $A'B'$ จะต้องเป็นเส้นรอยตัดกัน ระหว่างพื้นราบทั้ง ๒ นี้ คือ AP และ MN ดังนั้น $A'B'$ จึงต้องเป็นเส้นตรง (อ.น. ๑)

ช.ท.พ.

ข้ออนุมาน. เส้นฉายของเส้น ๆ ๑ ซึ่งตั้งฉากกับพื้นราบหนึ่ง ๑ บนพื้นราบนั้น ย่อมเป็นจุด ๆ ๑

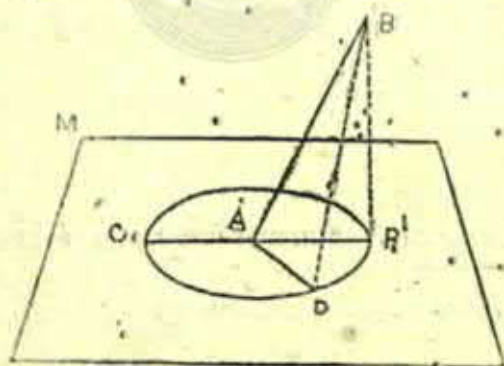
(๘๖) ความเอียงของเส้นตรงเส้น ๑ (Inclination of a line)

มุมระหว่างเส้นเอียงเส้น ๑ กับพื้นราบ คือมุมที่เกิดขึ้นจากเส้น

นั้น กับเส้นฉายของมันเองบนพื้นราบตัดกัน เราเรียกมุมนี้ว่า ความเอียงของเส้นขนานบนพื้นราบ

โดยเหตุนี้เมื่อเส้นตรงกับพื้นราบตัดกัน จึงทำให้เกิดมุมแหลมขึ้นเสมอ เพราะเส้นตรงเส้น ๑ กับเส้นฉายของมันบนพื้นราบเส้น ๑ ย่อมเป็นมุมแหลม ส่วนเส้นที่ตรงได้ฉากหรือขนานกับพื้นราบเส้น ๑ นั้น เราได้เคยเรียนกันมาแล้ว

อุปมาขัณนิเทศที่ ๒๓ มุมแหลมที่เกิดขึ้นระหว่างเส้น ๑ กับเส้นฉายของมันเองบนพื้นราบเส้น ๑ จะเป็นมุมที่เล็กที่สุดกว่ามุมทั้งหลาย ที่อาจเกิดขึ้น จาก เส้นนี้ กับ เส้นอื่นใด ๆ บนพื้นราบเดียวกัน



ให้เส้นตรงเส้น ๑ AB ที่เจาะพินรวม MN ที่ A และให้ AB' เป็นเส้นฉายของเส้น AB บนพินรวม MN' กับ AD เส้นอื่นอีกเส้น ๑ ซึ่งอยู่บนพินรวม MN และผ่านจุด A .

รูป ๓๘

จึงพิสูจน์ว่า $\angle B'AB$ เล็กกว่า $\angle DAB$

พิสูจน์ ตัดเส้น AD ให้เท่ากับ AB' และลากเส้น BB' กับ BD

ดังนั้นในรูปสามเหลี่ยม BAB' กับ BAD

$$AB = AB' ; AB' = AD \quad (\text{สร้าง})$$

$$\text{และ} \quad BB' < BD \quad (\text{อ.น.อ.น. ๕})$$

$$\therefore \angle B'AB < \angle DAB \quad (๒๒)$$

ร. ท. พ.

ให้นักเรียนวินิจฉัยปัญหาต่อไปนี้

ก) เมื่อ $\angle B'AB$ เป็นมุมที่เล็กที่สุด ที่เกิดขึ้นจาก

AD กับเส้นใด ๆ บนพินรวมนั้น มุม BAC จะเป็นมุมชนิดใด

ถ้าเปรียบกับมุมอื่นที่ AB ตัดกับเส้นอื่น ๆ บนพินรวมนั้น

ข) ถ้า AB ขนานกับพินรวม จะหมายความว่าอะไร

สำหรับข้อประณินเทศอื่น ?

ก) ถ้า AB ตั้งฉากกับพื้นราบ จะหมายความว่า
อะไร สำหรับอุปมาขี้นี้เทศข้อนี้ ?

ง) ในขณะที่เมื่อ AD เคลื่อนตัวออกจาก AB' และหมุน
ไปจนกว่าจะถึง AC นั้น มุม DAB มีอาการเปลี่ยนแปลงอย่าง
ไร ?

แบบฝึกหัดที่ ๕

๑. พื้นราบ ๑ ตั้งฉากกับด้านของมุม ๒ นำ มุม ๑
ย่อมตั้งฉากกับด้านทั้ง ๒ ของมุมนั้นด้วย

๒. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตั้งฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง
จะมีพื้นราบใดพื้นราบหนึ่ง ที่บรรจุเส้นตรงที่หนึ่งอยู่นั้น ตั้งฉาก
กับเส้นที่ ๒ บ้างหรือไม่ ? ให้พิสูจน์มาด้วย

แบบฝึกหัดที่ ๖

๑. ให้อธิบายว่า เส้นตรงเส้น ๑ AB จะต้องมียกทาง
หรือลักษณะอย่างไรกัน กับพื้นราบพื้น ๑ ที่กำหนดให้ ถ้าสมว่า
เส้นฉายของเส้นตรงบนพื้นราบนั้น ยาวเท่ากันพอดีกับเส้นตรง ?

๒. จากจุด ๆ ๑ A ซึ่งมีระยะห่าง ๔ ซม. จากพื้นราบ MN ตากเส้นเซนซันเส้น ๑ AC ยาว ๕ ซม. จุดพื้นราบนั้น แล้วหมุนเส้นไปให้รอบเส้น AB ซึ่งเป็นเส้นที่ลากมาจากจุด A นั้น คงได้ฉากกับพื้นราบ จงหาพื้นที่ของวงกลม บนพื้นราบที่ปลายเส้น AC คือ จุด C นั้นได้ลากไปบนพื้นราบ MN

๓. จากจุด ๆ ๑ A ห่างจากพื้นราบ MN ๘ ซม. ตากเส้นตรง AB ลงมาให้ตั้งได้ฉากกับพื้นราบ โดยอาศัยรัศมี B เป็นศูนย์กลาง และให้รัศมียาว ๖ ซม. เขียนวงกลมขึ้นบนพื้นราบนั้น ที่จุดใดจุด ๑ C บนเส้นรอบวงนั้น ตากเส้น CD ตั้งฉากกับเส้น ๑ ให้ยาว ๒๔ ซม. จงหาระยะจาก A ถึง D

๔. จากจุด ๆ ๑ ที่กำหนดให้ในข้อพื้นราบ ตากเส้นตรงที่เท่ากันมายังพื้นราบ มีจุดเกิดขึ้นระหว่างเส้นตรงและพื้นราบนั้น คือจุดความเอียงของเส้นเหล่านี้ บ่อยเท่ากัน

๕. ถ้าเส้นตรง ๓ เส้นเท่ากัน ต่างก็ลากมาจากจุด ๆ ๑ ที่กำหนดให้ นกพื้นราบ มายังพื้นราบหนึ่งที่กำหนดให้ และถ้าลากอีกเส้น ๑ จากจุดนั้น ให้มาตั้งได้ฉากกับพื้นราบ จุดเชิงของเส้นตั้งได้ฉากนั้น จะเป็นศูนย์กลางของวงกลม ที่ล้อมรอบภายนอก

รูป ๓ เหลี่ยม $\triangle ABC$ ที่เกิดขึ้นจากจุดเชิงตั้ง ๓ ของเส้นตรงที่ลากมาบน
 พนราบนั้น

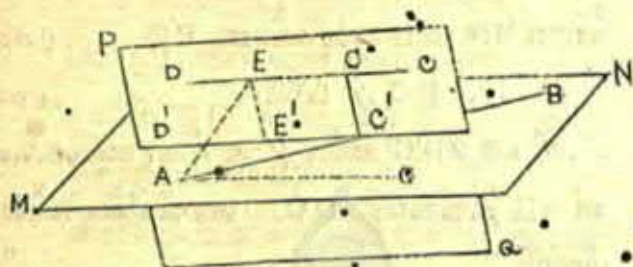
๖. เส้นตรง ๓ เส้นที่ไม่อยู่ในพื้นราบอันเดียวกัน มาตัด
 กันที่จุด ๆ ๑ จะต้องลากเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง โดยทำนองอย่าง
 ไฉนจึงจะให้เส้นตรงนี้ ทำมุมกับเส้นตรงก่อนทั้ง ๓ เท่ากันทุกมุม ?

๗. จากจุด ๆ ๑ P ลากเส้นตรง ๒ เส้น PX และ PY
 ซึ่งต่างก็ไปตัดได้ฉากกับพื้นราบ ๒ พื้นราบ MN และ AC ที่คัต
 กันตามเส้น AB จากจุด Y ลากเส้นตรง YZ ไปให้ตั้งได้ฉากกับ
 พื้นราบ MN จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง XZ ตั้งได้ฉากกับเส้น AB

๘. ถ้าเงาของต้นไม้ต้นหนึ่ง ที่ตั้งตรงอยู่บนพื้นดินที่ราบ
 แห้ง ๑ ยาวกว่าความสูงของต้นไม้ต้นนั้น มุมที่ดวงอาทิตย์สูงขึ้นไป
 จากพื้นระดับนั้น ย่อมเล็กกว่ามุมใดที่เราทราบอยู่แล้ว

๙. จงหาวิถีของจุด ๆ ๑ ที่ห่างจากพื้นราบ ๑ ที่
 กำหนดให้เท่ากับที่กำหนดให้เสมอ และในขณะเดียวกัน ห่างจาก
 จุดอีก ๒ จุด ที่กำหนดให้ ที่ไม่อยู่ในพื้นราบนั้น เป็นระยะเท่ากัน
 เสมอด้วย

อุประมาณิเทศที่ ๒๔ ระหว่างเส้น ๒ เส้นที่ไม่อยู่ในพื้นราบ
 อันเดียวกัน จะมีเส้นตั้งได้ฉากร่วมนับกับเส้นทั้ง ๒ นั้นแค่เพียงเส้นเดียว



รูป ๓๙

ให้เส้นตรง AB และ CD ๒ เส้น ที่ไม่อยู่ในพื้นราบ
 อันเดียวกัน รูป ๓๙

จงพิสูจน์ว่า จะมีเส้นตั้งได้ฉากร่วมนับระหว่าง AB และ CD แค่
 เพียงเส้นเดียว

พิสูจน์ จากจุดใดจุดหนึ่ง A บนเส้น AB ตากเส้น $AG \parallel DC$
 ให้พื้นราบ MN เป็นพื้นราบที่บรรจุ AB และ AG ใน
 ฐานะเดียวกัน (๘๒)

ดังนั้นพื้นราบ $MN \parallel$ กับเส้น CD (อ.น. ๘)

สร้างพื้นราบ PQ ให้บรรจุเส้น CD และตั้งได้ฉากกับ MN

(อ.น. ๒๑)

ดังนั้น DC จะไม่ตัดกับ $D'C'$ เลย เพราะขนานกับ
พื้นราบ MN และบรรจุอยู่ในพื้นราบ PQ (๗๙)

$\therefore DC \parallel D'C'$ (๑๗)

$\therefore$ ถ้า $AB \parallel D'C'$ จะต้อง $\parallel DC$ ด้วย (อน. ๒. อ.น. ๗)

แต่ AB ไม่ขนานกับ DC เพราะไม่ได้อยู่ในพื้นราบ
เดียวกัน (ให้)

$\therefore$ AB ต้องตัดกันกับ $D'C'$ ที่ตรงจุดใดจุด ๑
เป็นต้นว่า O'

ลากเส้น $C'O' \perp$ กับพื้นราบ MN ดังนั้น $C'O' \perp$ กับ
AB และ $D'C'$ (๘๓)

และเมื่อ $C'O' \perp$ กับ $D'C'$ และบรรจุอยู่ในพื้นราบ PQ
แล้ว (อน. ๑. อ.น. ๑๗)

$\therefore C'O' \perp DC$ (๒๐)

ดังนั้น เส้นตั้งใดฉากทั่วๆ ไปจะมีเส้น ๑ ยังจะต้องพิสูจน์
ว่าจะไม่มีเส้นอื่นอีกนอกจากเส้นนี้ ถ้าสมมุติว่าให้เกิดมีขึ้น

ได้ ออกเส้น ๑ เป็นคนว่า EA ซึ่งตั้งได้ฉากในขณะ
เดียวกันกับ AB และ CD ।

ถ้าตั้ง EA จะตั้งได้ฉากกับ AG (๒๐)
และ EA จะตั้งได้ฉากกับพื้นราบ MN (อ.น. ๒)
จากเส้น EE' ตั้งได้ฉากกับ C'D' ดังนั้น EE' จะตั้ง
ได้ฉากกับพื้นราบ MN (อ.น. ๑๗)

แต่ข้อนี้แบบไปไม่ได้ เมื่อ EA ตั้งได้ฉากอยู่กับพื้นราบ
MN แล้ว (อ.น. ๕)

ดังนั้นการที่สมมติว่า ให้มีเส้นตั้งได้ฉากระหว่างเส้น
ทั้ง ๒ ที่กำหนดให้ ข้อนอกเส้น ๑ นั้น เป็นข้อที่แบบไปไม่ได้

โดยเหตุนี้จึงบอกได้ว่า ระหว่างเส้น ๒ เส้นที่ไม่อยู่
ในพื้นราบอันเดียวกัน จะมีเส้นตั้งได้ฉากรวมแค่เพียง
เส้นเดียวเท่านั้น คือ C'C

ช. ต. พ.

ข้ออนุมาน เส้นตั้งได้ฉากระหว่างเส้น ๒ เส้นที่ไม่
อยู่ในพื้นราบเดียวกันนั้น จะเป็นเส้นที่ตั้งฉาก ระหว่าง
เส้นทั้งหลาย ที่จะลากฉากเส้นทั้ง ๒ นั้น

๑. เส้นฉายของเส้นตรงที่ขนานกัน บนพื้นราบ P ๑

ย่อมขนานกันด้วย

๒. ถ้าพื้นราบ 2 พื้นราบ ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

เส้นใดเส้น 1 ที่ตั้งฉากกับพื้นราบ 1 ของทั้ง 2 นั้น จะมี

ลักษณะเกี่ยวข้องอย่างไร กับอีกพื้นราบ 1 ?

๓. ถ้าเส้นตรง 3 เส้นที่ต่างก็ผ่านมายังจุด P ที่กำหนดให้

ต้องถูกตัดออกด้วยเส้นตรงที่เส้น 1 ที่ไม่ได้ผ่านมายังจุด P นั้น

เส้นตรงทั้ง 3 นั้น ต่างก็จะบรรจุอยู่ในพื้นราบอันเดียวกัน

๔. เส้นตรง 4 เส้น ซึ่งไม่มี 3 เส้นใด ๆ ที่บรรจุอยู่ใน

พื้นราบอันเดียวกันเลย ต่างก็ผ่านมายังจุด ๆ เดียวกัน เส้นตรง

เหล่านั้นทั้งสี่ จะกำหนดพื้นราบใด ก็พื้นราบ ?

๕๗) มุมหลายหน้า (Polyhedral Angle) ที่วางระหวาง

พื้นราบ แต่ 3 พื้นราบขึ้นไป ซึ่งมาตัดรวมกันที่จุด 1 นั้น เรียก

ว่ามุมหลายหน้า คือรวมที่พบรวม
ทั้งหลายมาคิดรวมกันนั้น

V เรียกว่ายอดของมุมหลายหน้า

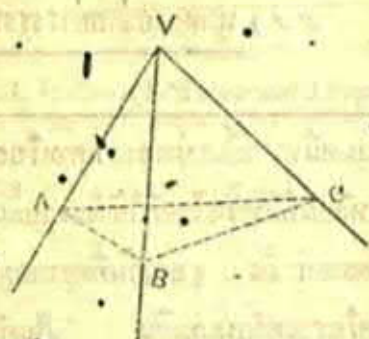
เส้นรอยตัดกันระหว่างพื้นราบ ๒

พื้นราบเช่น VA, VB ฯลฯ

เรียกว่า ด้าน ส่วนของพื้นราบที่

อยู่ในระหว่างด้านนั้นเรียกว่า หน้า และมุมที่เกิดขึ้นจากด้านที่อยู่เคียงกัน
๒ ด้านนั้นตัดกันเรียกว่า มุมของหน้า

ทุก ๆ ด้านที่เคียงกันนั้น ย่อมทำให้เกิดมุมของหน้าขึ้นมุมหนึ่ง
และทุก ๆ ด้านที่อยู่เคียงกัน ทำให้เกิดมุมของหน้าขึ้นมุมหนึ่งด้วย
มุมของหน้าและมุมของหน้า ๒ นั้นเป็นส่วนของมุมหลายหน้า



รูป ๔๐

๔๔) ขนาดของมุมหลายหน้า (Size of a Polyhedral

Angle) ขนาดของมุมหลายหน้าจะใหญ่หรือเล็กเพียงใดนั้น ย่อม
แล้วแต่ค่าแห่งที่ของหน้าต่าง ๆ ซึ่งเป็นการที่ไม่เกี่ยวข้องกับแวกความ
กว้างใหญ่ของหน้าต่าง ๆ เหล่านั้น

๕๕) มุมหลายหน้าอย่างขรรคคาหรืออย่างมุมเกิน (Convex

and Concave Polyhedral Angle) เราจะเรียกมุมหลายหน้า

มุมหนึ่ง เป็นอย่างขรรคคาหรืออย่างมุมเกินนั้น ก็แล้วแต่ว่า รูป
 เหลี่ยมที่เกิดขึ้นโดยที่ใส่ พนราบพนหนึ่ง มาตัดกันทุกด้านของมุม
 หลายหน้านั้น (ยกเว้นที่ตรงยอดมุม) จะเป็นรูปเหลี่ยมขรรคคา
 หรือรูปเหลี่ยมมุมเกิน ในคำรวเด้นนั้นจะได้กล่าวถึงมุมหลายหน้า
 อย่างขรรคคาทั้งต้น

๑๐๐) ชนิดของมุมหลายหน้า (Classes of Polyhedral

Angle) เราอาจเรียกจำแนกมุมหลายหน้าออกไปได้อีก โดย

อาศัยวิธีใช้น้ำของมุมเป็นหลัก คือมุมที่มีแค่เพียงด้านหน้า เราก็เรียก
 ว่ามุมด้านหน้า และด้านี่ด้านหน้า เราก็เรียกว่า มุมด้านหน้า ดังนั้นต่อไป

เราใช้บอกมุมหลายหน้า โดยอาศัยขอบอกอักษรที่ประจำอยู่บน
 ยอดมุม หรือมีคณนั้นใช้บอกอักษรที่ประจำบนยอดมุมนั้น กับที่ประจำ

อยู่ตามหน้าค่าง ๆ ตามลำดับ เช่นในรูป ๔๐ มุมด้านหน้านั้น เราเรียก
 ว่ามุม V หรือมุม V-ABC ถ้าเป็นมุมด้านหน้า เราก็ใช้บอกว่า

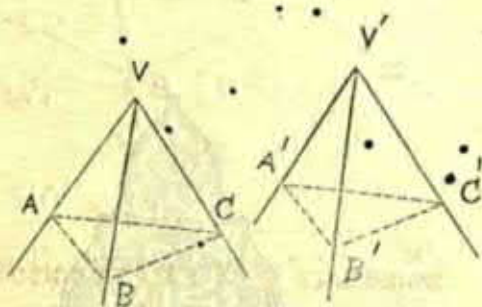
มุม V หรือมุม V-ABCD

๑๐๑) มุมหลายหน้าเท่ากัน (Equal Polyhedral Angle)

ถ้าส่วนต่าง ๆ ของมุมหลายหน้ามุมหนึ่ง เท่ากันเป็นลำดับ โดย
ทำนองเดียวกัน กับส่วนต่าง ๆ ของมุมหลายหน้าอีกมุมหนึ่งแล้ว
มุมหลายหน้าทั้ง ๒ นี้เรียกว่าเท่ากัน

เช่นในรูป ๔๑

ถ้าสมมุติให้ส่วน
ต่าง ๆ เท่ากัน
เป็นลำดับ โดย
ทำนองเดียวกัน
แล้วก็เรียกว่า



รูป ๔๑

เท่ากัน . . . มุมหลายหน้าทั้งหลายที่เท่ากัน เราอาจกล่าว
ทับถมให้สนิทกันได้

อุปมาขณิกเทศที่ ๒๕ ในมุมสามหน้ามุมหนึ่ง ผลบวกของ
มุมของหน้า ๒ มุมใด ๆ ย่อมใหญ่กว่ามุมของหน้าที่ ๓ ที่เหลืออยู่

ตั้งมุมเมื่อ

$$AV = AV$$

$$VD = VB$$

และ $\angle AVD = \angle AVB$

$$\therefore \triangle AVD \text{ เหมือนกับ } \triangle AVB \quad (๑๐)$$

$$\therefore AD = AB \quad (๑๑)$$

ใน $\triangle ABC$, $AB + BC > AC \quad (๑๒)$

แต่เมื่อ $AB = AD$

$$\therefore BC > DC$$

ใน $\triangle BVC$ และ $\triangle DVC$,

$$VC = VC \text{ และ } VB = VD$$

แต่ $BC > DC$

$$\therefore \angle BVC \text{ ใหญ่กว่า } \angle DVC \quad (๑๓)$$

$$\therefore \angle AVB + \angle BVC \text{ ใหญ่กว่า } \angle AVD + \angle DVC$$

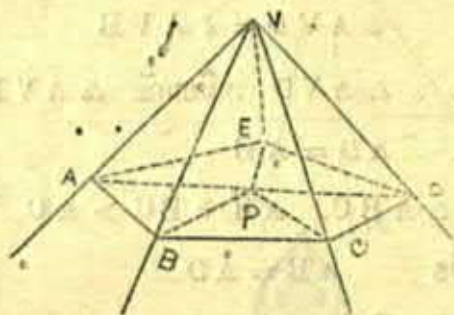
แต่ $\angle AVD + \angle DVC = \angle AVC$

$$\therefore \angle AVB + \angle BVC \text{ ใหญ่กว่า } \angle AVC$$

$$\therefore \angle XZY + \angle YVZ \text{ ใหญ่กว่า } \angle XVZ$$

อุปมาขณิกเทศที่ ๒๖ แดบวกรของมุมของหน้าทั้งหมด ของมุม

หลายหน้ารวมกันใด ๆ น้อยกว่า α มุมฉากเสมอ



รูป ๔๓

ให้ V เป็นมุมหลายหน้ารวมตามหนึ่ง และทุก ๆ ด้าน
ของมุมนี้ ต่างก็ถูกคั่นออกด้วยเส้นรอบพหุหนึ่ง ตามจุด

A, B, C, D, E. รูป ๔๓

จึงพิสูจน์ว่า $\angle AVB + \angle BVC \dots$ น้อยกว่า α มุมฉาก

พิสูจน์ จากจุดใดจุดหนึ่ง P ภายในรูปเหลี่ยม

ลากเส้น PA, PB, PC, PD, PE

จำนวนของรูปสามเหลี่ยม ที่ต่างกันมีรวมกันอยู่ที่

จุด P นั้น เท่ากันกับจำนวนของรูปสามเหลี่ยม ที่ต่าง

กันมียอดรวมกันอยู่ที่จุด V

ดังนั้นผลบวกของมุมทั้งหมด ของด้านเหลี่ยมทุกรูป

ที่มียอดมุมรวมกันอยู่ทีจุด V นั้นเท่ากับผลบวกของมุม
ทั้งหมดของด้านเหลี่ยมทุกรูป ที่มียอดมุมรวมกันอยู่ทีจุด P

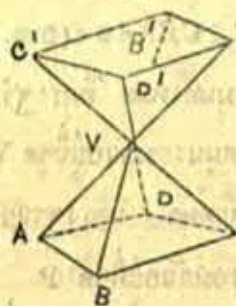
แต่ในมุมด้านหน้าต่าง ๆ ที่มียอดมุมอยู่ทีจุด A, B, C
ว่าถ้านั้น เป็นดังนี้ $\angle EAV + \angle BAV$ ใหญ่กว่า $\angle BAE$
 $\angle VBA + \angle CBV$ ใหญ่กว่า $\angle CBA$ ฯลฯ (อ.น. ๒๕)

เมื่อเป็นดังนี้แล้ว ผลบวกของมุมทั้งหมด ที่ตั้งฐานของ
รูปด้านเหลี่ยมทุกรูป ที่มียอดมุมรวมกันอยู่ทีจุด V นั้น
ก็ย่อมใหญ่กว่าผลบวกของมุมทั้งหมด ที่ตั้งฐานของรูป
ด้านเหลี่ยมทุกรูป ที่มียอดมุมรวมกันอยู่ทีจุด P

เมื่อเป็นเช่นนั้น ผลบวกของมุมที่มียอดรวมกันอยู่ทีจุด
V นั้น (ซึ่งเป็นมุมของหน้าทั้งหมดของมุมหลายหน้า V)
จะน้อยกว่าผลบวกของมุมที่มียอดรวมกันอยู่ทีจุด P

แต่มุมทั้งหมดรอบจุด P นั้น เท่ากับ ๔ มุมฉาก (๒)
ดังนั้นผลบวกของมุมของหน้าทั้งหมดของมุมหลายหน้า V จึง
น้อยกว่า ๔ มุมฉาก

๑๐๒) มุมหลายหน้า ซิมเมตริก (Symmetric Polyhedral Angles) ถ้าเราขยายหน้าของมุมหลายหน้า $V-ABCD$ โดยที่ระนาบให้เลยออกไปทางยอดมุม V แล้ว จะทำให้เกิดมุมหลายหน้า $V-A'B'C'D'$ ซิมเมตริกมุมหนึ่ง ที่เรียกว่าซิมเมตริกกับมุม $V-ABCD$. รูป ๔๔



รูป ๔๔



รูป ๔๕

ตามในรูปนี้ มุมของหน้า $AVB, BVC, \dots$ ฯลฯ ต่างก็เท่ากันเป็นลำดับกับมุมของหน้า $A'VB, B'VC, \dots$ ฯลฯ ฯลฯ โดย (๑๑)

ทั้งมุมสองหน้า $VA, VB, \dots$ ฯลฯ ต่างก็เท่ากันเป็นลำดับกับมุมสองหน้า $VA', VB', \dots$ ฯลฯ ด้วย (โดยอาศัยแบบฝึกหัดในข้อ ๙๓) รูป ๔๕ แสดงให้เห็นมุมสองหน้าที่ตรงข้ามกัน

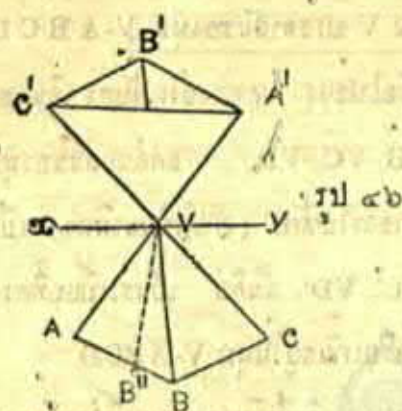
ถ้าเรามองไปจากยอดมุม V บรรทัดันของมุม $V-A B C D$ จะเรียงเป็นลำดับกันไปจากซ้ายไปขวา (ตรงข้ามกับทางเดินของ เข็ม นาฬิกา) คือ VA, VB, VC, VD แต่ส่วนด้านของมุม $V-A'B'C'D'$ จะเรียงกันจากขวาไปซ้าย (ตามเข็มนาฬิกา) เป็น ลำดับไปถึง VA', VB', VC', VD' นั่นคือ เป็นระเบียบที่ตรง ข้ามกันกับระเบียบของด้าน ที่เรียงกันอยู่ในมุม $V-A B C D$

ดังนั้น มุมหลายหน้า ๒ มุม ที่เป็นซิมเมตริกจะมีด้านต่าง ๆ เท่ากันทุกส่วนต่อส่วน แต่เรียงเป็นลำดับกันไปทางตรงข้าม

๑๐๓) มุมหลายหน้า ซิมคทีเป็นซิมเมตริกกัน จะวางซ้อนกัน

ไม่สนิท

ตามขรรวมคามุมซิมคที ๒ มุม จะวางซ้อนกัน ให้แนบสนิท ไม่ได้ คือถ้าตามรูป ๔๖. มุมสองหน้า $V-A'B'C'$ เราหมุมให้ตัว

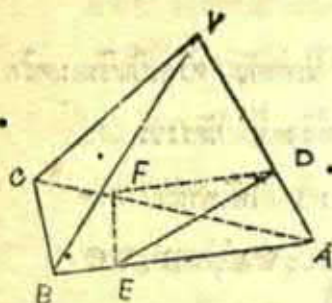


ลงมาจนได้ ๑๘๐° โดย
ใช้เส้น XY เป็นแกนหมุน
ซึ่ง XY เป็นเส้นที่แบ่งครึ่ง
มุม CVA' ดังนั้น VA'
จะมาทับเส้น VC, VC' จะ
ทับ VA และนำ A'VC'
ทับ AVC ทั้งนี้ได้แนบสนิท

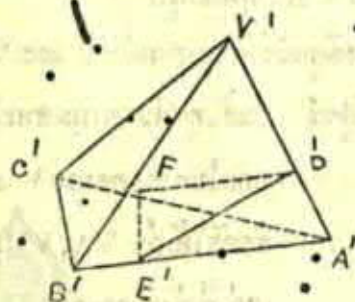
แต่มุมของนำ VA ซึ่งย่อมเท่ากับมุมของนำ VA' นั้น ตามธรรมชาติ
ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ VC เมื่อเป็นเช่นนั้น นำ A'VB' จะไม่ทับ
กันกับ BVC และเพราะโดยเหตุเดียวกัน นำ C'VB' ก็จะไม่ทับ
นำ AVB ดังนั้นเส้น VB' จึงมาตกอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง เป็น
เส้นนำ VB'' ซึ่งไม่ทับกันกับ VB โดยเหตุนี้ มุมตามนำทั้ง ๒ นั้น
จึงไม่ซ้อนกันสนิท

ตัวอย่างที่จะเห็นได้ง่ายในเรื่องนี้ ให้นำกิ่งตุงมือคู่หนึ่ง ทุกส่วน
ของตุงข้างหนึ่ง ย่อมเท่ากับทุกส่วนที่ตรงกันของอีกข้างหนึ่ง แต่
กิ่งมือข้างขวา จะสวมเข้าไปให้ซ้อนกันแนบสนิทกับข้างซ้ายไม่ได้

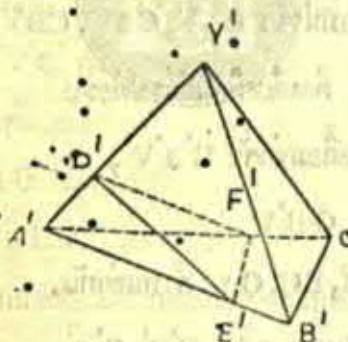
อุประมาณิเทศที่ ๒๖ มุมสามหน้า ๒ มุม จะเท่ากันหรือเป็น
 ซิมเมตริก ถ้ามุมทั้ง ๒ นั้นต่างก็มีมุมของหน้าทั้ง ๓ เท่ากันมุมก่อนมุม



รูป ๔๖



รูป ๔๖ ก



รูป ๔๖ ข

ให้มุมด้านหน้า V และ V' ที่มีมุมของหน้า BVA, CVA, CVB . ต่างก็เท่ากับมุมของหน้า $B'V'A', C'V'A', C'V'B'$. มุมต่อมุม

จึงพิสูจน์ว่า มุมด้านหน้า V และ V' นี้เท่ากัน หรือเป็นซิมเมตริก
พิสูจน์ บนเส้นทุกเส้นของมุมด้านหน้าทั้ง ๒ นี้ วัฏระยะ

ออกไปจากยอดมุม V และ V' ให้เท่ากัน

ก็ตัดได้ให้เส้น $VA, VB, VC, VA', VB', VC'$

เหล่านี้นี้เท่ากันทุกเส้น

ลากเส้น $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A'$

สามเหลี่ยมหน้าจั่ว BAV, CAV, CBV

ทั้ง ๓ นี้ ต่างก็เหมือนกันรูปต่อรูป

กับสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $B'A'V',$

$C'A'V', C'B'V'$. (๑๐)

$\therefore AB, BC, CA$ ต่างก็เท่ากัน

เส้นต่อเส้นกับ $A'B', B'C', C'A'$ (๑๑)

$\therefore \triangle BCA$ เหมือนกับ $\triangle B'C'A'$ (๑๓)

จากจุดใดจุดหนึ่ง D บนเส้น VA

ลากเส้น DE บนหน้า AVB และเส้น DF บนหน้า

AVC ทั้งสองเส้นนี้ต่างก็ให้ตั้งฉากกับ VA

เส้นทั้งสองนี้ต่างก็จะไปตัดกับ AB

และ AC เส้นค่อเส้น (เพราะมุม VAB

และ VAC ต่างก็เป็นมุมแหลมทั้งคู่ โดยที่เป็นมุมที่ฐาน

ของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ลากเส้น EF

บนเส้น A'V' ตัดเส้น A'D' ให้เท่ากับ AD

ลากเส้น D'E' บนหน้า A'V'B' และเส้น D'F'

บนหน้า A'V'C' ทั้ง ๒ เส้นนี้ต่างก็ให้ $\perp$ กับ V'A'

จากเส้น E'F'

ดังนั้น $AD' = A'D'$ (สร้าง)

และ $\angle DAE = \angle D'A'E'$ (๕)

$\therefore \triangle$ มุมฉาก ADE เหมือนกับ $\triangle$ มุมฉาก A'D'E' (๑๒)

$\therefore AE = A'E'$ และ $DE = D'E'$ (๕)

โดยทำนองเดียวกัน $AF = A'F'$ และ $DF = D'F'$

หนึ่งได้พิสูจน์มาแล้วว่า

$\triangle BAC$ เหมือนกับ $\triangle B'A'C'$

$$\therefore \angle CAB = \angle C'A'B' \quad (๙)$$

$\therefore \triangle AFE$ เหมือนกับ $\triangle A'F'E'$ (๑๐)

$$\therefore EF = E'F'$$

$\therefore \triangle EDF$ เหมือนกับ $\triangle E'D'F'$ (๑๓)

$$\therefore \angle FDE = \angle F'D'E' \quad (๙)$$

$\therefore$ มุมตรงหน้า $VA =$ มุมตรงหน้า $V'A'$ (อนุ. น. ๑๖)

(เพราะ $\angle FDE$ และ $\angle F'D'E'$ ซึ่งเป็นมุมราบ

และเป็นมุมตรงของมุมทั้ง ๒ นั้นเท่ากัน)

โดยทำนองเดียวกันกับที่ได้พิสูจน์มาแล้วว่า

สามารถที่จะพิสูจน์ได้ชื่อว่า มุมตรงหน้า VB

และ VC ต่างก็เท่ากับมุมคู่มุมกับมุมตรงหน้า $V'B', V'C'$.

$\therefore$ มุมสามหน้า V และ V' จึงเท่ากัน โดย (๑๐๑)

หรือมีเงื่อนไขเป็นสามเมตริก (๑๐๒)

หมายเหตุ ตามที่ได้อธิบายมาแล้วทั้งนี้ จะหมายถึงรูป ๔๘ ก.
หรือรูป ๔๘ ข. ก็ได้ ถ้าหมายถึงรูปใดรูปหนึ่ง มุมด้านหน้าทั้ง ๒ V
และ V' ก็เท่ากัน ถ้าหมายถึงรูปที่ ๓ ก็เป็นซิมเมตริก

ข้ออนุมาน ถ้ามุมด้านหน้า ๒ มุม มีมุมของหน้าทั้ง ๓ ของมุม
หนึ่ง ต่างก็เท่ากันมุมต่อมุม กับมุมของหน้าทั้ง ๓ ของอีกมุมหนึ่ง
จะมีมุมของหน้าทั้ง ๓ ของรูปหนึ่งเท่ากับมุมต่อมุมกับมุมของหน้าทั้ง ๓
ของอีกรูปหนึ่งด้วย

(เพราะว่าเมื่อมุมด้านหน้าทั้ง ๒ เป็นไปตามที่กล่าวไว้ในข้ออนุมาน
ตอนต้น ก็แปลว่าเท่ากัน หรือเป็นซิมเมตริกจากยอดมุม ดังนั้นก็
ย่อมมีมุมของหน้าเท่ากันเป็นลำดับด้วยโดยอาศัยข้อ ๑๕๐ และ ๑๕๓)

แบบฝึกหัดที่ ๘

๑. จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ในที่ว่างที่มีทั้งด้านขนาด ที่มี
ลักษณะห่างจากเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน เป็นระยะเท่ากันเสมอ
๒. จงหาวิถีของจุดหนึ่ง ที่ต้องห่างจากจุดอื่น ๔ จุด ที่ไม่อยู่ใน
พื้นราบอันเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน

๓. มุมต้องนำ ๒ มุมที่มีด้านขนานกัน และนำของมุมต่างก็ตั้งได้
ฉากซึ่งกันและกัน ย่อมเท่ากัน หรือมีค่านึงก็เป็นคู่สมมูล

๔. เส้นฉากบนพหุรูปหนึ่ง ของเส้นตรงที่เท่าและขนานกัน
ย่อมเท่าและขนานกันด้วย

๕. มุมด้านหน้า ๒ มุมย่อมเท่ากัน เมื่อมีมุมต้องนำ ๒ มุม และ
มุมของนำที่อยู่ระหว่างนั้น ของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง ต่างก็เท่ากัน
เป็นลำดับ และมีตำแหน่งที่เป็นลำดับเดียวกัน กับมุมต้องนำ ๒ มุม
และมุมของนำที่อยู่ระหว่างนั้นของอีกมุมด้านหน้าหนึ่ง

๖. มุมด้านหน้า ๒ มุมย่อมเท่ากัน เมื่อมีมุมของนำ ๒ มุม และ
มุมของนำที่อยู่ระหว่างนั้น ของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง ต่างก็เท่ากัน
เป็นลำดับและมีตำแหน่งที่เป็นลำดับเดียวกัน กับมุมของนำ ๒ มุม
และมุมของนำที่อยู่ระหว่างนั้นของอีกมุมด้านหน้าหนึ่ง

๗. ถ้ามุมของนำ ๒ มุมของมุมด้านหน้ามุมหนึ่งเท่ากัน มุมของ
นำที่ตรงข้าม กับมุมของนำที่ ๒ นั้น ย่อมเท่ากันด้วย

๘. จงหาว่าของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่างจากด้านทั้ง ๓
ของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง เป็นระยะที่เท่ากันเสมอ

๙. จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีระยะห่างจากหน้าทั้ง ๓ ของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง เป็นระยะที่เท่ากันเสมอ
๑๐. พนราบทั้ง ๓ ที่แบ่งครึ่งมุมต้องไปทุกมุม ของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง ย่อมไปตัดร่วมกันเป็นเส้นเดียว

แบบฝึกหัดที่ ๙

โจทย์ในการคำนวณ

๑. จากจุด ๆ หนึ่ง P ที่มีระยะห่างจากพนราบพนหนึ่ง ๔ ซม. หากเดินตรง PX มาถึงพนราบนั้น จดพนราบที่ X . ถ้า PX ยาว ๕ ซม. วิถีของ X บนพนราบนั้น ที่ต้องห่างจาก P เท่ากันเสมอ จะยาวเท่าไร ?

๒. จากจุด ๆ หนึ่ง P ที่มีระยะห่างจากพนราบพนหนึ่ง ๕ ซม. หากเดินตรง PX มาถึงพนราบนั้น จดพนราบที่ X . ถ้า PX ยาว ๑๒ ซม. พนที่ไปพนราบที่มีระยะขอบเขต เป็นวิถีของจุด X นั้น มีเท่าไร ?

๓. ฐาน AB ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ในพนราบ MN ยาว ๖ ซม. และเส้นขอบเขตของรูปสามเหลี่ยมนั้น ยาว ๒๐ ซม.

ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมมนไปรอบตัว โดยเอาฐาน AB เป็นแกนหมุน
ระยะที่สุด C ห่างที่สุดจากพื้นราบ MN นั้นเป็นเท่าไร ?

๔. จุด ๒ จุด A และ B ห่างจากกันเป็นระยะ ๔ ซม. จุด
อีกจุดหนึ่งเคลื่อนที่ไป แต่ทรงตัวให้ห่างจากจุดทั้ง ๒ นั้นเป็นระยะ
 ๕ ซม. เท่ากันอยู่เสมอ จงหาเส้นวัดของจุด P นั้นว่ายาวเท่าไร ?

๕. เส้นตรง ๒ เส้นต่างก็ถูกตัดออกเป็นส่วน ด้วยพื้นราบที่
ขนานกัน ๓ พื้นราบ ส่วนต่าง ๆ ของเส้นหนึ่งยาว ๓ ซม. และ
 $๕ \frac{๑}{๒}$ ซม. และของอีกเส้นหนึ่งยาว $๗ \frac{๓}{๔}$ ซม. และ x . จงหา
ราคาของ x .

๖. พื้นราบที่กำหนดให้ ๒ พื้นราบ ต่างก็ตั้งได้ฉากซึ่งกัน
และกัน จุด ๆ หนึ่ง X ห่างจากพื้นราบทั้ง ๒ นั้น ๔ ซม. เท่า
กันจุด X จะห่างจากเส้นของมุมต้องนำฉาก ที่เกิดจากพื้นราบทั้ง ๒
นั้นเป็นระยะเท่าไร ?

๗. จงหาความยาวของเส้นฉายเส้นหนึ่งบนพื้นราบ ของเส้น
ตรงเส้นหนึ่งที่ยาว $๑๐ \sqrt{๒}$ ซม. และเอียงอยู่บนพื้นราบเป็นมุม ๔๕°

๘. จากจุด P นอกพื้นราบ MN ได้ลากเส้นตั้งได้ฉาก PP'
ซึ่งยาว ๔ ซม. ไปยังพื้นราบ และจาก P นั้นลากเส้น PQ อีก

เส้นหนึ่งไปยังพื้นราบน้อก ซึ่งมีมุม $P \cdot PQ$ เท่ากับ 30° . จงหาความยาวของเส้นฉายของเส้น PQ นั้น บนพื้นราบ MN ว่ายาวเท่าไร?

แบบฝึกหัดที่ ๒๑

สำหรับทวนบทเรียนที่แล้วมา

๑. มุมฉากอย่างและอย่างไรม้าง ที่สามารถจะกำหนดเส้นตรงได้ กับมุมฉากอย่างและอย่างไรม้าง ที่สามารถจะกำหนดพื้นราบได้?

๒. การที่เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งฉากกับอีกเส้นหนึ่งหรือไม่ หรือเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งฉากกับพื้นราบหรือไม่นั้น ต้องมีลักษณะอย่างไรหรือวัดได้อย่างไร?

๓. จะสมมุติให้มุมพื้นราบบรรจุเส้นตรงเส้นหนึ่ง ที่กำหนดให้ และให้ตั้งฉากกับพื้นราบที่กำหนดให้ ได้กับพื้นราบ และตามที่ได้ตอบมานั้นจริงสำหรับทุกๆ ลักษณะของเส้นตรงนั้นจะตั้งอยู่บนพื้นราบนั้นทุกอย่างหรือไม่?

๔. ก) จะลากเส้นตรงให้ผ่านจุดๆ หนึ่ง และขนานกับเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ ได้กี่เส้น ถ้าขนานกับพื้นราบที่กำหนดให้ ได้กี่เส้น ข) จะสร้างพื้นราบให้บรรจุจุดๆ หนึ่ง และขนานกับ

เส้นตรงที่กำหนดให้ โค ก พนราบ และให้ขนานกับพนราบที่กำหนด
ให้ โค ก พนราบ ?

๕. ให้อธิบายว่าอะไรเป็นวิถีของจุดๆ หนึ่ง ที่มีระยะเท่ากัน
เสมอ จากจุด ๒ จุดที่กำหนดให้

ก) ในเส้นตรงเส้นหนึ่ง? ข) ในพนราบ? ค) ในที่ว่างที่มี
ทั้ง ๓ ขนาด?

๖. ให้อธิบายว่าอะไรเป็นวิถีของจุดๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะห่าง
จากเส้นตรง ๒ เส้นที่ตัดกัน เป็นระยะเท่ากันเสมอ ให้ตั้งอุปประมัย
นี้เพื่อศึกษากับข้อนี้ สำหรับวิชาเรขาคณิตม.๓

๗. เมื่อเส้นตรง ๒ เส้นในพนราบหนึ่ง ต่างก็ตั้งฉากกับ
อีกเส้นหนึ่ง เราทราบมาแต่เดิมแล้วว่าอย่างไร ให้ตั้งอุปประมัยนี้เพื่อ
สำหรับวิชาเรขาคณิตม.๓ ๒ ข้อ ที่มีลักษณะคล้ายกันกับข้อนี้ และให้
อธิบายว่า ในข้อหนึ่งของทั้ง ๒ นั้นใจความว่า “พนราบ ๒ พนราบ
ที่ต่างก็ตั้งฉากกับอีกพนราบหนึ่งที่กำหนดให้ ย่อมขนานกัน”
ใช่หรือไม่? เพราะเหตุไร?

๘. เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตั้งฉากกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง
ซึ่งเป็นเส้นขนานของอีกเส้นหนึ่ง เราทราบมาแต่เดิมแล้วว่าอย่างไร
ให้ตั้งอุปประมัยนี้เพื่อสำหรับวิชาเรขาคณิตม.๓ ที่มีลักษณะคล้ายกัน

กับข้อนี้ ๒ ข้อ และถ้าพิจารณาหนึ่งดังใดฉากกับอีกพิจารณาหนึ่งซึ่ง
 ขนานอยู่กับอีกพิจารณาหนึ่งแล้ว พิจารณาจะคงได้ฉากกับพิจารณา
 ดังทายหรือไม่ ?

๘. ให้เส้นตรงเส้นหนึ่งคงได้ฉากกับพิจารณาหนึ่ง ทุกๆ
 พิจารณาที่บรรจุเส้นตรงนี้ ย่อมเป็นอย่างไรร่วมกับพิจารณาอื่น ข้อนี้ยัง
 จะจริงอยู่เสมอหรือไม่ ถ้าเปลี่ยนคำว่า "คงได้ฉาก" เป็น "ขนาน"

มาตรา ๒

รูปกอนเหลี่ยม (Polyhedrons) รูปกระบอก (Cylinders)

และ รูปกรวย (Cones)

๑๐๔) รูปกอนเหลี่ยม (Polyhedrons) พื้นฐานของวัตถุตั้ง

หนึ่ง ซึ่งมีพื้นที่ขอบเขต เป็นพื้นราบหลายพื้นราบติดกัน เรียกว่า

รูปกอนเหลี่ยม เป็นคนว่ารูป ๔๙ และ รูป ๕๐ พื้นที่หลายที่

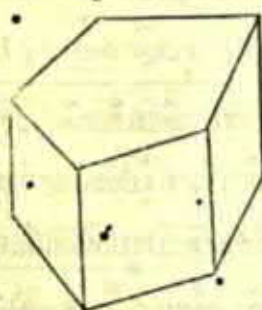
เป็น พื้นที่ขอบเขตของรูปนั้น

เรียกว่า หน้า ของรูปกอนเหลี่ยม

เส้นรอยตัดกันของหน้าทั้งหลายเหล่านี้

นั้นเรียกว่าเส้นของรูปกอนเหลี่ยม

และจุดตัดกันของเส้นทั้งหลาย



รูป ๔๙

เรียกว่ายอดของรูปกอนเหลี่ยม

เส้นใดเส้นหนึ่งที่ลากจากยอดหนึ่งถึงอีกยอดหนึ่ง ซึ่งไม่อยู่บน

หน้าเดียวกันเรียกว่าเส้นทะแยงมุมของรูปกอนเหลี่ยม

๑๐๕) รูปหน้าตัดของรูปกอนเหลี่ยม (Section of a Polyhe-

drons) ถ้ามีพื้นราบหนึ่ง ไปผ่ารูปกอนเหลี่ยมออก เส้นรอยตัดกัน

ระหว่างพื้นราบ และน้ำทั้งหลายของรูปนั้น จะเกิดเป็นรูปเหลี่ยมใหม่

ขึ้นในพื้นราบ รูปเหลี่ยมนี้เรียกว่ารูปหน้าตัดของรูปกอนเหลี่ยมนั้น

๑๐๖) รูปกอนเหลี่ยมขั้วรวมดง (Convex Polyhedron) ถ้า

แม้ว่าทุก ๆ รูปหน้าตัดของรูปกอนเหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปเหลี่ยมอย่าง

ขั้วรวมดงทั้งด้น รูปกอนเหลี่ยมนี้เรียกว่า รูปกอนเหลี่ยมขั้วรวมดง

(ในสมมุติเดิมนั้นจะกล่าวถึงแต่รูปกอนเหลี่ยมขั้วรวมดง)

๑๐๗) รูปแท่งเหลี่ยม (Prism) รูปกอนเหลี่ยมใด ๆ ที่มี

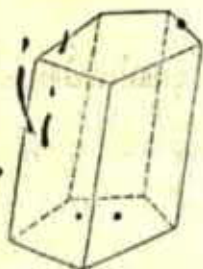
สองหน้าเป็นรูปเหลี่ยมที่เหมือนกัน และขนานกัน กับมีหน้าอื่น ๆ เป็นรูป

เหลี่ยมด้านขนานรูปนั้นเรียกว่ารูปแท่งเหลี่ยม

น้ำทางสองหน้าเป็นรูปเหลี่ยมที่เหมือนกัน และขนานกันนั้นเรียกว่าฐาน

ของรูปแท่งเหลี่ยม ส่วนหน้าอื่น ๆ ที่เป็นรูปเหลี่ยมด้านขนานนั้น

เรียกว่าหน้าข้าง และเส้นรอยตัดกัน
ของหน้าข้างทั้งหลายนั้น เรียกว่าสันข้าง
ผด บวก ของ พหุ (ตารางเหลี่ยม)
ของหน้าข้างทั้งหมด เรียกว่าพหุคาน
ข้าง อนึ่งสันข้างทั้งหลายของ รูปแท่ง
เหลี่ยมรูปหนึ่ง ย่อมเท่ากัน (๒๔)



รูป ๕๑

๑๐๘) ระยะสูงของรูปแท่งเหลี่ยม (Altitude of a Prism)

ความยาวของเส้นตั้งฉาก ระหว่างฐานทั้ง ๒ ของรูปแท่งเหลี่ยม
นั้นเรียกว่าระยะสูงของรูปแท่งเหลี่ยม

๑๐๙) รูปแท่งเหลี่ยมตรง (Right Prism) รูปแท่งเหลี่ยม

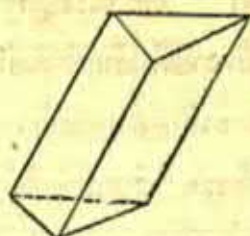
รูปหนึ่งที่มีทุก ๆ สันข้างตั้งฉากกับฐานทั้งสองของรูปนั้น รูปนั้น
เรียกว่ารูปแท่งเหลี่ยมตรง

สันข้างทั้งหลายของรูปแท่งเหลี่ยมตรง ย่อมเท่ากับระยะสูงของ
รูปนั้นเอง โดย (อนุ ๒ อ. ม. ๑๐)

๑๑๐) รูปแท่งเหลี่ยมเอน (Oblique Prism) รูปแท่งเหลี่ยม

รูปหนึ่งที่มีทุก ๆ สันข้าง เป็นเส้นเอนบนฐานทั้ง ๒ ของรูปนั้น รูป

นั้นเรียกว่า รูปแท่งเหลี่ยม
รูป ๕๑ นั้นเรียกว่า รูปแท่ง
สามเหลี่ยม



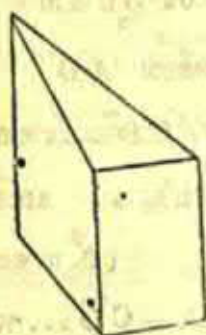
รูป ๕๑

๑๑๑) รูปแท่งเหลี่ยมย่อมจำแนกออกได้เป็นหลายชนิด โดย
อาศัยฐานเป็นหลัก คือ รูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่งจะเรียกว่าเป็นชนิดรูป
แท่งสามเหลี่ยม แท่งสี่เหลี่ยม แท่งห้าเหลี่ยม ฯลฯ ก็ย่อมแล้วแต่รูป
เหลี่ยมที่เป็นฐานทั้ง ๒ นั้น เป็นรูปสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม ฯลฯ

๑๑๒) รูปหน้าตัดฉาก (Right Section) ถ้ามีพื้นราบหนึ่ง

นำไปภายในรูปแท่งเหลี่ยม รูปเหลี่ยมที่เกิดขึ้นโดยเส้นรอยตัดกัน
ระหว่างพื้นราบและนำทงหลายของรูปนั้น เราเรียกว่ารูปหน้าตัดฉาก
ถ้าพื้นราบที่นำมานั้น ตั้งได้ฉากกับทุก ๆ ด้านข้างของรูปนั้น รูปหน้าตัด
นั้นเรียกว่ารูปหน้าตัดฉาก

ในการที่จะให้พื้นราบนำเข้าไปภายในรูปแท่งเหลี่ยม และให้
พื้นราบนั้นตั้งได้ฉากและตัดกับด้านข้างทุกด้านแล้ว ถ้ารูปแท่งเหลี่ยม
นั้นเป็นรูปแท่งเหลี่ยมใด บางทีจะต้องคอยดูด้านข้างนั้นบางด้านออกไปเพื่อ
ให้ตัดกับพื้นราบนั้นได้

๑๑๓) รูปแท่งเหลี่ยมตัด (Truncated Prism) ส่วนหนึ่ง

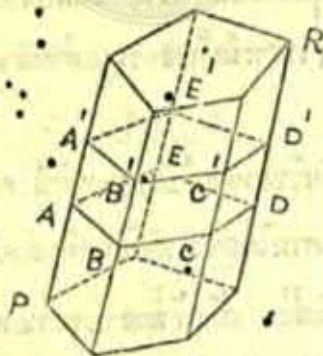
รูป ๕๒

ของรูปแท่งเหลี่ยม ที่อยู่ในระหว่าง
ฐาน ๆ หนึ่ง กับรูปหน้าตัดที่เกิดขึ้นจาก
พื้นราบหนึ่งผ่านมาภายในรูปนั้น แต่
พื้นราบนั้นเอียงบนฐาน ส่วนที่กล่าว
แต่นั้นเรียกว่า รูปแท่งเหลี่ยมตัด

รูป ๕๒

อุปมาณียนเทศที่ ๒๘

รูปหน้าตัดทั้งหลายซึ่งเกิดขึ้นโดยมี
พื้นราบขนานมาตัดด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่งออกทุกด้านรูปหน้า
ตัดนั้นย่อมเป็นรูปเหลี่ยมที่เหมือนกัน



รูป ๕๓

ให้รูปทั้งเหลี่ยม PR และรูปห้าเหลี่ยม $AD, A'D'$ ซึ่งเป็นรูปเหลี่ยมทอชนกัน พิจารณาตามลำดับรูป ๕๓

จึงพิสูจน์ว่า รูปเหลี่ยม AD เหมือนกับรูปเหลี่ยม $A'D'$

พิสูจน์ $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CD \parallel C'D' \dots$ ฯลฯ
(เพราะเป็นเส้นรอบตัดกันระหว่างเส้นขนาน และอีกเส้นหนึ่ง) (ข. น. ๑๐)

$\therefore AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D' \dots$ ฯลฯ
(เพราะเป็นส่วนของเส้นที่ขนานกัน ตัดกัน) (๒๖)

และ $\angle CBA = \angle C'B'A', \angle DCB = \angle D'C'B' \dots$ ฯลฯ
(เพราะขาของมุมขนานกัน และอยู่ข้างเดียวกัน) (ข. น. ๑๓)

$\therefore$ รูปเหลี่ยม AD เหมือนกับรูปเหลี่ยม $A'D'$
(เพราะมีด้านและมุมเท่ากัน) (๓๒)

ธ. ต. พ.

ให้นักเรียนหัดกับอุทราเหล่านี้โดยไม่ต้องพิสูจน์

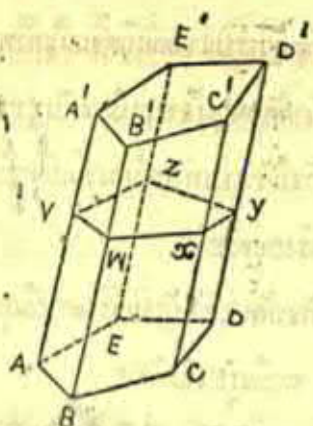
ก) ตามในอุปมาขึ้นนี้แสดงให้เห็นว่า มีเส้นขนานมาตัดกันข้างทุก ๆ ด้านนี้ ถ้ามีเส้นขนานเหล่านี้จะขนานกับฐานหรือไม่ก็ตาม การพิสูจน์จะเป็นไปโดยทำนองเดียวกันหรือไม่ ?

- ข) ถ้าแม้ว่ารูปหน้าคคกเกิดชนกันทั้งหมด ต่างก็ร่นานกับ
ฐานทั้ง ๒ รูปหน้าคคเหล่านี้จะเหมือนกับฐานด้วยหรือไม่ ?
ค) ถ้าแม้ว่ารูปแท่งเหลี่ยมนี้เป็นรูปร่างนูนเกิน อุประมัย
นี้เทศขอนยังจะจริงอยู่หรือไม่ ?

ง) ถ้าแม้ตั้งมุมให้ฐานทั้ง ๒ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหน้า
คคกเกิดชนกัน จะเป็นรูปชนิดใด ?

ข้ออนุมาน รูปหน้าคคกที่เกิดชน โดยที่มุมร่นานหนึ่ง ซึ่งฐาน
กับฐานทั้ง ๒ ของรูปแท่งเหลี่ยมหน้าคคคตามที่ได้กล่าว ในอุประมัยนี้เทศจะ
เหมือนกันกับฐาน และรูปหน้าคคคกทั้งหมดของรูปแท่งเหลี่ยมจะ
เหมือนกันทุกรูป

อุประมัยพิเศษที่ ๒๖ พื้นที่ด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมรูป
หนึ่งย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างด้านข้างด้านหนึ่ง กับระยะขอบเขต
ของรูปหน้าคคคก



รูป ๕๔

ให้ $VWXYZ$ เป็นรูปหน้าตัดฉาก ของรูปแท่งเหลี่ยม AD'
 ให้ l เป็นพื้นที่ด้านข้างของรูปนี้ e เป็นความยาวของด้านข้างด้านหนึ่ง
 และ p เป็นระยะรอบเขตรูปหน้าตัดฉากรูป ๕๔

จงพิสูจน์ว่า $l = ep$

พิสูจน์ $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = e$ (๑๐๗)

อนึ่ง $VW \perp BB'$, $WX \perp CC'$, $XY \perp DD'$

$YZ \perp EE'$ และ $ZV \perp AA'$

$\therefore$ พื้นที่ของ $\square AB' = BB' \times VW = e \times VW$

,, ,, $BC' = CC' \times WX = e \times WX$

,, ,, $CD' = DD' \times XY = e \times XY$

แต่ 1 เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของสี่เหลี่ยม

ด้านขนานทั้งหมด

(๑๐๗)

$$\therefore 1 = e \times (VW + WX + XY + YZ + ZV) \text{ จริง (๑) }$$

$$\text{แต่ } VW + WX + XY + YZ + ZV = p \text{ จริง (๑๑) }$$

$$\therefore 1 = ep \text{ จริง (๑๒) }$$

ท. ก. พ.

ข้ออนุมาน พื้นที่ด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมตรงรูปหนึ่งย่อม

เท่ากับผลคูณระหว่างระยะสูงกับระยะรอบเขตรูปฐาน

แบบฝึกหัดที่ ๑๑

จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมตรงซึ่งมีระยะสูงและเส้น
รอบเขตรูปฐาน ดังต่อไปนี้

๑. $a = ๑๘$ ท.ม. $p = ๒๙$ ท.ม.

๒. $a = ๒๒$ ท.ม. $p = ๓๗$ ท.ม.

๓. $a = ๔, ๒๔$ ท.ม. $p = ๖, ๗๔$ ท.ม.

๔. $a = ๑, ๗๔$ น. $p = ๑, ๓๖$ น.

จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่ด้านข้างและเส้นรอบ

เรขาคณิตของรูปหน้าตัดฉาก ดังต่อไปนี้

$$๕. e = ๑๗ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๒๗ \text{ ฟ.ม.}$$

$$๖. e = ๒๓ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๓๕ \text{ ฟ.ม.}$$

$$๗. e = ๓,๖๘ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๒,๖๕ \text{ ฟ.ม.}$$

$$๘. e = ๒,๖๕ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๑,๒๘ \text{ ฟ.ม.}$$

จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่ด้านข้างและเส้นรอบ

เรขาคณิตของรูปหน้าตัดฉาก ดังต่อไปนี้

$$๙. l = ๑๘๗ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๑๑ \text{ ฟ.ม.}$$

$$๑๐. l = ๓๕๗ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๒๑ \text{ ฟ.ม.}$$

$$๑๑. l = ๑๖๙ \text{ ฟ.ม.} \quad p = ๐,๓๐๗ \text{ ฟ.ม.}$$

๑๒. ไม่น้อยหนึ่งยาว ๑,๒๕ ฟ.ม. จะต้องปักทองให้ทั่วพื้น
ที่ด้านข้าง หน้าตัดฉากของไม้ท่อนนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีพื้นที่
เท่ากับ ๒,๒๕ ฟ.ม. ต. ถามว่าจะต้องการทองสักกี่เซ็นต์เมตร
สำหรับเหลื่อม?

๑๓. กระจกแท่งหนึ่งเป็นรูปแท่งเหลี่ยม ยาว ๑๖ ฟ.ม. รูป
หน้าตัดฉากของกระจกแท่งนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีระยะ
สูงเท่ากับ ๐,๘๖๖ ฟ.ม. จงหาพื้นที่ด้านข้างของกระจกแท่งนี้

๑๔. จงหาเนื้อทั้งหมดของรูปแท่งเหลี่ยมตรงรูปหนึ่งซึ่งมี
ยาว ๓๒ ซม. และมีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีด้านตรง
ฉากยาว ๑๖ ซม. และอีกด้านหนึ่งยาว ๘ ซม. ซม.

๑๕. ทุกๆ รูปหน้าตัดของรูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่งที่เกิดขึ้นโดยมี
พื้นราบหนึ่งมาตัดและขนานกับด้านข้างของรูปนั้น ย่อมเป็นรูปสี่เหลี่ยม
ด้านขนาน

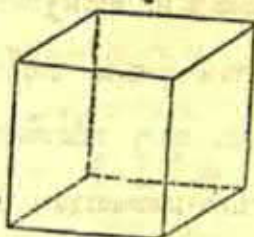
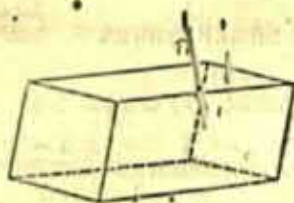
๑๑๔) รูปหกด้านขนาน (Parallelepiped) รูปแท่งเหลี่ยม
รูปหนึ่งที่มีฐานทั้ง ๒ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปนี้เรียกว่ารูปหก
ด้านขนาน

๑๑๕) รูปหกด้านขนานตรง (Right Parallelepiped) รูป
หกด้านขนานรูปหนึ่งที่มีด้านข้างทุกด้านตั้งฉากกับฐานทั้ง ๒ รูปนี้
เรียกว่ารูปหกด้านขนานตรง

๑๑๖) รูปหกด้านขนานผืนผ้า (Rectangular Parallelepiped) รูปหกด้านขนานตรงรูปหนึ่งที่มีฐานทั้ง ๒ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืน
ผ้ารูปนี้เรียกว่ารูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูปทึบ รูป ๕๕ ก.

รูป ๕๕

ข



(รูปหกด้านขนานผืนผ้า หรือรูปหีบ)

(รูปลูกบาศก์)



ก

(รูปหกด้านขนานโย้)

๑๑๗) รูปลูกบาศก์ (Cube) รูปหกด้านขนานใดๆ ที่มีทั้ง ๖

หน้าเป็นรูปจัตุรัส รูปนั้นเรียกว่ารูปลูกบาศก์ รูป ๕๕ ข.

๑๑๘) หน่วยของปริมาตร (Unit of Volume) ในกรณีส่วนๆ ตามธรรมชาติย่อมใช้รูปลูกบาศก์ ที่มีทุกด้านยาวเท่ากัน
มาตรที่ใช้วัดความยาวนั้นเอง

ก็ถ้าเราวัดขนาดกว้างยาวของทึบใบหนึ่งเป็นจำนวนเซ็นต์เมตร
เราใช้ลูกบาศก์ที่มีด้านยาว ๑ เซนต์เมตร เป็นมาตราสำหรับวัดเนื้อที่
ถ้าเราวัดขนาดของห้องหนึ่งเป็นจำนวนเมตร เราก็คิดเนื้อที่เป็น
ลูกบาศก์ของห้องนั้น โดยใช้ลูกบาศก์ที่มีด้านยาว ๑ เมตรเป็นมาตรา

วิชา ๖๑๕ (๑๑๕) ส่วน (Volume) จำนวนส่วนจุซึ่งลูกบาศก์ซึ่งเราใช้
เป็นมาตรวัดจุอยู่ในห้องหรือวัตถุใดๆ เท่าใดครั้ง เรียกว่า
ส่วนจุของห้องหรือวัตถุนั้นๆ

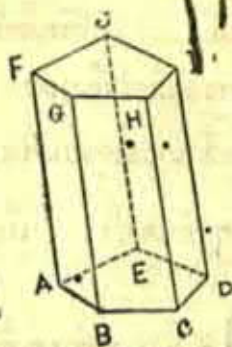
๑๒๐) รูปที่เท่ากัน (Equivalent Solid) รูปต่าง ๆ ที่มีเนื้อ
ที่ลูกบาศก์เท่ากัน รูปนั้นๆ เรียกว่าเท่ากัน

๑๒๑) รูปที่เหมือนกัน (Congruent Solid) รูปต่าง ๆ ที่หา
มีแต่เนื้อที่ลูกบาศก์เท่ากันเท่านั้น แต่ทั้งนี้ทรวดทรงคือส่วนต่าง ๆ
ของรูปนั้นต่างก็เหมือนกัน และวางเรียงรายอยู่เป็นลำดับโดยทำนอง
เดียวกันด้วย รูปทั้งนั้นเรียกว่าเหมือนกัน

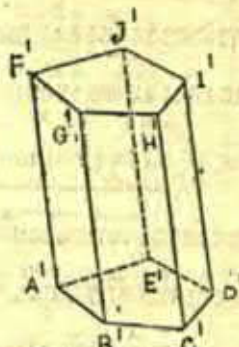
อุปมาณียะเทศที่ ๓๐ รูปแห่งเหลี่ยม ๒ รูปจะเหมือนกัน

ถ้าเมื่อนำทั้ง ๓ ที่ประกอบมุมด้านมุมหนึ่งของรูปหนึ่ง ต่างก็

เหมือนกันกับอีก ๓ หน้าที่อยู่รอบมุมด้านหน้ามุมหนึ่งของอีกรูปหนึ่งนั้น
หน้าต่อหน้า และเรียงลำดับขึ้นโดยทิศทางของเดียวกัน



รูป ๕๖



รูป ๕๗

ให้รูปแห่งเหลี่ยม AI และ $A'I'$ ซึ่งมีหน้า AD , AG และ AJ
รูป ๕๖ เหมือนกับหน้า $A'D'$, $A'G'$ และ $A'J'$ หน้าต่อหน้า รูป ๕๗
และเรียงตามลำดับเดียวกัน

จงพิสูจน์ว่า

AI เหมือนกับ $A'I'$

พิสูจน์.

มุมของหน้า BAE , BAF , EAH ต่างก็เท่า

กันเป็นลำดับกับมุมของหน้า $B'A'E'$, $B'A'F'$, $E'A'H'$ (๓๒)

ดังนั้นมุมด้านหน้า A เท่ากับมุมด้านหน้า A' (ธ. น. ๒๗)

ยกมุมด้านหน้า A กับมุมด้านหน้า A'

ดังนั้น นำ AD ทับกันสนิทกับนำ $A'D'$

AG ทับกันสนิทกับ $A'G'$

และ AJ กับ $A'J'$ และ C ทับบน C'

และทั้ง D ทับบน D'

(โดยที่มุมด้านนำทั้ง ๒ นั้นเท่ากัน)

ดังนั้นข้างทั้งหลายของรูปแท่งเหลี่ยมนั้น

ต่างก็ขนานกัน

(ชน ๒ ชน. ๗)

ดังนั้น CH ทับกันกับ $C'H'$ และ DI กับ $D'I'$

เมื่อจุด F, G และ J ต่างก็ทับกันเป็นลำดับ

กับ F', G' และ J' จุดต่อจุดแล้ว พิจารณาที่

เป็นฐานข้างบนก็ทับกันสนิทด้วย

ดังนั้น H กับ H' และ I กับ I'

ดังนั้นรูปแท่งเหลี่ยมนั้นทั้ง ๒ ทับกันสนิท

คือเหมือนกัน

(๑๒๘)

ช. ต. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ รูปแท่งเหลี่ยมนั้น ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้าเมื่อ

มีลักษณะตามที่กล่าวไว้ในข้อประมุขนี้เท่า

ข้ออนุมานที่ ๒ รูปแท่งเหลี่ยมตรง ๒ รูปจะเหมือนกัน ถ้ามี
ฐานเหมือนกัน และระนาบตั้งเท่ากัน

อุประมาณียกเทศที่ ๑๑ รูปแท่งเหลี่ยมโดยรูปหนึ่ง จะเท่ากับรูป
แท่งเหลี่ยมตรงอีกรูปหนึ่งซึ่งมีฐานเท่ากับรูปหน้าตัดฉาก และระนาบ
ตั้งเท่ากับด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยมโดยนั้น



รูป ๕๘

ให้รูปหน้าตัดฉาก FI ของรูปแท่งเหลี่ยมโดย AD' และ FI' รูป
แท่งเหลี่ยมตรงซึ่งมีด้านข้างทุกด้าน ยาวเท่ากับด้านข้างของรูป AD'

รูป ๕๘

จงพิสูจน์ว่า AD' เท่ากับ FI' !

พิสูจน์ ถ้าจากทุกๆ ด้านข้างที่เท่ากันของ AD' และ FI'
 เราหักส่วนที่เป็นด้านข้างทุกด้านของรูป FD'
 ซึ่งเป็นด้านข้างร่วมของรูปทั้งเหลี่ยม

ตรงและโย้ทั้งสองนั้นออกเสีย ส่วนที่เหลือ คือ

AF และ $A'F'$, BG และ $B'G'$ ฯลฯ

ต่างก็จะเท่ากันส่วนต่อส่วน (จรัส ๒)

อนึ่งรูปเหลี่ยม FI ที่พื้นฐานก็เหมือนกับ $F'I'$ (อ.น. ๒๘)

ยกรูป AI วางทับลงบน $A'I'$ ให้ฐาน FI

ทับกันสนิทกับฐาน $F'I'$.

ดังนั้น FA, GB ฯลฯ ทบกันกับ $F'A', G'B'$

..... ฯลฯ (อ.น. ๔)

ดังนั้น ว่า GA กับ $G'A'$ และ HB กับ $H'B'$ ฯลฯ

ต่างก็ทับกันสนิทหน้าต่อหน้า

แต่นำ FI กับนำ $F'I'$ ก็ทับกันสนิทอยู่แล้ว.

∴ รูปทั้งเหลี่ยมค้ำ AI กับ $A'I'$ เหมือนกัน (อน. ๑. น. ๓)

∴ $AI + FD' = A'I' + FD'$ (จรัส ๑)

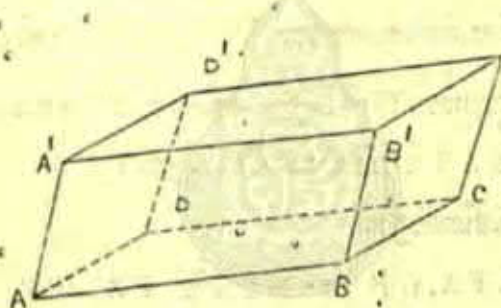
$$\text{แต่ } AI + FD' = AD'$$

$$\text{และ } AI' + FD' = FI' \quad (\text{จริง ๑๑})$$

$$\therefore AI' \text{ เท่ากับ } FI' \quad (\text{จริง ๙})$$

จ. ค. พ.

อุประมาณิเทศที่ ๓๒ นวัตกรรมของรูปหกด้านขนานรูป
หนึ่งย่อมเหมือนกัน ทั้งขนาดกันด้วย



รูป ๕๘

ให้รูปหกด้านขนาน $ABCD-A'B'C'D'$ รูป ๕๘

ตั้งพิสูจน์ว่า นวัตกรรม AB' กับ DC' เหมือนและขนาดกัน

พิสูจน์ $AB \parallel DC \quad (\text{๒๓})$

และ $AB = DC \quad (\text{๒๔})$

โดยที่ของเดียวกัน $AA' \parallel \text{และ} = DD'$

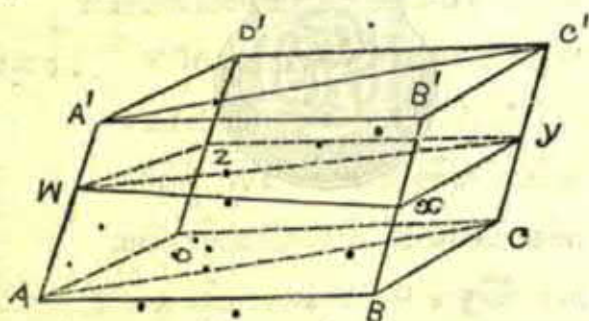
$$\therefore \angle BAA' = \angle CDP' \quad (\text{อ. น. ๑๓})$$

$$\therefore AB' \parallel DC' \quad (\text{อ. น. ๑๓})$$

$$\therefore AB' \text{ เหมือนกับ } DC' \quad (\text{๒๔}).$$

ย. ค. พ.

อุประมาณิเทศที่ ๓๓ พินรวหนึ่งผ่าไปตามเส้นทะแยงมุม
ของรูปหกด้านขนานรูปหนึ่ง ซึ่งตกจากด้านข้างที่ตรงข้าม และบรรจุ
เส้นทั้ง ๒ นี้ จะแบ่งรูปหกด้านขนานนี้ออกเป็นรูปแท่งสามเหลี่ยม ๒ รูป
ที่เท่ากัน



รูป ๖๐

ให้พินรว $ACC'A'$ ผ่าไปตามด้านข้าง AA' และ CC'
ที่ตรงข้ามของรูปหกด้านขนาน AC' รูป ๖๐

จึงพิสูจน์ว่า รูป ๖ ด้านขนาน AC' ถูกแบ่งออกเป็นรูปแท่งสาม
เหลี่ยม ๒ รูป $ABC-B'$ และ $ACD-D'$ ที่เท่ากัน

พิสูจน์ ให้ $WXYZ$ เป็นรูปนำคัตฉากรูปหนึ่ง ของ

รูปหกเหลี่ยมขนาน .

นำตรงข้าม AB' กับ DC' ต่างก็ขนานและเหมือนกัน

(อ. น. ๓๒)

โดยทำนองเดียวกัน นำตรงข้าม AD'

กับ BC' ก็ขนานและเหมือนกัน

$\therefore WX \parallel ZY$ และ $WZ \parallel XY$ (อ. น. ๑๐)

ดังนั้น $WXYZ$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคี่เหลี่ยม (๒๓)

พิจารณา $AC-C'A'$ สี่เหลี่ยมคี่เหลี่ยมคี่เหลี่ยม

$WXYZ$ ความยาวด้านตรงข้าม WY (อ. น. ๑)

$\therefore \triangle WXY$ เหมือนกับ $\triangle YZW$ (๒๕)

ต่อไปนี้จะพิสูจน์ได้อย่างไรว่า รูปทั้ง

เหลี่ยม $ABC-B'$ เท่ากันกับรูปทั้งเหลี่ยม

ตรง ที่มีฐาน WXY และระยะสูง AA' ?

กับพิสูจน์ได้อย่างไรว่า รูปทั้งเหลี่ยม

$CDA-D'$ เท่ากันกับรูปทั้งเหลี่ยมตรง ที่มี

ฐาน YZW และระยะสูง AA' ?

เมื่อเป็นดังนี้แล้ว ทำในรูปทั้งเหลี่ยมตรง

ทั้ง ๒ นี้ จงทราบได้ว่าเท่าใด ?

เมื่อเป็นเช่นนั้น อุประมีนิกเทศ
ได้พิสูจน์ได้อย่างไร ?

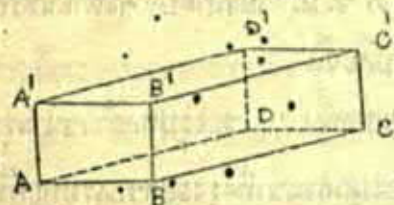
อ. ศ. พ.

ไหนนักเรียนบอกว่า เมื่ออุประมีนิกเทศใดในวิชาเรขาคณิตพบ
รวมกันเนื้อความตรงกันกับข้อนี้

แบบฝึกหัดที่ ๑๒

๑. ถ้ามีสามเหลี่ยมในรูป ๔๔ มุมรวมทั้ง ๓ ที่ตรงยอด A ของรูปนั้น
เป็น ๙๐° - ๗๐° - ๗๕° จงหามุมอื่น ๆ ทั้งหมดของรูปนั้นให้ทุกมุม

๒. หีบใบหนึ่งมีด้านข้าง AB ยาว ๔ ซม.



BC ยาว ๓ ซม.

และ CC' ยาว ๓

$\frac{๓}{๔}$ ซม. จงหา

เส้นทะแยงมุม AC'

รูป ๖๑

๓. เส้นทแยงมุมทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยม ย่อมเท่ากันทั้ง ๔ เส้น
 ๔. จงหาความยาวของเส้นทแยงมุม ของรูปสี่เหลี่ยมซึ่ง
 มีขนาดกว้างยาวดังเท่ากับ a. b. c.

แบบฝึกหัดที่ ๑๓

๑. นำข้างของรูปแท่งเหลี่ยมครึ่งรูปหนึ่ง ย่อมเป็นรูป
 สี่เหลี่ยมผืนผ้า
๒. เส้นทแยงมุมของรูปหกด้านขนาน ย่อมแบ่งครึ่งซึ่งกัน
 และกัน
๓. ด้านข้างทั้ง ๓ ของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง ของรูปสี่เหลี่ยม
 ยาว ๕ ซม. ๖ ซม. และ ๗ ซม. เป็นลำดับ จงหาพื้นที่รอบ
 นอกทั้งหมดของทั้งหกหน้าของรูปสี่เหลี่ยม
๔. มุมของน้ำทั้ง ๓ ตรงยอดหนึ่ง ของรูปหกด้านขนานรูป
 หนึ่งเป็น 60° และด้านทั้ง ๓ ของมุมด้านน้ำตรงยอดของรูปหกด้าน
 ขนานยอดเดียวกันนี้ ยาว ๓ ซม. ๒ ซม. และ ๑ ซม. เป็น
 ลำดับ จงหาพื้นที่รอบนอกทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยม

๕. ก้าง ๒ ของเส้นทะแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม
เท่ากับผลบวกของ ก้าง ๒ ของด้านข้าง ๓ ของรูปนั้น ที่มารวม
กันที่ยอดโดยยอดหนึ่ง

๖. หีบใบหนึ่งกว้าง ๖ ช. ม. สูง ๓ ช. ม. มีดวดเส้นหนึ่ง
ยาว ๑๒ ช. ม. อาจจึงตามเส้นทะแยงมุมให้จุดยอดมุมของหีบข้าง
หนึ่งกับจุดยอดมุมข้างหนึ่งโดยพอดี จงหาความยาวของหีบใบนี้

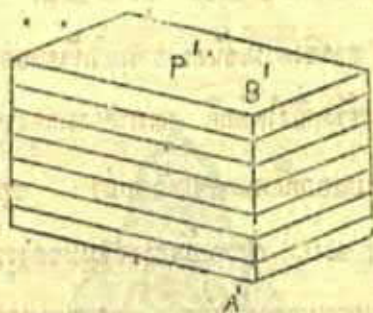
๗. พนทระบนนอกทั้งหมดของทรงหกหน้า ของรูปลูกบาศก์
หนึ่งมี ๑๘ ตาราง ช. ม. จงหาเส้นทะแยงมุมของรูปลูกบาศก์

๘. เส้นทะแยงมุมของน้ำหนึ่ง ของลูกบาศก์หนึ่ง ยาว
 $\sqrt{๑๔}$ จงหาเส้นทะแยงมุมของลูกบาศก์นี้

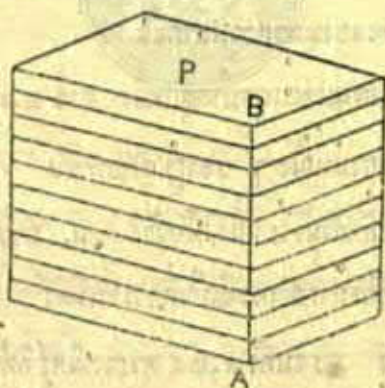
๙. เส้นทะแยงมุมของลูกบาศก์หนึ่ง ยาว $๒,๗๕\sqrt{๓}$ จง
หาเส้นทะแยงมุมของน้ำหนึ่งๆ ของรูปลูกบาศก์นั้น

๑๐. จะต้องทำดั่งน้ำใบหนึ่งให้กว้าง ๓ ม. ยาว ๒ ม. และ
สูง ๑,๕ ม. จะต้องมีการตั้งกระดี่เป็นกัฏหารางเมตร สำหรับด้าน
ข้างทั้ง ๔ กับกันดั้ รวมทั้ง ๑,๒๕ ตารางเมตร ที่ต้องใช้สำหรับ
วัดตะเรียบและปากดั้

อุปมาขัณณฑที่ ๓๔ รูปหกเหลี่ยมด้านเท่าหรือรูปทึบ ๒
 รูปที่มีฐานเหมือนกัน จะมอดเท่ากับระยะสูงของรูปทั้ง ๒ นั้น
 ทำร่วมกัน เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน



รูป ๖๒



รูป ๖๓

ให้รูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูปหีบ P และ P' ซึ่งมีฐานเหมือนกัน และมีระยะสูง AB และ $A'B'$

จึงพิสูจน์ว่า $P : P' = AB : A'B'$

ชนิดที่ ๑ เมื่อ AB และ $A'B'$ มีมาตราวัดร่วมกันได้
พิสูจน์ สมมติว่ามาตราที่ใช้วัด AB และ $A'B'$ นั้น

มีส่วนอยู่ภายในระยะ AB เป็นจำนวน m ครั้ง
และใน $A'B'$ เป็น n ครั้ง

ดังนั้น $AB : A'B' = m : n$

ด้วยมาตราที่ใช้วัดเส้นทั้ง ๒ นั้น กระชอก
ไปเป็นส่วนๆ บนเส้น AB และ $A'B'$
และตามจุดที่แบ่งออกนั้น สมมติให้มุมราบ
ผ่านไปยังบรรทัดนั้นๆ ทุกๆ และทุกมุมราบ
ต่างก็ให้ดังได้ฉากกับ AB และ $A'B'$

มุมราบทั้งหลายเหล่านี้ จะแบ่งรูปหกด้าน
ขนานผืนผ้าหรือรูปหีบ P ออกเป็นรูปหีบเล็กๆ
ออก m รูป และแบ่งรูป P' ออกเป็น n รูป
ซึ่งเหมือนกันทั้งสิ้น

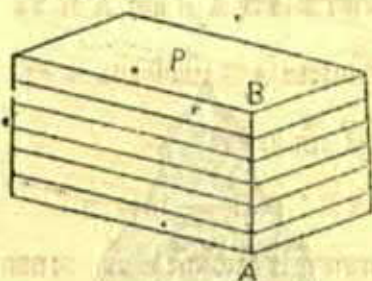
(ย. ๒ อ. ๓. ๓๐)

$$\therefore P : P' = m : n$$

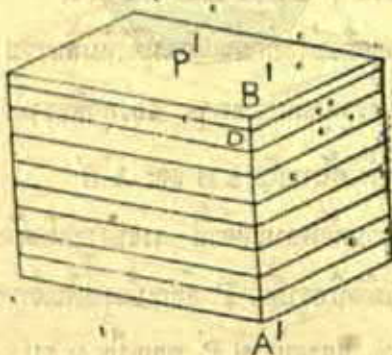
$$\therefore P : P' = AB : A'B' \quad (\text{จริง ๘})$$

ท. ก. พ.

ชนิดที่ ๒ ในเมื่อ AB และ $A'B'$ ใช้มากราวรวมกันไม่ได้



รูป ๖๔



รูป ๖๕

พิสูจน์ แบ่ง AB ออกให้เป็นหลายส่วนเท่าๆ กันตาม
ความพอใจ แล้วเอาส่วนหนึ่งไปวัดเส้น

$A'B'$ ได้กี่ครั้งแล้วแต่ $A'B'$ สามารถจะบรรจุได้

แต่เมื่อ AB และ $A'B'$ วัดร่วมกันไม่ได้

แล้ว ส่วนที่วัดออกไปได้และลงตัว ก็จะไป

หมดเพียง D หมายความว่า $A'D$ กับ AB

วัดร่วมกันได้ ยังเหลือส่วน DB' ซึ่งเล็ก

กว่าส่วนหนึ่งที่เราวัดมานั้น

สมมุติใหม่พรมารผ่าน D

และตั้งฉากกับ $A'B'$ หมาย

รูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูปหีบที่เกิด

ขึ้นใหม่นั้นคือ Q

เพราะว่า Q มีฐานเหมือน P และระยะ

สูง AD

$$\therefore Q : P = AD : AB \quad (\text{ชนิดที่ ๑})$$

ถ้าจำนวนส่วนที่แบ่ง AB นั้น ท่วมมาก

จนทุกทศนิยมไม่มีที่สิ้นสุด จำนวน $Q : P$ จะเขียน

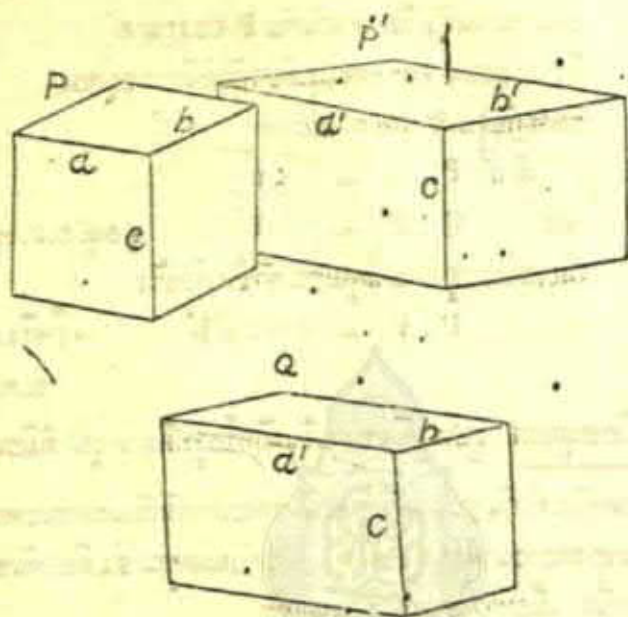
ใกล้ $P' : P$ เข้าไปทุกที ซึ่งเป็นจำนวนพิสัย
ของมัน และในขณะเดียวกัน จำนวน $A'D : AB$
ก็เรียบใกล้ $A'B' : AB$ เข้าไป ซึ่งเป็น
จำนวนพิสัยของมัน. (๔๗)

ต่อไปนี้การพิสูจน์เป็นไปโดยทำนอง
เดียวกันกับที่ได้อธิบายมาแล้ว ในเมื่อ
ต้องอธิบายใช้จำนวนพิสัย เพราะฉะนั้นในที่
นี้จะปล่อยไว้ให้นักเรียนพิสูจน์ โดยพระองค์เอง

๑๒๒) ในรูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูปหีบรูปหนึ่ง ความยาว
ของด้านทั้ง ๓ ที่มารวมกันจะสอดคล้องกันเช่น เรียกว่าขนาดของรูปนั้น

ข้ออนุมาน รูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูปหีบ ๒ รูป ที่มีขนาด
๒ ขนาดเท่ากันหารกัน จะมีผลหารเท่ากับขนาดที่ ๓ ของรูปทั้ง
๒ นั้น เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน

อุประมาณิเทศที่ ๓๕ รูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูปหีบ ๒
รูป ที่มีระยะสูงเท่ากันหารกัน จะมีผลหารเท่ากับผลหารของฐาน
ของรูปทั้ง ๒ นั้น เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน



รูป ๖๖

ให้รูปทศตันขนาดสามมิติหรือรูปทศตัน ๓ รูป P และ P' ที่มี
 a, b, c, และ a', b', c, เป็นขนาดทั้ง ๓ ของรูปทศตัน ๓ นี้ รูป ๖๖
 จึงพิสูจน์ว่า $P : P' = a b : a' b'$

พิสูจน์ สมมติให้ Q เป็นรูปทศตันขนาดสามมิติหรือรูปทศตัน
 อีกรูปหนึ่ง ซึ่งมีขนาด a', b และ c ดังนั้น Q

มีขนาดร่วมกัน คือ เท่ากันกับ P สองขนาด
 ก็คือ b และ d และในขณะเดียวกันก็มีส่วนร่วมอยู่สอง
 ขนาดกับรูป P' ก็คือ a' และ c

$$\text{ดังนั้น } P : Q = a : a'$$

$$\text{และ } Q : P' = b : b' \quad (\text{อน. อ.น. ๓๔})$$

เมื่อเอาควา^๒ทั้ง ๒ ^๒คูณกันเข้าข้างค^๒ข้าง

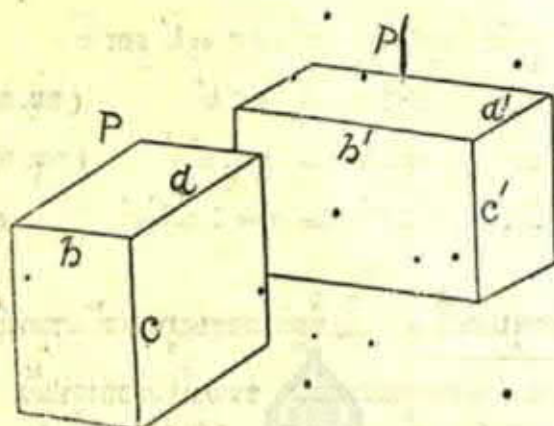
$$P : P' = a b : a' b' \quad (\text{จริง ๓})$$

ช. ท. พ.

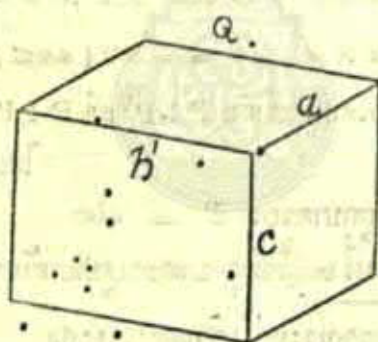
ข้ออนุมาน รูปหกด้านขนาด^๒ผ^๒น^๒สำหรับรูป^๒ห^๒บ^๒ ๒ รูป ที่มีขนาด
 ไ^๒ท^๒ขนาด^๒หนึ่งเท่ากัน^๒หาร^๒กัน จะมี^๒ผล^๒หาร^๒เท่า^๒กันกับ^๒ผล^๒หาร^๒ระ^๒หว^๒าง
 ผล^๒คูณ^๒ของ^๒สอง^๒ขนาด^๒ของ^๒รูป^๒หนึ่ง หาร^๒ด้วย^๒ผล^๒คูณ^๒เช่น^๒เด^๒ียว^๒กัน^๒ของ^๒
 อ^๒ก^๒รูป^๒หนึ่ง เมื่อ^๒หาร^๒โดย^๒ทำ^๒น^๒ของ^๒เด^๒ียว^๒กัน

เพราะว่า^๒ด้าน^๒ใด^๒ด้าน^๒หนึ่ง^๒ของ^๒รูป^๒หก^๒ด้าน^๒ขนาด^๒ผ^๒น^๒สำหรับ^๒รูป^๒ห^๒บ^๒ เรา
 ใช้^๒เป็น^๒ขนาด^๒ตั้ง^๒ของ^๒รูป^๒นั้น^๒ได้ เมื่อ^๒เป็น^๒เช่น^๒นั้น^๒ก็^๒ตรง^๒กับ^๒อุป^๒ระ^๒ม^๒ัย^๒น^๒เท^๒ค^๒
 ข้อ^๒ท^๒แ^๒ด^๒ว^๒าน

อุป^๒ระ^๒ม^๒ัย^๒น^๒เท^๒ค^๒ที่ ๓๖ รูป^๒หก^๒ด้าน^๒ขนาด^๒ผ^๒น^๒สำหรับ^๒รูป^๒ห^๒บ^๒ ๒ รูป
 หาร^๒กัน จะมี^๒ผล^๒หาร^๒เท่า^๒กันกับ^๒ผล^๒หาร^๒ระ^๒หว^๒าง^๒ผล^๒คูณ^๒ของ^๒ขนาด^๒ทั้ง ๓
 ของ^๒รูป^๒หนึ่ง หาร^๒ด้วย^๒ผล^๒คูณ^๒เช่น^๒เด^๒ียว^๒กัน^๒ของ^๒อ^๒ก^๒รูป^๒หนึ่ง เมื่อ^๒หาร^๒
 โดย^๒ทำ^๒น^๒ของ^๒เด^๒ียว^๒กัน



รูป ๒๗



ให้รูปหกด้านขนานมันฉาหรือรูปสี่เหลี่ยม ๒ รูป P และ P' กับ a, b, c และ a', b', c' เป็นขนาดทั้ง ๓ ของรูปทั้ง ๒ นั้น รูป ๒๗

จึงพิสูจน์ว่า $P : P' = abc : a'b'c'$

พิสูจน์ สมมติให้ Q เป็นรูปหกด้านขนานมันฉา

รูปสี่เหลี่ยมหนึ่ง ซึ่งมีขนาด a, b' และ c

$$\text{ดังนั้น } P : Q = b : b' \quad (\text{อน. อ.น. ๓๔})$$

$$\text{และ } Q : P' = ac : a'c' \quad (\text{อน. อ.น. ๓๕})$$

$$\therefore P : P' = abc : a'b'c' \quad (\text{จริง ๓})$$

ร. ท. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ เมื่อรู้ลักษณะของรูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือ

รูปที่ย่อยมเท่ากับผลคูณระหว่าง ขนาดทั้ง ๓ ของรูปนั้น

เพราะว่าถ้าตามในอุประมาณี้ให้ $a' = b' = c' = ๑$

ดังนั้น $P' = ๑ \times ๑ \times ๑ = ๑$ โดย (๑๑๘) แต่เนื้อหาของ P

นั้น ตามข้อ (๑๗/๖) เท่ากับ $P : P'$ แต่ $P : P' = abc : ๑$

โดยข้อ (อ.น. ๓๖)

เพราะฉะนั้นเนื้อหาของ $P = abc$

ข้ออนุมานที่ ๒ เมื่อรู้ลักษณะของรูปหกด้านขนานผืนผ้าหรือรูป

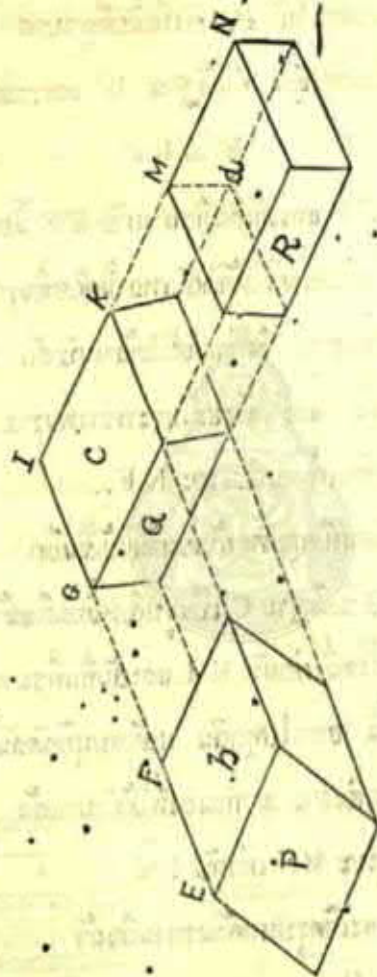
ที่ย่อยมเท่ากับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง

เพราะว่าเนื้อหาของ $P = abc$ และ ab เป็นฐานของรูปนั้น

และ c เป็นระยะสูง

อุประมาณี้เทศที่ ๓๓๗ เมื่อรู้ลักษณะของรูปหกด้านขนานใดๆ

ย่อยมเท่ากับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง



১৫৬

ให้รูปหกด้านขนาด P ซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับ V และที่ไม่มี
 นำใดเลยที่ตัดกันได้เหมือนกัน กับมีฐาน b และระยะสูง a รูป ๒๘
 จึงพิสูจน์ว่า $V = b a$

พิสูจน์ คัดเส้น EF และเส้นอื่นที่ขนานกับ EF นั้นออกไป
 ทุกเส้น แล้วดัดมุมให้คัดเส้นเหล่านั้นด้วยพรม
 ขนาด ๒ พรม ซึ่งต่างก็ตั้งได้ฉากกับเส้น
 ที่คั่นเหล่านั้น และให้ระยะในระหว่างพรม GI
 ทั้ง ๒ นั้นห่างเท่ากันกับระยะ EF

ดังนั้นจะเกิดรูปหกด้านขนาด P ขึ้นอีก
 รูปหนึ่ง Q ซึ่งมีฐาน C เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
 อีกครึ่งหนึ่งคัดเส้น KI และเส้นอื่นที่ขนาน
 กับ IK นั้น ออกไปทุกเส้น แล้วดัดมุมให้คัดเส้น
 เหล่านั้นด้วยพรมโดยทำนองที่กล่าวมาแล้ว
 และให้มีระยะ MN เท่ากับ IK

ดังนั้นจะเกิดรูปหกด้านขนาด P ขึ้น
 หรือทับ R

ในระหว่างรูปหกด้านขนานทั้ง ๒ ด้าน

$$P = Q \text{ และ } Q = R \quad (\text{อ.น. ๓๑})$$

$$\therefore P = R \quad (\text{จริง ๘})$$

และทั้ง ๓ รูปนี้ต่างก็มีระยะสูง $= a$ (อ.น. ๒ อ.น. ๑๐)

อีกประการหนึ่ง $b = c$ (๖๖)

และ $c = d$ (๓๐)

$$\therefore b = d \quad (\text{จริง ๘})$$

แต่เนื้อที่ลูกบาศก์ของ $R = da$ (อ.น. ๒ อ.น. ๓๖)

ดังนั้นเมื่อเปลี่ยนอักษรที่หมายราคา

เท่ากัน จะได้

$$V = ba \quad (\text{จริง ๘})$$

ช. ค. พ.

ข้ออนุมาน เนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปหกด้านขนานใดๆ ย่อมเท่า

กับเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปหกด้านขนานผืนผ้า หรือรูปหีบ ที่มีฐานและ
ระยะสูงเท่ากันกับรูปนั้น

แบบฝึกหัดที่ ๑๔

๑. จงหาผลหารระหว่างรูปทึบ ๒ รูป ถ้าขนาดของรูปทึบทั้ง ๒ นั้นเป็น ๓-๔-๕ รูปหนึ่ง และ ๕-๘-๑๐ อีกรูปหนึ่ง

๒. จงหาผลหารระหว่างรูปทึบ ๒ รูป ที่มีระยะสูงเท่ากัน คือ ๖ ซม. และรูปหนึ่งมีฐานกว้าง ๔ ซม. ยาว ๕ ซม. อีกรูปหนึ่งกว้าง ๘ ซม. ยาว ๑๐ ซม.

๓. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทึบรูปหนึ่ง ที่กว้าง ๒,๓๕ ม. ยาว ๓,๗๕ ม. และสูง ๑,๗๕ ม.

๔. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทึบรูปหนึ่ง ที่มีพื้นที่ฐาน ๒,๗๕ ตาราง ม. และสูง ๑,๒๗ ม.

๕. เนื้อที่ของรูปทึบใบหนึ่งมี ๑๑๕๒ ลูกบาศก์ ม. และพื้นที่ของฐานมี ๑๙๒ ตาราง ม. จงหาความสูงของทึบใบนั้น

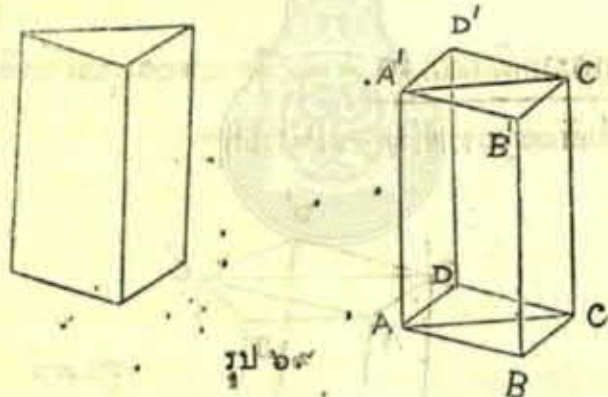
๖. เนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทึบใบหนึ่ง ที่ฐานเป็นรูปจัตุรัสเป็น ๒๗๓,๘ ลูกบาศก์ ม. และทึบใบนี้สูง ๕ ม. จงหาขนาดกว้างยาวของทึบใบนี้

๗. ถ้าทึบของหนึ่งเป็นรูปลูกบาศก์ มีเนื้อที่ ๓ ลูกบาศก์ ซม. พอดี เนื้อที่ผืนออกแล้วอาจบดพื้นที่ได้ถึง ๗๕๐๐ ตาราง ซม.

จงหาความหนาของแผ่นทองนั้นว่าเป็นเท่าใด

๘. ผลบวกของกำลัง ๒ ของเส้นทแยงมุมทั้ง ๔ เส้นของรูปหก
ด้านขนานรูปหนึ่ง ย่อมเท่ากับผลบวกของกำลัง ๒ ของด้านทั้ง ๑๒
ด้านของรูปนั่นเอง

อุปมาขณิกที่ ๓๘ เมื่อที่ถูกลบของรูปแท่งสามเหลี่ยม
ย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง



รูป ๖๘

ให้รูปแท่งสามเหลี่ยม $ABC-B'$ ซึ่งมีพื้นที่ถูกลบเท่ากับ V
และมีฐานเท่ากับ b และระยะสูง a

๑๔๖

จงพิสูจน์ว่า

$$V = ba$$

พิสูจน์ บนด้าน $AB, BC, B'B'$ ให้ตัดมุมที่สร้างรูป

หกด้านขนาน $ABCD B' \times$ ขึ้น

$$\text{ดังนั้น } ABC-B' = \frac{1}{2} ABCD-B' \quad (\text{ช.น. ๓๓})$$

$$\text{เนื้อที่ทุกภาคของ } ABCD-B' = ABCD \times a \quad (\text{ช.น. ๓๗})$$

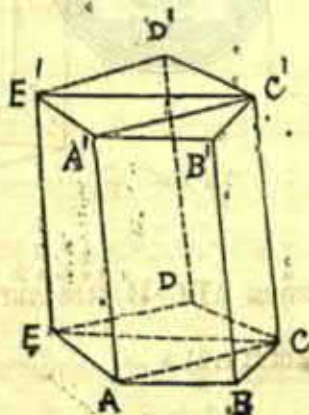
$$\text{แต่ } ABCD = 2b \quad (๒๕)$$

$$\therefore V = \frac{1}{2} (2ba) = ba \quad (\text{จริง ๕})$$

ร. ต. พ.

อุปมาณียนิเทศที่ ๓๙ เนื้อที่ทุกภาคของรูปแท่งเหลี่ยมใดๆ

ย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง



รูป ๗๐

ให้รูปแท่งเหลี่ยม AD' ซึ่งมีเนื้อที่ถูกต้องเท่ากับ V มีฐานเท่ากับ b และระยะสูง a

จึงพิสูจน์ว่า $V = ba$

พิสูจน์ โดยใช้วิธีให้นักเรียนใคร่ครวญดูตามปัญหาเหล่านี้

ก) ตามธรรมชาติย่อมจะแบ่งรูปแท่งเหลี่ยมใด ๆ ออกให้เป็นรูปแท่งเหลี่ยมอย่างง่าย ก็คือชนิดแท่งสามเหลี่ยมใดหรือไม่ ?

ข) จะแบ่งอย่างไรจึงจะเป็นชนิดที่ง่าย

ค) เนื้อที่ลดขนาดของรูปแท่งเหลี่ยมที่แบ่งออกแล้วให้เป็นอย่างง่ายนั้น มีรูปอะไร ?

ง) ผลบวกของเนื้อที่ลดขนาด ระหว่างรูปแท่งเหลี่ยมอย่างง่ายทั้งหมดนั้น เป็นเนื้อที่ของอะไร ?

จ) ผลบวกระหว่างฐานทั้งหมด ของรูปแท่งเหลี่ยมอย่างง่ายนั้น เป็นฐานของอะไร ?

ฉ) ระยะสูงของทุกรูปแท่งเหลี่ยมอย่างง่ายที่แบ่งออกนั้น เมื่อเปรียบเทียบกับ a ซึ่งมีระยะสูงของรูปแท่งเหลี่ยมที่กำหนดให้ นั้น เป็นอย่างไร ?

๑.) เมื่อใด ^๕วันจันทรคติ^๕ จะครบรอบ
ความได้วาระไร ?

^๕ทั้งนี้ควรหัดพิสดาร^๕ ได้ โดยปริวรรต

ข้ออนุমানที่ ๑ ผลหารของรูปทั้งเจ็ดย่อมมีฐานเท่ากัน จะ
เท่ากับผลหารระหว่างระยะสูงของรูปนั้น และผลหารของรูปทั้ง
เจ็ดย่อมมีระยะสูงเท่ากัน จะเท่ากับผลหารระหว่างฐานของรูปนั้น
^๕ทั้งนี้เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน

ควรนักเรียนจะพิสดาร^๕ ได้ โดยพระองค์เอง

ข้ออนุমানที่ ๒ รูปทั้งเจ็ดย่อมใดๆ ที่มีฐานและระยะสูงเท่า
กันย่อมเท่ากัน

แบบฝึกหัดที่ ๑๕

๑. จงหาเนื้อที่ทุกภาคของรูปทั้งสามเหลี่ยม ที่มีฐานและ
ระยะสูงดังต่อไปนี้

ก) ๑๗ ตาราง ซม. ๘ ซม.

ข) ๓,๕ ตาราง ซม. ๓๒ ซม.

ค) ๒๒,๓๕ ตาราง ซม. ๑,๕ ซม.

๒. การพับใบหนึ่งยาว ๑๘ ช.ม. กว้าง ๙ ช.ม.
และสูง ๘ ช.ม. จงหาพื้นที่ด้านข้างทั้ง ๒ ด้านของรูปนี้
๓. จงหาเนื้อที่ของรูปแท่งสามเหลี่ยม ที่มีระยะสูงเท่ากับ ๑๕ ช.ม. และด้านของฐานยาว ๒ ช.ม. ๕ ช.ม. และ ๔ ช.ม.
๔. จงหาเนื้อที่ของรูปแท่งเหลี่ยมมุมหนึ่ง ที่มีระยะสูงเท่ากับ ๑๕ ช.ม. และด้านหนึ่งของฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านละ ๑๐ ช.ม.
๕. ฐานของรูปแท่งเหลี่ยมตรงรูปหนึ่ง เป็นรูปขนมเบี้ยกลับ ซึ่งมีด้านหนึ่งยาว ๒๐ ช.ม. และเส้นทะแยงมุมเส้นสั้น ๒๔ ช.ม. และระยะสูงของรูปนี้ เท่ากับ ๓๐ ช.ม. จงหาพื้นที่ทั้งหมดทุกด้านของรูปนี้ และทั้งเนื้อที่ของรูปด้วย
๖. ถังน้ำใบหนึ่งยาว ๖ ม. กว้าง ๔,๕ ม. และสูง ๑๐๘ ลูกบาศก์ม. ถังจะต้องการกรรไกรด้านข้างและด้านข้างของถังน้ำด้วย
สังกะสี จะต้องการสังกะสีสักกี่ตารางเมตร
๗. รูปลูกบาศก์หนึ่งมีด้านยาว ๐ จงหาพื้นที่ของทุกด้านและเนื้อที่ของรูปทั้งหมด ทั้งความยาวของเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งของรูปลูกบาศก์

๘. เส้นทะแยงมุมของด้าน ๆ หนึ่งของรูปลูกบาศรูปหนึ่ง
ยาว d จงหาพื้นที่ด้านข้างทั้งหมดและเนื้อที่ลูกบาศของรูปนี้

๙. หีบใบหนึ่งมีขนาดกว้างยาวสูงเท่ากับ a b c จงหาเนื้อที่
ลูกบาศและพื้นที่ผิวทั้งหมดของด้านทั้งหมดของรูปนี้

๑๐. จงหาเนื้อที่ลูกบาศของรูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่ง ที่มีฐาน
เป็นรูปเหลี่ยมเรียบชนิดหกด้าน ถ้ารูปแท่งเหลี่ยมนี้สูง ๘๐ ซม. และ
ด้านใด ๆ หนึ่งของรูปเหลี่ยมเรียบยาว ๑๐ ซม.

๑๑. ถังน้ำใบหนึ่งทำด้วยเหล็กและข้างบนเปิด เหล็กหนา
๑,๕ ซม. ขนาดของถังใบนี้วัดภายในได้ กว้าง ๒,๕ ม. ยาว
๓,๗ ม. และสูง ๑,๒๐ ม. จงหาน้ำหนักของถังใบนี้ ในเมื่อ
บรรจุน้ำเต็มและเมื่อว่างเปล่า (ให้คิดน้ำหนักกรรมค่าหนัก ๑,๐๑
กิโลกรัมต่อ ๑๐ ลูกบาศ ซม. และเหล็กหนักกว่า ๗,๒ เท่า)

๑๒๓) รูปกรวยเหลี่ยม (Pyramid) รูปกุ่มเหลี่ยมชนิด
หนึ่ง ที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมมีจำนวนด้านเท่าใดก็ตาม กับหน้าอื่น ๆ
เป็นรูปอะพาราตัมเหลี่ยม ที่มีมุมหนึ่งไปรวมกัน ณ จุดยอดของด้าน



รูป ๗๑

รูปนี้เรียกว่า รูปกรวยเหลี่ยม
บรรดาน้ำทั้งหลายที่เป็นรูปสาม
เหลี่ยม และมีมุมหนึ่งไป รวมกัน
อยู่ ณ จุดยอดนั้น เรียกว่า
น้ำข้าง และเส้นรอยตัดกันของน้ำ
ทั้งหลายเหล่านี้เรียกว่าด้านข้าง

และจุดยอดที่มุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมไปรวมกันนั้น เรียกว่ายอด
ของรูปกรวยเหลี่ยมฐานของรูปกรวยเหลี่ยมนั้น อาจเป็นรูปเหลี่ยม
ชนิดใด ๆ ก็ได้ แต่โดยมากมักใช้เป็นรูปเหลี่ยมธรรมดา

๑๒๔) พื้นที่ด้านข้าง (Lateral area) ผลบวกของพื้นที่
(ตารางเหลี่ยม) ของน้ำข้างทั้งหมดของรูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่ง
เรียกว่า พื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยม

๑๒๕) ระยะสูง (Altitude) เส้นตรงหนึ่งลากผ่านจุดยอด
ลงมา ตั้งฉากกับพื้นราบของฐาน ระยะระหว่างจุดยอดถึงฐาน
ของเส้นตรงนั้นเรียกว่า ระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยม

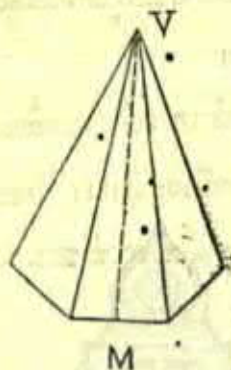
๑๒๖) รูปกรวยเหลี่ยมแบ่งเป็นชนิดตามชนิดของฐาน (Pyramid classified as to Bases) รูปกรวยเหลี่ยมนั้น จะเป็นชนิด
กรวยสามเหลี่ยมหรือกรวยสี่เหลี่ยม ฯลฯ ย่อมแล้วแต่รูปเหลี่ยม
ที่เป็นฐานนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม ฯลฯ

อนึ่งรูปกรวยสามเหลี่ยม มีหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมทั้ง ๔ หน้าและโดย
เหตุนี้จึงจะเรียกว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมทั้ง ๔ (ถ้าทุกหน้าเหมือนกัน) และ
ทั้งจะใช้หน้าหนึ่งหน้าใดของทั้ง ๔ เป็นฐานใดทรงได้

๑๒๗) รูปกรวยเหลี่ยมเรียบ (Regular Pyramid) ถ้าเม
ว่ารูปเหลี่ยมที่เป็น ฐาน ของรูปกรวยเหลี่ยมนั้น เป็นรูปเหลี่ยม
เรียบซึ่งมีศูนย์กลางทับกันสนิทกับ จุดเชิงของเส้นตรง ที่ลากผ่านจุด
ยอดลงมาถึงได้ฉากกับฐานแล้ว รูปนั้นเรียกว่า รูปกรวยเหลี่ยมเรียบ
หรือ จะเรียกว่า รูปกรวยเหลี่ยมตรงก็ได้

๑๒๘) ระยะสูงนำข้างของรูปกรวยเหลี่ยมตรง (Slant

Height of a Regular Pyramid) ในรูปกรวยเหลี่ยมตรง ระยะ



รูป ๗๒

สูงของนำข้าง นำโค่นำหนึ่งที่ลากจากจุดยอด V จนถึงจุด M เรียก
ว่าระยะสูงนำข้าง

ระยะสูงนำข้างจะเท่ากันเสมอ ไม่ว่าจะวัดเขาจากนำใด ๆ หนึ่ง
เพราะรูปกรวยเหลี่ยมตรงเท่านั้น ที่จะเรียกระยะสูงนำข้าง

๑๒๙) ลักษณะของรูปกรวยเหลี่ยมตรง (Properties of

Regular Pyramids) ลักษณะบางสิ่งของรูปกรวยเหลี่ยมตรง

ที่ยกเอามากำล่าวไว้ในที่นี้ เป็นสิ่งที่เห็นได้ โดยง่ายค้าย แม้จะไม่ต้อง

การพิสูจน์ เพียงอาศัยข้อประณัยนเทศของข้อที่ดั่งมาแล้ว ก็อาจ
เป็นองค์พยานได้ โดยชัดแจ้ง เช่น

ก) ด้านข้างทั้งหลายของรูปกรวยเหลี่ยมตรงรูปหนึ่ง ย่อม
ยาวเท่ากันทุกด้าน โดย (ธ. น. ๖)

ข) หน้าข้างทุกหน้าของรูปกรวยเหลี่ยมตรงรูปหนึ่ง ย่อมเป็น
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เหมือนกันทุกหน้า โดยข้อ (๑๓)

ค) ระยะสูงของหน้าข้างทุกหน้าของรูปกรวยเหลี่ยมตรงรูปหนึ่ง
ย่อมเท่ากันทุก ๆ ระยะ โดย (ธ. น. ๖)

๑๓๐) รูปกรวยเหลี่ยมคัทราน (Frustum of a Pyramid)

ส่วนหนึ่งของรูปกรวยเหลี่ยมที่อยู่ในระหว่างฐานกับรูปหน้าตัดรูปหนึ่ง
ที่ขนานกับฐานนั่นเองเรียกว่า รูปกรวยเหลี่ยมคัทราน

รูปหน้าตัดที่ขนานกับฐานเดิมนี้ ก็เรียกว่าเป็นฐานของรูปกรวย
เหลี่ยมคัทราน ดังนั้นสำหรับรูปชนิดนี้คงมีฐานเป็น ๒ ฐาน

ที่จริงสำหรับรูปชนิดนี้ เมื่อกล่าวให้กว้างแล้วควรเรียกว่า รูป
กรวยเหลี่ยมคัค คือส่วนหนึ่งของรูปกรวยเหลี่ยมที่อยู่ในระหว่าง
ฐานกับรูปหน้าตัดใด ๆ ที่เกิดจากพื้นราบหนึ่ง ผ่านมาภายในรูป

กรวยเหลี่ยมนั้น แต่การป็นาคันนั้นกับฐาน จึงเป็นการขี
อะเพระชั้น และตรงกับลักษณะของรูปที่กล่าวมาแล้ว

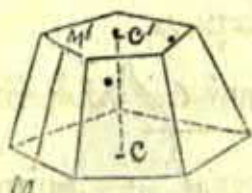
๑๓๑) ระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยมคัษฐาน (Altitude of a Frustum)

ระยะระหว่างฐานทั้ง ๒ ของรูปกรวยเหลี่ยมคั
ษฐานรูปหนึ่ง เรียกว่า

ระยะสูงของรูปนั้น

เป็นต้นว่าในรูปนี้

ระยะสูงเท่ากับ $C'C$



รูป ๑๓๑

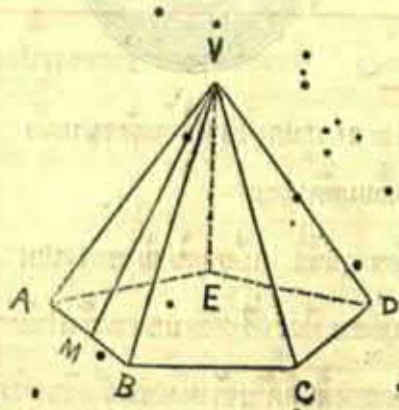
๑๓๒) นํ้าข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคัษฐาน (Lateral faces of a Frustum)

ส่วนหนึ่งของนํ้าข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคั
ษฐานระหว่างฐานทั้ง ๒ ของรูปกรวยเหลี่ยมคัษฐานนั้น เรียกว่านํ้า
ข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคัษฐาน

ถ้ารูปกรวยคัษฐานนั้น เป็นส่วนหนึ่งของรูปกรวยเหลี่ยมตรง
แล้ว นํ้าข้างทุกหน้าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคัษฐานด้านไม่เท่าที่เหมือนกัน
ทุกหน้า อนึ่งผลบวกของพื้นที่ด้านข้างทั้งหมดนั้นเรียกว่าพื้นที่ด้านข้าง
ของรูปกรวยเหลี่ยมคัษฐาน

๑๓๓) ระยะสูงนำข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคัณฐาน (Slant Height of a Frustum) ระยะสูงของรูปสี่เหลี่ยมคัณฐานค้ำไม้เท้า ซึ่งเป็นนำของรูปกรวยเหลี่ยมคัณฐาน ที่เป็นส่วนหนึ่งของรูปกรวยเหลี่ยมตรงนั้น • เรียกว่าระยะสูงนำข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคัณฐานเช่น $M'M$ ในรูป ๗๓ .

อุประมาณิเทศที่ ๔๐ พื้นที่ด้านข้าง (ตารางเหลี่ยม) ของรูปกรวยเหลี่ยมตรงรูปหนึ่ง ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่างระยะสูงนำข้าง กับระยะรอบเขตรัศของฐาน



ให้รูปกรวยเหลี่ยมตรง V-ABCDE ให้ l เป็นพื้นที่ด้านข้าง
ของรูปนี้ s ให้เป็นระยะสูงนำข้าง และ p เป็นระยะรอบเขตรูปร่างรูป ๗๔

จึงพิสูจน์ว่า $l = \frac{1}{2} s p$

พิสูจน์ รูปสามเหลี่ยมทั้งห้า VAB, VCB, VCD,
VDE และ VEA มี ด้านที่เหมือนกันทั้งสี่ (๑๒๕)
พื้นที่ของรูปหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้
 $= \frac{1}{2} s$ ฐาน (๖๗)

แต่ฐานของรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้ทั้งหมด
รวมกันเท่ากับ p (จริง ๑๑)

$\therefore$ ผลบวกของพื้นที่ของสามเหลี่ยม
เหล่านี้เท่ากับ $= \frac{1}{2} s p$ (จริง ๑)

แต่ผลบวกของพื้นที่
ของสามเหลี่ยมเหล่านี้เท่ากับ l (๑๒๔)

$\therefore l = \frac{1}{2} s p$ (จริง ๘)

ช. ต. พ.

ข้ออนุมาน พื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมตรง คำนวณ

ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่าง ระยะสูงนำข้างของรูปกรวย

เหลี่ยมตรงที่ขนาน กับผลบวกของระยะขอบเรขาคณิตของฐานทั้ง ๒

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า หาได้อย่างไร ?

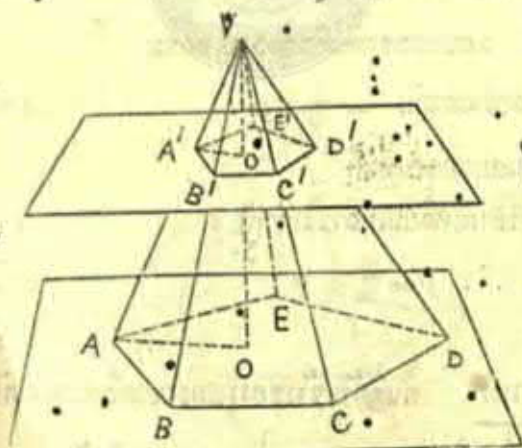
รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่าทั้งหมดเหมือนกันหรือไม่? ผลบวกของฐานต่างของรูปสี่เหลี่ยมเหล่านี้เป็นอะไร? และผลบวกของฐานบนเป็นอะไร? และผลบวกของฐานทั้งหมดเป็นอะไร? จากนั้นจะหากฎได้ความร็อนาน

ข้อประมณิเทศที่ ๔๑ ถ้ารูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถูกตัด

ออกด้วยพื้นราบหนึ่งขนานกับฐาน

ก) ด้านทั้งหลาย และระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยมนี้ จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนสั้นๆ

ข) รูปหน้าตัดที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปเหลี่ยมที่คล้ายกันกับฐาน



รูป ๑๕.

ให้รูปกรวยเหลี่ยม $V-ABCD$ ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ
ที่ขนานกับฐาน คัดเส้นข้างของรูปกรวยเหลี่ยมตามจุด $A'B'C'$
 $D'E'$ และตัดระยะถึงจุด O' รูป ๗๕

ก) จงพิสูจน์ว่า $VA':VA = VB':VB = \dots = VO':VO$
พิสูจน์ เมื่อพื้นราบ $A'D'$ ขนานกับพื้นราบ AD แล้ว (ให้)

$$\therefore A'B' // AB, B'C' // BC, A'O' // AO \text{ (อ.น. ๑๐)}$$

$$\therefore VA':VA = VB':VB = \dots = VO':VO \text{ (๕๖)}$$

ข. ค. ท.

ข) จงพิสูจน์ว่ารูปหน้าตัด $A'B'C'D'E'$ คล้ายกันกับฐาน $ABCDE$
พิสูจน์ เมื่อ $\triangle VA'B'$ คล้ายกับ $\triangle VAB$

และ $\triangle VB'C'$ คล้ายกับ $\triangle VBC$ ๑๑

ดังนั้นแล้ว (ซึ่งเห็นเพราะอะไร) จะพิสูจน์ได้อย่างไร

ว่า ด้านที่ตรงกันจะเท่ากัน ของรูปเหลี่ยม

นั้น ต่างก็สัมพันธ์กันทั้งหมด?

— ขนึ่งเส้น $A'B' // AB, B'C' // BC$ ๑๑

แล้ว (ซึ่งเป็นเพราะอะไร) จะพิสูจน์ได้อย่างไรว่า

มุมที่ตรงกันจะเท่ากัน ต่างก็เท่ากัน?

แล้วและทำไม $A'B'C'D'E'$ จึงคล้ายกับ $ABCDE$?

ข้ออนุมานที่ ๑ รูปนำตัดของรูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีฐาน
กับฐาน ทารด้วยฐาน จะมีผลหารเท่ากับผลหารระหว่างระยะของ
รูปนำตัดนั้นจากยอดกรวยกำลัง ๒ ทารด้วยระยะสูงของรูปกรวย
เหลี่ยมนั้นเองกำลัง ๒ รูป ๙๔

$$\text{เพราะ } VO' : VO = VA' : VA \quad (\text{อ. น. ๔๑})$$

$$\text{และ } \quad \quad \quad = A'B' : AB \quad (๖๐)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{VO'}{VO} = \frac{A'B'}{AB} \quad (๕๔)$$

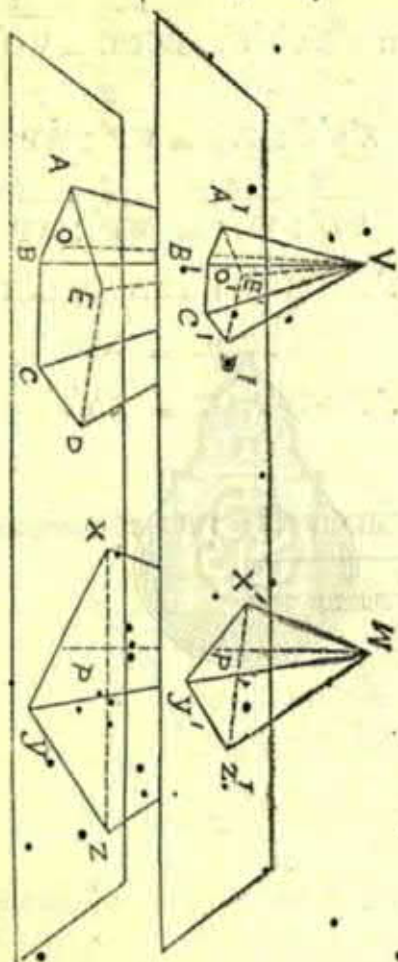
$$\text{ซึ่งในรูปเหลี่ยมที่คล้ายกัน } A'B'C'D'E' : ABCDE = \frac{VO'}{VO} \quad (๗๒)$$

ดังนั้นเมื่อแทนราคากันเข้า

$$A'B'C'D'E' : ABCDE = \frac{VO'}{VO} \quad (\text{จริง ๘})$$

ข้ออนุมานที่ ๒ รูปกรวยเหลี่ยม ๒ รูปที่มีระยะสูงเท่ากัน
และมีพื้นที่ฐานเท่ากัน ถ้าแน้มพจนราบหนึ่งขนานกับฐาน และมีระยะ
ห่างจากยอดกรวยทั้ง ๒ เท่ากันมาตัด รูปนำตัดทั้ง ๒ ที่เกิดขนาน
จะเท่ากัน

କ'ରକ



סוף לפרק

இரு

$$\text{เพราะ } A'B'C'D'E' : ABCDE = \frac{2}{VO'} : \frac{2}{VO} \text{ (ข.๑)}$$

$$\text{และ } X'Y'Z' : XYZ = \frac{2}{WP'} : \frac{2}{WP} \text{ (ข.๑)}$$

$$\text{แต่ } \frac{2}{VO'} : \frac{2}{VO} = \frac{2}{WP'} : \frac{2}{WP} \text{ (ให้)}$$

$$\therefore A'B'C'D'E' : ABCDE = X'Y'Z' : XYZ$$

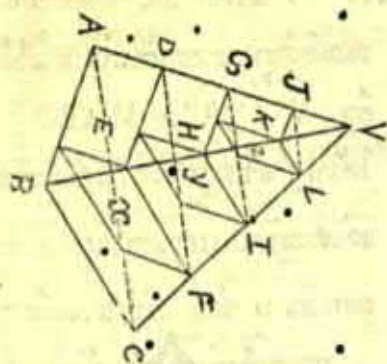
$$\text{แต่ } ABCDE = XYZ \text{ (ให้)}$$

$$\therefore A'B'C'D'E' = X'Y'Z'$$

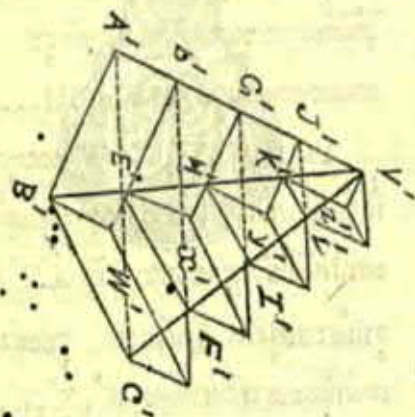
ท. ท. พ.

อุปมาณียะที่ ๔๒ รูปกรวยสามเหลี่ยม ๒ รูป ที่มีฐาน

และระยะสูงเท่ากันย่อมเท่ากัน



รูป ๑๑๑



ให้รูปกรวยสามเหลี่ยม $V-ABC$ และ $V'-A'B'C'$ ซึ่งมีฐาน
และระยะสูงเท่ากัน

จึงพิสูจน์ว่า $V-ABC$ และ $V'-A'B'C'$ เท่ากัน

พิสูจน์ สมมติว่ารูปกรวยเหลี่ยมทั้ง ๒ นี้ไม่เท่ากัน

คือ $V'-A'B'C' > V-ABC$

ให้วางฐานของรูปทั้ง ๒ นั้นบนพื้นราบอันเดียวกัน

แล้วสมมติแบ่งระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยม

ออกเป็น n ส่วน เรียกส่วนหนึ่งๆ ว่า h

ตามจุดที่แบ่งออกไปแล้วนั้น สมมติ

ให้มัพนรนาชานกับฐานมาคักรูป

กรวยออกตามรูป $DEF, GHI, \dots D'E'F', G'H'I'..$

บนรูป $A'B'C', D'E'F'$ และทุกๆ รูปหน้าคัชรนาช

ที่เกิดขึ้นนั้น ให้สมมติสร้างรูปแท่งเหลี่ยมขึ้น

และให้สันข้างทุกสันขนานกับ $A'V'$ และให้ทุกๆ

รูปมีระยะสูง h ตามในรูป รูปแท่งเหลี่ยม

เหล่านี้นะแสดงด้วยอักษร W', X', Y', Z'

และโดยทำนองเดียวกัน ให้ DEF

GHI และทุกๆ รูปหน้าคัชรนาชเป็นฐานบน

สมมติสร้างรูปแท่งเหลี่ยม X, Y, Z

ให้เส้นข้างขนานกับ AV และมีระยะสูง h

$$\text{เมื่อ } DEF = D'E'F' \quad (\text{อน.๒ อ.น.๔๑})$$

$$\text{และ } h = h$$

$\therefore$ รูปแท่งเหลี่ยม $X =$ รูปแท่งเหลี่ยม X' (อน.๒ อ.น.๓๙)

และ โดยทำนองเดียวกัน $Y = Y'$ และ $Z = Z'$

$$\text{แต่ } W' + X' + Y' + Z' > V' - A'B'C'$$

$$\text{และ } X + Y + Z < V - ABC \quad (\text{จริง ๑๑})$$

$$\therefore V' - A'B'C' - V - ABC < W' + X' + Y' + Z' - (X + Y + Z)$$

$$\text{หรือ } V' - A'B'C' - V - ABC < W'$$

ตามข้างบนนี้เห็นได้ชัดว่าต่างกันระหว่างรูปกรวยเหลี่ยม

ทั้ง ๒ นั้น จำเป็นต้องเล็กกว่า

รูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่งที่สร้างบน

อนึ่งถ้าเราทำ h ขึ้นจนไม่มากที่สุดแล้ว และ

โดยเหตุนี้ระยะสูง h ลงจนไม่มากที่สุดแล้ว W'

ก็จะทำให้เล็กหรือมีราคาน้อยกว่าเศษจำนวนใดๆ

ใดทั้งหมัด

เมื่อเป็นดังนี้ แม้เราจะสมมติให้ต่างกัน

ระหว่างรูปกรวยทั้ง ๒ นั้น มีสักเพียงใดก็ได้ W'

ก็ยังสามารถที่จะทำให้ลดลงไปได้ยิ่งกว่านั้นเสมอ

แต่นั้นเป็นของที่ไม่จริง เพราะได้พิสูจน์มาแล้ว

เดี๋ยวนี้เองว่า W' จะต้องใหญ่กว่าผลต่างกัน

ระหว่างรูปกรวย ถ้ามอง

ดังนั้นจึงเห็นได้ว่าเป็นการผิด

ในการที่เราจะสมมติให้ $V'-A'B'C' > V-ABC$

และโดยทำนองเดียวกัน ก็จะนำไปยังหนทางที่

ผิดเหมือนกัน ถ้าเราจะสมมติว่า $V-ABC > V'-A'B'C'$

$\therefore V-ABC = V'-A'B'C'$

ร. ต. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๑๖

๑. ระยะสูงนำข้างของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่งเป็น ๖ ซม.

และฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีระยะสูงเท่ากับ $2\sqrt{3}$ ซม.

จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมนี้

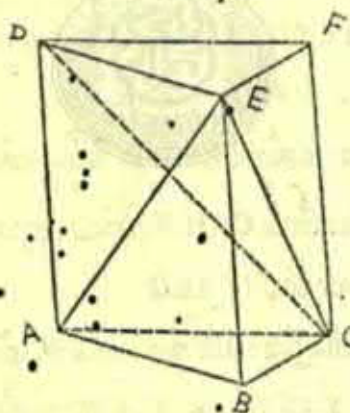
๒. ระยะสูงนำข้างของรูปกรวยสามเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง เท่ากับ

ระยะสูงของฐาน และพื้นที่ของฐานเท่ากับ $\sqrt{3}$ ตาราง ม. จงหา

พื้นที่ด้านข้างทั้งหมดของรูปกรวยเหลี่ยมนี้

๓. รูปกรวยสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีด้านตรงฉาก ๕ และด้านสั้นอีกด้านหนึ่ง ๓ รูปกรวยเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งมีระยะสูงเท่ากับกับรูปก่อน แต่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีด้านหนึ่งยาว $2\sqrt{2}\sqrt{3}$ จงพิสูจน์ว่ารูปกรวยเหลี่ยมทั้ง ๒ นมเนื้อเท่ากัน

อุปมาณียกเทศที่ ๔๓ เนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยสามเหลี่ยมย่อมเท่ากับเศษหนึ่งส่วนสามของผลคูณระหว่างฐานและระยะสูงของรูปนั้น



รูป ๗๘

ให้รูปกรวยสามเหลี่ยม E-ABC ซึ่งมีเนื้อที่ลูกบาศก์เท่ากับ V มีฐาน b และระยะสูง a รูป ๗๘

จึงพิสูจน์ว่า $V = \frac{\omega}{\pi} ba$

พิสูจน์ บนฐาน ABC ให้ตัดมุมที่สร้างรูปแท่งเหลี่ยม ABC-DEF

และตัดมุมที่เติมพจนวาทหนึ่ง CDE ที่บรรจ

เส้น DE และ EC

ดังนั้นรูปแท่งเหลี่ยมที่สร้างขึ้นมา จะเป็น

รูปที่ประกอบรูปกรวยตามเหลี่ยม

รวมอยู่ ๓ รูป E-ABC, E-CFD, E-ACD

รูปกรวยเหลี่ยม E-CFD และ E-ACD มีระยะสูง

เท่ากันและฐาน CFD กับ ACD ก็เท่ากันด้วย (๒๕)

$\therefore E-CFD = E-ACD$ (อ.น. ๔๒)

แต่รูปกรวยเหลี่ยม E-CFD ก็เป็นรูปเดียวกันกับ

รูปกรวยเหลี่ยม C-DEF ซึ่งมีระยะสูงเท่ากันกับ

รูปกรวยเหลี่ยม E-ABC

และทั้งฐาน DEF ก็เท่ากับ ABC ด้วย (อ.น. อ.น. ๒๘)

$\therefore E-CFD = E-ABC$ (อ.น. ๔๒)

$\therefore E-ABC = E-CFD = E-ACD$ (จริง ๘)

$\therefore$ รูปกรวยเหลี่ยม E-ABC $= \frac{\omega}{\pi}$ รูปแท่งเหลี่ยม ABC-DEF

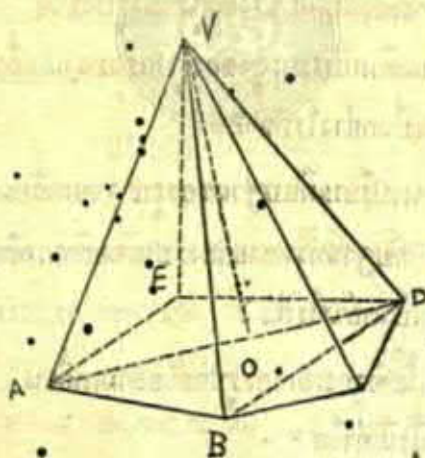
แต่เนื้อที่ตกบาตรของ $ABC-DEF = ba$.

$$\therefore V = \frac{a}{3} ba \quad (\text{จริง ๔})$$

รูป ๗๕

ข้ออนุมาน เนื้อที่ตกบาตรของรูปกรวยสามเหลี่ยม บ่อมเท่ากับเศษหนึ่งส่วนสามของเนื้อที่ตกบาตรของรูปแท่งสามเหลี่ยมที่มีฐานและระยะสูงเท่ากัน

อุปมาอันเทศที่ ๕๕ เนื้อที่ตกบาตรของรูปกรวยเหลี่ยมใดๆ บ่อมเท่ากับเศษหนึ่งส่วนสามของผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง



รูป ๗๕

ให้รูปกรวยเหลี่ยม $V-ABCDE$ ซึ่งมีเนื้อที่ลูกบาศก์เท่ากับ V
ฐาน b และระยะสูง a รูป ๗๔

จงพิสูจน์ว่า $V = \frac{1}{3} ba$

พิสูจน์ สมมติให้เพิ่มพี้นวราบ ๒ พี้นวราบ ผ่านมาภายในรูปกรวย
เหลี่ยม ให้พี้นวราบหนึ่ง ๆ บรรลุถึง VD

และเส้นทะแยงมุมของฐาน คือ DA และ DB

พี้นวราบเหล่านี้จะแบ่งรูปกรวยเหลี่ยมนั้น

ออกเป็นรูปกรวยสามเหลี่ยมถึง ๓ รูป

จะเปรียบเทียบระยะสูงของรูปกรวย

เหลี่ยมเต็มกับระยะสูงของรูปกรวยสามเหลี่ยม

ได้ว่าเป็นอย่างไรกัน ?

จะเปรียบเทียบฐานของรูปกรวยเหลี่ยม

เต็ม กับฐานทั้งหลายของรูปกรวยสามเหลี่ยม

ได้ว่าเป็นอย่างไรกัน ?

เนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยสามเหลี่ยม

รูปหนึ่งมีเท่าใด ?

ฉะนั้นเมื่อรวมเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวย

ถ้าให้ลดมันเข้าด้วยกันทุกตัวจะเป็น

เนื้อที่ตกมาของอะไร ?

ให้รวมความตามความประสงค์ของ

อุประมาขึ้นเทศน์

ข้ออุปมา เนื้อที่ตกมาของรูปกรวยเหลี่ยม ๒ รูปหารกัน

จะมีผลหารเท่ากับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูงของรูปหนึ่ง หารด้วยผลคูณอย่างเดียวกันของอีกรูปหนึ่ง รูปกรวยเหลี่ยมที่มีฐานเท่ากันหารกัน จะมีผลหารเท่ากับระยะสูงของรูปนั้น ๆ หารกัน รูปกรวยเหลี่ยมที่มีระยะสูงเท่ากันหารกัน จะมีผลหารเท่ากับฐานของรูปนั้น ๆ หารกัน ทั้งเนื้อที่หารโดยทำนองเดียวกัน อนึ่งรูปกรวยเหลี่ยมที่มีฐานและระยะสูงเท่ากันย่อมเท่ากัน

แบบฝึกหัดที่ ๑๗

๑. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบ ซึ่งมีระยะสูงห้าข้าง และระยะรอบเขตรฐาน ดังต่อไปนี้

$$ก. s = ๓๔ \text{ ฟ. ม.} \quad p = ๕๗ \text{ ฟ. ม.}$$

$$ข. s = ๓,๗๕ \text{ ฟ. ม.} \quad p = ๐,๗๘ \text{ ฟ. ม.}$$

$$ค. s = ๑,๐๕๘ \text{ ม.} \quad p = ๒,๕๓๑ \text{ ม.}$$

๒. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคัคนาน ซึ่งมีระยะ
สูงนำข้าง ของรูปกรวยเหลี่ยมคัคนาน และระยะขอบเขตของฐาน
ทั้งสี่ของ ดังต่อไปนี้

$$ก. s = ๔ \text{ ฟ.ม. } p = ๘ \text{ ฟ.ม. } p' = ๖ \text{ ฟ.ม.}$$

$$ข. s = ๓,๗ \text{ ม. } p = ๕,๕ \text{ ม. } p' = ๕,๒ \text{ ม.}$$

$$ค. s = ๔,๓๒๗ \text{ ม. } p = ๗,๒๑๘ \text{ ม. } p' = ๖,๓๗๒ \text{ ม.}$$

๓. จงหาเนื้อที่ตกบาตรของรูปกรวยเหลี่ยม ซึ่งมีระยะสูงและ
พื้นที่ของฐาน ดังต่อไปนี้

$$ก. a = ๗ \text{ ฟ.ม. } b = ๔ \text{ ตารางฟ.ม.}$$

$$ข. a = ๗,๕ \text{ ฟ.ม. } b = ๑๒,๓ \text{ ตารางฟ.ม.}$$

$$ค. a = ๒๗,๕๑๒ \text{ ม. } b = ๓๒๕,๘๒๑ \text{ ตารางม.}$$

๔. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบ ซึ่งมีระยะสูง
นำข้างและจำนวนด้านของฐานและระยะความยาวของด้านหนึ่ง ๆ นั้น
ดังต่อไปนี้

$$ก. s = ๒,๓ \text{ ฟ.ม. } n = ๔ \text{ } l = ๒,๑ \text{ ฟ.ม.}$$

$$ข. s = ๓,๗ \text{ ฟ.ม. } n = ๖ \text{ } l = ๒,๗ \text{ ฟ.ม.}$$

$$ค. s = ๕,๓๓ \text{ ม. } n = ๘ \text{ } l = ๓,๕ \text{ ม.}$$

๕. จงหาเนื้อที่ของรูปกรวยเหลี่ยม ซึ่งมีระยะสูงและ
ลักษณะของฐาน ดังต่อไปนี้

ก. $h = ๗$ ซม. ฐานเป็นจัตุรัสซึ่งมีด้านหนึ่งยาว ๒ ซม.

ข. $h = ๖,๕๑$ ซม. ฐานเป็นจัตุรัสซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว

$๓\sqrt{๒}$ ซม.

ค. $h = ๘,๕$ ซม. ฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาวด้าน

ละ ๓, ๔, ๕ ซม.

แบบฝึกหัดที่ ๑๘

๑. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบ ซึ่งมีระยะสูง
หน้าข้าง ๘ ซม. และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมเรียบ ซึ่งมีด้านหนึ่ง
ยาว ๘ ซม.

๒. จงหาพื้นที่ทั้งหมดทุกด้านของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบ ซึ่งมี
ระยะสูงหน้าข้าง ๑๘ ซม. และฐานเป็นจัตุรัสซึ่งมีด้านเท่ากับ ๘ ซม.

๓. เนื้อที่ผิวข้างของรูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น ๒๐ ลูกบาศก์
เมตร และด้านของฐานซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยม ยาว ๕ ซม. ๔ ซม.
และ ๓ ซม. จงหาระยะสูงของรูปกรวยเหลืมนั้น

๔. จงหาเนื้อที่ของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง ซึ่งมี
ฐานเป็นจตุรคี่ มีด้านหนึ่งยาว ๔๐ ซม. และด้านข้างยาว ๑๐ ซม.

๕. จงหาเนื้อที่ของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง ซึ่งมี
ระยะสูงนำข้าง ๑๒ ซม. และมีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่
บรรจุอยู่ในวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมีรัศมีเท่ากับ ๑๐ ซม.

๖. พื้นที่ด้านข้างทั้งหมดของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่งเท่า
กับ ๕ และมีฐานเป็นจตุรคี่ซึ่งมีด้านเท่ากับ ๓ จงหาระยะสูงของรูป
กรวยเหลี่ยมนี้

๗. พื้นที่ด้านข้างทั้งหมดของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่งเท่า
กับ ๕ และมีฐานเป็นจตุรคี่ซึ่งมีด้านเท่ากับ ๓ จงหาเนื้อที่ของ
รูปกรวยเหลี่ยมนี้

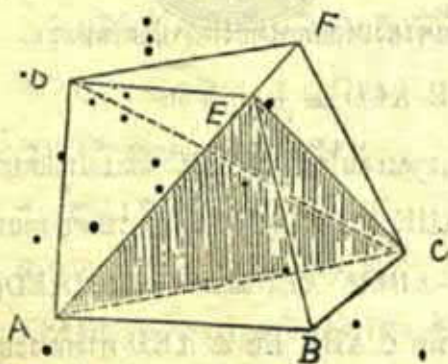
๘. ด้านทั้ง ๔ ของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบ ซึ่งมีฐานเป็นรูป
จตุรคี่รูปหนึ่ง ยาวเท่ากันทั้ง ๔ ด้าน มีพื้นที่ทั้งหมดทุกด้านเท่ากับ ๕
จงหาความยาวของด้านนี้

๙. รูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง ซึ่งมีฐานเป็นรูปจตุรคี่ มี
ระยะสูงเท่ากับ ๒ และพื้นที่ทั้งหมดทุกด้าน ๕ จงหาค้นของฐานว่า
ยาวเท่าใด

๑๐. คงจะแสดงให้เห็นว่า เราสามารถจะหาเนื้อลูกบาศก์ของรูปก้นเหลี่ยมใดๆ ได้โดยอาศัยวิธีแบ่งรูปก้นเหลี่ยม นั้นออกเป็นหลายรูปกรวยเหลี่ยม

อุปมาณียะเทศที่ ๔๕ เนื้อลูกบาศก์ของรูปกรวยสามเหลี่ยมคัตถุนานรูปหนึ่ง ย่อมเท่ากับผลรวมของเนื้อที่ของกรวยเหลี่ยม รูปที่มีระยะสูงเท่ากับระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยมคัตถุนานนั้น แต่ฐานของรูปหนึ่งเท่ากับฐานล่าง อีกรูปหนึ่งเท่ากับฐานบน และอีกรูปหนึ่งเท่ากับตำแหน่งในของบัญญัติสัมพัทธ์ (Mean Proportional) ระหว่างฐานทั้งสอง ของรูปกรวยเหลี่ยมคัตถุนาน

รูป ๔๐



ให้รูปทรงแสดงตามเหลี่ยมคี่ขนาน ABC-DEF ซึ่งมี ABC
หรือ b เป็นฐานล่าง DEF หรือ b' เป็นฐานบน และ a เป็นระยะ
สูง รูป ๘๐

จึงพิสูจน์ว่า $ABC-DEF = \frac{a}{3} ab + \frac{a}{3} ab' + \frac{a}{3} a \sqrt{bb'}$

พิสูจน์ สมมติให้เพิ่มพินทุบนึ่งผ่านมายาว A, E และ C
และอีกพินทุบนึ่งผ่านมายาว C, D และ E
ทั้งนี้จะแบ่งรูปทรงแสดงเหลี่ยมคี่ขนานออกเป็น

รูปทรงแสดงเหลี่ยม ๓ รูป

$$\text{ทั้งนี้ } E-ABC = \frac{a}{3} ab$$

$$\text{และ } C-DEF = \frac{a}{3} ab' \quad (\text{ข.น. ๔๓})$$

ในที่นี้จึงยังเหลือที่จะต้องพิสูจน์แต่เพียงว่า

$$E-ACD = \frac{a}{3} a \sqrt{bb'}$$

เราจะเห็นได้ว่า E-ABC นั้นเป็นรูปเดียวกันกับ
C-ABE และ E-ACD นั้นเป็นรูปเดียวกันกับ C-AED
แต่ $C-ABE : C-AED = \Delta ABE : \Delta AED$ (ข.น. ๔๔)
อนึ่งเมื่อ ΔABE และ ΔAED ต่างก็มีระยะสูงเท่ากัน
ก็ระยะสูงของเหลี่ยมคี่ขนานคั่นไม่เท่า ABED

$$\therefore \triangle ABE : \triangle AED = AB : DE \quad (\text{บ.๙})$$

$$\therefore C-ABE : C-AED = AB : DE \quad (\text{จริง ๘})$$

$$\text{หรือ } E-ABC : E-ACD = AB : DE \quad (\text{จริง ๙})$$

และโดยทำนองเดียวกัน เพราะ E-ACD

และ E-CFD มีจุดยอดร่วมกัน และมีฐานอยู่

ในพื้นราบอันเดียวกัน ACFD

$$\text{ดังนั้น } E-ACD : E-CFD = \triangle ACD : \triangle CFD \quad (\text{บ.น. ๕๔})$$

ซึ่งเมื่อ $\triangle ACD$ และ $\triangle CFD$ ต่างก็มีระยะสูง

เท่ากัน คือระยะสูงของดัดเหลี่ยมรนาท้าน

ไม่เท่า ACFD

$$\therefore \triangle ACD : \triangle CFD = AC : DF \quad (\text{บ.๙})$$

$$\therefore E-ACD : E-CFD = AC : DF \quad (\text{จริง ๘})$$

$$\text{แต่ } \triangle DEF \text{ คล้ายกันกับ } \triangle ABC \quad (\text{บ.น. ๔๑})$$

$$\therefore AB : DE = AC : DF \quad (\text{๕๘})$$

$$\therefore E-ABC : E-ACD = AC : DF \quad (\text{จริง ๘})$$

$$\therefore E-ABC : E-ACD = E-ACD : E-CFD \quad (\text{จริง ๘})$$

(๖) แต่ E-CFD นั้นเป็นรูปเดียวกันกับ C-DEF

(๗) ซึ่งได้พิสูจน์มาแล้วว่าเท่ากับ $\frac{a}{m} ab'$

$$\therefore \frac{a}{m} ab : E-ACD = E-ACD : \frac{a}{m} ab' \quad (\text{จริง ๔})$$

$$\therefore E-ACD = \sqrt{\frac{a}{m} ab \cdot \frac{a}{m} ab'} \quad (๕๒)$$

$$\therefore E-ACD = \frac{a}{m} a \sqrt{bb'}$$

$$\therefore E-ABC + C-DEF + E-ACD =$$

$$\frac{a}{m} ab + \frac{a}{m} ab' + \frac{a}{m} a \sqrt{bb'} \quad (\text{จริง ๑})$$

$$\text{นั่นคือ } ABC-DEF = \frac{a}{m} ab + \frac{a}{m} ab' + \frac{a}{m} a \sqrt{bb'} \quad (\text{จริง ๔})$$

ข. ก. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ โดยอาศัยข้อประมัตินี้เท่าที่ได้พิสูจน์มาแล้ว

จะวางเกณฑ์ไว้ว่าเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยเหลี่ยมคัศฐาน

$$\text{เท่ากับ } \frac{a}{m} a (b + b' + \sqrt{bb'})$$

ข้ออนุมานที่ ๒ เนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยเหลี่ยมคัศฐานใดๆ

ย่อมเท่ากับผลบวกของเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยเหลี่ยม ๓ รูป ที่มี

ระยะสูงเท่ากับระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยมคัศฐานนั้น แต่ฐาน

ของรูปหนึ่งเท่ากับฐานล่าง อีกรูปหนึ่งเท่ากับฐานบน และอีก

รูปหนึ่งเท่ากับค่าหนึ่งในของบัญญัติสัมพันธ์ (Mean Proportional) ระหว่างฐานทั้ง ๒ ของรูปกรวยเหลี่ยมคัณฐาน

เพราะรูปกรวยเหลี่ยมใด ๆ อาจแบ่งออกให้เป็นรูปกรวยสามเหลี่ยมได้หลายรูปเสมอ และเมื่อแบ่งออกแล้วเช่นนั้น รูปกรวยเหลี่ยมคัณฐานรูปเดิม ก็กลายเป็นรูปกรวยสามเหลี่ยมคัณฐานไปด้วย

ซึ่งรูปกรวยสามเหลี่ยมที่เป็นรูปแบ่งนั้น ต่างก็มีระยะสูงเท่ากัน ดังนั้นระยะสูงของรูปกรวยสามเหลี่ยมคัณฐานก็เท่ากันด้วย เมื่อเป็นเช่นนั้น เราอาจสามารถหาเนื้อทุกภาคของรูปหนึ่ง ๆ ได้ โดย อ.น. ๔๕ และเมื่อบวกกันเข้าทั้งหมด ก็จะเป็นเนื้อทุกภาคของรูปกรวยเหลี่ยมคัณฐานรูปเดิม

๑๓๔) รูปกอนเหลี่ยมแบ่งออกก็เป็นหลายชนิดตามจำนวนของหน้า (Polyhedrons classified as to faces) การเรียกชนิดของรูปกอนเหลี่ยมว่าเป็นชนิดใดนั้น ย่อมแล้วแต่รูปนั้น ๆ มีกี่หน้า ถ้ามี ๓ หน้าก็เรียกว่ารูปกอนเหลี่ยมสามหน้า ถ้ามี ๔ หน้าก็เรียกว่ารูปกอนเหลี่ยมสี่หน้า ถ้ามี ๕ หน้าก็เรียกว่ารูปกอนเหลี่ยมห้าหน้า ถ้ามี ๖ หน้าก็เรียกว่ารูปกอนเหลี่ยมหกหน้า ฯลฯ

๑๓๕) รูปก้อนเหลี่ยมเรียบ (Regular Polyhedron) รูป

ก้อนเหลี่ยมใด ๆ นี้นัก ๆ นำเป็นรูปเหลี่ยมเรียบที่เหมือนกัน และ
 ก้อนหลายหน้าทุก ๆ มุมของรูปนั้นต่างก็เท่ากันทั้งหมดด้วย รูปก้อน
 เหลี่ยมนี้เรียกว่ารูปก้อนเหลี่ยมเรียบ

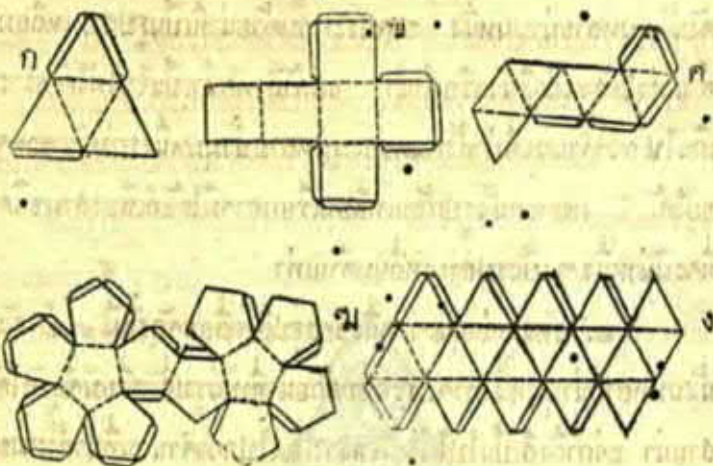
จะพิจารณาคือไปในข้อ ๑๓๖ ว่า รูปก้อนเหลี่ยมเรียบนั้น จะมี
 ใดแต่เพียงห้ารูปเท่านั้น ซึ่งเรียกว่ารูปก้อนเหลี่ยมเรียบที่มีหน้า
 รูปก้อนเหลี่ยมเรียบที่มีหน้าสามเหลี่ยม รูปก้อนเหลี่ยมเรียบที่มีหน้าสี่เหลี่ยม รูป
 ก้อนเหลี่ยมเรียบที่มีหน้าห้าเหลี่ยม และรูปก้อนเหลี่ยมเรียบที่มีหน้าหกเหลี่ยม

รูป ๘๑



รูปเหล่านี้อาจสร้างได้ด้วยวิธีที่กระต่าย และทำดังต่อไปนี้

รูป ๘๒



ตัดกระดาษออกตามแนวเส้นคำของรูปที่เขียนไว้ข้างบนนี้ (แนว
 รอยบนอก) แล้ว จะดูด้วยแบ่งแยกตามแนวที่มีเส้นคำของเส้น
 เกยกัน พับรูปเหล่านี้เข้าตามแนวจุด แล้วมันก็ตั้งต่าง ๆ
 ด้วยแบ่งทศหาไว้แล้ว

๑๓๖) โจทย์ รูปที่ขึ้นเหลี่ยมนั้นเรียงอย่างใดก็ได้รูป ?

เฉลย มุมหลายหน้ารวมตามมุมหนึ่ง จำแนกคี่ของมีย่างน้อย
 สามหน้าและผลบวกของมุมของหน้าทั้งหมดของมุมหลายหน้า ก็ยังมีน้อยกว่า ๓๖๐

๑. เพราะว่ามุม ๆ หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามี 60° ดังนั้นมุมหลายมุมหนึ่ง อาจประกอบด้วยน้ำที่เบ็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าได้สามน้ำหรือห้า แต่ถ้างัดน้ำเบ็นไปไม่ได้เพราะเกินไป กว่าจำนวนน้ำทั้งหมดของมุมหลายมุมหนึ่งรวมกัน อาจชยได้ เพราะถ่มรูปก่อนเหลี่ยมเรียบอาจมีได้แต่เพียงสามชนิดที่จะมีน้ำหนึ่ง ๆ เบ็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

๒. เพราะว่ามุม ๆ หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมี 90° ดังนั้นมุมหลายมุมหนึ่งอาจประกอบด้วยน้ำที่เบ็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้สามน้ำ แต่ถ้างัดเบ็นไปไม่ได้ เพราะเกินไปกว่าจำนวนน้ำทั้งหมดของมุมหลายมุมหนึ่งรวมกันอาจชยได้ เพราะถ่มรูปก่อนเหลี่ยมเรียบอาจมีได้แต่เพียงหนึ่งชนิดเท่านั้น ที่จะมือน้ำหนึ่ง ๆ เบ็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

๓. เพราะว่ามุม ๆ หนึ่งของรูปห้าเหลี่ยมเรียบมี 108° (โดย ๓๓) ดังนั้นมุมหลายมุมหนึ่งอาจประกอบด้วยน้ำที่เบ็นรูปห้าเหลี่ยมเรียบได้สามน้ำเท่านั้น เพราะถ้างัดน้ำเบ็นไปไม่ได้ เพราะเกินไปกว่าน้ำทั้งหมดของมุมหลายมุมหนึ่งรวมกันอาจชยได้ เพราะถ่มรูปก่อนเหลี่ยมเรียบอาจมีได้แต่เพียงหนึ่งชนิดเท่านั้น ที่จะมือน้ำหนึ่ง ๆ เบ็นรูปห้าเหลี่ยมเรียบ

๔. ผลบวกของมุมด้านมุมของรูปหกเหลี่ยมเรียบก็ได้พอดี
 ๓๖๐° ถ้าเส้นของรูปเจ็ดเหลี่ยมเรียบ ก็เกินกว่า ๓๖๐° ๑๘๑

ดังนั้นรูปกอนเหลี่ยมเรียบจึงจะไม่น่าเป็นรูปอย่างอื่น ๆ คือไปอีก
 ไม่ได้จึงต้องมีแค่เพียงห้าชนิด ตามที่พิสูจน์มาแล้วเท่านั้น

หนึ่งรูปกอนเหลี่ยมเรียบเหล่านี้ เป็นจำพวกรูปที่ค่าด้านของ
 ท่านมหานักปราชญ์กรีกคนหนึ่งนามว่าปลาโต (Plato) ได้พากัน
 ตรวจตราศึกษามาแล้วอย่างพิศดาร ดังนั้นบางท่านก็เรียกรูปเหล่านี้
 ว่า รูปกอนเหลี่ยมเรียบของปลาโต

แบบฝึกหัดที่ ๑๘

๑. จงหาเนื้อที่ของรูปกรวยเหลี่ยมกัศฐาน ซึ่งมี
 รัศมีฐานและฐานทั้ง ๒ ของรูปนี้ ดังต่อไปนี้

ก) $a = ๓$ ซม. $b = ๘$ ตาราง ซม. $b' = ๒$ ตาราง ซม.

ข) $a = ๔, ๕$ ซม. $b = ๘, ๓$ ตาราง ซม. $b' = ๓$ ตาราง ซม.

ค) $a = ๒, ๓, ๒$ ซม. $b = ๑๗, ๓๒$ ตาราง ซม. $b' = ๕, ๗, ๘$ ตาราง ซม.

๒. รูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งสูง ๒ เมตร พื้นที่ของฐานมี ๘
 ตารางเมตร รูปกรวยนี้ถูกตัดออกด้วยพินราบหนึ่งขนานกับฐาน
 ห่างจากยอดกรวยลงมา ๑ เมตร จงหาเนื้อที่ของรูปกรวย
 เหลี่ยมกัศฐานของรูปนี้

๓. รูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งสูง ๓ เมตร พื้นที่ของฐานมี ๘ ตาราง
เมตร รูปกรวยนี้ถูกตัดออกด้วยพื้นราบหนึ่งขนานกับฐานและห่างจาก
ฐาน ๒ เมตร จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยเหลี่ยมคั้ขนานของรูปนี้

๔. ฐานล่างของรูปกรวยเหลี่ยมคั้ขนานรูปหนึ่ง เป็นรูป
จัตุรัสซึ่งมีด้านยาว ๔ เมตร ด้านของฐานบนนั้นยาวครึ่งหนึ่งของ
ฐานล่าง ส่วนระยะสูงเท่ากันกับด้านหนึ่งของฐานบน จงหาเนื้อที่
ลูกบาศก์ของรูปกรวยเหลี่ยมคั้ขนานนี้

๕. ฐานล่างของรูปกรวยเหลี่ยมคั้ขนานรูปหนึ่งเป็นจัตุรัสซึ่ง
มีด้านยาว ๓ ม. พื้นที่ของฐานบนเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของฐานล่าง และ
ระยะสูงของรูปกรวยเหลี่ยมคั้ขนานนั้นเป็น ๒ เมตร จงหาเนื้อที่ลูก
บาศก์ของรูปนี้

๖. รูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งมีอยู่หกตัว ด้านหนึ่ง ๆ ยาว ๑
เมตรพอดี จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยเหลี่ยมนี้

๗. รูปถื่นเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง มี ๔ ด้านหนึ่ง มีเนื้อที่ลูกบาศก์
๒๖ ลูกบาศก์เมตร จงหาความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปนี้

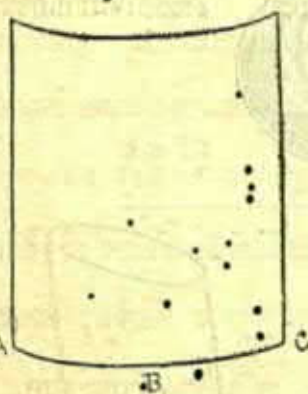
๘. ฐานของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง เป็นจัตุรัสมีด้านยาว
๑ เมตร ระยะสูงมีค่ายาว ๘ เมตร จงหาพื้นที่ด้านข้างทั้งหมดของรูปนี้

๙. ตามสูตรสำหรับหาเนื้อที่ลูกบาศก์ในข้อ ๑๘. น. ๔๕ มีว่า
 $V = \frac{\pi}{3} a (b + b' + \sqrt{bb'})$ ถ้าเมื่อ $b' = 0$ จะได้ความว่าอะไร
 และสำหรับรูปชนิดใด? และเมื่อ $b = b'$ หมายความว่าอะไร เป็น
 รูปชนิดใด?

๑๓๗) พื้นที่ทรงกระบอก (Cylindric Surface) พื้นที่เกิด

ขึ้นโดยอาการเคลื่อนตำแหน่งของเส้นตรงเส้นหนึ่ง โดยอาการทรง
 ตัวให้ขนานกับอีกเส้นตรงหนึ่งเดิม และทั้งเคลื่อนไปตามรอยของ
 เส้นโค้งที่กำหนดให้อีกเส้นหนึ่ง ที่

รูป ๘๓



ไม่อยู่ในพนรามอันเดียวกันของเส้น
 ตรงที่ตรงแบบหลอดขยมน หรืออก
 นัยหนึ่งว่า วลของเส้นตรงเส้น
 หนึ่ง ที่มตลักษณะว่า ทุกๆระ
 ที่เคลื่อนตัวไปนั้น ต้องขนานกับ
 เส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ และ
 ทั้งเคลื่อนตัวไปตามเส้นโค้งเส้นหนึ่ง

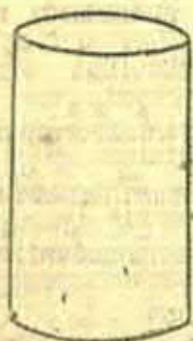
ที่กำหนดให้ ซึ่งไม่อยู่ในพนรามอันเดียวกันกับเส้นตรงที่กำหนดให้
 นน พนทรนคณเรียกว่า พนททรงกระบอก

เส้นตรงที่เกิดขึ้นตัวไปนั้นเรียกว่า เส้นกำเนิด (Generatrix) และเส้นโค้งที่กำหนดให้เบ้นั้นทางเดินนั้นเรียกว่า เส้นนำ (Directrix) ตามในรูป ๘๓ A B C เป็น เส้นนำ

๑๘๔) อะวยะ (Elément) ในขณะหนึ่งขณะใดที่เส้นกำเนิดหยุดนิ่งอยู่ ในขณะนั้นเราเรียกเส้นกำเนิดว่าเป็นอะวยะของพื้นที่ทรงกระบอก

๑๘๕) รูปกระบอก (Cylinder) พื้นฐานของวัตถุสิ่งหนึ่งซึ่งมีพื้นที่ขอบเขตเป็นพื้นที่ทรงกระบอก และต้องพื้นราบที่ขนานกัน เรียกว่ารูปกระบอก

รูป ๘๔



รูป ๘๕



โดยอาศัยลักษณะที่กล่าวแล้ว จึงเห็นได้ว่า ทุกๆ อะระวีจะ
ของรูปกระบอกรูปหนึ่งย่อมเท่ากัน

อนึ่งส่วนต่างๆ ที่เรียกว่า ฐาน พื้นทึบข้าง และระบะสูง
เหล่านี้ ย่อมเป็นไปโดยทำนองเดียวกันกับที่ใช้มาแต่สำหรับรูป
แท่งเหลี่ยม

๑๔๐) รูปกระบอกตรงและเอน (Right and Oblique-
Cylinders) รูปกระบอกรูปหนึ่ง ซึ่งมีทุกๆ อะระวีจะตั้งได้ฉากกับ
ฐานทั้งสอง รูปนี้เรียกว่ารูปกระบอกตรง รูป ๘๔ แต่ไม่เป็น
ไปตามลักษณะที่กล่าวแล้ว รูปนี้เรียกว่า รูปกระบอกเอน รูป ๘๕

๑๔๑) รูปหน้าตัดของรูปกระบอก (Section of a Cylinder)
รูปที่เกิดขึ้นโดยเส้นรอบวงตัดกันระหว่างพื้นราบหนึ่ง กับรูปกระบอก
เรียกว่า รูปหน้าตัด ของรูปกระบอก

อุปมาขณิกเทศที่ ๔๖ รูปหน้าตัดทุกๆ รูป ของรูปกระบอก
รูปหนึ่ง ซึ่งเกิดจากพื้นราบหนึ่ง ที่ผ่านไปตามอะระวีหนึ่ง ย่อม
เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูป ๘๖

ให้รูปกระบอก AC และรูปหน้าตัด ABCD ซึ่งเกิดจากพื้นราบ
หนึ่ง ที่นำมาตามแนวระนาบ AB รูป ๘๖

จึงพิสูจน์ว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
พิสูจน์ ในพื้นราบ ABCD ถ้าเส้นตรงขนานเส้นหนึ่ง

ให้ผ่านจุด D และให้ขนานกับ AB

เส้นตรงที่ลากขึ้นนั้น ย่อมเป็นแนวระนาบ

หนึ่งของพื้นที่ทรงกระบอก

(๑๓๘)

แต่เมื่อเส้นตรงนี้ ในขณะเดียวกันบรร
ลุถึงในพื้นราบและในพื้นททรงกระบอก จึงเป็น
เส้นรอยตัดกันระหว่างพื้นที่ทั้งสองนี้ และจำ
ต้องเป็นเส้นเดียวกันกับ DC

ดังนั้น DC จึงทับกันสนิทกับเส้นตรง
ที่ลากขึ้นให้ขนานกับ AB

ดังนั้น $DC \parallel AB$

อีกประการหนึ่ง $AD \parallel BC$ (อ.น. ๑๐)

$\therefore ABCD$ จึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู (๒๓)

ข. ก. พ.

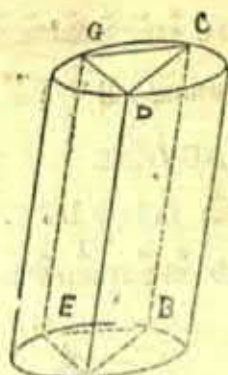
ข้ออนุมาน รูปนาคัตทุก ๆ รูปของรูปกระบอกตรงรูปหนึ่ง ซึ่ง
เกิดขึ้นจากพื้นราบหนึ่ง ที่ผ่ามาตามระนาบหนึ่ง ย่อมเป็นรูปสี่เหลี่ยม
คางหมู

๑๔๒) รูปกระบอกกลม (Circular Cylinder) รูปกระบอก

ใด ๆ ที่มีฐานทั้งสองเป็นรูปวงกลม รูปนี้เรียกว่ารูปกระบอกกลม
รูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่ง เป็นรูปที่เกิดขึ้นจากอาการหมุน
ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่ง โดยอาศัยด้านใดด้านหนึ่งเป็นแกน
หมุนก็ได้ โดยเหตุนี้รูปนี้คนเรามากเรียกอีกอย่างหนึ่งว่ารูปกระบอก
โดยอาการหมุน

อุปมาขนิเทศที่ ๔๗ ฐานทั้งสองของรูปกระบอกรูปหนึ่ง

ย่อมเป็นรูปที่เหมือนกัน



รูป ๘๗

ให้รูปกระบอก AC ที่มีฐาน ABE และ DCG รูป ๘๗
จงพิสูจน์ว่า ABE เหมือนกับ DCG

พิสูจน์ ให้ A, B, E เป็นจุดใดๆ สามจุด บนรอบเวรี
ของฐานล่าง และ AD, BC, EG เป็นระนาบ
ของพื้นที่ทรงกระบอก

ลากเส้น AB, AE, EB, DC, DG, GC

ดังนั้น AD, BC, EG ทั้งสามเส้นขนานกัน (๑๓๕)

และขนานกันด้วยทั้งสาม (๑๓๗)

$\therefore AB = DC, AE = DG, EB = GC$ (๒๗)

$\therefore \triangle ABE$ เหมือนกับ $\triangle DCG$ (๑๓)

ดังนั้นให้ยกฐานล่างขึ้นไปกับฐานบน

ให้ $\triangle ABE$ เท่ากันสนิทกับ $\triangle DCG$ ดังนั้น A

B และ E ต่างก็สัมผัสกับจุด D, C , และ G

ดังนั้นทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นรอบเว้าของฐาน

ล่าง ก็จะมีทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นรอบเว้าของฐานบน

ดังนั้นฐานทั้งสองจึงเหมือนกัน (๘).

ช. ต. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ถ้ารูปหน้าตัดตั้งรูป ของรูปกระบอกขนาน
กันและตัดทุก ๆ ๑ ระยะของพื้นที่ทรงกระบอกนั้นแล้ว รูปหน้าตัดทั้ง
สองนั้นย่อมเหมือนกัน

ข้ออนุมานที่ ๒ รูปหน้าตัดใด ๆ ของรูปกระบอก ที่ขนาน
กับฐานย่อมเหมือนกับฐาน

ข้ออนุมานที่ ๓ เส้นตรงที่ลากให้ผ่านศูนย์กลางของฐานทั้ง
สองของรูปกระบอกกลม ย่อมผ่านไปยังศูนย์กลางของทุก ๆ รูปหน้า
ตัดของรูปกระบอกกลมที่ขนานกับฐานนั้นด้วย

๑๔๓) พื้นราบสัมผัส (Tangent plane) พื้นราบหนึ่งที่มีบรรจุ
ระยะหนึ่งของรูปกระบอกใด ๆ รูปหนึ่ง แต่ไม่เข้าเข้าไปในพื้น
รูปกระบอกนั้น พื้นราบเช่นนั้นเรียกว่าพื้นราบสัมผัสกับรูปกระบอก

๑๔๔) การสร้างพื้นราบสัมผัส (Construction of tangent

planes) โดยอาศัยพิจารณาความหมายของธรรมชาติของพื้นราบสัมผัส ประกอบกันกับกำหนดของพื้นที่ทรงกระบอกด้วยแล้ว จะเข้าใจสิ่งที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นความจริงโดยง่าย

๑. พื้นราบหนึ่ง ซึ่งบรรจุเส้นตรงเส้นหนึ่ง- ที่บนเส้นสัมผัสกับฐานของรูปกระบอกกลมรูปหนึ่ง และในขณะเดียวกันบรรจุระนาบหนึ่งของรูปกระบอก ที่อยู่ตรงจุดสัมผัสของฐานและเส้นสัมผัสนั้น ย่อมเป็นพื้นราบสัมผัสของรูปกระบอก

๒. ถ้าพื้นราบหนึ่ง เป็นพื้นราบสัมผัสของรูปกระบอกกลมรูปหนึ่ง เส้นรอยตัดกันระหว่างพื้นราบนั้นกับพื้นราบของฐานของรูปนั้น ย่อมเป็นเส้นสัมผัสของฐานนั่นเอง :

๑๔๕) รูปแท่งเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ภายใน (Inscribed Prism)

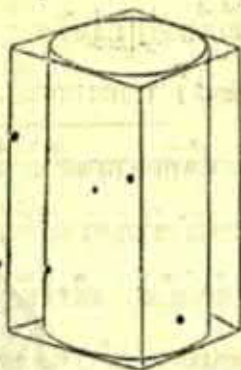
รูปแท่งเหลี่ยมที่มีฐานทุกด้าน เป็นระนาบของรูปกระบอกรูปหนึ่ง และที่มีฐานทั้งสองบรรจุอยู่ภายในฐานของรูปกระบอกนั้นเอง รูปแท่งเหลี่ยมนั้นเรียกว่าบรรจุอยู่ภายในรูปกระบอก รูป ๘๘

และเมื่อมีลักษณะตามที่กล่าวมาแล้วนี้ ถ้าห้รูปกระบอกนั้นเรียกว่าล้อมอยู่ภายในรูปแท่งเหลี่ยมนั้น

รูป ๘๘



รูป ๘๙



๑๔๖) รูปแท่งเหลี่ยมที่ล้อมอยู่ภายนอก (Circumscribed

Prism) รูปแท่งเหลี่ยมที่มีหน้าข้าง เป็นพื้นราบด้านติดกับพื้นที่ด้านข้างของรูปกระบอกรูปหนึ่ง และที่มีฐานทั้งสองล้อมอยู่ภายนอกฐานของรูปกระบอก รูปแท่งเหลืมนั้นเรียกว่าล้อมอยู่ภายนอกรูปกระบอก รูป ๘๘

และเมื่อมีลักษณะตามที่กล่าวมานี้ รูปกระบอกนั้นเรียกว่าบรรจุอยู่ในรูปแท่งเหลี่ยม

๑๔๗) รูปหน้าตัดฉาก (Right Section) รูปหน้าตัดของรูป

กระบอกรูปหนึ่ง ที่เกิดขึ้นโดยที่พื้นราบหนึ่งมาตัดทุก ๆ อะวัยวะ

ของรูปกระบอก และพบว่ามีทั้งได้ฉากกับทุก ๆ ๒ ระดัวยะนั้น รูป
 นาคคนนี้เรียกว่ารูปนาคคดฉาก

๑๔๘) รูปกระบอกเป็นจำนวนพิภพ (Cylinder as a Limit)

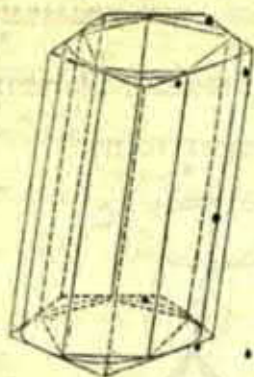
ตามที่เราได้ศึกษามาแล้วถึงเรื่องจำนวนพิภพ ถ้าเมื่อเราพิจารณา
 ประกอบกัน เข้ากับความที่น้อยอยู่ในธรรมชาติ ของ รูปแท่ง เหลี่ยมที่
 บรรจุภายใน หรือที่ล้อมอยู่ภายนอกรูปกระบอกนั้นแล้ว เรา
 จะเห็นคุณลักษณะต่าง ๆ ของรูปกระบอกที่จะกล่าวต่อไปนี้ได้ และ
 ทั้งจะได้ ถือเอาว่าเป็นความจริงต่อไป คือ

การรูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่ง ที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมเรียบ บรรจุ
 อยู่ภายในหรือล้อมอยู่ภายนอก รูปกระบอกกลมรูปหนึ่ง มีจำนวน
 ด้านหรือหน้าทุกด้านไม่มากเกิน ๑๐ รูป ๕๐

๑. เนื้อที่ทุกบาทของรูปกระบอก จะเป็นจำนวนพิภพของเนื้อ
 ที่ทุกบาทของรูปแท่งเหลี่ยม

๒. พหุคูณด้านข้างของรูปกระบอก จะเป็นจำนวนพิภพของพหุ
 คูณด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยม

๓. ระยะรอบเขตรูปนาคคดฉากของรูปกระบอก จะเป็น
 จำนวนพิภพของระยะรอบเขตรูปนาคคดฉากของรูปแท่งเหลี่ยม

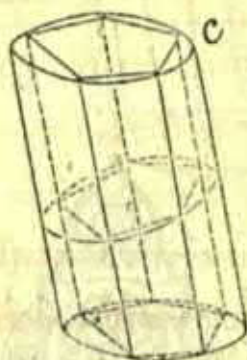


รูป ๙๐

เพราะในขณะเมื่อเราวัดจำนวนด้านของรูปเหลี่ยมเรียบที่เป็น
ฐานของรูปแท่งเหลี่ยม ที่บรรจุอยู่ภายใน หรือที่ล้อมอยู่ภายนอกนั้น
ระยะรอบเขตรของฐานนั้น ก็มีราคาเรียบใกล้เคียงความยาวของวงกลม
เราไปทุกที ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด ตามข้อ ๔๗

ถ้าการอนันต์เหล่านี้ทำให้ พหุคูณด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยม ทั้ง
ภายนอกและภายในนั้น ต่างก็เรียบใกล้เคียงจำนวนพหุคูณด้านข้างของ
รูปกระบอก และเช่นเดียวกัน เนื้อที่ถูกลบของรูปแท่งเหลี่ยม
ทั้งสองนั้น ต่างก็มีราคาเรียบใกล้เคียงราคาเนื้อที่ถูกลบของรูป
กระบอก ทั้งรูปหน้าตัดฉากของรูปแท่งเหลี่ยมทั้งสองนั้น ต่างก็เรียบ
ใกล้เคียงรูปหน้าตัดฉากของรูปกระบอก

อุปมาณียนเทศที่ ๔๘ : พินิจด้านข้างของรูปกระบอกกลมรูป
หนึ่ง ย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างระยะยวดยาวหนึ่งของรูปนั้น กับระยะ
รอบเขตรูปหน้าตัดฉากของรูปกระบอก



รูป ๔๑

ให้รูปกระบอกกลม C ซึ่งมีพินิจด้านข้างเท่ากับ l และ p เป็นระยะ
รอบเขตรูปหน้าตัดฉาก กับ c เป็นระยะยวดยาวหนึ่งของรูปกระบอก
กลมนี้ รูป ๔๑

จงพิสูจน์ว่า $l = ep$

พิสูจน์ : สมมติให้รูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่ง ที่มีฐานเป็นรูป
เหลี่ยมเวียน บรรจุอยู่ภายในรูปกระบอกกลมนี้
และให้ l เป็นพินิจด้านข้างของรูปแท่งเหลี่ยม
 p เป็นระยะรอบเขตรูปหน้าตัดฉาก

ดังนั้น $l' = ep'$. . . (อ.น. ๒๔)

ถ้าจำนวนหน้าข้างของรูปแท่งเหลี่ยมทวิภาคี

ขึ้นทุกทีจนไม่มีที่สิ้นสุด

l' มีราคาเรียบใกล้เข้าไปทุกทีถึง l ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด

และ p' มีราคาเรียบใกล้เข้าไปทุกทีถึง p ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด

และ โดยเหตุนี้ ep' มีราคาเรียบใกล้เข้าไปทุกทีถึง ep ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด

$$\therefore l = ep \quad (๔๘)$$

วิ.ศ. พ.

ข้ออนุมาน พื้นที่ด้านข้างของรูปกระบอกโดยอาการหมุนรูป

หนึ่ง ย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างระยะสูงกับเส้นรอบวงของฐาน

ถ้าแม่เป็นรูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่ง ที่มีระยะสูงเท่ากับ h พื้น

ที่ฐานข้าง l . พื้นที่ทั้งหมด (คือรวมทั้งฐานทั้งสองด้วย) เท่ากับ l

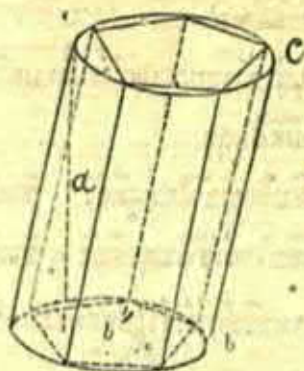
และรัศมีของฐานเท่ากับ r

$$\text{ดังนั้น} \quad l = 2\pi r a$$

$$\text{และ} \quad t = 2\pi r a + 2\pi r^2 = 2\pi r(a + r)$$

อุประมาณียะเทศที่ ๔๘ เนื้อที่ถูกลบมาของรูปกระบอกกลมรูป

หนึ่ง ย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง



รูป ๕๒

ให้รูปกระบอกกลมรูปหนึ่ง C ซึ่งมีฐานเท่ากับ b , v เป็นเนื้อที่
 ถูกขาด และ a เป็นระยะสูง รูป ๕๒

จงพิสูจน์ว่า $v = ab$

พิสูจน์ ตมมุมใหม่รูปแท่งเหลี่ยมรูปหนึ่ง ที่มีฐานเป็นรูป
 เหลี่ยมเรียบ บรรจุอยู่ภายในรูปกระบอกกลมหนึ่ง
 และให้ b' เป็นฐาน และ v' เป็นเนื้อที่ถูกขาด

$$\text{ดังนั้น } v' = ab'$$

(อ.น. ๓๔)

ถ้าจำนวนหน้าข้างของรูปแท่งเหลี่ยมทั่ว

มากขึ้นทุกทีจนไม่มิตัดจน

v มีราคาเรียบใกล้เคียงไปทุกทีกับ v ซึ่งเป็นจำนวนพหุคูณ

b' มีราคาเรียบใกล้เคียงไปทุกทีกับ b ซึ่งเป็นจำนวนพหุคูณ

โดยเหตุนี้ $b'a$ มีราคาเรียบใกล้เคียงไปทุกที่ยัง ba ซึ่งเป็นจำนวนพิคัต
 แต่ $v' = b'a$ เสมอ แม้จำนวนด้านจะเป็นเท่าใดก็ตาม
 (อ.ม. ๓๘)

$$\therefore v = ab$$

(๔๘)

ช. ค. พ.

ข้ออนุมาน เมื่อถูกลบาคของรูปกระบอกโดยอาการหมุนที่มี

รัศมีเท่ากับ r และระยะสูงเท่ากับ a ย่อมเท่ากับ $\pi r^2 a$

ฐานมณฑกเท่ากับเท่าใด? และจำนวนนคของคณกับอะไร?

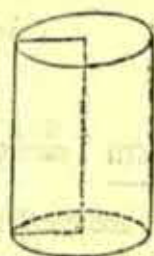
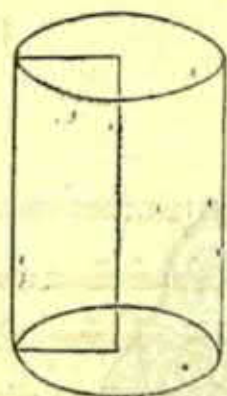
๑๔๙) รูปกระบอกที่คล้ายกัน (Similar Cylinders) รูป

กระบอกที่เกิดขึ้นโดยอาการหมุนของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่คล้ายกันโดย
 ที่อาศัยรัศมีด้านใดด้านหนึ่งสูงเดียวกันเป็นแกนหมุนนั้นเรียกว่า รูป
 กระบอกโดยอาการหมุนที่คล้ายกัน

อุปรมยนิเทศที่ ๕๐ พื้นที่ด้านข้าง หรือพื้นที่ทั้งหมดของ

รูปกระบอกโดยอาการหมุนสองรูปที่คล้ายกัน หาคณจะมีผลหาค
 เท่ากับผลหารระหว่างระยะสูงของรูปหนึ่งกำลังสอง หาคด้วย
 ระยะสูงของอีกรูปหนึ่งกำลังสอง หรือผลหารระหว่างรัศมีกำลังสอง
 และเมื่อถูกลบาคของทั้งสองรูปนั้นหาคณ จะมีผลหารเท่ากับผล

หาอัตราส่วนของระยะสูงกำลังด้าน หรือรัศมีกำลังด้าน ทั้งหมดบนเมือ
หา โดยคำนึงของเดียวกัน



รูป ๑๓

ให้รูปกระบอกโดยซากุรทมนดองรูปที่คล้ายกัน ให้ l และ l'
เป็นพหุคานข้าง t และ t' เป็นพหุททงหมด v และ v' เป็นเมือ
ถูกบาศ a และ a' เป็นระยะสูง และ r และ r' เป็นรัศมี ของทั้ง
ดองรูปนั้นเป็นลำดับ

$$\text{จึงพิสูจน์ว่า } l:l' = t:t' = a^2:a'^2 = r^2:r'^2$$

$$\text{และ } v:v' = a^3:a'^3 = r^3:r'^3$$

พิสูจน์ เมื่อรูปใดเหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นกำหนดของรูปกระบอก

ทั้งดองนั้น ค้างก็เป็นรูปที่คล้ายกันแล้ว

(๑๔๕)

$$\therefore a : a' = r : r' = a + r : a' + r' \quad (๔๓)$$

และโดยอาศัยสมบัติของอัตราส่วนประกอบกับ

อน. อ.น. ๔๘ จะได้

$$\frac{1}{l'} = \frac{2 \pi r a}{2 \pi r' a'} = \frac{r a}{r' a'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{a^2}{a'^2}$$

$$\text{แต่ } t = 2 \pi r a + 2 \pi r'^2 \quad (\text{อน. อ.น. ๔๘})$$

$$\text{และ } v = \pi r'^2 a' \quad (\text{อน. อ.น. ๔๘})$$

$$\therefore \frac{t}{v} = \frac{2 \pi r (a+r)}{2 \pi r' (a'+r')} = \frac{r (a+r)}{r' (a'+r')} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{a^2}{a'^2}$$

$$\text{และ } \frac{v}{v'} = \frac{\pi r'^2 a}{\pi r'^2 a'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{a^2}{a'^2} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{a^3}{a'^3}$$

จ. ท. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๒๐

๑. บ่อน้ำแห่งหนึ่งเป็นรูปกลม มีระยะศูนย์กลางใต้ ๖ เมตร ถ้าวัดจากพื้นน้ำไปถึงคนบ่อใต้ ๘ เมตร จะมีน้ำอยู่ในบ่อน้ำกี่ลูกบาศก์เมตร
๒. ในหลอดแก้วทรงหลอดหนึ่ง มีเส้นศูนย์กลางยาว ๖๐ ซม. ถ้าทั้งวัดถึงหนึ่งลงไปหลอดแก้วนั้น จะทำให้ระดับน้ำในหลอดแก้วนั้นถึง ๔๐ ซม. จงหาเนื้อหลอดแก้วของวัดถึงนั้น

๓. จะต้องเจาะทางรถไฟเข้าไประหว่างเสาแห่งหนึ่งยาว ๑๐๐ เมตร รูปหน้าตัดของช่องทางนั้นจะให้เป็นครึ่งวงกลมที่มีรัศมี ๑๘ เมตร จะวัดคานออกก่อกบตเมตร

๔. จะต้องทำช่องน้ำควยเหล็กให้ยาว ๔๐ เมตร และให้มีขนาดยาวของเส้นศูนย์กลาง ๑,๖๐ เมตร จะต้องใช้เหล็กก่อกบตเมตร

๕. ถังน้ำใบหนึ่งเป็นรูปกระบอก จะต้องทำให้สูงเพียง ๐,๕๕ เมตร แต่จะต้องจุน้ำได้ ๑,๓๕ ลูกบาศก์เมตร จะต้องทำให้ถังใบนั้นมีรัศมียาวเท่าใด

๖. ถ้าพื้นที่ด้านข้างทั้งหมดของรูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่งมี t และรัศมีของฐาน r จงหากระยะสูง a

๗. ถ้าพื้นที่เฉพาะด้านข้างของรูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่งมี l และเนื้อลูกบาศก์ v จงหารัศมี r และระยะสูง a

๘. ถ้าเนื้อลูกบาศก์ของรูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่งมี v และระยะสูง a จงหาพื้นที่ทั้งหมดทุกด้าน t

๙. ถ้า v เป็นเนื้อลูกบาศก์ของรูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่งซึ่งมีระยะสูงเท่ากับเส้นศูนย์กลางพอดี จงหากระยะสูง a และพื้นที่ทั้งหมด t

๑๐. คำนวณรัศมีของ $t = 2\pi r(a+r)$ (ดู. อ.น. ๔๘)

จงหาราคาของ r

๑๕๐) พนททรงกรวย (Conic Surface) พนทที่เกิดบน โดย

อาการเคลื่อนตำแหน่งของเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตามแนวของเส้นโค้ง
ใด ๆ เส้นหนึ่งบนพื้นราบที่กำหนดให้ และในขณะเดียวกันเส้นตรง
นั้น ต้องผ่านจุดอีกจุดหนึ่งเส้นนอกที่กำหนดให้ นอกพื้นราบกับบรรจุเส้น
โค้งนั้น พนทชนิดนี้เรียกว่าพนททรงกรวย

เส้นตรงที่เคลื่อนตัวไปนั้น เรียกว่า เส้นกำเนิด และเส้นโค้ง
ที่กำหนดให้ เรียกว่า เส้นนำ และจุดที่กำหนดให้ เรียกว่า ยอด
ถ้าถอยปลายคั่นสองข้างหนึ่งให้หยุดนิ่งอยู่ขณะที่คานบดหนึ่ง แล้วทำ

รูป ๑๔



ให้ปลายอีกข้างหนึ่ง เคลื่อนไปตาม
เส้นรอบวง ของวงกลมหนึ่ง ดังนั้น
คั่นสองในขณะที่เกิดขึ้นไปนั้น จะทำ
ให้เกิดพนทชนิดนี้ ที่เรียกว่า พนททรง
กรวย หรืออีกอย่างหนึ่ง ถ้าเราถอย
ไม่เท่าใด ๆ อันหนึ่งคั่นตรงกลาง
ให้ถึงอยู่กับที่ แล้วให้ปลายข้าง
หนึ่งเคลื่อนไปตามเส้นโค้งเส้นหนึ่ง
ที่กำหนดให้ ไม่เท่าอันนั้นในขณะ

แกว่งไปนั้น จะทำให้เกิดพื้นที่ทรงกรวยขึ้น ตัวอย่างเช่นในรูป ๕๔

๑๕๑) อะวัยอะ (Element) ในระนาบหนึ่งระนาบใดที่เส้น
กำหนดหนึ่งเส้นอยู่ ในระนาบนั้นเราเรียกเส้นกำหนดว่าเป็นอะวัยอะ
หนึ่งของพื้นที่ทรงกรวย

ถ้าแม้ว่าเส้นกำหนดนั้นเป็นเส้นตรงที่ยาวโดยไม่มีที่สิ้นสุด พื้นที่
ทรงกรวยที่เกิดขึ้นนั้นก็ประกอบอยู่เป็น ๒ ส่วน ส่วนหนึ่งอยู่เบื้อง
บนจุดยอด และอีกส่วนหนึ่งใต้จุดยอด ทั้ง ๒ ส่วนนั้นดีแคงอยู่
แต่ต่างกัน รูป ๕๔

๑๕๒) รูปกรวย (Cone) พื้นฐานของวัตถุสิ่งหนึ่ง ซึ่งมี

รูป ๕๕

พื้นที่ขอบเขต เป็นพื้นที่

ทรงกรวย และมีพื้นราบ

หนึ่งที่มาติดทุกๆ อะวัยอะ

ของพื้นที่ทรงกรวยนั้น

เรียกว่ารูปกรวยรูป ๕๕



พื้นที่ทรงกรวยที่ประกอบเป็นพื้นที่รอบเขตรอยนูน เรียกว่าพื้นที่
ข้างของรูปกรวย และพื้นที่รอบเขตรอยเว้า เรียกว่าฐาน
จุดยอดของพื้นที่ทรงกรวย เรียกว่ายอดกรวย และระนาบหนึ่ง
ของพื้นที่ทรงกรวย เรียกว่าระนาบหนึ่งของรูปกรวย
ระยะของเส้นตั้งใต้ ถ้าหมายถึง พื้นที่ที่เป็นฐานของรูปกรวยนั้น
จากจุดยอดกรวย เรียกว่าระยะสูงของกรวย

๑๕๓) รูปกรวยกลม (Circular Cone) รูปกรวยรูปหนึ่ง
ที่มีฐานเป็นวงกลม เรียกว่ารูปกรวยกลม
เส้นตรงที่ลากจากจุดยอดกรวยกลม มาถึงศูนย์กลางของฐาน
เรียกว่าแกนของกรวย

๑๕๔) รูปกรวยตรงและเอน (Right and Oblique Cones)
รูปกรวยกลมรูปหนึ่งที่มีเส้นแกน ตั้งฉากกับฐาน เรียกว่ารูปกรวย
ตรง แต่ถ้าไม่มีลักษณะตามที่ได้กล่าวแล้ว เรียกว่ากรวยเอน

๑๕๕) รูปกรวยโดยอาการหมุน (Cone of Revolution)

รูปกรวยกลมตรงรูปหนึ่งเป็นรูปที่เกิดขึ้นจากอาการหมุนของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง โดยที่เขาค้นข้างฉากด้านใดด้านหนึ่งเป็นแกนหมุนก็ได้ โดยเหตุนี้รูปนี้จึงเรียกว่ารูปกรวยโดยอาการหมุนรูป ๔๖

รูป ๔๖

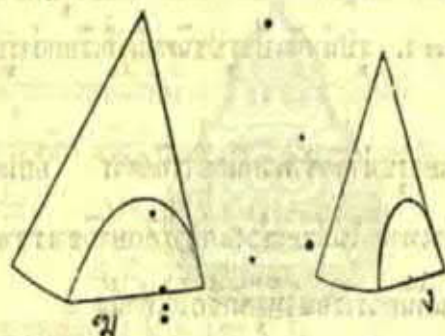


เมื่อเป็นตามทักถั่วนี้ ด้านตรงฉากก็เป็นระนาบหนึ่งของรูปกรวย และในขณะเดียวกันเรียกว่าระนาบตั้งหน้าข้างด้วย

(๔๖) รูปหน้าตัดของกรวย (Conic Section) รูปหน้าตัดที่

เกิดขึ้นโดยมีพื้นราบหนึ่งผ่านมาตัดกับพื้นที่ทรงกรวย ของรูปกรวย โดยอาการหมุนรูปหนึ่ง เรียกว่ารูปหน้าตัดของกรวย รูป ๔๗

รูป ๕๗.



ตามรูป ๕๗ ก. รูปนาคัตเป็นเส้นตรง ๒ เส้นที่ตัดกัน สำหรับ
รูปกรวยชนิดอื่นๆ ก็จะเป็นจริงตามรูปนี้เช่นเดียวกัน ดังจะได้ศึกษา
ต่อไปใน อ.น. ๕๑

ตามรูป ๕๗ ข. รูปนาคัตเป็นรูปวงกลม ซึ่งจะได้ศึกษาคือ
ต่อไปใน อ.น. ๕๒

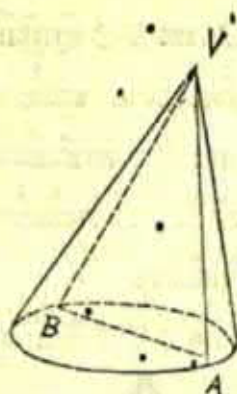
ตามรูป ๕๗ ก. รูปหน้าตัดเป็นรูปรีชนิดหนึ่งที่เราเรียกว่ารูปวงรี (Ellipse) รูปรีชนิดนี้ถ้ามองไปทางข้างๆ แล้ว มีรูปคล้ายวงกลม เส้นทางโคจรของดาวพระเคราะห์ต่างๆ มีรูปเป็นชนิดนี้

ตามรูป ๕๗ ข. รูปหน้าตัดเป็นรูปรีชนิดหนึ่งที่เราเรียกว่ารูปวงแฉ่งไฟ (Parabola) คือรูปเส้นทางของกระสุนวิถี (ในที่ๆ ไม่มีอากาศ) ในที่นั้นพรมอบที่มาก็คือต้องขมามกับอะวัยวะหนึ่งของรูปกรวย

ตามรูป ๕๗ ง. รูปหน้าตัดเป็นรูปรีชนิดหนึ่งที่เราเรียกว่ารูปจอมพนม (Hyperbola)

การที่จะศึกษาหน้าตัดจำพวกนี้อย่างพิสดาร ย่อมจำกัดออกอีก เป็นพแนกหนึ่งต่างหาก ไม่เกี่ยวข้องกับการศึกษาวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นชนิดนี้ แต่ในที่นี้ควรเรียนให้รู้จักชื่อไว้เท่านั้น

อุปมัยนิเทศที่ ๕๑ รูปหน้าตัดของรูปกรวยทุกๆ รูป ที่เกิดขึ้น โดยที่พรมอบผ่านมาก็คือ และพรมอบนั้นบรรจุกวดยอดกรวยด้วย ด้วยยอมเป็นรูปตามเหลี่ยม



รูป ๕๘

ให้รูปกรวยหนึ่งที่มี $A V B$ เป็นรูปหน้าตัด ที่เกิดขึ้นโดยที่
 พนราบผ่านหน้าตัด และผ่านมาบรรจบจุดยอดกรวย V ด้วย รูป ๕๘
 จึงพิสูจน์ว่า $A V B$ เป็นรูปสามเหลี่ยม
 พิสูจน์ $A B$ เป็นเส้นตรง (อ. น. ๑)

ลากเส้นตรง $V A$ และ $V B$

เส้นตรง $V A$ และ $V B$ ทั้ง ๒ นี้ต่างก็เป็นอะกัวยะ

ของพื้นที่ทรงกรวยของรูปกรวยที่กำหนดให้ (๑๕๑)

เส้นทั้ง ๒ นี้ต่างก็บรรจบอยู่ในพนราบ

ที่หน้าตัดรูปกรวย เพราะจุดปลายทั้ง ๒ ต่าง
 ก็อยู่ในพนรำนั่น (๑๕๑)

ดังนั้น VA และ VB ต่างก็เป็นเส้นรอยตัด
กันระหว่างพื้นที่ทรงกรวย และพื้นราบที่มาตัด

แต่ VB และ VA ต่างก็เป็นเส้นตรงทั้งคู่ (สร้าง)
ดังนั้นเส้นรอยตัดกัน ระหว่างพื้นที่ทรงกรวยและพื้น
รำนั้น จึงเป็นเส้นตรง

ดังนั้นรูปหน้าตัด AYB จึงเป็นรูปสามเหลี่ยม (๑)

ธ. ต. พ.

ข้อระบายนี้นะที่ ๕๒ ถ้ารูปกรวยเป็นรูปกรวยกลม รูป
หน้าตัดที่เกิดขึ้น โดยพื้นราบมาตัด และพื้นรำนนั้นขนานกับฐาน จะ
เป็นวงกลม



ให้รูปกรวยกลมรูปหนึ่ง $V-ABCD$ ที่มีรูปหน้าตัดเป็น $A'B'C'D'$

และขนานกันกับฐาน รูป ๕๕

จงพิสูจน์ว่า $A'B'C'D'$ เป็นวงกลม

พิสูจน์ ให้ O เป็นศูนย์กลางของฐานและให้ O' เป็นจุดที่ตรง

เส้นแกน VO จะพบว่าที่มาตัดรูปกรวยกลม

ตั้งมุมใหม่พบว่าพหุหนึ่งกับบรรจุเส้นแกน VO

และระยะยาวหนึ่ง VA และอีกพหุหนึ่งบรรจุ VO

และ VB ซึ่งเป็นอีกระยะยาวหนึ่ง พหุทั้ง ๒ นี้

จะตัดกันกับฐานตามเส้นรัศมี OA และ OB และตัดรูป

หน้าตัด $A'B'C'D'$ ตามแนวเส้นตรง $O'A'$ และ $O'B'$

ดังนั้น $O'A'$ และ $O'B'$ ต่างก็ขนานกันเป็นลำดับ

กับ OA และ OB

(ช. น. ๑๐)

ดังนั้น $\triangle A'OV$ และ $\triangle OB'V$ ต่างก็คล้ายกัน

รูปที่ดูรูป กับ $\triangle A'OV$ และ $\triangle OB'V$ (๕๕)

$OA : O'A' = VO : VO' = OB : O'B'$ (๕๘)

แต่ $OA = OB$ (๕๖)

$O'A' = O'B'$

ดังนั้น $A'B'C'D'$ เป็นวงกลม

(๓๙)

ช. ต. พ.

ข้ออนุมาน เส้นแทนของรูปกรวยกลมรูปหนึ่ง ย่อมผ่านไป

ยังศูนย์กลางของรูปนำตัดทุก ๆ รูป ที่ขนานกับฐาน

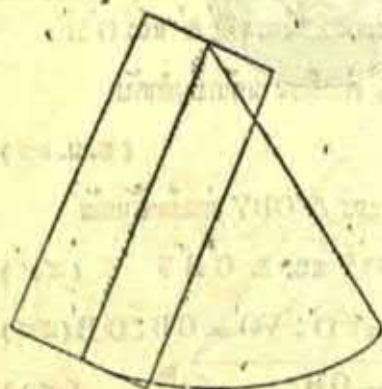
๑๕๗) พื้นราบสัมผัส (Tangent Plane) พื้นราบหนึ่งที

บรรจุมุมของรูปกรวยใด ๆ รูปหนึ่ง แต่ไม่ตัดเข้าไปในพื้น
ที่ทรงกรวยนั้น พื้นราบเส้นเริ่มกว่าพื้นราบสัมผัสกับรูปกรวย

๑๕๘) การสร้างพื้นราบสัมผัส (Construction of Tang-

ent Planes) เมื่อพิจารณาวัตถุลักษณะของพื้นราบสัมผัส ประกอบ

รูป ๑๐๐



กับกำหนดของพื้น

ที่ทรงกรวยแล้วจะ

เห็นได้ โดยง่ายว่า

(๑) พื้นราบหนึ่ง

ซึ่งบรรจุเส้นตรง

เส้นหนึ่ง ที่เป็นเส้น

สัมผัสกับฐานของรูป

กรวยกลมรูปหนึ่ง

และ ในขณะเดียวกันบรรจุมุมของ

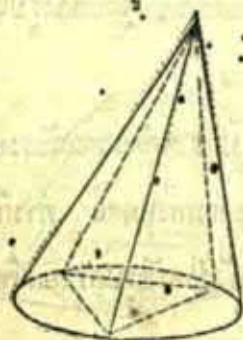
รูปกรวย ที่อยู่ตรงจุดต่ำสุดของฐานและเส้นโค้งนั้นแล้ว ย่อมเป็น
พื้นราบต่ำสุดของรูปกรวย

๒) ถ้าพื้นราบหนึ่ง เป็นพื้นราบต่ำสุดของรูปกรวยกอนรูปหนึ่ง
เส้นรอยคดก้นของพื้นราบนี้ กับพื้นราบของฐานของรูปนั้นจะเป็นเส้น
ต่ำสุดของฐานนั่นเอง

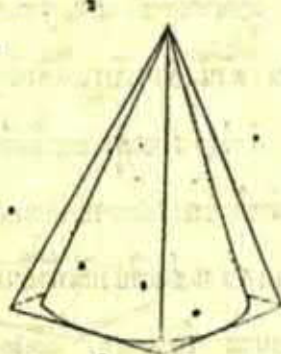
๑๕๙) รูปกรวยเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ภายใน (Inscribed Py-
ramid) รูปกรวยเหลี่ยมที่มีด้านข้างทุกด้าน เป็นระนาบของรูป
กรวยรูปหนึ่ง และที่มีฐานบรรจุอยู่ภายในฐานของรูปกรวยนั้นเอง
รูปกรวยเหลี่ยมนี้เรียกว่าบรรจุอยู่ภายในรูปกรวย

และเมื่อมีลักษณะตามที่กล่าวมานี้ รูปกรวยนี้ก็เรียกว่าตั้ง
อยู่ภายในรูปกรวยเหลี่ยมนั้น รูป ๑๐๑

รูป ๑๐๑



รูป ๑๐๒



๑๖๐) รูปกรวยเหลี่ยมที่ล้อมอยู่ภายนอก (Circumscribed Pyramid) รูปกรวยเหลี่ยมที่มีหน้าข้างเป็นพื้นราบด้านตั้งกับพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยรูปหนึ่ง และที่มีฐานล้อมอยู่ภายนอกฐานของรูปกรวยนั้นเอง รูปกรวยเหลี่ยมนี้เรียกว่าล้อมอยู่ภายนอกรูปกรวย รูป ๑๖๒

และเมื่อมีลักษณะตามที่กล่าวมานี้ รูปกรวยนี้ก็เรียกว่า บรรลุอยู่ภายในรูปกรวยเหลี่ยม

๑๖๑) รูปกรวยตัดทอน (Frustum of a Cone) ส่วนหนึ่งของรูปกรวยที่อยู่ในระหว่างฐาน กับรูปหน้าตัดรูปหนึ่งทวนกับฐานนั้นเอง เรียกว่ารูปกรวยตัดทอน

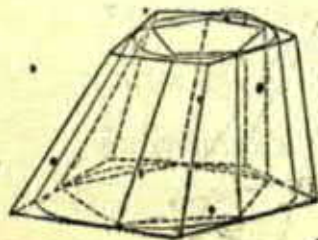
รูปหน้าตัดที่ทวนกับฐานเดิมนี้ ก็เรียกว่าเป็นฐานของรูปนี้ด้วย ดังนั้นสำหรับรูปนี้จึงมีฐานเป็น ๒ ฐาน

คำว่า ระบะสูง และพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยตัดทอนกับระบะสูงนำข้างของรูปกรวยตัดทอนของรูปกรวยลดทอนทั้งหมดนี้ ต่างกับความหนา เช่นเดียวกับทั้งหมดกับที่กล่าวไว้แล้วสำหรับรูปกรวยเหลี่ยมตัดทอน ข้อ ๑๓๑, ๑๓๒, ๑๓๓

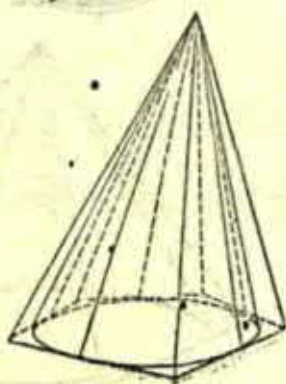
๑๖๒) รูปกรวยและรูปกรวยคัตระนาบเป็นจำนวนพิภพ (Cones and Erustums as Limits) คุณสมบัติของทั้งหลายที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นสิ่งซึ่งคล้ายกันกับที่ได้อภิปรายไว้แล้วในข้อ ๑๔๘ เป็นสิ่งที่มีลักษณะเป็นหลักได้ โดยไม่ต้องพิสูจน์ คือ

ถ้ารูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งมีฐานเป็นรูปเหลี่ยมเรียบบรรจุน้อยภายใน หรือล้อมรอบภายนอกรูปกรวยกลมรูปหนึ่ง และถ้าจำนวนด้านของฐานของรูปกรวยเหลี่ยมทวนทุกด้านไม่หมดสิ้นจุดเมื่อถูกลบค่าของรูปกรวยจะเป็นจำนวนพิภพของเนื้อที่ของรูปกรวยเหลี่ยม และพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวย จะเป็นจำนวนพิภพของพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยม รูป ๑๐๓

รูป ๑๐๔



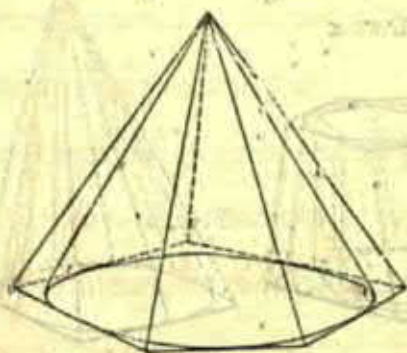
รูป ๑๐๓



เนื้อที่ลูกบาทของรูปกรวยคัตระนาบ จะเป็นจำนวนพิภพของเนื้อ
 ลูกบาทของรูปกรวยเหลี่ยมคัตระนาบที่บรรจุอยู่ภายในหรือที่ล้อมอยู่
 ภายนอก ถ้าจำนวนหน้าข้างของรูปกรวยเหลี่ยมคัตระนาบนั้น ทว
 มากจนจนไม่ทันนับ และพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยคัตระนาบ
 จะเป็นจำนวนพิภพของพื้นที่ด้านข้างของ รูปกรวยเหลี่ยม คัตระนาบที่
 บรรจุอยู่ภายในหรือที่ล้อมอยู่ภายนอก ทั้งฐานของรูปกรวย
 เหลี่ยมของแนวรูปเหลี่ยมเรียบ

อุประมาณีนีเทศที่ ๕๓ พื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยโดยหาการ
 หัมนรูปหนึ่ง ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่างระยะสูงหน้าข้าง
 กับเส้นรอบวงของฐาน

รูป ๑๐๕



ให้รูปกรวยโดยจากการหมุนรูปหนึ่งที่มีพื้นที่ด้านข้าง l เต้นรอบ
วงของฐาน c และระยะสูงนำข้าง s รูป ๑๐๕

จึงพิสูจน์ว่า $l = \frac{c}{2} s c$

พจน์ สมมติให้รูปกรวยเหลี่ยมที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยม
เรียบรูปหนึ่ง ล้อมอยู่ภายนอกกรวย และมี
ระยะขอบเขตของฐานเท่ากับ p และระยะสูง
นำข้าง l'

ดังนั้น $l' = \frac{c}{2} s p$ (อ. น. ๔๐)

ถ้าจำนวนนำข้างของรูปกรวยเหลี่ยมที่

ล้อมอยู่นั้น ทวนมากขึ้นทุกทีจนไม่มีที่สิ้นสุด

l' เรียบราคาใกล้เข้าไปทุกทีถึง l ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด (๑๖๒)

p เรียบใกล้เข้าไปทุกทีถึง c ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด (๗๔)

และโดยเหตุนี้ $\frac{c}{2} s p$ เรียบใกล้เข้าไปทุกทีถึง $\frac{c}{2} s c$

ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด

แต่ $l' = \frac{6}{5} s p$ *เดิมขอแม้จำนวนด้าน

จะเป็นเท่าใดก็ตาม

(อ. น. ๔๐)

$$\therefore l = \frac{6}{5} s c$$

(๔๘)

ท. ต. พ.

ข้ออนุมาน ถ้า l หมายถึงพื้นที่ด้านข้าง t พื้นที่ทั้งหมด s ระยะ
สูงหน้าข้าง และ r รัศมีของฐาน ทั้งหมดของรูปกรวยโดยหาการ
หมุนรอบหนึ่ง

$$ดังนั้น l = \frac{6}{5} (2\pi r \times s) = \pi r s$$

$$t = \pi r s + \pi r^2 = \pi r (s + r)$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๑

๑. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยโดยหาการหมุน ซึ่งมีระยะ
สูงหน้าข้าง และเส้นรอบวงของฐาน ดังต่อไปนี้

ก) $s = ๒,๗$ ท. น. $c = ๔,๘$ ท. น.

ข) $s = ๔,๖๕$ ท. น. $c = ๘,๗๒$ ท. น.

ค) $s = ๗,๓๒๑$ น. $c = ๑๖,๗๕๖$ น.

๒. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยโดยหาการหมุน ซึ่งมีระยะ
สูงหน้าข้างและรัศมีของฐานดังต่อไปนี้

ก) $s = ๓, ๗$ ช.ม. $r = ๒, ๓$ ช.ม.

ข) $s = ๗, ๒๑$ ช.ม. $r = ๕, ๓๕$ ช.ม.

ค) $s = ๘, ๘๕๔$ ม. $r = ๕, ๔๒๖$ ม.

๓. จงหาพื้นที่ทั้งหมดของรูปกรวยโดยอาการหมุน ซึ่งมีระยะ
สูงนำข้างและรัศมีของฐาน ดังต่อไปนี้

ก) $s = ๓$ ช.ม. $r = ๒$ ช.ม.

ข) $s = ๙$ ช.ม. $r = ๕$ ช.ม.

ค) $s = ๑๒$ ม. $r = ๕$ ม.

๔. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาพื้นที่ด้านข้างของ รูปกรวย
โดยอาการหมุน โดยใช้แสดงตามราคาของรัศมีของฐานและระยะ
สูงของรูปกรวย

๕. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหากระยะสูงนำข้าง ของ รูปกรวย
โดยอาการหมุน โดยใช้แสดงตามราคาของพื้นที่ด้านข้างและเส้น
รอบวงของฐาน

๖. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหากระยะสูงนำข้าง ของ รูปกรวย
โดยอาการหมุน โดยใช้แสดงตามราคาของพื้นที่ด้านข้างและรัศมี
ของฐาน

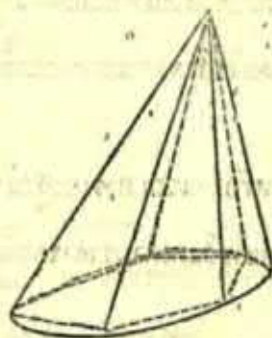
๗. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาปริมาตรของฐานของรูปกรวยโดย
 อาการหมุน โดยใช้แสดงตามราคาของพื้นที่ด้านข้างและระยะสูง
 นำข้าง

๘. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาปริมาตรของฐานของรูปกรวย
 โดยอาการหมุน โดยใช้แสดงตามราคาของพื้นที่ทั้งหมดและรัศมี
 ของฐาน

๙. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาเส้นรอบวงของฐานของรูป
 กรวยโดยอาการหมุน โดยใช้แสดงตามราคาของพื้นที่ด้านข้างและ
 ระยะสูงนำข้าง

อุปพระมัยนิเทศที่ ๕๔ เนื้อที่ทุกภาคของรูปกรวยกลมรูปหนึ่ง
 ย่อมเท่ากับเศษ ๑ ส่วน ๓ ของผลคูณระหว่างฐานและระยะสูง

รูป ๑๕๖



ให้รูปกรวยกลมรูปหนึ่งที่มีเนื้อที่ด้านข้าง v ฐาน b และระยะ

สูง a รูป ๑๐๖

จงพิสูจน์ว่า $v = \frac{1}{3} b a$

พิสูจน์ สมมติให้รูปกรวยเหลี่ยมที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยม
เรียบรูปหนึ่งบรรจุอยู่ภายในรูปกรวยหนึ่ง และ
ที่มีฐานเท่ากับ b และเนื้อที่ด้านข้างเท่ากับ v

$$\text{ดังนั้น } v = \frac{1}{3} b a \quad (\text{ก. น. ๔๔})$$

ถาจำนวนหน้าข้างของรูปกรวยเหลี่ยมกับบรรจุ
อยู่นั้น ทวนมากจนตกที่ฐานไม่หมด

v' เรียบราคาใกล้เข้าไปถึงทุกที่ยัง v ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด (๑๖๒)

b' เรียบราคาใกล้เข้าไปถึงทุกที่ยัง b ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด (๑๖๔)

และโดยเหตุนี้ $b'a$ เรียบใกล้เข้าไปถึงทุกที่ยัง $b a$ ซึ่งเป็นจำนวนจำกัด

$$\therefore v = \frac{1}{3} b a \quad (\text{๔๘})$$

ข. ค. พ.

ข้ออนุมาน ถ้าให้รูปกรวยกลมรูปหนึ่ง ที่มีรัศมีเท่ากับ r

และระยะสูงเท่ากับ a ย่อมมีเนื้อที่ด้านข้าง $v = \frac{1}{3} \pi r^2 a$

$$\text{เพราะพื้นที่ของฐาน} = \pi r^2 \quad (\text{๑๖๖})$$

๑๖๓) รูปกรวยที่คล้ายกัน (Similar Cones) รูปกรวย
ที่เกิดขึ้นโดยอาการหมุน ของรูปด้านเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน โดย
ที่อาศรัยด้านที่อยู่ตรงที่เดียวกันนั้นเป็นแกนหมุน นั้นเรียกว่ารูปกรวย
โดยอาการหมุนที่คล้ายกัน

แบบฝึกหัดที่ ๒๒๒

๑. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยกลมซึ่งมีระยะสูง และพื้นที่
ของฐาน ดังต่อไปนี้

ก) $a = ๔,๗๕$ ซม. $b = ๕,๓๐$ ตารางซ.ม.

ข) $a = ๕,๗๔๖$ ซม. $b = ๑๘,๒๗๗$ ตารางเมตร

๒. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปกรวยกลมซึ่งมีระยะสูง และพื้นที่
ของฐาน ดังต่อไปนี้

ก) $a = ๕,๖$ ซม. $r = ๔,๒$ ซม.

ข) $a = ๑๔,๕๗$ ซม. $r = ๕,๖๕$ ซม.

๓. กระโจนมีฐานเป็นรูปกรวย วัตรระยะเส้นศูนย์กลาง
ได้ ๑๐ เมตร และสูง ๗ เมตร ภายในกระโจนจะมีเนื้อที่ลูก
ลูกบาศก์เมตร ?

๔. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาระยะสูงของรูปกรวยกลมโดย
ใช้ดีแคงตามราคารของเนื้อที่ลูกบาศก์ และพื้นที่ของฐาน

๕. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหารัศมีของฐานของรูปกรวยกลม
โดยใช้ดีแคงตามราคารของเนื้อที่ลูกบาศก์และระยะสูง

๖. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาระยะสูงหน้าข้าง และระยะสูง
ของรูปกรวยโดยหาการหมุน โดยใช้ดีแคงตามราคารของเนื้อที่ลูกบาศก์
และรัศมีของฐาน

อุปรมัยนิเทศที่ ๕๕ พื้นที่หน้าข้าง หรือพื้นที่ทั้งหมดของ

รูปกรวยโดยหาการหมุนที่คล้ายกันหารกัน ย่อมมีผลหารเท่ากับ
ผลหารระหว่างระยะสูงของรูปนั้น ๆ กำลัง ๒ หารกัน หรือรัศมี

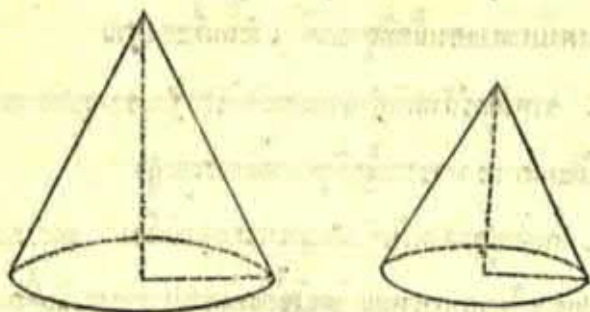
ของรูปนั้น ๆ กำลัง ๒ หารกัน หรือระยะสูงหน้าข้างของรูปนั้น ๆ

กำลัง ๒ หารกัน และเนื้อที่ลูกบาศก์หารกัน ย่อมมีผลหารเท่ากับผล

หารระหว่างระยะสูงของรูปนั้น ๆ กำลัง ๓ หารกัน หรือรัศมีของ

รูปนั้น ๆ กำลัง ๓ หารกัน หรือระยะสูงหน้าข้างของรูปนั้น ๆ กำลัง ๓

หารกัน ทั้งนี้เมื่อหาโดยท่านของเดียวกัน



ให้รูปกรวยโดยอาการหมุนที่คล้ายกัน ๒ รูป ที่มีพื้นที่ฐานข้าง
เท่ากับ 1 และ 1' เนื้อที่ทั้งหมดเท่ากับ t และ t' เนื้อที่ลูกบาศก์เท่ากับ v
และ v' ระยะสูงเท่ากับ a และ a' รัศมีเท่ากับ r และ r' และระยะสูง
นำข้างเท่ากับ s และ s' รูป ๑๐๗

จงพิสูจน์ว่า $l:l' = t:t' = a^2:a'^2 = r^2:r'^2 = s^2:s'^2$

และ $v:v' = a^3:a'^3 = r^3:r'^3 = s^3:s'^3$

พิสูจน์ $\frac{a}{a'} = \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'} = \frac{s+r}{s'+r'}$ (๔๔-๔๓)

$$\frac{l}{l'} = \frac{\pi r s}{\pi r' s'} = \frac{r}{r'} \times \frac{s}{s'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{s^2}{s'^2} = \frac{a^2}{a'^2}$$

(อน. ธ.น. ๔๓)

$$\frac{t}{t'} = \frac{\pi r (s+r)}{\pi r' (s'+r')} = \frac{r}{r'} \times \frac{s+r}{s'+r'} = \frac{r^2}{r'^2}$$

$$= \frac{s^2}{s'^2} = \frac{a^2}{a'^2} \quad (\text{ณ. อ. น. ๕๓})$$

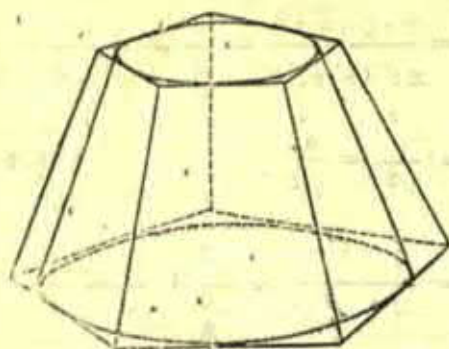
$$\frac{v}{v'} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 a}{\frac{4}{3} \pi r'^3 a'} = \frac{r^3}{r'^3} \times \frac{a}{a'} = \frac{r^3}{r'^3}$$

$$= \frac{a^3}{a'^3} = \frac{s^3}{s'^3} \quad (\text{ณ. อ. น. ๕๔})$$

ร. ต. พ.

อุปมาณียะเทศที่ ๕๖ พหุคณิตีของรูปกรวยคัตขนาน

โดยอาการทมนรูปหนึ่ง บัฒนเท่ากันคัตหนึ่งของฉนวนกรวยเดิม
รอบวงของฐานทั้งสี่ของคัตกับระยะตั้งหน้าข้าง



รูป ๑๐๘

ให้รูปกรวยตัดขนาน โดยฉากการทมนรูปหนึ่ง ที่มีพื้นที่ด้านข้างเท่ากับ l เส้นรอบวงของฐานเท่ากับ c และ c' และระยะสูงหน้าข้าง s

รูป ๑๐๘

จงพิสูจน์ว่า

$$l = \frac{c + c'}{2} s$$

พิสูจน์ สมมติให้รูปกรวยเหลี่ยมตัดขนาน ที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมเรียบ ล้อมอยู่ภายนอกของรูปกรวยตัดขนาน เช่นเดียวกันกับที่ให้รูปกรวยเหลี่ยมล้อมอยู่ภายนอกรูปกรวยนั่นเอง

ให้พื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมตัดขนานนี้เป็น l และ p กับ p' เป็นระยะรอบเขี้ยวของฐานของกรวยเหลี่ยมตัดขนานที่อยู่วางเดียวกัน

กับ c และ c' ระยะสั้นข้างบนเป็น s เท่ากัน
กับระยะสั้นข้างบนของรูปกรวยคัตขนานนั้น •

$$\text{ดังนั้น } l' = \frac{1}{2} (p+p') s \quad (\text{อน. ธ. น. ๔๐})$$

ถ้าจำนวนหน้าข้างบนของรูปกรวยเหลี่ยมคัตขนาน
นั้นยาวมากขึ้นทุกทีจนไม่เหลือจุด

ก) จำนวนอะไรที่เป็นจำนวนพิสัยของ

$$l' \text{ และ } p+p' ?$$

ข) และต่อไปอะไรเป็นจำนวนพิสัยของ

$$\frac{1}{2} (p+p') s ?$$

ค) แล้วรวมความได้อย่างไรต่อไป ?

นักเรียนควรหาคำตอบได้ โดยตนเอง

ข้ออนุมาน พื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยคัตขนาน โดยหาการ

หมุนรูปหนึ่ง ย้อนมาทำกับผลคูณระหว่างระยะสั้นข้างบนกับเส้นรอบ
วงของรูปหน้าคัตที่ระยะเท่ากันจากฐานทั้งสอง

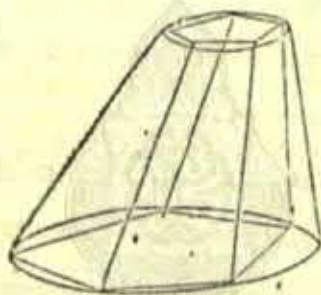
จะพิสูจน์ได้อย่างไรว่า $\frac{1}{2} (c+c')$ นี้ เท่ากับเส้นรอบวงของ

รูปหน้าคัต ที่ระยะเท่ากันจากฐานทั้งสอง? รัศมีของวงกลมทั้ง

สามนั้นมีความสัมพันธ์อย่างไร ?

อุประมาณิเทศที่ ๕๗ เนื้อที่ลูกบาทของรูปกรวยคัตระนา

กลมรูปหนึ่ง ย่อมเท่ากับผลบวกของเนื้อที่ลูกบาทของรูปกรวยสาม
รูปที่มีระยะสูงเท่ากันกับระยะสูงของรูปกรวยคัตระนากลมนั้น และ
ที่มีฐานรูปหนึ่งเท่ากับฐานล่าง รูปหนึ่งเท่ากับฐานบน และอีกรูป
หนึ่งเท่ากับตัวเฉลี่ยในของบัญญัติสามพจน์ (mean Proportional)
ของระหว่างฐานทั้งสองของรูปกรวยคัตระนากลมนั้น



รูป ๑๐๕

ให้รูปกรวยคัตระนากลมรูปหนึ่ง ที่มีเนื้อที่ลูกบาทเท่ากับ v และ
ฐานเท่ากับ b และ b' และระยะสูง a รูป ๑๐๕

จงพิสูจน์ว่า $v = \frac{\pi}{3} a (b + b' + \sqrt{bb'})$

พิสูจน์ สมมติให้รูปกรวยเหลี่ยมคัตระนา ที่มีฐานเป็นรูป
เหลี่ยมเรียบ บรรจุอยู่ภายในรูปกรวยคัตระนา

เช่นเดียวกันกับให้รูปกรวยที่ล้นมับรรจุอยู่ภายใน
รูปกรวยนั้น

ให้ v เป็นเนื้อที่ของภาชนะ และให้ x และ x'

เป็นฐานทั้งสองที่วางเคียงกันกับ b และ b'

และระยะสูงคงเป็น a เท่ากันกับระยะสูงของ

รูปกรวยตันขนาดเดิม

$$\text{ดังนั้น } v = \frac{\pi}{3} a (x + x' + \sqrt{x x'}) \quad (\text{ข้อ ๒.๑.๕.๔๕})$$

ถ้าจำนวนน้ำข้างของรูปกรวยเหลื่อมตันขนาดเดิม

ที่บรรจุอยู่ภายในนั้น ความลึกของน้ำจะไม่เท่าเดิม

ก) จำนวนอะไรที่ต่างกันเป็นจำนวนพิกัดของ

v , x , x' และ $x x'$?

ข) และต่อไปอะไรเป็นจำนวนพิกัดของ

$$\frac{\pi}{3} a (x + x' + \sqrt{x x'}) ?$$

ค) แล้วรวมความได้วยังไรต่อไป

ควรให้นักเรียนหาคำพิสัยได้ โดยตนเอง

ข้ออนุমান ในรูปกรวยตัดขนานโดยอาการหมุนรูปหนึ่ง ถ้า
 r และ r' เป็นรัศมีของฐานทั้งสอง

$$\text{เนื้อที่ลูกบาท} = \frac{\pi}{3} a (r^2 + r'^2 + rr')$$

$$\text{เพราะ } b = \pi r^2, \quad b' = \pi r'^2$$

$$\therefore \sqrt{b b'} = \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2} = \pi r r'!$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๓

๑. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปกรวยตัดขนาน ซึ่งมีเส้นรอบ
 วงของฐานทั้งสองและระยะสูงนำข้าง ดังต่อไปนี้

ก) $c = ๔$ ซม. $c' = ๓$ ซม. $s = ๐,๕$ ซม.

ข) $c = ๖,๕$ ซม. $c' = ๔,๕$ ซม. $s = ๑,๔$ ซม.

ค) $c = ๓,๗๗$ ม. $c' = ๒,๕๓$ ม. $s = ๐,๖๕$ ม.

๒. จงหาเนื้อที่ลูกบาทของรูปกรวยตัดขนาน ซึ่งมีระยะสูง
 และพื้นที่ของฐานทั้งสอง ดังต่อไปนี้

ก) $a = ๓$ ซม. $b = ๔,๓๕$ ซม. $b' = ๒,๗๕$ ซม.

ข) $a = ๖,๓$ ม. $b = ๘,๗$ ม. $b' = ๓,๕$ ม.

ค) $a = ๗,๖๐$ ม. $b = ๑๒,๔๐๘$ ม. $b' = ๘,๗๕๓$ ม.

๓. จงหาเนื้อที่ถูกลบตาของรูปกรวยคัตขนานซึ่งมีระยะสูง และรัศมีของฐานทั้งสอง ดังต่อไปนี้

ก) $a = ๔$ ซม. $r = ๓$ ซม. $r' = ๒$ ซม.

ข) $a = ๖,๕$ ซม. $r = ๓,๗$ ซม. $r' = ๒,๙$ ซม.

ค) $a = ๒,๓๕๑$ ม. $r = ๑,๐๐๕$ ม. $r' = ๐,๖๕๘$ ม.

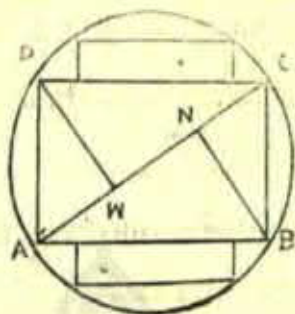
๔. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาระยะสูงของรูปกรวยกลมคัตขนานโดยใช้ได้แต่ตามราคาของเนื้อที่ถูกลบตา และพื้นที่ของฐานทั้งสอง

๕. จงหาสูตรสำหรับคำนวณหาระยะสูงของรูปกรวยคัตขนานโดยหาการหมุน โดยใช้ได้แต่ตามราคาของเนื้อที่ถูกลบตาและรัศมีของฐานทั้งสอง

แบบฝึกหัดที่ ๒๔

๑. การคำนวณหาขนาดของท่อนไม้ สี่เหลี่ยมที่ จะต้องตัดออกจากซุงต้นหนึ่ง และให้มก่าตั้งทนทานมากที่สุด มีสูตรใดดังต่อไปนี้
ที่ตรงจุด M, N, ซึ่งเป็นจุดที่แบ่งเส้น AC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน ยกเส้นตั้งได้ฉากขึ้นจนกระทั่งของเส้นศูนย์กลาง

AC และให้ ไปตัดเส้นรอบวงที่ตรงจุด D และ B ดังนั้น ABCD
ย่อมเป็นรูปหน้าตัดของท่อนไม้ รูป ๑๑๐



รูป ๑๑๐

ให้คำนวณหาขนาดของท่อนไม้ ในเมื่อเส้นศูนย์กลางของซุง
ยาว ๐,๔๓ เมตร

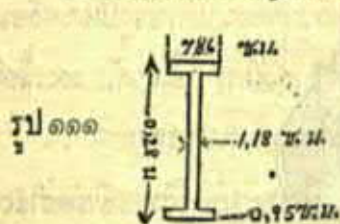
๒. ในท่อนไม้หนึ่งมีรอยสำหรับน้ำเต็น ๒๔ ร้อย ทุกๆ ร้อยมี
ขนาดกว้างวัดตามเส้นศูนย์กลางได้ ๗,๕ ซม. และยาว ๓,๘ เมตร
จงหาพื้นที่รอบนอกของร่อนานทั้งหมด

๓. ในห้องหนึ่งใช้วอลนัทหุ้มด้วยรอยไม้ ร่อนานกว้าง
๔ ซม. ยาว ๒๒๐ เมตร และร่อนานกว้าง ๕,๘ ซม. ยาว
๒๑ เมตร นอกจากนั้นยังมีรอยสำหรับน้ำเต็นอีก ๒ ร้อย ยาวรอยละ
๑,๒๐ เมตร และกว้าง ๖,๔ ซม. จงหาพื้นที่ทั้งหมดของรอยที่ใช้หุ้ม
อันห้องนั้นเป็นจำนวนตารางเมตร

๔. ระดับของน้ำในหม้อน้ำรูปกระบอกใบหนึ่ง ต่ำกว่าปากหม้อ
ลงไป ๑,๓๒ เมตร และคิดเป็นพื้นที่ได้ ๙,๖๗ ตารางเมตร จงหา
พื้นที่ถูกลบของเนื้อที่ที่เหลือสำหรับจุไอน้ำ

๕. จะต้องทำถังตั้งกระดี่ใบหนึ่ง ให้มีขนาดสูง ๔๒ ซม.
และเส้นศูนย์กลางของก้นถัง ๒๖ ซม. ของปากถัง ๓๒ ซม. จะ
ต้องการถังกระดี่เท่าใด ?

๖. รางเหล็กมีฐานตามทังแคงไว ในรูป ๑๑๑ ยาว ๑๘ เมตร



ความหนาของตอนกลางเป็น ๑,๑๘
ซ.ม. และหนาทางบนและล่างข้าง
ละ ๐,๙๔ ซม. ตามกว้าง ๗,๘๖
ซ.ม. และสูง ๒๘ ซม. จงหา

น้ำหนักของรางเหล็กก้นว่าเช่นเท่าใด (ให้คิดว้เหล็ก ๑ ลูกบาศก์เซนติ
เมตรหนัก ๑๐ กรัม) :

๗. เจ้าที่ดินคนหนึ่งมีฐานเป็นรูปกรวยคัตขนานชนิดกลมและ
ตรงซึ่งมีระยะสูงน้ำข้าง ๑๒ เมตร และรัศมีของฐานเป็น ๒,๗๐ เมตร
และ ๑,๑๕ เมตร ค่าจ้างสำหรับขุดเจ้านี้ นายช่างคิดเขา ๑ ตารางเมตร
ละ ๒,๒๕ บาท จ้ะขุดเจ้านี้ละเพาะตามคานข้างเท่านั้นจะสิ้นเงินเท่าใด

แบบฝึกหัดที่ ๒๕

แบบฝึกหัดศิลปะ

๑. ระยะสูงนำข้างของรูปกรวยเหลี่ยมเรียบคัตขนานเป็น ๒๔ เมตร และด้านหนึ่งของฐานทางคู่เป็นจตุรคั่นเป็น ๕๔ เมตร และ ๒๔ เมตรตามลำดับ จงหาเนื้อที่ลดขนาดของรูปนี้

๒. ถ้าฐานทั้งคู่ของรูปกรวยเหลี่ยมคัตขนาน เป็นรูปหกเหลี่ยมเรียบซึ่งมีด้านหนึ่ง ๆ ยาว ๑ เมตร และ ๒ เมตร เป็นลำดับ และเนื้อที่ลดขนาดของรูปนี้เป็น ๑๒ ลูกบาศก์เมตร จงหาระยะสูง

๓. รูปกรวยกลมครึ่งรูปหนึ่ง มีระยะสูงนำข้าง ๓๐ เมตร และเส้นรอบวงของฐานยาว ๑๐ เมตร มีพหุราบหนึ่งขนานกับฐานผ่ามาตัดรูปกรวยนี้ ทำให้เกิดรูปกรวยขึ้นอีกซึ่งมีระยะสูงนำข้าง ๖ เมตร จงหาพื้นที่ด้านข้างและเนื้อที่ลดขนาดของรูปกรวยคัตขนาน

๔. ปลดออกเหล็กชิ้นหนึ่งมีฐานเป็นรูปกรวยคัตขนานวัดทางสูงได้ ๑๒ เมตร เส้นศูนย์กลางของฐานล่างวัดภายนอกได้ ๑๖ เมตร และฐานบน ๑๗ เมตร และถ้าวัดภายในได้ ๑๒ เมตร และ ๑๐ เมตร จะต้องใช้เหล็กกี่ลูกบาศก์เมตรสำหรับสร้างปลดอกนี้

๕. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๒ รูปจึงมีฐานยาว ๑๕ เมตร และ
 ๒๑ เมตร และด้านตรงฉากยาว ๒๕ เมตร และ ๓๕ เมตร ทั้งคู่ต่างก็
 หมุนไปรอบตัว โดยเอาด้านที่สามเป็นแกนหมุน จงหาผลหารระหว่าง
 พื้นที่ภายนอกทั้งหมดของรูปทั้ง ๒ ที่เกิดหมุน และพื้นที่ของรูป
 ของรูปหนึ่ง ๆ ด้วย

แบบฝึกหัดที่ ๒๖

รูปก้นที่เท่ากัน

๑. รูปดลูกบาทหนึ่งมีด้านหนึ่งยาว ๑๒ เมตร โดยให้ก้นดลูกบาทเป็น
 รูปแท่งเหลี่ยมตรง ซึ่งมีฐานเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ยาว ๑๖ เมตร และ
 กว้าง ๑๒ เมตร จงหาระยะสูงของรูปแท่งเหลี่ยม และผลต่างกัน
 ระหว่างพื้นที่รอบนอกทั้งหมดของรูป กับพื้นที่รอบนอกทั้งหมดของ
 รูปดลูกบาทเดิม

๒. ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมเป็น a, b, c จงหาระยะสูงของรูป
 กระบอกกลมตรงที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม และให้รัศมีของฐานเท่ากับ a
 และหาระยะสูงของรูปกระบอกกลมตรงที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม และให้รัศมี
 ของฐานเท่ากับ a

๓. รูปกรวยเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่งสูง ๑๒ เมตร จะต้องยุบลงให้เป็นรูปแท่งเหลี่ยมเรียบที่มีฐานเท่ากับรูปก่อน จงหาระยะสูงของรูปนี้

๔. ถ้าเส้นหนึ่งของรูปลูกบาศก์ยาว e จงหาระยะสูง h ของรูปกระบอกกลมตรงที่เท่ากับลูกบาศก์นั้น และต้องมีรัศมี r

๕. รูปกระบอกกลมตรงรูปหนึ่ง มีเส้นศูนย์กลางยาว ๖ เมตร รูปนี้เท่ากับรูปกรวยกลมตรงอีกรูปหนึ่ง ซึ่งมีเส้นศูนย์กลางของฐานยาว ๗ เมตร ถ้ารูปกรวยสูง ๘ เมตร รูปกระบอกจะสูงเท่าใด?

แบบฝึกหัดที่ ๒๗

ทวนสิ่งที่ได้เรียนมาแล้ว

๑. จงอธิบายว่าอะไรเป็นรูปก้อนเหลี่ยม? รูปกระบอกเป็นรูปชนิดนี้หรือไม่?

๒. จงอธิบายว่าอะไรเป็นรูปแท่งเหลี่ยม? และแบ่งรูปชนิดนี้ ออกตามลักษณะของฐาน

๓. พินิจฐานข้างของรูปแท่งเหลี่ยมนั้นคำนวณได้อย่างไร? วิธีคำนวณย่อมเหมือนกันทั้งชนิดใดและตรงหรือไม่?

๔. จงอธิบายว่าอะไรเป็นรูปหกด้านขนาน รูปทึบ และรูปดก? รูปทึบเป็นรูปดกขาดเสมอหรือไม่? และรูปดกขาดเป็นรูปทึบเสมอหรือไม่?

๕. จงอธิบายว่าหมายความต่างกันอย่างไร ในเมื่อพูดว่ารูปอื่น ๆ ฯลฯ ๒ รูปเท่ากันหรือเหมือนกัน? รูปดกขาด ๒ รูปที่มีระยะสูงเท่ากันย่อมเท่ากันเสมอหรือไม่? และเหมือนกันหรือไม่? และถ้าเป็นรูปหกด้านขนานมีลักษณะตามทักถั่ววน จงจริงอยู่เช่นนั้นด้วยหรือไม่?

๖. สำหรับรูปแท่งเหลี่ยมตรง ๒ รูป รูปดกขาด ๒ รูป รูปแท่งเหลี่ยม ๒ รูป จะเหมือนกันได้ กี่ข้อกันเมื่อต้องมีลักษณะอย่างไร?

๗. มุมที่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมเท่ากัน จงยกอุปมาขึ้นเพื่อที่ตรงกันกับข้อนี้ เมื่อหมายถึงรูปหกด้านขนาน

๘. ทำหน้าที่ของรูปของรูปแท่งเหลี่ยม ของรูปกระบอก ของรูปกรวยเหลี่ยม และของรูปกรวยได้อย่างไร

๙. รูปกึ่งเหลี่ยมชนิดธรรมดาตามใดก้อย่าง? และเรียกชื่อไว้อย่างไรบ้าง?

๑๐. ให้รัศมีของฐานและระยะสูงของรูปกรวยโดยจากการหมุน ทำหน้าที่ของรูปดกขาดที่ด้านข้าง และพื้นที่ทั้งหมดได้อย่างไร

มาตรา ๓

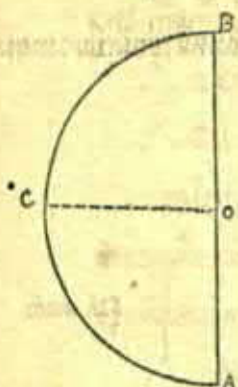
รูปทรงกลม (The Sphere)

๑๖๔) รูปทรงกลม (Sphere) พื้นฐานของวัตถุสิ่งหนึ่ง
ซึ่งทุก ๆ จุดบนพื้นที่รอบเขตรนั้น อยู่ห่างกันระยะจากจุด ๆ หนึ่งภายใน
ในวัตถุนั้นเท่ากันเสมอเรียกว่ารูปทรงกลม

จุดที่อยู่ภายในวัตถุสิ่งหนึ่ง ที่มียุ่ห่างเท่ากันจากทุก ๆ จุดบน
พื้นที่ที่เป็นขอบเขตเรียกว่าจุดศูนย์กลาง พื้นที่รอบเขตเรียกว่า
พื้นที่ทรงกลม และครึ่งหนึ่งของรูปทรงกลมเรียกว่าครึ่งรูปทรงกลม คำ
ว่ารัศมี และเส้นศูนย์กลาง มีความหมายเช่นเดียวกันกับที่ได้อธิบาย
มาแล้วสำหรับวงกลม

๑๖๕) กำเนิดของพื้นที่ทรงกลม (Generation of a Spherical
Surface) ตามที่ได้อธิบายมาแล้วว่าพื้นที่ทรงกลมมีลักษณะอย่างไร
จึงเห็นได้ว่าพื้นที่นั้นเกิดจากเส้นรอบวงที่หมุนรอบตัว

รูป ๑๑๒



ของครึ่งวงกลมใด ๆ โดย
ชักรัศมีเส้นศูนย์ กลางนั้นเป็น
แกนหมุน

คือ ถ้าครึ่งวงกลม ACB

รูป ๑๑๒ หมุนไปรอบตัว
โดยเอา AB เป็นแกนหมุน
ก็จะทำให้เกิดเป็นรูปทรงกลม
หรือพนททรงกลม ดังนั้นเมื่อ

ทราบกำหนดของวงกลมด้วยแล้ว จะกล่าวได้ว่ารูปทรงกลมหนึ่ง
หรือพนททรงกลมหนึ่ง จะเกิดขึ้นได้เมื่อใดกำหนดจุดใดจุดหนึ่งให้
ว่าเป็นศูนย์กลางกับเส้นใดเส้นหนึ่งว่าเป็นรัศมี

๑๖๖) รัศมีเท่ากันและเส้นศูนย์กลางเท่ากัน (Equality of

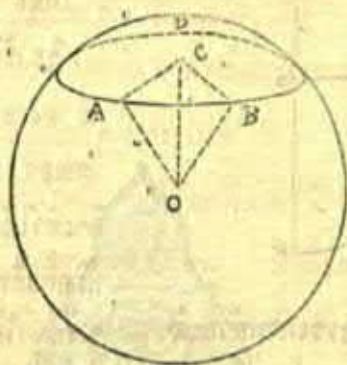
Radius and Diameters) เมื่อใดทราบมาแล้ววงเพียงนี้ จึง

เห็นได้ชัดไปอีกว่า

ก) ทุก ๆ เส้นรัศมีของรูปทรงกลมเดียวกันย่อมเท่ากันและ
ทุก ๆ เส้นศูนย์กลางของรูปทรงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน

ข) รูปทรงกลมที่เท่ากันย่อมมีรัศมีเท่ากัน และรูปทรงกลม
ทุกรูปที่มีรัศมีเท่ากันย่อมเท่ากัน

อุปมาณียะเทศที่ ๕๘ รูปนาคัตถุรูปที่เกิดขึ้นโดยอาการ
ตักกัน ระหว่างพื้นราบหนึ่งและพื้นที่ทรงกลมหนึ่งยอมเป็นวงกลม



รูป ๑๑๓

ให้รูปทรงกลมหนึ่งที่มีศูนย์กลาง O และ ABD เป็นรูปนาคัตถุ
รูปใดรูปหนึ่งที่เกิดขึ้นโดยมีพื้นราบหนึ่งนาคัตถุ รูป ๑๑๓

จึงพิสูจน์ว่า รูปนาคัตถุ ABD เป็นวงกลม

พิสูจน์ ถ้าแกว่นรัศมี AO, OB จากจุดศูนย์กลางไปยัง
จุดใดๆ เช่น A, B บนรูปนาคัตถุ และลากเส้น
 OC ให้ตั้งฉากกับพื้นราบที่บรรจุรูปนาคัตถุ

ดังนั้นใน $\triangle OCA$ และ $\triangle OCB$

$\angle OCA$ และ $\angle OCB$ เป็นมุมฉากทั้งคู่ (๘๓)

OC เป็นด้านร่วม และ $OA = OB$ (๑๖๖)

$\therefore \triangle OCA$ เหมือนกับ $\triangle OCB$ (๑๖)

$\therefore CA = CB$ (๘)

$\therefore$ จุดใดๆ ๒ จุดเช่น A และ B และโดย
ทำนองเดียวกันทุกๆ จุดของรูปนาคัต ต่างก็มีระยะ
เท่ากันเสมอจากจุด C .

$\therefore ABD$ เป็นวงกลม (๓๘)

ร. ท. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ เส้นตรงที่ลากให้ผ่านจุดศูนย์กลางของรูปทรง
กลมและจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งบนรูปทรงกลมนั้น ย่อมคง
ได้ฉากกับพหุราบที่บรรจุวงกลมนั้นอยู่

ข้ออนุมานที่ ๒ วงกลมทั้งหลายบนรูปทรงกลมนั้น ที่เกิด
จากพหุราบที่มีระยะเท่ากันจากศูนย์กลางรูปทรงกลมมาตัดย่อมเท่า
กัน แต่ถ้าสำหรับสองวงกลมที่เกิดจากพหุราบที่มีระยะไม่เท่ากัน
จากศูนย์กลางรูปทรงกลมมาตัด วงกลมที่เกิดจากพหุราบที่ใกล้
ศูนย์กลางรูปทรงกลมมากกว่าย่อมใหญ่กว่า

(๑๖๗) วงกลมใหญ่ (Great Circle) รูปที่เกิดขึ้นโดยเส้นรอบคัตระหว่างพื้นที่ทรงกลมหนึ่ง กับพื้นราบหนึ่งที่ผ่านมาถึงศูนย์กลางของพื้นที่ทรงกลมนั้นด้วย รูปนี้เรียกว่าวงกลมใหญ่ของรูปทรงกลม

(๑๖๘) วงกลมเล็ก (Small Circle) รูปที่เกิดขึ้นโดยเส้นรอบคัตระหว่างพื้นที่ทรงกลมหนึ่ง กับพื้นราบหนึ่งที่ไม่ผ่านมายังศูนย์กลางของพื้นที่ทรงกลมนั้น รูปนี้เรียกว่าวงกลมเล็กของรูปทรงกลม

(๑๖๙) หัวขั้วของวงกลม (Poles of a Circle) ถ้าเส้นศูนย์กลางของรูปทรงกลมเส้นหนึ่ง ตั้งฉากกับพื้นราบที่บรรจุวงกลมวงหนึ่งของรูปทรงกลม จุดปลายทั้ง ๒ ของเส้นศูนย์กลางนั้น เรียกว่าหัวขั้วของวงกลมนั้น

ข้อนิยามที่ ๑ วงกลมที่ขนานกันย่อมมีหัวขั้วร่วมกัน

ข้อนิยามที่ ๒ วงกลมใหญ่ทุก ๆ วง ของรูปทรงกลมหนึ่ง ย่อมเท่ากัน

ข้อนิยามที่ ๓ ทุก ๆ วงกลมใหญ่ย่อมแบ่งครึ่งพื้นที่ทรงกลม

ข้อนิยามที่ ๔ วงกลมใหญ่สองวงย่อมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

(เส้นรอบคัตกันระหว่างพื้นราบที่บรรจุวงกลมหนึ่งๆ ย่อมผ่านจุดใด
ของรูปทรงกลม?)

ข้ออนุมานที่ ๕ ถ้าพื้นราบที่บรรจุวงกลมใหญ่ของพื้นราบ
ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ต่างวงกลมหนึ่งๆ ก็ผ่านไปยังหัว
ขั้วของวงกลมหนึ่ง (จงเขียนรูปขึ้นแล้วและตั้งเหตุผล)

ข้ออนุมานที่ ๖ เราสามารถจะลากส่วนของเส้นรอบวงของ
วงกลมใหญ่วงหนึ่งให้ผ่านจุด ๒ จุดที่กำหนดให้บนพื้นทรงแท่งกลมได้
เสมอ

จุด ๒ จุดที่กำหนดให้นั้น รวมกันจึงตั้งฉากกับระนาบของรูปทรงกลม
ตามสมมติฐานที่กำหนดพื้นราบใดหรือไม่ว่าให้พิจารณาถึงส่วนพิเศษ
คือเมื่อจุดทั้ง ๒ ที่กำหนดให้นั้น ตั้งก็เป็นจุดปลายของเส้นสัมผัส
กลางเส้นเดียวกัน

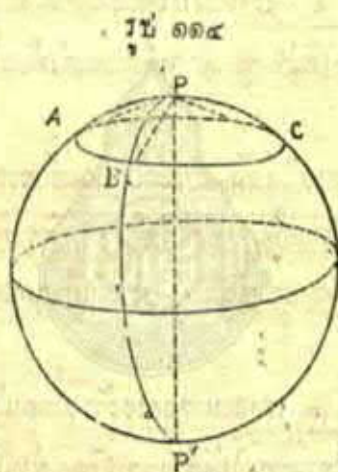
ข้ออนุมานที่ ๗ เราสามารถจะสร้างวงกลมให้ผ่านจุด ๓ จุด
ที่กำหนดให้บนพื้นทรงแท่งกลมได้แต่วงกลมเดียวเท่านั้น (ที่จะกำหนด
พื้นราบใดของอาศรัยจุดทั้ง ๓)

๑๗๐) ระยะทรงกลม (Spherical distance) ความยาว
ของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่วงหนึ่งนับทางส่วนที่สั้น ในระหว่าง
จุด ๒ จุดบนพื้นทรงแท่งกลมนั้นเรียกว่าระยะทรงกลมระหว่างจุด ๒ จุด

๒๔๔

นั้นเอง หรือเพื่อความสะดวกและเพื่อไม่ให้เกิดความงัดงาย จะเรียก
แต่เพียงระยะระหว่างจุดทั้ง ๒ นั้นพอ

อุปมาขณิกที่ ๕๗ ระยะทรงกลมจากจุดทั้งหลายของวง
กลมวงหนึ่ง บนรูปทรงกลมหนึ่งถึงหัวขั้วข้างหนึ่งของวงกลมนั้น
ย่อมเท่ากันเสมอ



ให้ P และ P' เป็นหัวขั้วของวงกลม ABC และ A, B, C,
เป็นจุดใดๆ บนวงกลม รูป ๑๑๔
จึงพิสูจน์ว่า ส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ PA,
PB, PC, ย่อมเท่ากัน

พิสูจน์ เส้นตรง PA, PB, PC , ต่างก็เท่ากัน (อ.น. ๖)

ดังนั้นส่วนของเส้นรอบวง PA, PB, PC ,

ต่างก็เท่ากันด้วย

(๔๒)

ช. ท. พ.

และ โดยทำนองเดียวกันที่จะพิสูจน์ ได้ว่า

$P'A, P'B, P'C$, ต่างก็เท่ากันด้วย

๑๗๑) ระยะห้วขั้ว (Polar Distance) ระยะทรงกลมจาก
จุดใดจุดหนึ่งของวงกลมหนึ่งบนรูปทรงกลมถึงห้วขั้วหนึ่ง ขั้วที่ไกล
เรียกว่าระยะห้วขั้วของวงกลม

ระยะทรงกลมจากวงกลมใหญ่วงหนึ่ง ถึงห้วขั้วข้างใดข้างหนึ่ง
ก็คือระยะห้วขั้วของวงกลมนั้นเอง

๑๗๒) จัตุรางคต (Quadrant) เศษหนึ่งส่วนสี่ของวงกลม
ใหญ่วงหนึ่งเรียกว่าจัตุรางคต

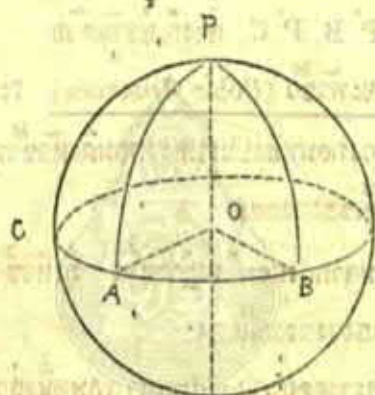
ข้ออนุมาณที่ ๑ ระยะห้วขั้วของวงกลมใหญ่วงหนึ่งย่อมเท่า
กับหนึ่งจัตุรางคต

ข้ออนุมาณที่ ๒ เส้นตรงทุกเส้นที่ลากจากจุดใด ๆ ของวง
กลมหนึ่งบนรูปทรงกลม ถึงห้วขั้วข้างหนึ่งของวงกลมนั้นย่อมเท่า
กันทุกเส้น

อุประมายืนที่ ๒๐ ถ้าจุด ๆ หนึ่งบนรูปทรงกลม ที่มี

ระยะจากจุดอื่นอีก ๒ จุด ที่ไม่ใช่จุดปลายทั้ง ๒ ของเส้นศูนย์
 ทิศทางเส้นหนึ่งเท่ากับหนึ่งจากครึ่งวงกลมแล้ว ย่อมเป็นหัวขั้วของวงกลม
 ใหญ่ที่ผ่านจุดทั้ง ๒ นั้น

รูป ๑๑๕



ให้จุด ๆ หนึ่ง P บนรูปทรงกลมหนึ่ง PA และ PB ต่างก็
 เป็นหนึ่งจากครึ่งวงกลม และ ABC เป็นวงกลมใหญ่ที่ผ่านจุด A และ B

รูป ๑๑๕

จงพิสูจน์ว่า P เป็นหัวขั้วของวงกลม ABC

พิสูจน์ $\angle AOP$ และ $\angle BOP$ เป็นมุมฉาก

ดังนั้น PO เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสามเหลี่ยม POA และ POB

วงกลม ABC ? และเมื่อเป็นเช่นนั้นใด

พิสูจน์หรือแปลว่า P เป็นหัวใจของวงกลม

ABC ?

๑๗๓) เขียนวงกลมบนรูปทรงกลมหนึ่ง (Describing

Circles on a Sphere) รูประนาบที่ตัด ๖๐ เป็นหนทางที่นำ

ให้สามารถเขียนวงกลมใหญ่บนรูปทรงกลมหนึ่งได้ ที่กำหนดรัศมี
ให้และให้ผ่านไปยังจุด ๒ จุดที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} \text{คือทางวงเวียนออกให้เท่ากับระยะระหว่าง } PA &= \sqrt{r^2 + r^2} \\ &= r\sqrt{2} \end{aligned}$$

๑๗๔) เส้นสัมผัสและพหุราบสัมผัส (Tangent Lines and

Planes) เส้นตรงเส้นหนึ่ง หรือพหุราบพื้นหนึ่ง แม้จะต่อให้ยาว

หรือขยายออกให้กว้างสักเพียงใดก็ตาม คงมีจุดร่วมกับพื้นที่ทรงกลม

หนึ่งแต่เพียงจุดเดียวเท่านั้น เส้นตรงหรือพหุราบนั้นเรียกว่าสัมผัสกับ

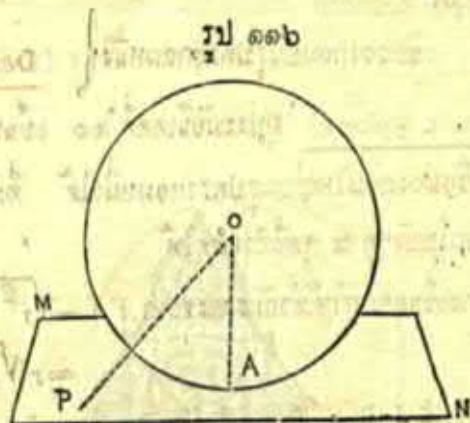
รูปทรงกลม และรูปทรงกลมนั้นเรียกว่าสัมผัสกับเส้นตรงหรือพหุราบ

๑๗๕) รูปทรงกลมสัมผัส (Tangent Sphere) รูปทรงกลม

สองรูปที่มีจุดหนึ่งบนพื้นที่ทรงกลมทั้ง ๒ นั้นร่วมกัน และเพียงจุด

เดียวเท่านั้นรูปทรงกลมทั้ง ๒ นั้น เรียกว่าสัมผัสซึ่งกันและกัน

รูประนาบในทศที่ ๖๑ พนราบหนึ่งที่ตั้งโดยฉากกับรัศมีเส้น
หนึ่ง ที่ตรงจุดปลายของรัศมีเส้นนั้น ย่อมเป็นพนราบสัมผัสกับรูป
ทรงกลม



ให้ พนราบ MN ตั้งโดยฉากกับรัศมี AO ที่ตรงจุด A รูป ๑๑๖
จงพิสูจน์ว่า MN เป็นพนราบสัมผัสกับรูปทรงกลม
พิสูจน์ ให้ P แทนจุดใดจุดหนึ่ง ยกเว้นเส้นแก่ A

บนพนราบ MN
ดังนั้นเส้น OP และ OA เส้นใดจะยาวกว่ากัน
และเพราะเหตุไร ?

ดังนั้น P จะอยู่ภายในหรือภายนอก
รูปทรงกลม และเพราะเหตุไร

อาศัยเหตุที่เราสามารถทราบถึงเรื่องจุดอื่น ๆ

ทั้งหมดว่าเป็นอย่างไร น้อยกว่าจุด A บนพรมอบ ?

และเพราะเหตุไรจึงรู้ได้ว่า MN เป็นพรมอบสัมผัส

กับรูปทรงกลม ?

ข้ออนุมาน พรมอบหนึ่งสัมผัสกับรูปทรงกลมหนึ่ง ย่อมมี

โคธากกับเส้นรัศมีที่ลากผ่านมายังจุดสัมผัส

๑๗๖) รูปทรงกลมที่บรรจุอยู่ภายใน (Inscribed Sphere)

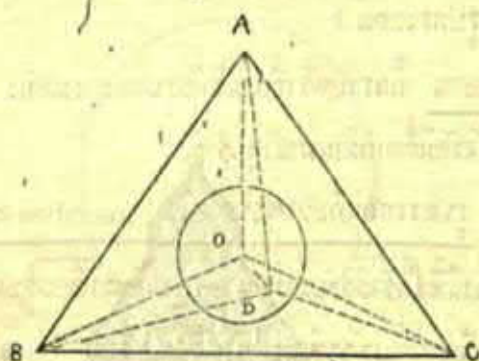
ถ้ารูปทรงกลมหนึ่งมีพรมอบสัมผัสกับทุกหน้าของรูปกอนเหลี่ยมรูปหนึ่ง รูปทรงกลมนั้นเรียกว่าบรรจุอยู่ภายในรูปกอนเหลี่ยม และรูปกอนเหลี่ยมเรียกว่าล้อมรอบอยู่ภายนอกรูปทรงกลมนั้น

๑๗๗) รูปทรงกลมที่ล้อมรอบอยู่ภายนอก (Circumscribed

Sphere) ถ้าทุก ๆ จุดยอดของรูปกอนเหลี่ยมรูปหนึ่ง บรรจุอยู่บนพรมอบรูปทรงกลมหนึ่ง รูปทรงกลมนั้นเรียกว่าล้อมรอบอยู่ภายนอกรูปกอนเหลี่ยม และรูปกอนเหลี่ยมเรียกว่าบรรจุอยู่ภายในรูปทรงกลมนั้น

อุประมาณียนเทศที่ ๒๒ เราสามารถที่จะสร้างรูปทรงกลมหนึ่ง
 ให้บรรจุอยู่ในรูปกอนเหลี่ยมที่มีด้านรูปหนึ่งที่กำหนดให้ ได้เสมอ

รูป ๑๑๗



ให้รูปกอนเหลี่ยมที่มีด้านรูปหนึ่ง ABCD รูป ๑๑๗

จงพิสูจน์ว่า สามารถที่จะบรรจุรูปทรงกลมหนึ่งภายในรูป ABCD นี้

พิสูจน์ แบ่งครึ่งมุมของหน้าของรูป ABCD ไปตามแนว

ด้าน AB, BC และ CA ด้วยพินทุา OAB

OBC และ OCA ตามลำดับ

ทุก ๆ จุดบนพินทุา OAB มีระยะห่างเท่ากัน

เดิมจากหน้าของมุม ABC และ ABD (ถ. น. ๒๐)

และโดยทำนองเดียวกันทุก ๆ จุดบนพื้นราบ

OBC มีระยะเท่ากันเสมอจากหน้าของมุม

ABC และ DBC และทุก ๆ จุดบนพื้นราบ OCA

มีระยะห่างเท่ากันเสมอจากหน้าของมุม ABC และ ADC

เพราะฉะนั้นที่ตรงจุด O ซึ่งเป็นจุดร่วม

ในระหว่างเส้นรอยตัดกันของพื้นราบทั้งสามนี้

ย่อมมีระยะห่างจากหน้าทั้งสี่ของรูปกอนเหลี่ยมที่มี

สี่หน้านั้นเท่ากันเสมอ จึงเป็นศูนย์กลางของรูปทรงกลม

ที่คั่นบรรจุอยู่ภายในรูปกอนเหลี่ยมที่มีสี่หน้านั้น (๑๗๖)

ช. ต. พ.

ให้นักเรียนวินิจฉัยปัญหาดังต่อไปนี้

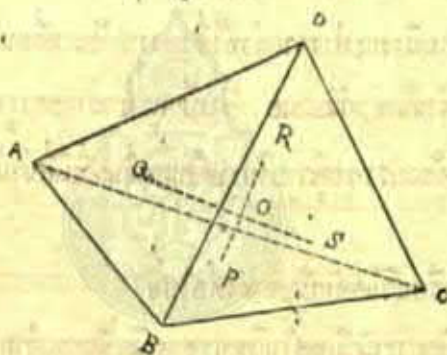
ก) มีอุปประมัยนิเทศในวิชาเรขาคณิตพื้นราบว่าอย่างไร ที่ตรงกันกับอุปประมัยนิเทศที่ ๒๒ นี้ และวิธีพิสูจน์ดำเนินไปตามทำนองเดียวกันหรือไม่?

ข) ในวิชาเรขาคณิตพื้นราบ ได้ตั้งแวงไว้แล้วว่าเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ย่อมมาตัดตัวร่วมกันที่จุดเดียว จะต้องอุปประมัยนิเทศอย่างไร ในข้อนี้เพื่อให้ตรงกัน

กับรัศมีที่กล่าวในเรขาคณิตพีระาม และทรงมพีฐานอยู่ในตัวหรือไม่
ในเมื่อได้พีฐานอยู่ประมณันเทศรัศมีแล้วมาน ?

อุประมณันเทศที่ ๒๓ เราสามารถที่จะสร้างรูปทรงกลม
หนึ่ง ให้ล้อมอยู่ภายนอกรูปกอนเหลี่ยมที่มีด้านารูปหนึ่งที่กำหนด
ให้ ได้เสมอ

รูป ๑๑๘



ให้รูปกอนเหลี่ยมที่มีด้านารูปหนึ่ง ABCD รูป ๑๑๘
จงพิสูจน์ว่า สามารถที่จะสร้างรูปทรงกลมให้ล้อมอยู่ภายนอก
ABCD ได้

พิสูจน์ ให้ P และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมอยู่
ภายนอก หน้า ABC และ ABD ตามลำดับ

และสร้างให้ PR เป็นเส้นตั้งฉากกับหน้า
 ABC กับ QS เป็นเส้นตั้งฉากกับหน้า ABD

ดังนั้น PR จะเป็นวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ที่มี

ลักษณะห่างจาก A, B, C , เป็นระยะเท่ากัน

เช่น Q และเช่นเดียวกัน QS เป็นวิถีของ

จุดที่คงห่างเท่ากันจาก A, B, C และ D , (อนุ ๓. ช.น. ๖)

ดังนั้น PR และ QS ต่างกับบรรจุอยู่ในพื้น

ราบพื้นเดียวกัน คือพื้นราบซึ่งตั้งฉากกับ AB

ที่ตรงจุดกึ่งกลาง (อนุ ๔. ช.น. ๖)

ถ้า QS โคจรมาพบกับ PR แล้ว ก็จำ

เป็นที่จะต้องตั้งฉากกับหน้า ABC (อนุ ๑. ช.น. ๗)

แต่เป็นไปได้ เพราะ QS ตั้งฉากกับหน้า

ABD ซึ่งเป็นหน้าที่ตั้งกันกับหน้า ABC อยู่แล้ว (ให้)

ถ้า PR และ QS จะเป็นเส้นขนานกันไม่ได้

ได้ว และทั้งต่างกับบรรจุอยู่ในพื้นราบเดียวกัน

ก็จะต้องตัดกันที่จุดใดจุดหนึ่ง O

∴ O จึงเป็นจุดที่มระยะจาก A, B, C, D,
เท่ากัน

คือเป็นศูนย์กลางของรูปทรงกลมที่ติดข้องการ (๑๗๗)

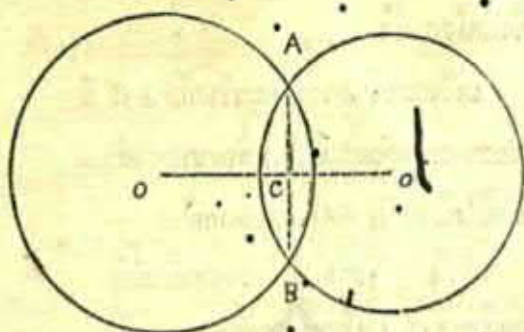
ร. ก. พ.

ข้ออนุมาน จะสร้างพื้นที่ทรงกลมพหุหนึ่ง ให้บรรจุจุด
กำหนดให้ ๕ จุด ที่ไม่อยู่ในพื้นราบพหุเดียวกัน โดยแต่ละพื้นที่
ทรงกลมเดียวกัน

ศูนย์กลางของรูปทรงกลมรูปใดรูปหนึ่ง ที่จุดของพหุทบบรรจุ
จุดทั้งสี่ที่กำหนดให้นั้น จำเป็นต้องบรรจุอยู่ในพื้นราบที่ใดกล่าวมา
แล้ว ในการพิสูจน์อุปมาขึ้นเทศที่ ๖๓ นี้ และทั้งเมื่อจำกัดให้มีแค่
เพียงจุดเดียวเท่านั้น ที่เป็นจุดที่ติดกันของเส้นทั้ง ๒ จึงเป็นเหตุ
ที่ทำให้มีแค่เฉพาะรูปทรงกลมเดียว

อุปมาขึ้นเทศที่ ๖๔ เส้นรอยติดกันระหว่างพื้นที่ทรงกลม
สองพื้นที่ ย่อมเป็นวงกลมที่บรรจุอยู่ในพื้นราบที่ตัดฉากกันกับเส้น
ตลอดศูนย์กลางของรูปทรงกลมทั้งสองนั้น และศูนย์กลางของวงกลม
นี้จะอยู่ในเส้นที่กล่าวแคว้นนี้ด้วย

รูป ๑๑๕



ให้ พนททรวงกลมทั้งสองพททกตกัน และทมิจุดศูนย์กลาง O

และ O' รูป ๑๑๕

จงพิสูจน์ว่า พนทททั้งสองนิตกันเป็นวงกลม ทับบรรจุในพทท

ทตั้งโตฉากกับ OO' และทังจุดศูนย์กลางท้อยู่ในเส้น OO' น

พิสูจน์ สมมติให้พททหนึ่งบรรจุ O และ O'

จะเกิดเป็นวงกลมใหญ่ ของพทททรวงกลมทั้งสอง

นั้นนต้องวงกลม และทกกันที่ A และ B

คั้งนี้ OO' จะตั้งโตฉากตรงจุดกึ่งกลาง AB (๔๖)

ถ้าพทททตั้งนิตมาแล้วนทททรอบตัวไป

โดยอาศัย OO' เป็นแกนหมุน วงกลมใหญ่ทัง

สองนทังจะทำให้เกิดพทททรวงกลมขึ้น และใน

ขณะเดียวกันจะทำให้เกิดเส้นรอบยัดกันของ

พหุทั้งสี่ของนั้น

แต่ในระหว่างเวลาที่หมุนไปนั้น AC มี

ระยะยาวเท่าเดิมและไม่เปลี่ยนแปลงและ

ทั้งคงได้ฉากกับ OO' ชยเดิมอีกด้วย

ดังนั้น A จึงทำให้เกิดวงกลมขนาน

ศูนย์กลาง C และสัมผัสกับทแยงมุม

คงได้ฉากกับ OO'

(อ. น. ๓)

ช. ค. พ.

(๑๗๘) มุมทรงกลม (Spherical Angle) มุมที่เกิดขึ้นจาก

วงกลมใหญ่สองวงตัดกันเรียกว่ามุมทรงกลม มุมทรงกลมมุมหนึ่งๆ

ย่อมมีขนาดเท่ากับมุมราบมุมหนึ่ง ที่เกิดจากเส้นด้านดี ๒ เส้น

ตัดกัน ที่ตรงเส้นรอบวงทั้งสองนั้นผ่านกัน ควรเขียนรูปขึ้น เพื่อ

ให้เข้าใจง่าย

(๑๗๙) อนึ่งในวิชาเรขาคณิตทรงกลมนั้น มักจะไม่พิจารณาและ

กล่าวถึงมุมทรงกลม ที่เกิดขึ้นโดยอาการตัดกันระหว่างเส้นรอบ

วงของวงกลมเล็กก่อน

แบบฝึกหัดที่ ๒๘

๑. เส้นตรงที่เชื่อมทแยงมุมตรงกลางของวงกลมที่ล้อมรอบ
ภายนอกของหน้าของรูปก่อนเหลี่ยมที่มีด้านรูปหนึ่ง และต่างก็ให้
คงได้ฉากกับมันนั้น ๆ ย่อมไปตัดรวมกันที่เค้นกัน

๒. พนมราบทั้งหกซึ่งต่างก็คงได้ฉากกับเส้นของรูปก่อนเหลี่ยมที่
มีด้านรูปหนึ่งตรงกลางกลางของเส้นนั้น ๆ / ย่อมไปตัดรวมกันที่ตรง
จุดเดียวกัน

๓. พนมราบทั้งหกต่างก็แบ่งครึ่งมุมของหน้าของรูปก่อนเหลี่ยม
ที่มีด้านรูปหนึ่ง ย่อมไปตัดรวมกันที่ตรงจุดเดียวกัน

๔. วงกลมที่ขยับบนรูปทรงกลมเดียวกัน และที่ต่างก็มีระยะ
หัวขั้วเท่ากันย่อมเท่ากัน

๕. วงกลมที่เท่ากัน และต่างก็ขยับบนรูปทรงกลมเดียวกัน
ย่อมมีระยะหัวขั้วเท่ากัน

๖. จงหาวิถีของจุด ๆ หนึ่ง ในพนมราบพินหนึ่ง ที่มีลักษณะ
ห่างจากจุดหนึ่งที่กำหนดให้ เป็นระยะที่เท่ากันเสมอ และจงหาอีก
วิถีหนึ่งที่มีลักษณะเช่นเดียวกัน ในที่ว่างที่มีขนาดตามรูป

๗. เส้นตรงเส้นหนึ่งที่เป็นเส้นด้านตั้งกับวงกลมใหญ่วงหนึ่งของรูปทรงกลมหนึ่ง ย่อมมีบรรจุอยู่ในพื้นราบที่ด้านตั้งกับรูปทรงกลมที่ตรงจุดด้านตั้งของเส้นตรงนั้น

๘. ในพื้นราบที่ด้านตั้งกับรูปทรงกลมหนึ่ง ถ้าเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งให้ผ่านจุดที่ด้านตั้งของพื้นราบนั้น ย่อมเป็นเส้นด้านตั้งกับรูปทรงกลมที่ตรงจุดนั้น

๙. จะสร้างพื้นราบให้ด้านตั้งกับรูปทรงกลมตรงจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้บนรูปทรงกลมหนึ่ง ได้แต่เพียงพื้นราบเดียวเท่านั้น

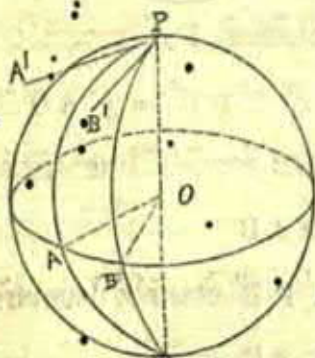
๑๐. จงหาตำแหน่งของจุด ๆ หนึ่งบนพื้นราบหนึ่ง ที่ต้องห่างจากเส้นตรง ๒ เส้นที่ตัดกันบนพื้นราบนั้นเท่ากันเสมอ และในขณะเดียวกันห่างจากจุดอีกจุดหนึ่งที่กำหนดให้บนพื้นราบนั้นเท่ากับระยะที่กำหนดให้ ให้อธิบายวิธีแก้

๑๑. จะต้องการจุดสักจุดจึงจะสามารถกำหนดเส้นตรงได้ และสำหรับกำหนดวงกลมหนึ่งได้ และสำหรับพื้นที่ทรงกลมหนึ่งได้ กับให้พิสูจน์ว่าพื้นที่ทรงกลมสองพื้นจะทับกันได้แนบสนิท ถ้ามีจำนวนจุดที่ใดสองจุดที่กำหนดได้นั้นเป็นจุดร่วมกัน

๑๒. ถ้าพื้นราบตั้งของพื้นที่ตกกันตามเส้นตรง AB ต่างก็
 ดำเนินกับรูปทรงกลมหนึ่งทั้งคู่ C และ D เส้นตรง CD จะตั้งฉาก
 กับ AB ตามความหมายของข้อ (อน. ๒ อน. ๒) นั่นคือถ้าเราจะ
 สร้างพื้นราบให้บรรจุ CD และตั้งฉากกับ AB ได้พื้นราบหนึ่ง

อุปมาณียนเทศที่ ๑๕ มุมทรงกลมมุมหนึ่งย่อมวัดได้ด้วย
 อาร์กยาวของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ ที่สัมผัสกับด้านโดย
 ให้มีหัวขั้วอยู่ที่ตรงกลางของมุมทรงกลม และที่อยู่ในระนาบ
 ของมุมทรงกลมนั้น และฐานบางทีถ้าจำเป็นก็จะต้องออกไป

รูป ๑๒๑



ให้ PA และ PB เป็นส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ที่
 ตัดกันที่จุด P PA' และ PB' เป็นเส้นตรงสัมผัสกับส่วนของเส้น
 รอบวงที่ตรงจุด P AB เป็นส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่
 ที่สัมผัสกับเส้นตรง AB โดยให้มุมที่จุด P อยู่ภายใน

PA และ PB รูป ๑๒๐

จงพิสูจน์ว่า มุมของมุม APB ย่อมวัดได้ โดยอัตราส่วนของ
 ของเส้นรอบวง AB

พิสูจน์ ในรูปวง POB , PB' ตั้งฉากกับ PO (๔๔)

และ OB ตั้งฉากกับ PO (๔๐)

$\therefore PB'$ ขนานกับ OB (๑๕)

โดยทำนองเดียวกัน PA' ขนานกับ OA

$\therefore \angle A'PB' = \angle AOB$ (ค.น. ๑๓)

แต่ $\angle AOB$ ย่อมวัดได้ โดยอัตราส่วนของ

เส้นรอบวง AB (๔๐)

$\therefore \angle A'PB'$ ย่อมวัดได้ โดยอัตราส่วนของ

เส้นรอบวง AB

และ $\therefore \angle A P B$ ก็วัดได้ โดยทำองศาเดียวกัน

คืออัตราวัดส่วนของเส้นรอบวง $A B$

(๑๗๘)

ร. ท. พ.

ข้ออนุบาลที่ ๑ มุมทรงกลมมุมหนึ่ง ย่อมมีจุดหรือขนาด
อันเดียวกันกับมุมตรงนั้น ที่เกิดจากพรมรอบต้องพรม กับพรม
วงกลมทั้งต้องนั้นอยู่ด้วยกัน

ข้ออนุบาลที่ ๒ ส่วนของเส้นรอบวงทุกเส้นของวงกลมใหญ่

ที่ลากให้ผ่านหัวขั้วของวงกลมใหญ่ของหนึ่งที่กำหนดให้ ย่อมคงได้ฉาก
กับวงกลมใหญ่ที่กำหนดให้นั้น

(๑๗๙) รูปเหลี่ยมทรงกลม (Spherical Polygon) พนม

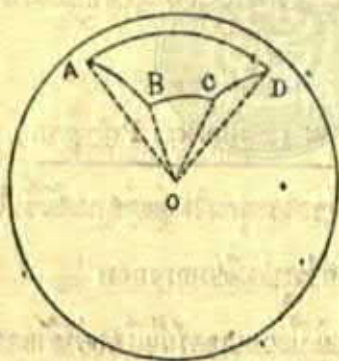
ทรงกลมทุกส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่แก่ด้านเส้นนั้นไปนั้น
อยู่เป็นรอบเขตร พนมนี้เรียกว่ารูปเหลี่ยมทรงกลม

ส่วนของเส้นรอบวงที่กั้นอยู่เป็นรอบเขตรนั้นเรียกว่าด้านของรูป
เหลี่ยม มุมในระหว่างด้านทั้งหลายเหล่านั้นเรียกว่ามุมของรูปเหลี่ยม
และจุดที่กั้นระหว่างด้านทั้งนั้นเรียกว่ายอดของรูปเหลี่ยม

๑๘๐) ความเกี่ยวข้องระหว่างรูปเหลี่ยมและมุมหลายหน้า (Re-

lation of Polygons to Polyhedral Angles) พิจารณาทั้งหลาย
ที่บรรจุก้านของรูปเหลี่ยมทรงกลมอยู่นั้น ต่างก็ตัดและประกอบกัน
ขึ้นเป็นมุมหลายหน้ามุมหนึ่ง ที่มีจุดยอดมุมอยู่ที่ตรงศูนย์กลางของรูป
ทรงกลม และที่มีขนาดมุมของหน้าเท่ากับส่วนของเส้นรอบวงที่เป็น
ด้านของรูปเหลี่ยม และทั้งมุมต่องหน้ามุมหนึ่ง ๆ ของมุมหลายหน้า
นั้นก็เท่ากับมุมหนึ่ง ๆ ของรูปเหลี่ยมที่ตรงกันนั่นเอง เช่นในรูป ๑๒๑

รูป ๑๒๑



พิจารณาทั้งหลายที่บรรจุก้านของ

รูปเหลี่ยม ABCD ต่าง

ก็ไปตัดและประกอบกันขึ้น

เป็นมุมหลายหน้า O-ABCD

มุมของหน้า BOA COB

ฯลฯ ต่างก็มีขนาดหรือวัด

ได้ โดยอาศัยรัศมีวัดส่วนของ

เส้นรอบวง AB, BC ฯลฯ

ที่เป็นด้านของรูปเหลี่ยม มุมต่องหน้าที่มีด้าน OA ที่มีขนาด หรือวัด

ได้ โดยอาศัยรัศมีวัดมุมทรงกลม BAD ฯลฯ :

ตามที่ได้อธิบายมาแล้ว เห็นได้ว่าเรขาคณิตลักษณะของมุมหลาย
หน้ามุมหนึ่ง ให้เป็นลักษณะข้างรูปเหลี่ยมทรงกลมและกลับกันได้

๑๘๑) รูปเหลี่ยมทรงกลมขรรค์ (Convex Spherical
Polygons) ถ้ามุมหลายหน้ามุมหนึ่งที่มียอดมุมตรงศูนย์กลางของรูป
ทรงกลมหนึ่ง เป็นมุมหลายหน้าขรรค์ (ข้อ ๑๘๑) รูปเหลี่ยม
ทรงกลมที่เกิดขึ้นบนพื้นทรงกลมตรงกับมุมหลายหน้าก็เรียกว่ารูป
เหลี่ยมทรงกลมขรรค์

ทุก ๆ รูปเหลี่ยมทรงกลมที่จะกล่าวต่อไปนี้ ให้ถือว่าเป็นอย่าง
ขรรค์ นอกจากจะบอกเป็นพิเศษ

๑๘๒) เส้นทะแยงมุม (Diagonal) ส่วนของเส้นรอบวง
ของวงกลมใหญ่ที่อยู่ระหว่างยอดมุมหนึ่งถึงอีกยอดมุมหนึ่งของรูป
เหลี่ยมทรงกลมที่ไม่เรียงกันไปเรียกว่าเส้นทะแยงมุม

๑๘๓) รูปสามเหลี่ยมทรงกลม (Spherical Triangle) รูป
เหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่งที่มีด้านแต่เพียงสามด้าน เรียกว่ารูปสามเหลี่ยม
ทรงกลม

รูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง อาจเป็นมุมฉาก มุมมนหรือ
มุมแหลม และทั้งอาจเป็นด้านเท่ากันหรือค่อนไม่เท่ากันได้

๑๘๔) รูปเหลี่ยมทรงกลมที่เหมือนกัน (Congruent Spherical Polygons) ถ้ารูปเหลี่ยมทรงกลมสองรูปสามารถที่จะประกบกันเข้าให้แนบสนิทได้ทุกด้าน รูปเหลี่ยมทั้งสองนั้นเรียกว่าเหมือนกัน

อุปมาขึ้นที่ ๒๒ ด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านอื่นอีกสองด้านรวมกัน



รูป ๑๒๒

ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ABC ที่มีด้าน AC เป็นด้านที่ยาวกว่าด้านอื่น รูป ๑๒๒

จงพิสูจน์ว่า $CA < AB + BC$

พิสูจน์ ให้พิจารณาสามเหลี่ยม $O-ABC$ ที่ตรงกับรูป
ตามเหลี่ยมทรงกลมนี้ $\angle COA$ ย่อมเล็กกว่า

$$\angle BOA + \angle COB$$

(อ. น. ๒๕)

$$\therefore CA < AB + BC$$

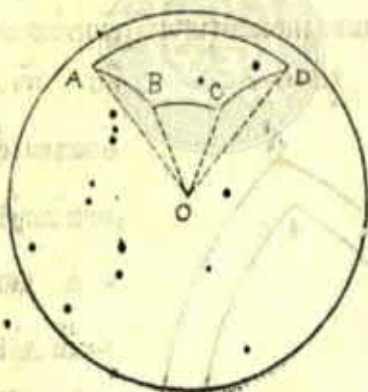
(๑๘๐)

ร. ก. พ.

อุปมาณียนเทศที่ ๖๗ ผลบวกของด้านทุกด้าน ของรูปเหลี่ยม

ทรงกลมรวมกัน ย่อมน้อยกว่า ๓๖๐

รูป ๑๒๓



ให้รูปเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ABCD รูป ๑๒๓

๓๔

๒๖๖

จงพิสูจน์ว่า $AB + BC + CD + DA < 360^\circ$

พิสูจน์ ให้พิจารณาจุดศูนย์กลาง O ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ที่ตรงกับ
รูปเหลี่ยมทรงแกลมที่ก่อกำหนดใหม่

$$\angle BOA + \angle COB + \angle DOC + \angle DOA$$

$$< 360^\circ \quad (\text{ป.น. ๒๖})$$

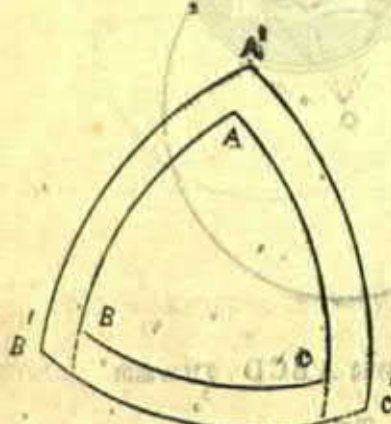
$$\therefore AB + BC + CD + DA < 360^\circ \quad (๑๘๐)$$

ร.ท. พ.

๑๘๕) สามเหลี่ยมขั้วจักร (Polar Triangle) ถ้าเขา

จุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมทรงแกลมรูปหนึ่งเป็นหัวขั้ว แล้ว
เส้นส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ที่ผ่านเส้นเหล่านี้จะประกอบกัน
เป็นรูปสามเหลี่ยมทรงแกลมอีกรูปหนึ่ง เรียกว่าสามเหลี่ยมขั้วจักร

รูป ๑๒๔



คือ ถ้า A เป็นหัวขั้วของ
ส่วนของเส้นรอบวงของวง
กลมใหญ่ BC B ของ
 CA และ C ของ AB
ดังนั้น $A'B'C'$ เป็นสาม
เหลี่ยมขั้วจักรของสาม
เหลี่ยม ABC ถ้า
เขาจุด A, B, C , ทั้งสามนี้

เป็นทวิภาค และเขียนวงกลมใหญ่ขึ้นให้ครบรอบบริเวณ วงกลม
ใหญ่ทั้งสามนี้ซ้อนแบ่งพื้นที่ทรงกลมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมทรงกลม
แปดรูป

ในระหว่างรูปสามเหลี่ยมทรงกลมทั้งแปดรูปนี้ รูปหนึ่งที่มียอด
มุม A' ติดตรงกันกับ A ติดอยู่ข้างเดียวกันของด้าน BC เหมือนกับ
มุม A และทั้งมุม B' และ C' ก็มัลักษณะเช่นเดียวกัน รูปหนึ่งเป็น
สามเหลี่ยมมุมฉากของ ABC

แบบฝึกหัดที่ ๒๘

๑. จะแบ่งครึ่งเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่เส้นหนึ่งที่กำหนดให้
จงบอกว่าจะทำอย่างไรที่ตรงมุมศูนย์กลาง?

๒. ถ้าส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ ๒ เส้นตัดกัน มุม
ตรงข้ามย่อมเท่ากัน

๓. จะเขียนส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่เส้นหนึ่ง ให้
ผ่านจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ ก็จะได้ฉากกับส่วนของเส้นรอบวงของ
วงกลมใหญ่อีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้

๔. ทุกๆ จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ วงหนึ่งย่อมมีระยะห่างจากจุดปลายทั้ง ๒ (ข้อ ๑๗๖) ของวงกลมใหญ่อีกวงหนึ่งเท่ากันเสมอ ถ้าวงกลมใหญ่ทั้งสี่ซึ่งได้ฉากกันตรงจุดกึ่งกลาง

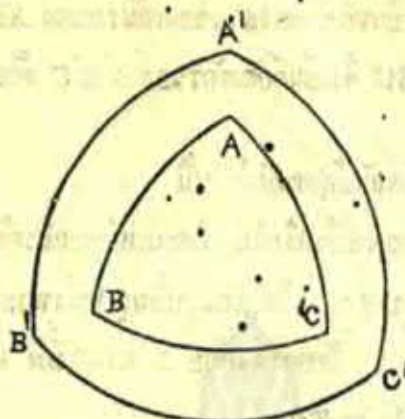
๕. ต้องด้านของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง มี $๔๒^{\circ} ๔๗'$, และ $๖๗^{\circ} ๓๙'$ จะทราบได้หรือไม่ว่า ด้านที่สามของสามเหลี่ยมรูปนี้มีจำนวนของศาเท่าใด?

๖. ด้านด้านของรูปสี่เหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง มี $๔๖^{\circ} ๒๙'$, $๗๓^{\circ} ๔๗'$ และ $๖๙^{\circ} ๕๔'$ จะทราบได้หรือไม่ว่า ด้านที่สี่ของสี่เหลี่ยมรูปนี้มีจำนวนของศาเท่าใด?

๗. ให้เขียนรูปทรงกลมหนึ่ง แล้วเขียนรูปสามเหลี่ยมทรงกลมด้านเท่าบนรูปทรงกลมนั้น ให้มีด้านหนึ่งยาว ๙๐° และภายหลังให้สร้างสามเหลี่ยมทรงกลมคู่ฉากกับรูปของสามเหลี่ยมรูปนี้

อุปมา นิเทศที่ ๖๘ ถ้าสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง เป็นคู่ฉากกับรูปสามเหลี่ยมทรงกลมอีกรูปหนึ่ง ดังนั้นสามเหลี่ยมทรงกลมรูปนี้ ก็ย่อมเป็นคู่ฉากกับรูปก่อนด้วย.

รูป ๑๒๕



ให้รูปสามเหลี่ยมทแยงมุม ABC และสามเหลี่ยมคู่ขนาน
ของ ABC คือ $A'B'C'$ รูป ๑๒๕

จงพิสูจน์ว่า ABC ก็เป็นคู่ขนานกับของ $A'B'C'$

พิสูจน์ เมื่อ A เป็นหัวขั้วของส่วนตรงเส้นรอบวง $B'C'$

และ C เป็นหัวขั้วของส่วนตรงเส้นรอบวง $A'B'$ (๑๘๕)

$\therefore D'$ มีระยะจาก A และ C เท่ากัน

จึงวางคดพอยัก

(อน.๑. ข้อ ๑๗/๒)

$\therefore B$ เป็นหัวขั้วของส่วนตรงเส้นรอบวง AC (อน.๖๐)

และ โดยทฤษฎีเดียวกัน

A' เป็นหัวขั้วของด้านของเส้นรอบวง BC

และ C' เป็นหัวขั้วของด้านของเส้นรอบวง AB

∴ ABC จึงเป็นศูนย์กลางกรของ A'B'C' ด้วย (๑๘๕)

ช. ต. พ.

โทนักเรียนวนจณญปัญหาตั้งต่อไปนี้

ก) เป็นการจำเป็นหรือไม่ ที่ด้านเหลี่ยมหนึ่งต้องอยู่ภายในของอีกรูปหนึ่งทั้งรูป ? โทเรียนรูปสี่เหลี่ยมที่พอประมาณ ไม่ต้องใช้เครื่องมือ โดยตั้งต้นด้วย $\triangle ABC$ ที่มี $AB = ๑๐๐^{\circ}$

$AC = ๑๐๐^{\circ}$ $BC = ๓๐^{\circ}$

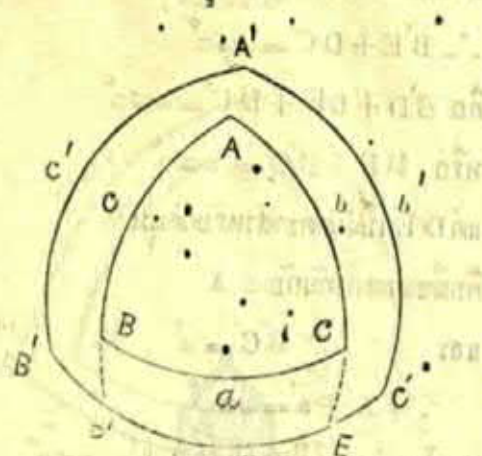
และต้องเขียนดอีกรูปหนึ่ง โดยให้ $AB = ๑๒๐^{\circ}$

$AC = ๔๐^{\circ}$ และ $BC = ๔๐^{\circ}$ อีกประการหนึ่งให้พิจารณาถึงรูปสามเหลี่ยม ที่มี $AB = BC = CA = ๔๐^{\circ}$ ว่าศูนย์กลางกรเป็นอย่างไร ?

หมายเหตุ ในอุประมาณนี้เทศข้อนี้ เราอาจตั้งต้นด้วยให้ ABC เป็นศูนย์กลางกรของ A'B'C' ได้เหมือนกัน (แล้วและพิสูจน์ว่า A'B'C' ก็เป็นศูนย์กลางกรของ ABC)

อุประมาณนี้เทศที่ ๖๘ ในรูปสามเหลี่ยมทรงกลมสองรูปที่เป็นศูนย์กลางกรซึ่งกันและกัน มุมหนึ่ง ๆ ของรูปหนึ่งย่อมเป็นศูนย์กลางกรของด้านหนึ่ง ๆ ที่ตรงข้ามของอีกรูปหนึ่ง

รูป ๑๒๖



ให้รูปสามเหลี่ยมที่บรรจุกลมสองรูป ABC และ $A'B'C'$ ซึ่ง
เป็นเหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งกันและกัน อักษรใหญ่ที่ประจำอยู่ทุก ๆ ขอบมุมนั้น
หมายความว่าขนาดของมุมเป็นจำนวนของค่า และอักษรเล็กหมายความว่าความยาว
ของด้านที่ตรงข้าม เป็นจำนวนของค่าเหมือนกัน รูป ๑๒๖

จึงพิสูจน์ว่า $A + a' = 180^\circ$, $B + b' = 180^\circ$, $C + c' = 180^\circ$

$A' + a = 180^\circ$, $B' + b = 180^\circ$, $C' + c = 180^\circ$

พิสูจน์ ขอบด้านของเส้นรอบวง AB, AC ลงมาจน

ตัดกับ BC' ที่ D และที่ E ตามลำดับ

เมื่อ B' เป็นหัวขั้วของ AE . $\angle B'E = 90^\circ$ (พท. ๒๑๑๗๒).

และเมื่อ C' เป็นหัวของ AD $\therefore DC' = 90^\circ$

$$\therefore BE + DC' = 180^\circ \quad (\text{จริง ๑})$$

$$\text{คือ } BD + DE + DC' = 180^\circ \quad (\text{จริง ๔})$$

$$\text{หรือ } DE + B'C' = 180^\circ \quad (\text{จริง ๕})$$

แต่ DE เป็นขนาดราดสำหรับมุม A

ก็จะมีขนาดเท่ากับ $\angle A$ (ค.พ. ๖๕)

$$\text{และ } B'C' = a'$$

$$\therefore A + a' = 180^\circ$$

$$\text{และ โดยทำนองเดียวกัน } B + b' = 180^\circ$$

$$\text{และ } C + c' = 180^\circ$$

ถ้าดำเนินการพิสูจน์ไปตามทำนองเดียวกัน โดยตั้งต้นด้วย $\triangle A'B'C'$

และต่อด้านของ $\triangle ABC$ แล้ว ได้ข้อในความดำเนินข้ออื่น ๆ

ก็อาจพิสูจน์ได้ทั้งหมด

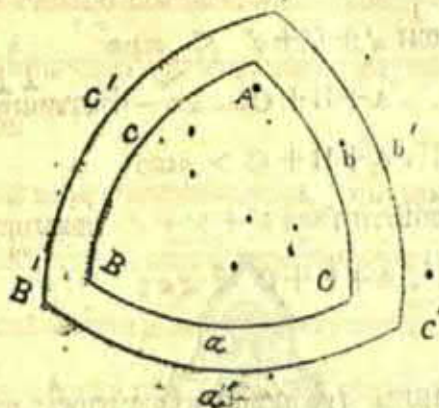
ร. ศ. พ.

อุปสรรคนี้เทศที่ ๗๐ ผลบวกระหว่างมุมทั้งสามของรูปสาม

เหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ย่อมมากกว่า 180° และน้อยกว่า 540°

เสมอ

รูป ๑๒๗



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง $\triangle ABC$ อักษรใหญ่ที่ประจำ
อยู่ทุก ๆ ขอบของมัน หมายความว่าขนาดของมันเป็นจำนวนของค่า และอักษร
เล็กหมายความว่าความยาวของคอร์ด ที่วางข้ามเป็นจำนวนของค่าเหมือนกัน

รูป ๑๒๗

จึงพิสูจน์ว่า $A + B + C > 180^\circ$ และ $< 540^\circ$

พิสูจน์ ให้ $\triangle A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมคี่มุมจกักรของ $\triangle ABC$

ดังนั้น $A + a' = 180^\circ$, $B + b' = 180^\circ$

$C + c' = 180^\circ$

(อ. น. ๖๔)

$$\therefore A + B + \overset{\circ}{c'} + \overset{\circ}{a'} + \overset{\circ}{b'} + \overset{\circ}{c'} = 540^{\circ} \quad (\text{จริง ๑})$$

$$\therefore A + B + C = 540^{\circ} - (\overset{\circ}{a'} + \overset{\circ}{b'} + \overset{\circ}{c'}) \quad (\text{จริง ๒})$$

$$\text{ซึ่ง } \overset{\circ}{a'} + \overset{\circ}{b'} + \overset{\circ}{c'} < 360^{\circ} \quad (\text{ช. น. ๖๗})$$

$$\therefore A + B + C = 540^{\circ} - \text{จำนวนหนึ่งที่มีน้อยกว่า } 360^{\circ}$$

$$\therefore A + B + C > 180^{\circ}$$

อีกประการหนึ่ง $\overset{\circ}{a'} + \overset{\circ}{b'} + \overset{\circ}{c'}$ ย่อมมากกว่า 0°

$$\therefore A + B + C < 540^{\circ}$$

ช. ท. พ.

ข้ออนุมาน รูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง อาจมีสองมุมฉาก หรืออาจมีสามมุมฉากก็ได้ และรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง อาจมีสองมุมบานหรือมีสามมุมบานก็ได้

๑๘๖) รูปสามเหลี่ยมทรงกลมแบ่งออกเป็นชนิดตามจำนวนของมุมฉาก (Triangles classified as to Right Angles)

รูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่งที่มีสองมุมฉาก เรียกว่าชนิดสองฉาก และรูปหนึ่งที่มีสามมุมฉาก เรียกว่าชนิดสามฉาก

ข้อชนิดเดียวกันนี้ อาจนำเอาไปใช้ ในมุมสามเหลี่ยมที่ตรงกันกับ รูปสามเหลี่ยมนั้นก็ได้

แบบฝึกหัดที่ ๓๐

๑. ถ้าต้องคำนวณของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่งเป็นหนึ่งจตุรัส
กคตพอดี บ้านที่สามจะเป็นมาตราสำหรับวัดมุมที่ตรงข้ามกับด้าน
ของรูปสามเหลี่ยม

๒. ในรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ที่มีมุมฉากสองมุม
ด้านทั้งสองที่ตรงข้ามกับมุมฉากทั้งคู่ ย่อมเป็นหนึ่งจตุรัสกคต และ
ด้านที่ตรงข้ามกับมุมที่สามย่อมเป็นมาตราสำหรับวัดมุม

เมื่อมุมมุมมุมฉากแล้วทั้งคู่ จะพบพาราบิตสองพาราบิตตั้งโ
ฉากกับพาราบิตด้าน ? และพินันน์ ย่อมมีส่วนของเส้นรอบวงโค ๒
เส้น (อน. ๕. ข้อ ๑๖๕) ที่ผ่านไปยังหัวขั้วของส่วนของเส้นรอบวง
ที่สาม ? ดังนั้นส่วนของเส้นรอบวงโคบางทีเป็นหนึ่งจตุรัสกคต ?
และวัดมุมที่สามได้อย่างไร ? (อ. น. ๖๕)

๓. ทก ๆ ด้านของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ที่มีมุม
เป็นมุมฉากทั้งสาม ย่อมเท่ากับหนึ่งจตุรัสกคต

๔. พาราบิตด้านพาราบิตต่างก็ผ่านไปยังจุดศูนย์กลางของรูปทรง
กลมหนึ่ง พาราบิตหนึ่ง ๆ ต่างก็ตั้งฉากกับสองพาราบิตที่เหลืออยู่ พน

รวมทั้งด้านน้อยของรูปทรงกลมนี้ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
มุมฉากที่เหมือนกันถึงแปดรูป

๕. จงหาความยาวของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมเป็นจำนวนของค่า α ฯลฯ
ซึ่งทราบว่ามุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมคือ α จักร มีดังต่อไปนี้

ก) $42^\circ, 77^\circ, 65^\circ$

ข) $43^\circ, 40^\circ, 48^\circ, 57^\circ, 103^\circ, 43^\circ$

ค) $43^\circ, 25^\circ, 37^\circ, 5^\circ, 25^\circ, 38^\circ, 87^\circ, 36^\circ, 35^\circ$

๖. จงหามุมของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมเป็นจำนวนของค่า α ฯลฯ
ซึ่งทราบว่าความยาวทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมคือ α จักร มีดังต่อไปนี้

ก) $68^\circ, 42^\circ, 35^\circ, 53^\circ, 48^\circ, 7^\circ, 85^\circ, 38^\circ, 14^\circ$

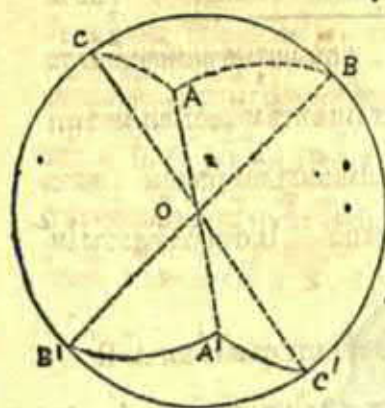
ข) $78^\circ, 47^\circ, 25^\circ, 106^\circ, 36^\circ, 43^\circ$, ๑ จักรวางกต,

ค) ๑ จักรวางกต, $\frac{1}{2}$ จักรวางกต, $\frac{3}{4}$ จักรวางกต,

๗. จากจุดศูนย์กลางของรูปทรงกลมหนึ่งลากเส้นรัศมี ๓ เส้น
ให้เส้นหนึ่ง ๆ ตั้งฉากกับอีก ๒ เส้นเส้นหนึ่ง จงหาความยาวของ
รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ที่เกิดขึ้นจากจุดปลายทั้งสามของรัศมีนั้น
เป็นมุมฉาก เป็นจำนวนของค่า α ฯลฯ

๑๘๗) รูปสามเหลี่ยมทรงกลมที่เป็นซิมเมตริก (Symmetric
Spherical Triangles) ถ้าลากเส้นศูนย์กลาง ๓ เส้น ให้ผ่าน

รูป ๑๒๘



จุดศูนย์กลาง O ของรูป
ทรงกลมหนึ่งไป เป็นต้น

ว่า AA', BB', CC'

และตามจุด A, B, C นี้

สร้างส่วนของเส้นรอบวง

ของวงกลมใหญ่ ให้

ผ่านไปสองต่อสอง และ

โดยทำนองเดียวกัน ให้

ผ่านจุด A', B', C' รูป

สามเหลี่ยมทรงกลมสองรูปที่เกิดขึ้นนั้น คือ ABC และ $A'B'C'$

เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมทรงกลมซิมเมตริก อันนี้โดยทำนองเดียวกันที่

ได้ทำมาแล้ว เราสามารถที่จะสร้างรูปสามเหลี่ยมทรงกลมใดๆ ให้เป็น

ซิมเมตริกได้ รูป ๑๒๘

อนึ่งเมื่อได้สร้างรูปสามเหลี่ยมทรงกลมที่เป็นซิมเมตริก ตามวิธี

ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เราสามารถที่จะหาขนาดของรูปนั้น ๆ

และให้ตั้งอยู่ ณ ที่ใด ๆ ก็ได้ตามความพอใจ บนพื้นที่ทรงกลมนั้น

๑๘๘) ความเกี่ยวข้องในระหว่างรูปสามเหลี่ยมทรงกลมที่เป็น

ซิมเมตริก (Relation of Symmetric Triangles) รูปสาม

เหลี่ยมทรงกลมซิมเมตริกสองรูป ย่อมเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน

เท่าซึ่งกันและกันด้านต่อด้าน และทั้งมุมเท่าซึ่งกันและกันมุมต่อมุม

แต่ถึงกระนั้นก็ตาม ขรมมต่าย่อมไม่เป็นรูปที่เหมือนกัน เพราะ

เหตุที่รูปสามเหลี่ยมทรงกลมทั้งสองนั้น ไม่สามารถที่จะวางให้

ทับกันแนบสนิทได้

คือก็ตามในรูปข้อ ๑๒๘ เรานักเรียนรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$

ไปตามพื้นที่ทรงกลม จนกว่าจุด A จะไปทับกันกับจุด A' จะ

เห็นได้ โดยง่ายคายว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น จะประกบกันให้

สนิทไม่ได้ เพราะส่วนต่าง ๆ ของรูปทั้งสองนั้น ต่างก็เรียงกัน

อยู่เป็นลำดับทางตรงข้าม

การที่จะพยายามทำให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมที่เป็นซิมเมตริกสอง

รูปทับกันแนบสนิทกันนั้น ถ้าพิจารณาไปก็เหมือนดังว่าพยายามที่

จะตัวรวมกันขึ้นข้างขวา ให้เข้าไปบรรจบแนบสนิทกันจนต้องมีข้าง

ซ้าย ถ้าจะต้องการตรวจความเกี่ยวข้องในระหว่างรูปสามเหลี่ยม

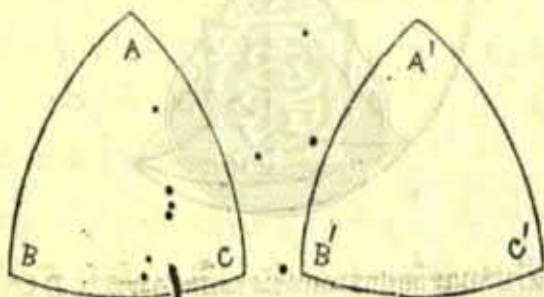
ซิมเมตริกให้เห็นได้ โดยง่ายแล้ว ก็ควรคิดเปิดออกดังข้อนี้ให้เป็นรูป

สามเหลี่ยม แล้วตัวของวางทับกัน

(๑๘๘) รูปสามเหลี่ยมทรงกลมหน้าจั่วซิมเมตริก (Symmetric Isosceles Triangles) ถึงแม้ว่าจะมีชื่อตรงตามทักกล่าวมา

แต่เวลานี้ก็ แต่ตามรูปสามเหลี่ยมทรงกลมซิมเมตริกของรูป ABC และ A'B'C' ที่มี $AB = AC$ และ $A'B' = A'C'$ ก็คือถ้ารูปสามเหลี่ยมซิมเมตริกเป็นชนิดสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เมื่อเป็นดังนี้แล้ว โดยที่ AB, AC, A'B', A'C' คงจะเท่ากันหมด และมุม A

รูป ๑๒๘



และ A' ก็เท่ากันด้วย เพราะเกิดจากมุมสองหน้าตรงข้าม (๑๘๙)

เท่ากัน สามเหลี่ยมทั้งสองนั้นก็จะประกบกันให้แนบสนิทได้

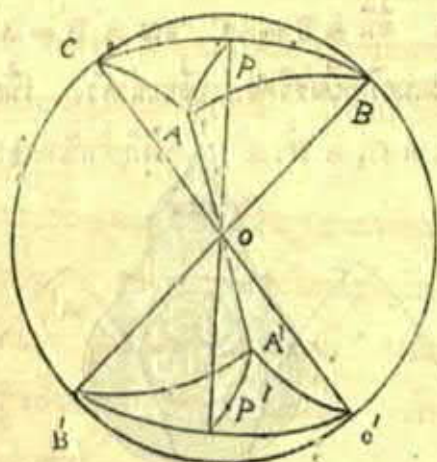
เพราะฉะนั้นถ้ารูปสามเหลี่ยมทรงกลมซิมเมตริกเป็นชนิดหน้าจั่ว สามเหลี่ยมทั้งสองนั้นจะวางทับกันให้แนบสนิทได้ คือเหมือนกัน

รูป ๑๒๙

อุปพระนิเทศที่ ๗๑ รูปสามเหลี่ยมทรงกลมซิมเมตริกของ

รูปย่อมเท่ากัน

รูป ๑๓๐



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมซิมเมตริกของรูป $ABC, A'B'C'$ ที่มีขอบมุมที่ตรงกันนั้น อยู่ตรงข้ามกับศูนย์กลางรูปทรงกลมมุมที่มุม
จึงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ABC และ $A'B'C'$ เท่ากัน
พิสูจน์ สมมุติให้ P เป็นหัวขั้วของวงกลมเล็ก ที่ผ่าน
จุดขอบมุมทั้งสาม A, B, C ,
และให้ P, O, P' เป็นเส้นศูนย์กลางเส้นหนึ่ง

จากส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ :

ให้

$$PA, P, PBC, PA', PB', PC',$$

$$\text{ดังนั้น } PA = PB = PC \quad (\text{อ. น. ๕๙})$$

$$\text{อนึ่ง } P'A' = PA, P'B' = PB, P'C' = PC \quad (\text{๑๘๘})$$

$$\therefore P'A' = P'B' = P'C' \quad (\text{จริง ๘})$$

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากของรูป PCA

และ $P'C'A'$ ต่างก็เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\therefore \triangle PCA \text{ เหมือนกับ } \triangle P'C'A' \quad (\text{๑๘๙})$$

และ โดยทำนองเดียวกัน

$$\triangle PAB \text{ เหมือนกับ } \triangle P'A'B'$$

$$\text{และ } \triangle PBC \text{ เหมือนกับ } \triangle P'B'C'$$

$$\text{แต่ } \triangle ABC = \triangle PCA + \triangle PAB + \triangle PBC$$

$$\text{และ } \triangle A'B'C' = \triangle P'C'A' + \triangle P'A'B' + \triangle P'B'C' \quad (\text{จริง ๑๑})$$

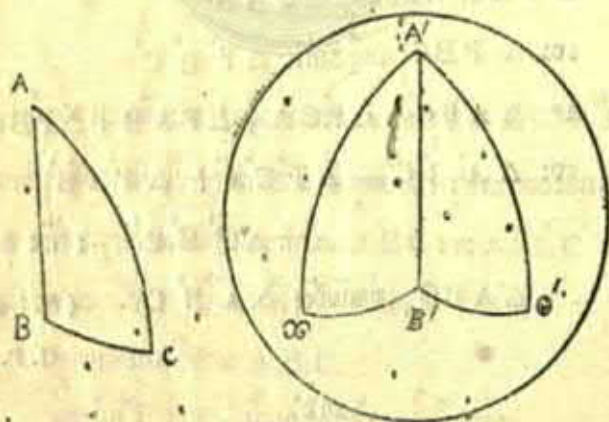
$$\therefore \triangle ABC \text{ เท่ากันกับ } \triangle A'B'C' \quad (\text{จริง ๙})$$

ร. ก. พ.

หมายเหตุ ถ้าแนววงรีหัวข P ตกอยู่ภายนอกรูป $\triangle ABC$ เมื่อเป็นเช่นนั้น P ก็จะต้องอยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ด้วย และสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ๆ ของทั้งสองนี้ ต่างก็เท่ากับผลบวกระหว่าง รูปสามเหลี่ยมชั้นในกับครึ่งหน้าหัวของรูป หักออกด้วยรูปที่สาม และในที่สุดผลก็จะได้ โดยทำนองเดียวกันกับที่เป็นมาแล้ว

อุปมาในบทที่ ๑๖ รูปสามเหลี่ยมสองรูปบนรูปทรงกลม เดียวกัน หรือบนรูปทรงกลมที่เท่ากันย่อมจะเหมือนกันหรือมีค่านัน ก็เป็นชั้นในกับครึ่งหน้าหัวของรูปหนึ่งเท่ากัน และค่านทั้งสองที่ประกอบกันนั้น ต่างก็เท่ากันด้วย

รูป ๑๓๑



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมสองรูป ABC และ $A'B'C'$
 ซึ่งมี $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ และมุม A เท่ากับมุม A'
 และทั้งสามส่วนนั้นมีความยาวเท่ากันกับให้รูปสามเหลี่ยม
 ทรงกลม $A'B'X$ ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมกับรูป $\triangle A'B'C'$ รูป ๑๓๑
 จึงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ABC เหมือนกับ $A'B'C'$
 และ ABC เป็นสามเหลี่ยมกับ $A'B'X$

พิสูจน์ ยก $\triangle ABC$ วางทับลงบน $\triangle A'B'C'$.ต่อไปในการ
 พิสูจน์ย่อมเป็นไปได้โดยที่ด้านของเดียวกันกับในอุปมาหนึ่งเท่า
 ที่กล่าวถึงเรื่องเดียวกันนี้ ในเรขาคณิตพื้นราบตามข้อ ๑๐

$$\therefore \triangle ABC \text{ เหมือนกับ } \triangle A'B'C' \quad (๑๘๔)$$

แต่เมื่อ $\triangle A'B'X$ เป็นสามเหลี่ยมกับ $\triangle A'B'C'$ แล้ว
 และทั้ง $\triangle ABC$ ก็เหมือนกับ $\triangle A'B'C'$

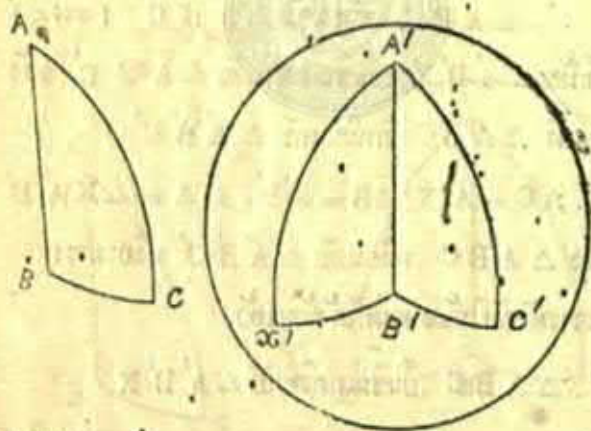
$\therefore AC = AX$, $AB = A'B'$, $\angle A = \angle XA'B'$
 อนึ่ง $\triangle ABC$ เหมือนกับ $\triangle A'B'C'$ ทั้งสามรูป .
 จะวางทับกันให้แนบสนิทได้ด้วยแล้ว

$$\therefore \triangle ABC \text{ เป็นสามเหลี่ยมกับ } \triangle A'B'X$$

ให้ความยาวปัญหาต่อไปในเรขาคณิตพื้นราบ การแปลงเหมือนเดิม
ต้องรูป มีลักษณะตามที่กล่าวในข้อประมุขที่ ๗๓ แล้ว ถึงแม้จะมี
ตำแหน่งที่ต่างกัน ก็ยังคงสามารถที่จะพิสูจน์ให้เหมือนกันและกับ
กันสนิทได้เสมอ ฉะนั้นทำไมจึงไม่เป็นไปโดยทำนองเดียวกันสำหรับ
ในเรขาคณิตทรงน?

ข้อประมุขที่ ๗๓ รูปสามเหลี่ยมสองรูปบนรูปทรงกลม
เดียวกัน หรือบนรูปทรงกลมที่เท่ากันย่อมจะเหมือนกัน หรือ
มีลักษณะเป็นสมมาตร ถ้าแนวมุมของมุมเท่ากัน และด้านที่อยู่
ในระหว่างมุมทั้งสองนั้นต่างก็เท่ากันส่วนต่อส่วน

รูป ๓๓๒



ให้รูปสามเหลี่ยมตรรกมสองรูป ABC และ $A'B'C'$ ซึ่งมีมุม
 $A = A'$, $\angle C = \angle C'$ และ $AC = A'C'$ และทั้งสามด้านนั้นมี
 ตำแหน่งที่อยู่ทางเดียวกัน กับให้รูปสามเหลี่ยมตรรกม $A'B'X$
 ซึ่งเป็นรูปซิมเมตริก กับ $\triangle A'B'C'$ รูป ๑๓๒

จึงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมตรรกม ABC เหมือนกับ $\triangle A'B'C'$
 และ $\triangle ABC$ เป็นซิมเมตริก กับ $\triangle A'B'X$

พิสูจน์ ยกรูปสามเหลี่ยม ABC วางทับลงบน $A'B'C'$:

ข้อไปนี้การพิสูจน์ย่อมเป็นไปโดยทำนองเดียวกัน
 กับข้อประมณิเทศที่กล่าวถึงเรื่องเดียวกันนี้ ใน
 เรขาคณิตพื้นราบ ตามข้อ ๑๒

$\therefore \triangle ABC$ เหมือนกับ $\triangle A'B'C'$ (๑๔๔)

แต่เมื่อ $\triangle A'B'X$ เป็นซิมเมตริก

กับ $\triangle A'B'C'$ ดังว่า

และทั้ง $\triangle ABC$ ก็เหมือนกับ $\triangle A'B'C'$

$\therefore \angle A = \angle XA'B', \angle C = \angle X, AC = A'X$

อนึ่ง $\triangle ABC$ เหมือนกับ $\triangle A'B'C'$ ทั้งสามด้าน

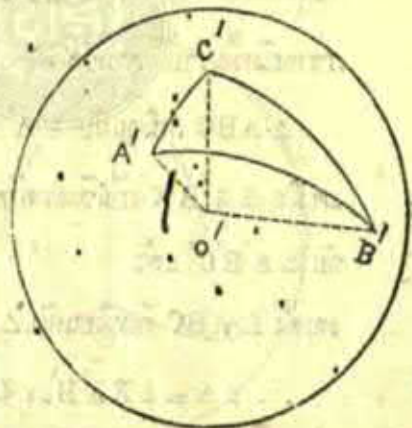
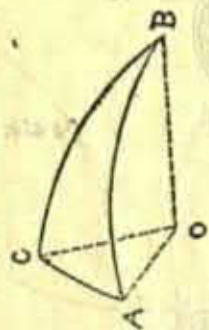
จะวางทับกันให้แนบสนิทได้ด้วย

$\therefore \triangle ABC$ เป็นซิมเมตริก กับ $\triangle A'B'X'$

๒. ท. พ.

อุปมาณียะที่ ๗๔ รูปงุ่มเหลี่ยมสองรูป ที่มีด้านทั้งสาม
เท่ากันด้านต่อด้านบนรูปทรงกลมเดียวกัน หรือบนรูปทรงกลมที่
เท่ากันย่อมมีมุมเท่ากันมุมต่อมุมและทั้งเหมือนกัน หรือมีระนาบ
ที่เป็นซิมเมตริก

รูป ๑๓๓



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมสองรูป ABC และ $A'B'C'$ บนรูปทรงกลมที่เท่ากัน ซึ่งมี $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ และ $CA = C'A'$ รูป ๑๓๓

จึงพิสูจน์ว่า $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

และทั้ง $\triangle ABC$ กับ $\triangle A'B'C'$ ย่อมเหมือนกัน หรือมีลักษณะเป็นซิมเมตริก

พิสูจน์ ให้ O และ O' เป็นศูนย์กลางของรูปทรงกลมนี้ๆ

สมมุติให้มุมราบผ่านไปยังบรรทุกๆ จุดของจุด

ยอดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งๆ ทั้งสองนั้น กับ

จุดศูนย์กลางของรูปทรงกลมนั้นด้วยในขณะเดียวกัน

ทั้งนี้ทั้งศูนย์กลางของรูปทรงกลม O และ O'

จะเกิดมุมสามเหลี่ยมซึ่งมุมของนําทะกัณเป็น

ลำดับมุมต่อมุม

(๔๑)

∴ มุมต้องนําทะกัณเป็นส่วนหนึ่งๆ ของมุม

สามเหลี่ยมที่ย่อมเท่ากันเป็นลำดับมุมต่อมุมด้วย

∴ มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมทั้งสอง

นี้ย่อมต้องเท่ากันมุมต่อมุมด้วย (อนุ ๑. อ.น. ๖๕)

∴ รูปสามเหลี่ยมทรงกลมทั้งสองนี้ ย่อม

เหมือนกัน หรือมิฉะนั้นก็เป็นขิมเมตริก

(อ.น. ๗๓)

ช. ต. พ.

ให้ดังเกตุข้อต่อไป

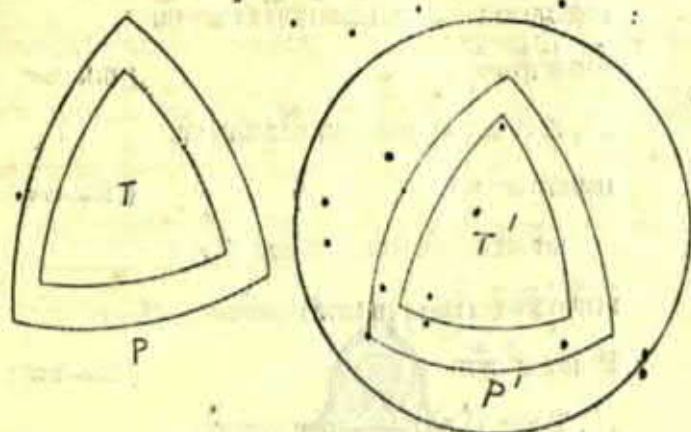
ตามในรูป ๑๓๓ ส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น
ต่างก็มีค่าแห่งที่เบ้นดัดไปทางเดียวกัน สามเหลี่ยมทั้งสองนั้นจึง
เหมือนกัน แต่ส่วนต่าง ๆ เหล่านี้อาจมีลำดับเรียงไปทางตรงกันข้าม
เช่นใน อ.น. ๗๓ ก็ได้

ให้พิจารณาอุปมาณิเทศที่ ๗๔ นี้ ในเมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง
มีด้านเท่ากันทั้งสามด้านและด้านหนึ่ง ๆ เท่ากับหนึ่งจตุรัสกคด
ให้พิจารณาในเมื่อสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้านเท่ากันสองด้าน
และด้านหนึ่ง ๆ เท่ากับหนึ่งจตุรัสกคด

ในเรขาคณิตพื้นราบ อุปมาณิเทศที่ตรงกันกับข้อนี้ มีกล่าว
ว่าอย่างไร? และเหตุไรจึงพิสูจน์โดยทำนองเดียวกันไม่ได้?

อุปมาณิเทศที่ ๗๕ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมทั้งสาม
เท่ากันมุมต่อมุมบนรูปทรงกลมเดียวกัน หรือบนรูปทรงกลมที่เท่า
กัน ย่อมมีด้านเท่ากันด้านคู่ใดด้านหนึ่งเหมือนกัน หรือมิฉะนั้นก็
เป็นขิมเมตริก

รูป ๑๓๔



ให้รูปด้านเหลี่ยมทรงกลมของรูป T และ T' ที่มีมุมทั้งสามเท่า
กันมุมค่อมมุมบนรูปทรงกลมที่เท่ากัน รูป ๑๓๔

จึงพิสูจน์ว่า T และ T' มีด้านทั้งสามเท่ากันตามลำดับ

และทั้งหมื่นเหล่านี้นั้นก็เป็นรูปสามเหลี่ยม

พิสูจน์ ให้ ΔP เป็นด้านเหลี่ยมทรงกลมคู่สมมาตรของ ΔT

และ $\Delta P'$ เป็นด้านเหลี่ยมทรงกลมคู่สมมาตร
ของ $\Delta T'$

เมื่อ ΔT และ T' ต่างก็มีมุมเท่ากัน

มุมค่อม

(ให้)

∴ ΔP และ P' ซึ่งเป็นคุณสมบัติรูปต่อรูปของด้าน
เหลี่ยมทั้งสองนั้น ต่างก็มีความเท่ากัน
ด้านต่อด้านด้วย (อ.น. ๖๕)

∴ ΔP และ P' ต่างก็มีความเท่ากัน
มุมต่อมุมด้วย (อ.น. ๗๔)

แต่ในขณะเดียวกัน ΔT และ T' ต่าง
ก็เป็นคุณสมบัติรูปต่อรูปของด้านเหลี่ยม
 P และ P' ด้วย (อ.น. ๖๕)

∴ T และ T' ต่างก็มีความเท่ากัน
ด้านต่อด้าน (อ.น. ๖๕)

∴ T และ T' จึงเหมือนกัน หรือมีลักษณะ
เหมือนกัน (อ.น. ๗๔)

ร. ท. พ.

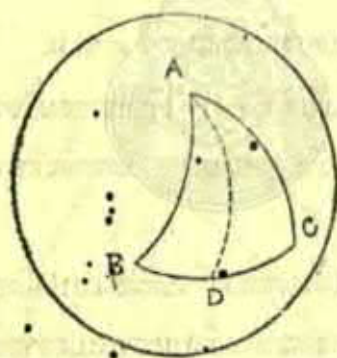
หมายเหตุ ข้อที่บ่งว่ารูปด้านเหลี่ยมทรงกลมสองรูป ที่มีมุม
ทั้งด้านเท่ากันมุมต่อมุม ย่อมเป็นรูปที่มีด้านเท่ากันด้วย ด้าน
ต่อด้านและทั้งย่อมเหมือนกัน หรือมีลักษณะเหมือนกัน ทั้ง
ย่อมเป็นจริงอยู่ด้วยเมื่อด้านเหลี่ยมทั้งสองนั้น ย่อมเป็นรูปทรงกลมเดียว
กัน หรือเป็นรูปทรงกลมที่เท่ากัน แต่ถ้าอยุ่เป็นรูปทรงกลมที่ไม่เท่ากัน

รูปสามเหลี่ยมย่อมไม่เท่ากัน เมื่อเป็นเช่นนั้นแล้วก็ ความยาวของ
ด้านทั้งห้ายัน ก็ยังคงวัดด้วยส่วนของเส้นรอบวงเช่นเดียวกันเดิม
และเพราะฉะนั้นด้าน จึงยังมีความสัมพันธ์กับเส้นรอบวง หรือกับรัศมี
ของวงกลมนั้นอย่างเดียวกันเดิม คำนี้ข้อ ๗๕

อุประมาณิเทศที่ ๗๖ ในรูปสามเหลี่ยมทรงกลมชนิดหน้าจั่ว

รูปหนึ่ง มุมที่ตรงข้ามกับด้านที่เท่ากันนั้นย่อมเท่ากัน

รูป ๑๓๕



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ABC ซึ่งมี $AB = AC$ รูป ๑๓๕

จึงพิสูจน์ว่า $\angle B = \angle C$

พิสูจน์ ถ้าส่วนของเส้นรอบวง AD ของวงกลมใหญ่

วงหนึ่ง จากยอดมุม A ถึงจุดกึ่งกลางของฐาน BC

ดังนั้น $\triangle ABD$ และ $\triangle ADC$ ย่อมมีด้านทั้งสาม
เท่ากันด้านต่อด้าน

$\therefore ABD$ และ ACD ย่อมมีมุมทั้งสามเท่ากัน
มุมต่อมุม

(อ.ม. ๗๔)

$$\therefore \angle B = \angle C$$

ข. ท. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๓๑

๑. รัศมีของรูปทรงกลมหนึ่งยาว ๔ ข.ม. ให้จุดใดจุดหนึ่ง
บนพื้นที่ทรงกลมนั้นเป็นทวิขั้ว เขียนวงกลมรัศมีวงหนึ่ง โดยที่เบส
ปากคบให้ โคจรระนาบกว้าง ๓ ข.ม. จงหาพื้นที่ของวงกลมที่เขียน
บนนั้น

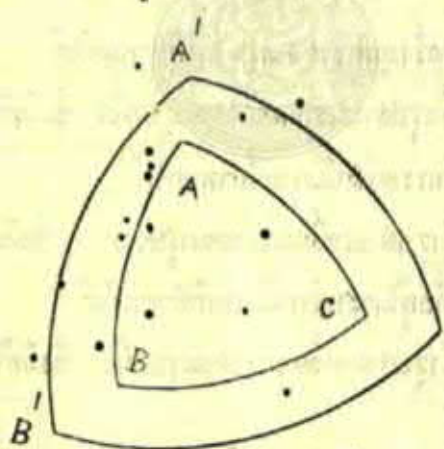
๒. ด้านของรูปก้นเหลี่ยมมีระบบที่มีด้านยาว a จงหา
รัศมี r และ r' ของรูปทรงกลมที่สัมผัสกับด้านและมุมภายใน และที่
ล้อมรอบภายนอกของรูปก้นเหลี่ยมมีระบบที่มีด้านนั้น

๓. จงหาเส้นศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมของรูปทรงกลมหนึ่ง ที่มี
เส้นศูนย์กลางยาว ๑๐ ข.ม. ที่เกิดขึ้น โดยพื้นราบหนึ่งมาตัดห่าง
จากจุดศูนย์กลาง ๓ ข.ม.

๔. ส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ ที่ลากจากจุดยอด
ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทรงกลมรูปหนึ่ง มายังจุดกึ่งกลางของฐาน
ย่อมแบ่งครึ่งมุมยอดนั้นและตั้งฉากกับฐาน ทั้งแบ่งสามเหลี่ยม
หน้าจั่วทรงกลมนั้นออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เป็นซิมเมตริกกัน

อุปมาขณิกเทศที่ ๗๗ * ถ้ามุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมทรง
กลมรูปหนึ่งเท่ากัน ด้านที่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองนั้นจะเท่ากันด้วย
และรูปสามเหลี่ยมทรงกลมนั้นเป็นซิมเมตริกหน้าจั่ว

รูป ๑๓๖



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ABC ซึ่งมีมุม $B = C$ รูป ๑๓๖

จงพิสูจน์ว่า $AC = AB$

พิสูจน์ ให้ $\triangle A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด A' ของ $\triangle ABC$

เมื่อ $\angle B = \angle C$ แล้ว

$$\therefore A'C' = A'B' \quad (\text{บ.น. ๖๕})$$

$$\therefore \angle B' = \angle C' \quad (\text{บ.น. ๗๖})$$

$$\therefore AC = AB \quad (\text{บ.น. ๖๕})$$

ท. ท. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๓๒

๑. จงแบ่งครึ่งมุมตรงกอดมุมหนึ่งที่กำหนดให้
๒. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมตรงกอดรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้านสองด้าน
และมุม ๆ หนึ่ง ในระหว่างนั้นตามที่กำหนดให้
๓. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมตรงกอดรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุมสองมุม
และด้าน ๆ หนึ่ง ที่อยู่ในระหว่างนั้นตามที่กำหนดให้
๔. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมตรงกอดรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้านสามด้าน
ตามที่กำหนดให้
๕. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมตรงกอดรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุมสามมุม
ตามที่กำหนดให้

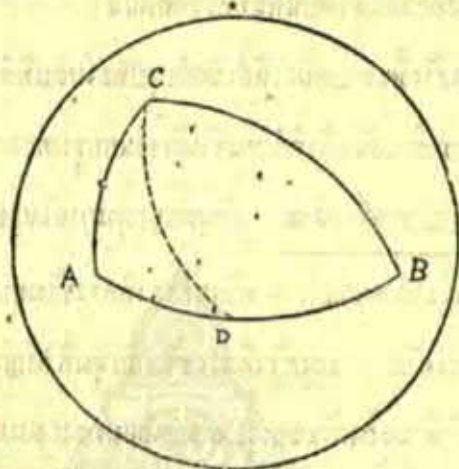
๖. จงสร้างพจนานุกรมหนึ่งให้สัมพันธ์กับรูปทรงกลมหนึ่งที่กำหนดให้
ทรงจุดๆ หนึ่งที่กำหนดให้บนผิวพื้นทรงกลมนั้น

๗. จงสร้างพจนานุกรมหนึ่งให้สัมพันธ์กับรูปทรงกลมที่กำหนดให้และ
ให้บรรจุเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ภายนอกรูปทรงกลมนั้น

อุปมาเปรียบเทียบที่ ๗๘ : ถ้ามุมสองมุมภายในรูปสามเหลี่ยม

ทรงกลมรูปหนึ่งไม่เท่ากัน ด้านทั้งสองที่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองนี้
ก็ย่อมไม่เท่ากันด้วย และด้านที่ตรงข้ามกับมุมที่ใหญ่กว่าย่อมยาว
กว่า อนึ่งถ้าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมหนึ่งไม่เท่ากัน
มุมทั้งสองที่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองนี้ก็ย่อมไม่เท่ากันด้วย และมุม
ที่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวกว่าย่อมใหญ่กว่า

รูป ๑๓๗



ให้รูปสามเหลี่ยมทรงกลม ABC ซึ่งมีมุม C ใหญ่กว่ามุม B
 รูป ๑๓๗
 จึงพิสูจน์ว่า $AB > AC$

พิสูจน์ ถ้าลากส่วนของเส้นรอบวง CD ของวงกลมใหญ่วงหนึ่ง
 ซึ่งต้องทำให้ $\angle DCB = \angle B$

ดังนั้น $DB = DC$ (ข. น. ๗๗)

อนึ่ง $AD + DC > AC$ (ข. น. ๖๖)

$\therefore AD + DB > AC$ หรือ $AB > AC$ (จริง ๔)

กับให้รูปสามเหลี่ยมตรรกม ABC ซึ่งมี $AB > AC$

จงพิสูจน์ว่า มุม C ใหญ่กว่ามุม B

พิสูจน์ มุม C จำต้องเท่ากับ เล็กกว่า หรือใหญ่กว่า

มุม B อย่างใดอย่างหนึ่ง

ถ้า $\angle C = \angle B$ ดังนั้น $AB = AC$ (อ. น. ๗๗)

และถ้า $\angle C < \angle B$ ดังนั้น $AB < AC$ (ข้อบน ;

แต่ทั้งต้องอย่างนี้หาเป็นจริงตามอุประมาณนี้เทศไม่

$\therefore \angle C$ ใหญ่กว่า $\angle B$

ช. ค. พ.

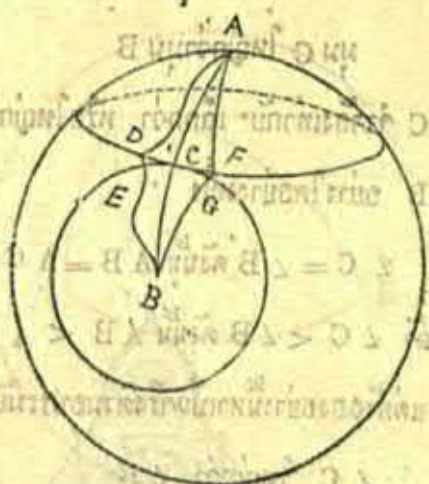
อุประมาณที่ ๗๘ เส้นที่สั้นที่สุดที่เราสามารถจะลากไป

บนพื้นที่ตรรกมได้ ในระหว่างจุด ๒ จุดนั้นย่อมเป็นส่วนหนึ่งของเส้น

รอบวงของวงกลมใหญ่วงหนึ่งที่มีจุดทั้งสองไปนั้น นับจะเพาะ

ส่วนที่ไม่ยาวกว่าครึ่งวงกลม

ถ้า $AB < AC$ แล้ว $AB < AC$



ให้ AB เป็นส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่วงหนึ่ง ซึ่ง
 ไม่ยาวกว่าครึ่งวงกลม และที่ผ่านจุดทั้งสอง A และ B รูป ๑๓๘
 จะพิสูจน์ว่า AB เป็นเส้นที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นต่าง ๆ ที่ลาก
 ให้ผ่านจุดทั้งสองบนพื้นที่ทรงกลมนั้น
 ที่จุด ให้ C เป็นจุดใดจุดหนึ่งบน AB โดยให้ A และ B
 เป็นหัวขั้ว และเอา AC และ BC เป็นระยะหัวขั้ว
 ต่อมักเขียนส่วนของเส้นรอบวงขึ้น ๒ เส้น DCF
 และ GCE

ส่วนของเส้นรอบวง DCF และ GCE ทั้งสอง

นี้จะมีเพราะจุด C อยู่เดียวกันเป็นจุดร่วม

เพราะฉะนั้นให้ลากจุดใดจุดหนึ่ง เป็นต้นว่า F

ใน DCF เมื่อลากส่วนของเส้นรอบวง

ของวงกลมใหญ่ AF และ BF ขึ้นแล้ว

ดังนั้น $AF = AC$ (ข.น. ๕๕)

แต่ $AF + BF > AC + BC$ (ข.น. ๖๖)

เอาสิ่งที่เท่ากันออกเสียทั้งสองข้าง ก็

AF และ AC

ดังนั้น $BF > BC$ (จริง ๖)

$\therefore BF > BG$ ซึ่งเป็นสิ่งที่เท่ากันกับ BC (จริง ๕)

$\therefore F$ เป็นจุดที่อยู่ภายนอกเส้นรอบวงของวงกลมที่มี B

เป็นหัวใจ และเพราะเหตุนี้ส่วนของเส้นรอบวง DCF

และ GCE จึงมีจุดร่วมแค่เพียงจุดเดียว C เท่านั้น

ซึ่งสมมติให้ ADEB เป็นเส้นใดเส้นหนึ่ง ที่ลาก

จาก A ถึง B บนพื้นที่ทรงกลมและที่ไม่ผ่านไปยังจุด C

เส้นนี้จะตัดส่วนของเส้นรอบวง DCF และ GCE
 ออกต่างที่กัน ที่ D และ E ต่อไปถ้าเราสมมุติให้เส้น AD
 หมุนไปรอบจุด A จนกว่าปลายจุด D จะไปทับจุด C ดังนั้น
 จะมีเส้นหนึ่งเกิดขึ้นจาก A ถึง C ที่มีความยาวเท่ากันพอ
 ตั้กับ AD

โดยทำนองเดียวกันเราสามารถลากเส้นจาก B ถึง C
 ได้ อีกเส้นหนึ่ง และยาวเท่ากับ BE

ดังนั้นถ้าเราสามารถลากเส้น ๆ หนึ่งจาก B ถึง A ให้
 ผ่านจุด C และยาวเท่ากับผลบวกของเส้น AD และ BE
 ฉะนั้นเส้นใหม่นี้จะสั้นกว่าเส้น ADEB เท่ากับส่วน
 DE

ดังนั้นจึงไม่มีเส้นใดเส้นหนึ่ง ที่ไม่ผ่านจุด C ที่จะเป็น
 เส้นที่สั้นที่สุดได้ ระหว่างจุด A และ B

เพราะฉะนั้นเส้นที่สั้นที่สุดระหว่างจุด A และ B จำต้อง
 ผ่านจุด C แต่จุด C เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนส่วนของเส้นรอบ
 วง AB

เพราะฉะนั้นเส้นที่สั้นที่สุดระหว่างจุด A และ B ต้อง
 ผ่านไปบนทุก ๆ จุดของส่วนของเส้นรอบวง AB เพราะ
 เหตุนี้จึงเป็นส่วนของเส้นตรงที่สั้นกว่าส่วนของเส้นรอบวง AB
 เพราะฉะนั้นเส้นที่สั้นที่สุดระหว่างจุด A และ B จึงเป็น
 ส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ AB

ช. ค. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๓๓

๑. เส้นมัธยฐาน (Median) คือเส้นที่ลากจากยอดมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดกึ่งกลางของด้านที่ตรงข้ามกับด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ตรงก้นรูปหนึ่ง. ย้อนไปคิดร่วมกันที่ตรงจุดเดียว
๒. จงสร้างพื้นที่ทรงกลมหนึ่งให้บรรจจุด ๒ จุดที่กำหนดให้ และด้านตั้งกับพรมแดนหนึ่งที่กำหนดให้ ทั้งให้เส้นรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
๓. จงสร้างพื้นที่ทรงกลมหนึ่งให้บรรจจุด ๓ จุดที่กำหนดให้ และให้เส้นรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
๔. จงสร้างพื้นที่ทรงกลมหนึ่งให้บรรจจุด ๒ จุดที่กำหนดให้ และด้านตั้งกับดกกลมหนึ่งที่กำหนดให้ ทั้งให้เส้นรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้

๕. พื้นที่หนึ่งมาตั้งรูปทรงกลมหนึ่งระดับบรรจุ ๆ หนึ่งที่
กำหนดให้ภายในรูปทรงกลมนั้น รูปนำคึกคือวงกลมจะเล็กที่สุด

ถ้าเมื่อพรมานันตั้งได้ฉากกับเส้นรัศมีที่ผ่านมายังจุดที่กำหนดให้

๑๕๐) รูปปลอกทรงกลม (Zone) ส่วนหนึ่งของพื้นที่ทรง

กลมที่อยู่ในระหว่างพรมานันที่ขนานกันสองพรมานันเรียกว่ารูปปลอก

ทรงกลม

รูปนำคึกที่เป็นรูปวงกลมที่เกิดจากพรมานันที่ขนานกันเรียกว่าฐาน

ของรูปปลอกทรงกลม และระยะระหว่างพรมานันทั้งสองนั้นเรียก

ว่าระยะสูงของรูปปลอกทรงกลม

ถ้าพรมานันที่ขนานกันนั้น พรมานันหนึ่งเมื่ออยู่ด้านเดียวกับรูปทรง

กลมอีกพรมานันหนึ่งนำไปภายใน รูปปลอกทรงกลมที่เกิดขึ้นนั้นเรา

ว่ารูปปลอกทรงกลมชนิดฐานเดียว

แต่ถ้าทั้งสองพรมานันข้างกันเป็นพรมานันเส้นเดียวกับรูปทรงกลม รูป

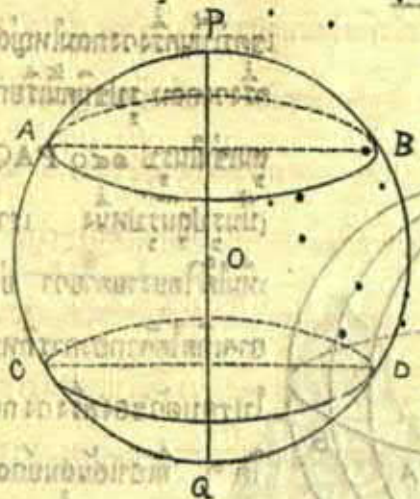
ปลอกทรงกลมก็เลยกลายเป็นรูปทรงกลมทั้งรูป

๑๕๑) กำเนิดของรูปปลอกทรงกลม (Generation of a

Zone) ถ้าวงกลมใหญ่ของหนึ่งหมุนไปรอบตัว โดยเอาเส้นศูนย์

รูป ๑๓๕

กวางเส้นใหญ่หนึ่ง เป็น



แกนหมุน ส่วนใดส่วนหนึ่ง

ของเส้นรอบวงนั้นจะทำให้

เกิดรูปปอดกทรงกลมขึ้น

เช่นในรูป ๑๓๕ ถ้าวงกลม

ใหญ่วงหนึ่ง PACQ หมุน

ไปรอบเส้นศูนย์กลาง PQ

ซึ่งเป็นแกนหมุน ส่วนของเส้นรอบวง AC จะทำให้เกิดรูปปอด

ทรงกลม DA ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับระยะระหว่างพื้นราบที่เป็นฐาน

ของทรงกลม (รูป ๑๓๖) โดยทำของเดียวกัน ส่วนของเส้นรอบวง AP

จะทำให้เกิดรูปปอดกทรงกลม ABP ขึ้น และส่วนของเส้นรอบวง

CQ ทำให้เกิดรูปปอดกทรงกลม CDQ ขึ้น และทั้งสองเป็นรูป

ปอดกทรงกลมชนิดฐานเดียว

รูป ๑๓๖

๑๕๒) lun (Lune) ส่วนหนึ่งของพื้นที่ทรงกลมที่ล้อมรอบ

พื้นที่หนึ่งโดย

รูป ๑๔๐

P



เขตเป็นครึ่งวงกลมใหญ่ของ
ครึ่งวงกลม รูปนี้เรียกว่า

lun เช่นในรูป ๑๔๐ PAQB

เป็นรูปดอกรูปหนึ่ง เราจะ

เห็นได้ โดยง่ายตายว่า ย่อม

อาจเกิดได้จากอาการที่หมุน

ไปรอบตัวของครึ่งวงกลม

ใด ๆ ที่เอาเส้นศูนย์กลาง

เป็นแกนหมุน

๑๕๓) มุมของรูปดอ (Angle of a Lune) มุมทรงกลม

ที่เกิดขึ้นในระหว่างเส้นครึ่งวงกลมทั้งสองมาติดกันนั้นเรียกว่ามุมของ

รูปดอ เช่นในรูป ๑๔๐ $\angle APB$ เป็นมุมของรูปดอ PAQB

ตามธรรมชาติที่เราได้กันอยู่โดยทั่วไป มุมของรูปดอรูปหนึ่งย่อม

ไม่เกินไปกว่าสองมุมฉากหรือมุมตรง แต่ทั้งนี้ก็ไม่จำเป็นเพราะ

เราอาจนึกเห็นได้เป็นอย่างดีว่า

ครึ่งพื้นที่ทรงกลมพอดีเป็นรูปดอที่

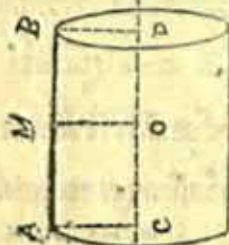
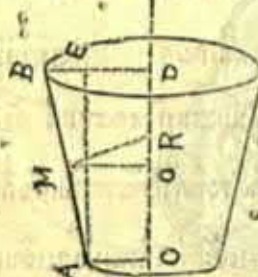
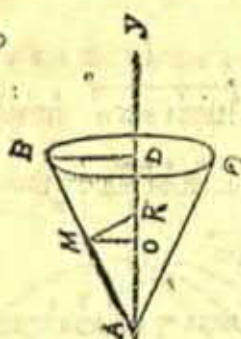
มีมุมเท่ากับ ๑๘๐° และรูปด้านมีมุมเกินไปกว่า ๑๘๐° ก็อาจนึกไป
 ได้ว่ามีพื้นฐานอย่างไร ในที่สุดเราอาจนึกไปได้ ด้วยว่ารูปทรงกลมมี
 ทั้งรูป เป็นรูปด้านรูปหนึ่งที่มีมุม ๓๖๐°

อุปพระนิยามที่ ๙๐ พื้นที่ชนิดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นโดยอาการ

หมุนของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปรอบเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งเป็นแกนหมุน
 และคงบรรจบอยู่ในพื้นราบเดียวกันกับเส้นแกนนี้เสมอ ย่อมเท่ากับผล
 คูณระหว่างเส้นฉายของเส้นตรงที่หมุนไปนั้นบนเส้นแกนหมุน กับเส้น
 รอบวงของวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นที่หมุน
 ไปตรงจุดกึ่งกลางนั้น ที่อยู่ในระหว่างเส้นตรงที่หมุนและเส้นแกน



๓๑๖



ให้เส้นตรง XY ซึ่งเป็นแกน

หมุน กับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง AB

ที่หมุนไปรอบเส้น XY และในพื้น

ราบที่บรรจุเส้น XY มีจุดเส้น

M เป็นจุดที่เคลื่อนที่ของ AB, CD

เป็นเส้นฉายของ AB บนเส้น XY

MO เป็นเส้นตั้งฉากกับ XY

MR เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB

และ a เป็นพื้นที่ของรูปต่าง ๆ ที่เกิด

ขึ้นโดยที่ AB หมุนไปรอบเส้น XY

จึงพิสูจน์ว่า $a = CD \times 2\pi MR$

พิสูจน์ ก) ถ้า $AB \parallel XY$ ดังนั้น

$$CD = AB$$

และ MO ย่อมเป็นเส้นเดียวกัน

กับ MR ดังนั้นพื้นที่ของรูป

นี้ ก็คือพื้นที่ด้านข้างของรูปกระ

บอกกลมตรง (ดู. ก. น. ๔๘)

ข) ถ้า AB ไม่ขนานกับ

XY แต่ก็ไม่คด XY ดังนั้นพื้น

ทั้งสองรูปนี้ ถัดพื้นที่ด้านข้างของรูปทแยงมุมที่คำนวณ

$$\therefore a = AB \times 2\pi MO \quad (\text{ข้อ ๒. น. ๕๖})$$

จากเส้น $AE \parallel XY$

$\triangle AEB$ และ $\triangle MOR$ ย่อมคล้ายกัน (๖๒)

$$\therefore MO : AE = MR : AB \quad (๕๘)$$

$$\therefore AB \cdot MO = AE \cdot MR \quad (๕๑)$$

$$\text{หรือ } AB \cdot MO = CD \cdot MR \quad (\text{จริง ๕})$$

ใช้ค่าที่ลงในแทนในตารางข้างบนจะได้

$$a = CD \times 2\pi MR$$

ก) ถ้าจุด A ลงมาติดกับเส้นแทน XY พอดี

ดังนั้น AE กับ CD ก็ทับกันสนิทเป็นเส้นเดียว

$$\text{ดังนั้น } AM : MR = CD : BD$$

$$AM \cdot BD = CD \cdot MR$$

$$\frac{a}{2\pi} AB \cdot BD = CD \cdot MR$$

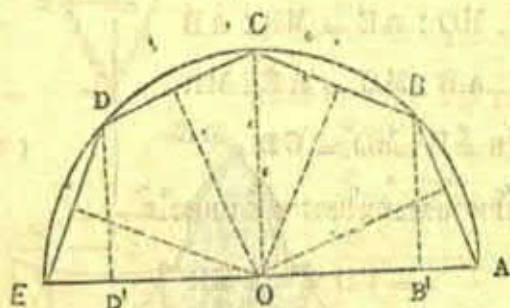
$$\text{ดังนั้น } a = \frac{a}{2\pi} AB \cdot 2\pi BD \quad (\text{ข้อ ๖. ๕๓})$$

$$\therefore a = CD \times 2\pi MR$$

อุปมาณียนเทศที่ ๙๑ พื้นที่การวางเหลี่ยมของรูปทรงกลม

หนึ่ง บัซมเท่ากับผดคุณระหว่างเส้นศูนย์กลางกับเส้นรอบวงของ
วงกลมใหญ่วงหนึ่ง

รูป ๑๔๒



ให้รูปทรงกลมหนึ่ง ที่เกิดขึ้น โดยอาการหมุนของครึ่งเส้นรอบ
วง ABCDE ซึ่งหมุนไปรอบแกน AE ซึ่งเป็นเส้นศูนย์กลางเส้น
หนึ่ง ให้ s เป็นพื้นที่ที่เกิดขึ้นนั้น r เป็นรัศมี และ d เป็นเส้นศูนย์
กลาง รูป ๑๔๒

จงพิสูจน์ว่า

$$s = 2\pi rd$$

พิสูจน์ สมมติสร้างครึ่งหนึ่งของรูปเหลี่ยมเรียบรูปหนึ่ง

ที่มีจำนวนด้านเป็นจำนวนคู่ และให้บรรจุน้อยภายใน

ครึ่งวงกลมนั้น เช่น $ABCDE$

จากศูนย์กลาง O ให้ลากเส้นไปถึงได้ฉาก

กับชะยา AB, BC, CD และ DE .

เส้นตั้งได้ฉากเหล่านี้ย่อมแบ่งครึ่งชะยา

นั้น ๆ และเท่ากันทุกเส้น

(๔๔)

ให้ l หมายความว่ายาวของเส้นหนึ่ง ๆ

ของเส้นเหล่านี้

จากจุด B, C, D , ลากเส้นตรงมาให้

ตั้งได้ฉากกับ AE .

พื้นที่ ๆ เกิดขึ้น โดยอาการหมุน

ของเส้น AB นั้น ย่อมเท่ากับ

$AB' \times l$

(ป.น. ๘๐)

และโดยทำนองเดียวกัน พื้นที่ ๆ เกิดขึ้น

จากอาการหมุนของเส้น BC ย่อมเท่ากับ

$BO \times l$ ฯลฯ

∴ พื้นที่ ๆ เกิดขึ้น โดยอาการ

หมุนของ $ABCDE$ นั้น ย่อมเท่ากับ

$AE \times l$

(จริง ๑)

หรือ $= 2\pi r l$ (จริง ๆ)

ให้หมายพื้นที่ ๆ เกิดขึ้นโดยฮากาการหมุน

ของ $ABCDE$ นั่นคือ s และสมมติให้ l จำนวน

ด้านของ $ABCDE$ นั้นทวนมาจนทุกทีจนไม่
ทวนได้

ดังนั้น s จะเรียบใกล้เข้าไปทุกที

s ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด

และ l จะเรียบใกล้เข้าไปทุกที

r ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด (๗/๓)

และ $\therefore 2\pi r l$ จะเรียบใกล้เข้าไปทุกที

$2\pi r d$ ซึ่งเป็นจำนวนพิกัด

แต่ $s = 2\pi r l$ เดิม (๒.๖.๘๐)

$\therefore s = 2\pi r d$ (๔๘)

๒.๖.๙.

ข้ออนุมานที่ ๑ พื้นที่การหมุนของรูปทรงกลมหนึ่งย่อม

เท่ากับพื้นที่ของผิววงกลมใหญ่หรือเท่ากับ $4\pi r^2$

ใน $s = 2\pi r d$ d มีราคาเท่ากับเท่าใดของ r และ s จะมี
ราคาเท่าไร เมื่อจะต้องมีความสัมพันธ์เฉพาะ r เท่านั้น?

อุทาหรณ์ การสัมผัสภายใน ๑๐ ข. ม. พนทกรังกลมย่อมเท่า
กับ ๔ π ๑๐๐ ตารางเซนติเมตร

หรือเท่ากับ ๑๒๕๖,๖๔ ตารางเซนติเมตร

ข้ออนุมานที่ ๒ พนทการาเกิดยมรูปทรงกลมต้องรูป
หารกัน ย่อมเท่ากับผลหารของรัศมีของรูปทรงกลมนั้นกำลัง ๒
หรือผลหารของเส้นศูนย์กลางของรูปทรงกลมนั้นกำลัง ๒ ทั้งหมด
หารโดยทำนองเดียวกัน

สมมติว่า r และ r' เป็นรัศมีของรูปทรงกลมทั้งสองนั้น และ d
กับ d' เป็นเส้นศูนย์กลาง s และ s' เป็นพนทการาเกิดยมรูปทรง
กลมนั้นๆ ผลหารของ s และ s' จะได้เท่าใด ตามข้ออนุมานที่ ๑ ?
แล้วจะได้แสดงว่าเท่ากับ $r : r'$ หรือเท่ากับ $d : d'$

ข้ออนุมานที่ ๓ พนทการาของรูปปดกทรงกลมรูปหนึ่ง ย่อมเท่า
กับผลคูณของระยะสูงกับเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่

ถ้าเราอธิบายความไปอย่างเดียวกันกับ อ. น. ๘๑ แล้วจะเห็นว่า
รูปปดกทรงกลมที่เกิดขึ้นโดยจากการหมุนของส่วนของเส้นรอบวง
BCD นั้น มีพื้นที่เท่ากับ $B'D' \times \frac{1}{2} \pi r$

และ $B'D'$ เป็นระยะสูงของปดก ทรงกลม $\frac{1}{2} \pi r$ เป็นเส้นรอบ
วงของวงกลมใหญ่

รูปปลอกทรงกลม $B'CD = B'D' \times 2\pi r$

อุทาหรณ์ การวัดเท่ากับ ๑๐ ซ. ม. และระยะสูงเท่ากับ ๕

ซ. ม. พื้นที่ของรูปปลอกทรงกลมย่อมเท่ากับ $5 \times 2\pi \times 10$

ตารางเซ็นต์เมตร หรือ ๓๑๔,๑๖ ตารางเซ็นต์เมตร

ข้ออนุมานที่ ๔ พื้นที่ของรูปปลอกทรงกลมชนิดฐานเดี่ยวรูป
หนึ่ง ย่อมเท่ากับพื้นที่ของวงกลมหนึ่ง ที่มีรัศมีเท่ากับระยะของ
ส่วนของเส้นรอบวง ที่เป็นกำเนิดของรูปปลอกทรงกลมนั้น

สมมติให้ส่วนของเส้นรอบวง AB เมื่อหมุนไป ย่อมเป็นกำเนิด
ของรูปปลอกทรงกลมชนิดฐานเดี่ยว

∴ พื้นที่ของรูปปลอกทรงกลม $AB = AB' \times 2\pi r =$
 $\pi AB' \times AE$ แต่ $AB' \times EA = \overline{AB}^2$ (๖๔)

∴ พื้นที่ของรูปปลอกทรงกลม $AB = \pi \overline{AB}^2$

๑๕๔) เศษทรงกลมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง (Spherical

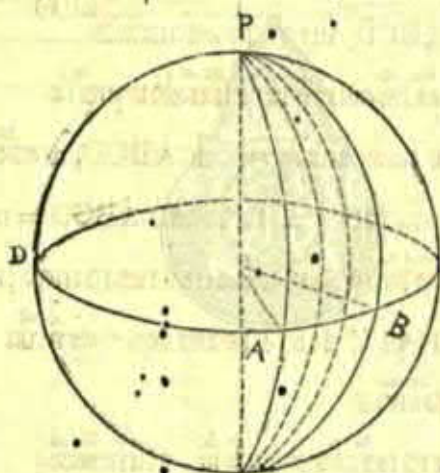
Excess of a Triangle) ผลบวกของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ทรงกลมรูปหนึ่ง มีจำนวนองศาที่เกินไปกว่า 180° เท่าใด จำนวน

นั้นเรียกว่าเศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยมนั้น

เป็นต้นว่ามุมของรูปสามเหลี่ยมที่ตรงกุดมรูปหนึ่ง มีจำนวนองศา
 ๘๐° , ๙๐° และ ๑๐๐° ดังนั้น เค็ดตรงกุดมของรูปสามเหลี่ยมที่ตรง
 กุดมนั้นย่อมเท่ากับ ๙๐° .

อุปรมัยนิเทศที่ ๑๒๓ พนังของรูปปลนรูปหนึ่งหารด้วยพนัง
 ทรงกุดมทั้งหมดตนเอง ย่อมมีผลหารเท่ากับผลหารของมุมของ
 รูปปลนนัน หารด้วยมุมฉาก



รูป ๑๒๓

ให้รูปปลน PAQB วงกุดมใหญ่ ABCD ซึ่งมีทวรวอยท์ P

๑ เป็นจำนวนองศาของขนาดมุมของรูปปลน . ๒ เป็นพนังที่หารวงเหลี่ยม
 ของรูปปลน และ ๓ เป็นพนังทั้งหมดของพนังที่ตรงกุดมนัน รูป ๑๒๓

จึงพิสูจน์ว่า $l : s = a : c$ หาก

พิสูจน์ : ส่วนของเส้นรอบวง AB' เป็นมาตราสำหรับ

วัดมุม a ซึ่งเป็นมุมของรูปตัน (ช.น. ๖๕)

$\therefore$ ส่วนของเส้นรอบวง AB : วงกลม $ABCD$

$$= a : c \text{ หาก}$$

ถ้าแม้ว่าส่วนของเส้นรอบวง AB กับ

วงกลม $ABCD$ มีมาตราที่วัดร่วมกันได้

ذنมีมาตราที่ใช้วัดกันมีส่วนจุอยู่ใน

AB , m ครั้ง และในวงกลม $ABCD$, n ครั้ง ดังนั้น

ส่วนของเส้นรอบวง AB : วงกลม $ABCD = m : n$

ذنมีมาตราใช้วัดส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่

ผ่านไปถึงจุด P และ Q และตรงทุก ๆ จุดที่เป็น

ส่วนแบ่งนั้นด้วย

ส่วนของเส้นรอบวงเหล่านี้ จะแบ่งพื้นที่

ทรงกลมทั้งรูปนั้นออก เป็น n ส่วนพอดี

ซึ่งมีจำนวนจุอยู่ในรูปตันใหญ่ $PAQB$

นั้น m ส่วน

$$\therefore l : s = m : n$$

$$\therefore l : s = a : c \text{ ฉก}$$

ถ้า AB และ ABCD ต่างก็ไม่มีมาตราใดๆ

ที่จะวัดให้รวมกันได้ ถ้าเป็นเช่นนั้นอุประมา

นิเทศ ก็ยังคงพิสูจน์ว่าเป็นจริงอยู่โดยทั่วทุก

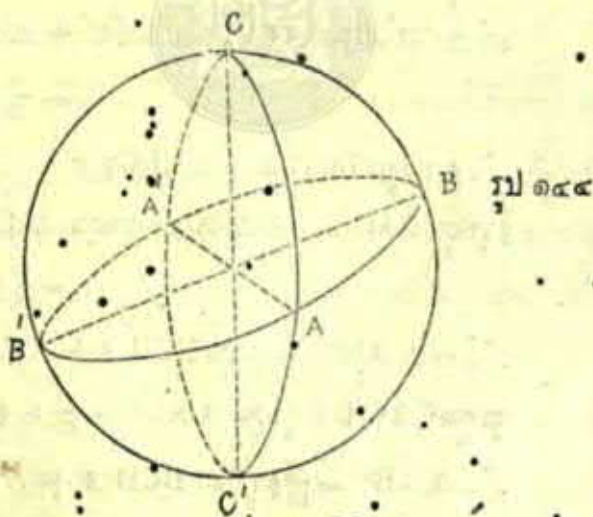
ได้เคยพิสูจน์มาแล้ว โดยอาศัยจำนวนพิภพ (อ.น.๑๖)

ช. ค. พ.

อุประมานิเทศที่ ๘๓ รูปด้านเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ย่อม

มีพื้นที่ตารางเหลี่ยมเท่ากับรูปถนรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุมเท่ากับครึ่งหนึ่ง

ของเศษทรงกลม ของรูปด้านเหลี่ยมทรงกลมนั้น



ให้รูปสามเหลี่ยมตรรกกลม $\triangle ABC$ บนรูปตรรกกลมหนึ่งซึ่งมีพื้นที่ตารางเหลี่ยมเท่ากับ ๘ รูป ๑๔๔

จึงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ ย่อมมีพื้นที่เท่ากับรูปกลมหนึ่ง

$$มุม = \frac{1}{2} (A + B + C - 180^\circ)$$

พิสูจน์ สมมติต่อกำหนดด้านของ $\triangle ABC$ นั้นออกไป

จนกว่าจะเป็นวงกลมทั้งวง

ดังนั้น $\triangle ABC'$ และ $\triangle ABC$ ต่างก็เป็นซิมเมตริก (สร้าง)

$\therefore \triangle ABC'$ ย่อมเท่ากับ $\triangle ABC$ (บ.น. ๗๑)

$\therefore$ รูปกลม $ABA'C = \triangle ABC + \triangle ABC'$ (จริง ๔)

แต่ $\triangle CBA + \triangle ACB + \triangle ABC' + \triangle ABC$

$$= \frac{8}{2} \text{ (จริง ๑๑)}$$

$\therefore$ (รูปกลม $BCB'A - \triangle ABC$) +

(รูปกลม $CAC'B - \triangle ABC$) + รูปกลม $ABA'C$

$$= \frac{8}{2} \text{ (จริง ๔)}$$

$\therefore 2 \triangle ABC =$ รูปกลม $BCB'A +$

รูปกลม $CAC'B +$ รูปกลม $ABA'C - \frac{8}{2}$ (จริง ๑, ๒)

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} (\text{รูปกลม } BCB'A +$

รูปสามเหลี่ยม $CAC'B +$ รูปสามเหลี่ยม $ABA'C - \frac{1}{2} s$ (จริง ๔)

แต่ $\frac{1}{2} s =$ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากับ ๑๕° (จริง ๒)

$\therefore \triangle ABC =$ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากับ $\frac{1}{2} (A + B + C - ๑๘๐^{\circ})$

ท. ท. พ.

ข้ออนุมาน ถ้าส่วนของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ ๒ เส้น ตัดกันทางข้างหนึ่งของวงกลมวงหนึ่ง ผลบวกของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมทั้งสองที่ตรงข้าม ซึ่งเกิดขึ้นจากส่วนของเส้นรอบวงและวงกลมใหญ่นั้น มีมุมเท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากับ มุมระหว่างที่ส่วนของเส้นรอบวงทั้งสองนั้นตัดกัน

๑๙๕) วิธีคำนวณหาพื้นที่ เพื่อที่จะได้แสดงให้เห็นประโยชน์

และวิธีใช้ประโยชน์แห่งที่ ๔๓ จะได้นำตัวอย่างมาไว้ให้ดูในที่
จากหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุมทั้งสาม
เท่ากับ ๑๑๐° , ๑๐๐° , และ ๙๕° ซึ่งอยู่บนพื้นที่ทรงกลมรูปหนึ่งที่
มีรัศมีเท่ากับ ๖ ท. น.

$$\text{เส้นทรงกลม} = ๑๑๐^{\circ} + ๑๐๐^{\circ} + ๙๕^{\circ} - ๑๘๐^{\circ} = ๑๒๕^{\circ}$$

$$\text{มุมของรูปสามเหลี่ยม} = \frac{๑๒๕}{2}$$

∴ พื้นที่ของรูปนูน = $\frac{๒๒\frac{๑}{๒}}{๓๖๐^{\circ}}$ ของพื้นที่ตารางเหลี่ยม
ของรูปทรงกลม

∴ พื้นที่ของรูปนูน = $\frac{๒๒\frac{๑}{๒}}{๓๖๐^{\circ}} \times ๔ \times ๓,๑๔๑๖ \times ๓๖$
ตารางเซนติเมตร

∴ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม = ๗๕,๕๔ ตารางเซนติเมตร

๑๔.๖) เศษทรงกลมของรูปเหลี่ยมทรงกลม (Spherical

Excess of a Polygon) ผลบวกของมุมทั้งหมดของรูปเหลี่ยมทรง
กลมรูปหนึ่งที่มี n ด้าน มีส่วนเกินไปกว่า $(n-2) \times ๑๘๐^{\circ}$ เท่า
ใด ส่วนนั้นเรียกว่าเศษทรงกลมของรูปเหลี่ยมทรงกลมนั้น

แบบฝึกหัดที่ ๓๕ :

ในแบบฝึกหัดต่อไปนี้ทั้งหมดให้ ใช้ค่าของ $\pi = ๓,๑๔๑๖$

๑. จงหาพื้นที่รอบนอกของรูปทรงกลม ซึ่งมีรัศมีดังต่อไปนี้

ก) ๒ ซม. ข) ๐,๒๕ ซม. [๑) ๕,๗๒๘ ซม.

๒) ๗ ซม. ง) ๐,๗๕ ซม. ๓) ๑๒,๕๑๕ ซม.

๒. จงหาปริมาตรของรูปทรงกลม ซึ่งมีพื้นที่รอบนอกดังต่อไปนี้

ก) ๑๒,๕๖๖๔ ตารางเซนติเมตร ก) ๑๐๐ ตารางเมตร

ข) ๑ ตารางเมตร ง) ๘ จ) ๔๗

๓. จงหาพื้นที่ด้านข้างของรูปปลอกทรงกลม ซึ่งอยู่บนรูปทรงกลมที่มีรัศมียาว ๒๐ ซม. และระยะสูงของรูปปลอกทรงกลมนี้มี ดังต่อไปนี้

ก) ๗ ซม. ก) ๓,๔๕ ม.

ข) ๑๐ ซม. ง) ๖,๘๑ ม.

๔. จงหาพื้นที่ของรูปตัน ซึ่งอยู่บนรูปทรงกลมที่มีรัศมียาว ๑๐ ซม. และมีมุมดังต่อไปนี้

ก) $22^{\circ} 30'$ ก) $52^{\circ} 20' 20''$

ข) $7^{\circ} 30'$ ง) $48^{\circ} 34' 10''$

๕. รูปตันสองรูปที่อยู่บนรูปทรงกลมเดียวกัน หรือบนรูปทรงกลมที่เท่ากันหารกัน ย่อมมีผลหารเท่ากับมุมของรูปตันนั้นหารกัน เมื่อหารโดยทำนองเดียวกัน

๖. พื้นที่ของรูปตันรูปหนึ่งย่อมเท่ากับเศษ ๑ ส่วน ๙๐ ของพื้นที่ของวงกลมใหญ่ของรูปตันนั้น คูณด้วยจำนวนองศาของมุมของรูปตันนั้น

๔๗. รูปปลอกทรงกลมที่ซ้อนบนรูปทรงกลมเดียวกัน หรือบนรูปทรงกลมที่เท่ากันหาว่า ยื่นมมผลหารเท่ากันกับผลหารของระยะตั้งของรูปปลอกทรงกลมนั้น เนื้อหา โดยทำนองเดียวกัน

๔๘. รูปสามเหลี่ยมทรงกรวยชนิดสามมุมฉาก มีเส้นทรงกลมเท่าไร ?

แบบฝึกหัดที่ ๓๕

๑. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทรงกรวยที่มีมุมทั้งสาม และอยู่บนรูปทรงกลมที่มีเส้นศูนย์กลางตั้งต่อไปนี้

ก) $100^\circ, 120^\circ, 140^\circ, d = 16$ ซม.

ข) $115^\circ, 124^\circ, 85^\circ, d = 30$ ซม.

ค) $115^\circ, 27^\circ 30'', 102^\circ 32' 48'',$

$65^\circ 27' 38'', d = 5000$ ม.

๒. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทรงกรวย ที่มีมุมทั้งสาม และอยู่บนรูปทรงกลมที่มีรัศมีดังต่อไปนี้

ก) $105^\circ, 75^\circ, 65^\circ, r = 18$ ซม.

ข) $140^\circ, 120^\circ, 85^\circ, r = 50$ ซม.

ค) $115^\circ, 124^\circ, 85^\circ, r = 1,8$ ม.

๓. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่ตรงกลางที่มีมุมทั้งสามและอยู่บนรูปทรงกลมที่มีขนาดของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ดังต่อไปนี้

ก) 42° , 105° , 53° , $c = 62$, 432 น.

ข) 145° , 27° , 125° , $c = 15$, 708 น.

ค) 126° , 30° , 42° , 105° , 26° , 15° ,

63° , 15° , 3 , $c = 314$, 16 น.

๔. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่อยู่บนพื้นซีกโลกที่มีขอบมุมหนึ่งอยู่ที่ขั้วเหนือ อีกสองขอบมุมอยู่บนเส้นศูนย์สูตร ขอบหนึ่งอยู่ที่ 37° ตะวันตก และอีกขอบหนึ่งอยู่ที่ 16° ตะวันออก โดยที่เส้นรอบวงใหญ่ของรูปทรงกลมที่มีเส้นรัศมียาว 6400 กิโลเมตร

๕. ถ้ารัศมีของรูปทรงกลมตั้งอยู่รูปหนึ่งยาว 6 เมตร และอีกรูปหนึ่งยาว 5 เมตร ระหว่างรูปทรงกลมทั้งสองนี้ระยะจากศูนย์กลางถึงศูนย์กลาง 5 เมตร จงหาพื้นที่ของวงกลมที่เป็นรูปนำตัดของรูปทรงกลมทั้งสองนี้

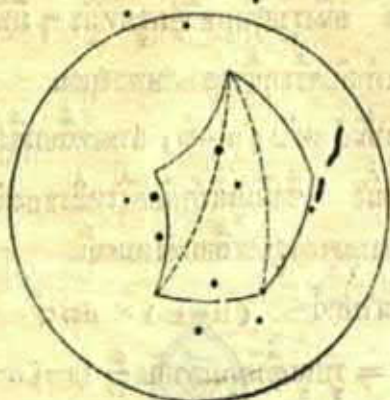
๖. จงหาค่าของวงกลมที่เกิดขึ้นบนรูปทรงกลมหนึ่ง ที่มี
เส้นศูนย์สูตรยาว ๕ ซม. โดยที่มุมราบหนึ่งมาตัดห่างจากศูนย์
กึ่งกลางของรูปทรงกลม ๑ ซม.

๗. รูปทรงกลมของรูปมีเส้นกึ่งกลางร่วมกัน และมีรัศมี r ,
และ r' , ถ้ามุมราบหนึ่งมาตัดกับรูปทรงกลมที่อยู่ภายใน จง
หาพื้นที่ของรูปหน้าตัดระหว่างพื้นราบนั้นกับรูปทรงกลมที่อยู่ภายนอก

๘. จุด A และ B ห่างกัน ๑๐ ซม. จงหาจุดของจุด ๆ หนึ่ง
ในทวิภาคที่ของห่างจากจุด A = ๗ ซม. และจากจุด B = ๓ ซม.
เสมอ

ข้อประมัยนี้เทศที่ ๙๔ รูปเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง มีมุม
พื้นที่ตารางเหลี่ยมเท่ากับรูปเหลี่ยมหนึ่ง ซึ่งมีมุมเท่ากับครึ่งหนึ่ง
ของเส้นทรงกลมของรูปเหลี่ยมทรงกลมหนึ่ง

รูป ๑๔๕



ให้รูปเหลี่ยมทรงกลม P ที่มี n ด้าน และผลบวกของมุมทั้ง
หมดเท่ากับ s องศา รูป ๑๔๕

จึงพิสูจน์ว่า P มีเนื้อที่เท่ากับ รูปตันที่มี

$$\text{มุมเท่ากับ } \frac{s}{2} \{s - (n-2) \times 180^\circ\}$$

พิสูจน์ จากยอดมุมหนึ่งลากเส้นทะแยงมุมไปยังยอดมุม
อื่นๆ ทั้งหมด เช่นนั้นจะเห็นว่า รูปเหลี่ยมนั้น
กลายเป็นหลายรูปสามเหลี่ยมขึ้น และทุกๆ ด้าน
ของรูปเหลี่ยม เป็นรูปสามเหลี่ยมใดรูปหนึ่ง
ยกเว้นแต่ด้านตั้งของด้านซึ่งประกอบมุมที่เราเลือก
สำหรับลากเส้นทะแยงมุม

ดังนั้นถ้ารูปเหลี่ยมมี n ด้าน ย่อมได้ $(n-2)$ รูปสามเหลี่ยม
 หนึ่งรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ๆ มีพื้นที่เท่ากับรูปดุน
 ที่มีมุมเท่ากับครึ่งหนึ่งของเส้นตรงกลม (อ. น. ๘๓.)

ดังนั้นถ้าหรั (๓-๒) สามเหลี่ยมจึงมีพื้นที่เท่ากับรูป
 ดุนรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุมเท่ากับครึ่งหนึ่งของจำนวนของค่าที่ผล
 บวกของมุมของรูปเหลี่ยมทั้งหมดนั้น
 มีเกินขึ้นไปกว่า $(n-2) \times ๑๘๐^{\circ}$

$$\therefore P = \text{รูปดุนที่มีมุมเท่ากับ } \frac{1}{2} \{s - (n-2) \times ๑๘๐^{\circ}\}$$

ช. ท. พ.

๑๕๗) อุทาหรณ์ วิธีคำนวณหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยม

จงหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมทรงกลม ที่มีมุมเท่ากับ ๑๐๐° , ๑๑๐° ,
 ๑๒๐° , และ ๑๗๐° ซึ่งอยู่บนรูปทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ ๖ ช. ม.
 เส้นตรงกลม $= ๑๐๐^{\circ} + ๑๑๐^{\circ} + ๑๒๐^{\circ} + ๑๗๐^{\circ} - ๒ \times ๑๘๐^{\circ}$
 $= ๑๔๐^{\circ}$

$$\therefore \text{มุมของรูปดุน} = ๗๐^{\circ}$$

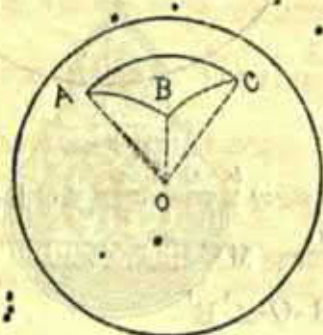
$$\therefore \text{พื้นที่ของรูปดุน} = \frac{๗๐}{๓๖๐} \text{ ของ } ๔\pi r^2$$

$$= \frac{๗}{๓๖} \times ๔ \times ๓,๑๔๑๖ \times ๓๖ \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$= ๘๗, ๔๖๔๘ \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

๑๕๔) รูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม (Spherical Pyramid)

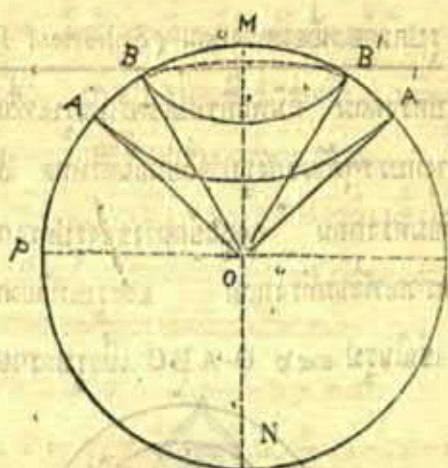
ส่วนหนึ่งของรูปทรงกลม ที่มีพื้นที่ขอบเขตเป็นรูปเหลี่ยมที่ทรงกลม และพื้นราบที่ต่างกับระนาบของรูปเหลี่ยมนั้นทั้งหมด ส่วนนั้นเรียกว่ารูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม จุดศูนย์กลางของรูปทรงกลมนั้นเรียกว่ายอดของรูปกรวยเหลี่ยมที่ทรงกลม และรูปเหลี่ยมที่ทรงกลมนั้นเรียกว่าฐาน เช่นในรูป ๑๔๖ $O-ABC$ เป็นรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง



รูป ๑๔๖

๑๕๕) เซกเตอร์ทรงกลม (Spherical Sector) ส่วนหนึ่ง

ของรูปทรงกลมที่เกิดขึ้น โดยอาการหมุนของเซกเตอร์วงกลม (Circular Sector) รูปหนึ่ง ด้วยอาศัยเส้นศูนย์กลาง เส้นโค้งหนึ่งส่วนของวงกลมที่เซกเตอร์นั้นเองเป็นส่วนของมันอยู่เป็นแกนหมุน ส่วนนั้นเรียกว่าเซกเตอร์ทรงกลม (Spherical Sector)



รูป ๑๔๗

ตามในรูป ๑๔๗ นี้ ถ้าเซกเตอร์ AOB หมุนไปโดยรอบ ด้วย
 ชาติรัยเส้นศูนย์กลาง MN เป็นแกนหมุน จะทำให้เกิดรูปเซกเตอร์
 ทรงกลม $AB-O-A'B'$

รูปปลอกทรงกลมที่เกิดขึ้น ด้วยอาภาห์หมุนของส่วนของเส้น
 รอบวงที่ประกอบอยู่กับเซกเตอร์ ที่เป็นกำหนดของเซกเตอร์ทรง
 กลมนั้นเรียกว่าฐานของเซกเตอร์ทรงกลม

๒๐๐) เซกเมนต์ทรงกลม (Spherical Segment) ส่วนหนึ่ง
 ของรูปทรงกลม ที่อยู่ระหว่างพื้นราบสองพื้นราบขนานกันนั้น
 เรียกว่าเซกเมนต์ทรงกลม

รูปที่เกิดจากพื้นผิวของพรมขนานทั้งสี่ด้านมาติดกับรูปทรงกลม
นั้นเรียกว่าฐานของเซ็กเมนต์ทรงกลม และระยะที่มียู่ในระหว่าง
พรมทั้งสองนั้นเรียกว่าระยะสูงของเซ็กเมนต์ทรงกลม

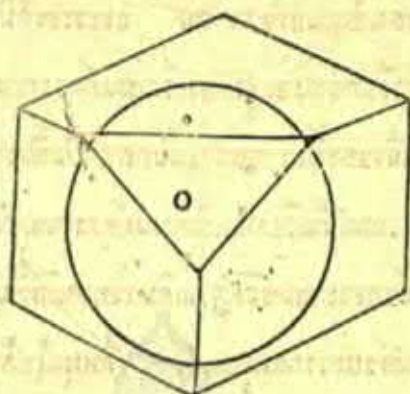
ภาพพรมหนึ่งของพรมขนานหนึ่งกลายเป็นพรมด้านติดกับรูป
ทรงกลมพอดีเซ็กเมนต์นั้นเรียกว่าเซ็กเมนต์ทรงกลมชนิดฐานเคียว

รูปเซ็กเมนต์ของวงกลมชนิดฐานเคียวนี้อาจเกิดขึ้นได้ โดยอาการ
หมุนของเซ็กเมนต์ของวงกลมรูปหนึ่ง ที่หมุนไปด้วยเขาเส้นศูนย์
กึ่งกลางที่ได้ฉากกับฐานของมันนั้นเองเป็นแกนหมุน

๒๐๑) รูปกลีบ (Spherical Wedge) ส่วนหนึ่งของรูป
ทรงกลมที่มียู่บนหรือบนเส้นรอบวงรูปหนึ่ง และพรมของวงกลม
ใหญ่สองวงนั้นเรียกว่ารูปกลีบ

อุปมาเช่นในกรณีที่ ๑๕ เนื้อที่ของรูปทรงกลมหนึ่ง
ย่อมเท่ากับผลคูณระหว่างพรมรอบนอกกับเส้น ๑ ส่วน ๓ ของรัศมี
ของรูปทรงกลมนั้น

รูป ๑๔๘



ให้รูปทรงกลมหนึ่งซึ่งมีรัศมี r พันทรอบนอก s และเนื้อลูกบาศก์ V และศูนย์กลาง O รูป ๑๔๘

จึงพิสูจน์ว่า $V = s \frac{4}{3} \pi r$

พิสูจน์ สมมุติให้มีรูปลูกบาศก์รูปหนึ่งที่มีด้านยาว $2r$ ล้อมอยู่ภายในรูปทรงกลมนี้

ถ้าเดินตรงจาก O ไปยังยอดมุมของรูปลูกบาศก์ทุกยอดในขณะเดียวกัน เดินตรงเหล่านี้ย่อมเป็นด้านข้างของรูปกรวยเหลี่ยมหกรูป ที่มีฐานคือหน้าหนึ่ง ๆ ของรูปลูกบาศก์ และมีระยะสูงเท่ากับ r

เนื้อที่ทุกภาคของรูปกรวยเหลี่ยมรูปหนึ่งๆ ย่อมเท่า
กับน้ำหนักของลูกบาศก์ ๑ ด้าน ๓ ของ r.

และเนื้อที่ทุกภาคของรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม ก็นั่น
ของรูปลูกบาศก์เต็มทรงกลมเอง ก็ย่อมเท่ากับพื้นที่นอก
ทั้งหมดของรูปลูกบาศก์นั้น ๑ ด้าน ๓ ของ r.

ต่อไปสมมติให้ มหัพวามาจำแนกกับรูปทรงกลม ที่ตรง
จุดที่เส้นข้างของรูปกรวยเหลี่ยมเจาะพื้นที่ทรงกลมนั้นทุกๆ
จุด จะเห็นได้ว่าเนื้อที่ทุกภาคของรูปก้อนเหลี่ยมที่ล้อมรูป
ทรงกลมอยู่นั้น ย่อมจะใกล้เคียงไปกับเนื้อที่ทุกภาคของรูป
ทรงกลมกว่ารูปลูกบาศก์ที่ล้อมอยู่นั้นแต่เดิม แต่ถึงกระนั้น
ก็ ยังคงมีจำนวนมากกว่าเนื้อที่ทุกภาคของรูปทรงกลมนั้น

เสมอ

(จริง ๑๑)

แต่ถ้าเรากระทำไปโดยทำนองเดียวกันกับที่ทำมาแล้ว
ก็จะได้เส้นตรงจาก O ไปยังจุดยอดของรูปก้อนเหลี่ยมนั้น
ทุกๆจุด เส้นตรงเหล่านี้ย่อมจะเป็นเส้นข้างของรูปกรวย

เหลี่ยมขนาน และรูปกรวยเหลี่ยมเหล่านี้วางกันฐาน ก็
 นำหน้าของรูปก่อนเหลี่ยมนั้น และค่ากันระยะสูงเท่า
 กับ r . (อน. อ. น. ๖๑)

ดังนั้นผลบวกของเนื้อที่ทุกภาค ของรูปกรวยเหลี่ยม
 เหล่านี้ทั้งหมด ก็ย่อมจะยิ่งเท่ากับพื้นที่รอบนอกของรูปก่อน
 เหลี่ยมนั้น คนด้วยเศษ ๑ ส่วน ๓ ของ r .

หมายเนื้อที่ทุกภาคด้วย v' และพื้นที่รอบนอกด้วย s'
 ก็จะได้อัตราว่า

$$v' = s' \cdot \frac{1}{3} r$$

ถ้าเราสมมติให้ พนมราบมาดำเนินกับรูปทรงกลมตามทำ
 นองที่ใดก็ตามแล้วอีก เราจะทำให้เนื้อที่ทุกภาคของรูป
 ก่อนเหลี่ยมนั้นลดน้อยลงทุก ๆ ที่.

และถ้าเราทวนจำนวนครั้งของวิธีทั้งหมดที่ใดก็ตาม
 แล้วนั้นให้มากขึ้นทุก ๆ ที่จนไม่มีที่สิ้นสุด เราก็จะสามารถ
 ทำให้ความต่างกันระหว่างเนื้อที่ทุกภาคของรูปก่อนเหลี่ยม
 ที่ลดน้อยลงมากกับเนื้อที่ทุกภาคของรูปทรงกลมนั้น ลด
 น้อยลงทุกที่จนสามารถจะคงตัวและเล็กกว่าจำนวนใดจำนวน

หนึ่งโตเต็มช แต่เราจะสมมุติให้เด็กตักเพียงโตก็ตาม ทั้ง
พื้นที่รอบนอกของรูปก่อนเหลื่อม กับพื้นที่รอบนอกของ
รูปทรงกลมนั้น ก็จะต่างกันน้อยเข้าๆ ทุกทีจนกว่าจะคงตัว
เด็กกว่าเลขจำนวนโตๆ โตเต็มช เราจะสมมุติให้เด็กตัก
เพียงโตก็ตาม

$\therefore v$ เป็นจำนวนพิกัดของ v'

และ s เป็นจำนวนพิกัดของ s' (๔๗)

และทั้งนี้ พิจารณาแล้วว่า $v' = s' \cdot \frac{d}{r}$ เต็มช

$$v = s \cdot \frac{d}{r}$$

ช. ค. พ.

(๓๖๓) ข้ออนุมาณที่ ๑ เนื้อหาคูณมาของรูปทรงกลมหนึ่งซึ่ง
มีรัศมี r และเส้นศูนย์กลาง d ย่อมเท่ากับ $\frac{4}{3} \pi r^3$ หรือ $\frac{d}{6} \pi d^2$

เพราะ $v = s \cdot \frac{d}{r}$ และเราทราบมาแล้วว่า ราคของ s

มีเกี่ยวข้องกับ r อย่างไร? และ d เกี่ยวข้องกับ r อย่างไร?

ดังนั้นจะหาได้ว่า ราคของ v มีเกี่ยวข้องกับ d อย่างไร?

ข้ออนุมานที่ ๒ เนื้อที่ทุกภาคของรูปทรงกลมสองรูปหารกัน
 บ่อยเท่ากัน ผลหารของรัศมีของรูปทรงกลมหนึ่ง ๆ กำลัง ๓ หารกัน
 เหมือนกัน โดยทำนองเดียวกัน

ผลหารของ $\frac{\pi}{3} r^3$ และ $\frac{\pi}{3} R^3$ ได้เท่าไร ? เพราะ
 โดยเหตุเช่นเดียวกัน เนื้อที่ทุกภาคของรูปทรงกลมสองรูปหารกัน
 บ่อยเท่ากัน ผลหารของเส้นศูนย์กลางของรูปทรงกลมหนึ่ง ๆ กำลัง ๓
 หารกัน เมื่อทำนองเดียวกัน

แบบฝึกหัดที่ ๓๖

๑. จงหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมทรงกลมที่มุมและอยู่บนรูปทรง
 กลมที่มีพื้นที่รอบนอก ทั้งข้างต่อไปนี้

ก) $30^\circ, 40^\circ, 120^\circ, 130^\circ, a = 2$ ตารางเมตร

ข) $68^\circ 30', 145^\circ 50', 56^\circ 54', 136^\circ 52', a = 750$ ตารางเมตร

ค) $122^\circ 27' 40'', 130^\circ 32' 50'',$

$53^\circ 31' 30'', 56^\circ 48' 32'', a = 600$ ตารางเมตร

๒. จงหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมทรงแท่งกลมที่มีมุมและอยู่บนรูปทรง
กลมที่มีรัศมี r ดังแสดงต่อไปนี้

ก) $130^\circ, 150^\circ, 80^\circ, 90^\circ, \quad r = 10 \text{ ซม.}$

ข) $172^\circ, 165^\circ, 86^\circ, 141^\circ, 110^\circ, 90^\circ, \quad r = 24 \text{ ซม.}$

ค) $135^\circ, 120^\circ, 145^\circ, 121^\circ, 136^\circ, 127^\circ, \quad r = 10 \text{ ซม.}$
 $102^\circ, 111^\circ,$

๓. จงหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมทรงแท่งกลมที่มีมุมและอยู่บนรูปทรง
กลมที่มีเส้นศูนย์กลาง d ดังแสดงต่อไปนี้

ก) $172^\circ, 165^\circ, 86^\circ, 141^\circ, 110^\circ, 90^\circ, \quad d = 22 \text{ ซม.}$

ข) $102^\circ, 111^\circ, 135^\circ, 120^\circ, 145^\circ, 127^\circ, 102^\circ, \quad d = 20 \text{ ซม.}$

ค) $135^\circ, 120^\circ, 145^\circ, 121^\circ, 136^\circ, 127^\circ, 102^\circ, 111^\circ, \quad d = 20 \text{ ซม.}$
 $145^\circ, 120^\circ, 141^\circ, 121^\circ, 136^\circ, 127^\circ, 102^\circ, 111^\circ,$

๔. จงหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมทรงแท่งกลมที่มีมุมและอยู่บนรูปทรง
กลมที่มีขนาดของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ C ดังแสดงต่อไปนี้

ก) $172^\circ, 165^\circ, 86^\circ, 141^\circ, 110^\circ, 90^\circ, \quad C = 30, 416 \text{ ซม.}$

๒) ๑๔๖° , ๑๒๙° , ๑๐๒° , ๑๓๗° , ๑๐๐° ,

$c = ๖,๒๘๓๒$ T. M.

๓) ๑๒๘° , ๑๔๕° , ๑๓๙° , ๘๒° , ๑๖๑° , ๑๓๗° ,

$c = ๑๘,๘๔๙๖$ T. M.

แบบฝึกหัดที่ ๓๗

๑. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทรงกลมที่มีรัศมีครึ่งแฉกต่อไปนี้

ก) ๕ T. M.

ข) ๒๐,๗ M.

ค) ๖๔๐๐ T. M.

๒. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทรงกลมที่มีเส้นศูนย์กลางครึ่งแฉกต่อไปนี้

ก) ๓๖ T. M.

ข) ๔,๕ M.

ค) ๘,๕๙ M.

๓. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทรงกลมที่มีเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ครึ่งแฉกต่อไปนี้

ก) $๑๒,๕๖๖๔$ M.

ข) $๖,๒๘๓๒$ M.

ค) $๑๘,๘๔๙๖$ M.

๔. จงหาเนื้อที่ลูกบาศก์ของรูปทรงกลมที่มีพหุคูณของมุมครึ่ง
ต่อไปนี้

ก) ๑๒,๕๖๖๔ ตารางเมตร

ข) ๕๐,๒๖๕๖ ตารางเมตร

ค) ๑๑๓,๐๙๗๖ ตารางเมตร

๕. จงหาพื้นที่ของรูปทรงกลมที่มีเนื้อที่ลูกบาศก์ครึ่งต่อไปนี้

ก) ๔,๑๘๘๘ ลูกบาศก์เมตร

ข) ๓๓,๕๑๐๔ ลูกบาศก์เมตร

ค) ๑๑๓,๐๙๗๖ ลูกบาศก์เมตร

๖. ลูกหินกลมลูกหนึ่งมีเส้นศูนย์กลางยาว ๖ เมตร ถ้าจะตึง
การทาสี นายช่างคิดเอาค่าจ้างตารางเซนติเมตรละ ๐,๑๕ บาท
จะทำให้ทาสีลูกหินนั้นเท่าใด

๗. มุมของน้ำที่เกิดจากน้ำค้างๆ ของรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม
รูปหนึ่งมีขนาดกันนั้น เป็น ๘๐° , ๑๐๐° , ๑๒๐° และ ๑๕๐° และเส้น
ข้างของรูปกรวยเหลี่ยมนั้น ยาว ๔๒ เมตร จงหาพื้นที่ของฐาน

ของรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม

๘. มุมของน้ำที่เกิดจากน้ำค้างๆ ของรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม
รูปหนึ่งมีขนาดกันนั้น เป็น ๖๐° , ๘๐° , ๑๐๐° และพื้นที่ของ

ฐานของรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลมนั้น มี ๔ ฐ ตารางเมตร จงหา
รัศมีของรูปทรงกลม

๙. จงหาพื้นที่รอบนอกของดวงจันทร์ว่ามีเท่าไร? (ให้สมมติ
ว่าดวงจันทร์เป็นรูปทรงกลม และมีความยาว ๖๔๐๐ กิโลเมตร
สำหรับรอบ และทุกๆ ๒๔ ชั่วโมงจะโคจรไปรอบดวงอาทิตย์)

๑๐. ระยะสูงของปลอกเขตรัศมีรอบเป็น ๕๑๐๐ กิโลเมตร
จงหาพื้นที่ความเท่าไร?

๑๑. ระยะสูงของปลอกเขตรัศมีรอบเป็น ๒๕๐๐ กิโลเมตร
จงหาพื้นที่ความเท่าไร?

๑๒. เครื่องบินดำหนึ่งขึ้นไปถึงจากพื้นดิน ๕ กิโลเมตร จงหา
พื้นที่ของดวงจันทร์ว่าเป็นกี่ตารางกิโลเมตร ที่บินไปในเครื่องบินอาจ
เห็นได้

๑๓. บุคคลหนึ่งจะต้องการที่ดินของดวงจันทร์ให้โตถึง ๑
ของทั้งหมด จะต้องขึ้นไปถึงสักเท่าไร?

๑๔. ถ้าขึ้นหนึ่งขึ้นไปถึงจากพื้นดินเป็นระยะเท่ากันพอดีกับรัศมี
ของดวงจันทร์ จะเห็นพื้นที่ของดวงจันทร์ได้สักเท่าไร?

๑๕. ถ้าความความฉวยใจทราบว่า มีกำลังอัดอ้อมภายในของ
ดวงจันทร์ และวัดทางสูงขึ้นไปได้ประมาณ ๘๐ กิโลเมตร จงหา
จำนวนกำลังทั้งหมดความก็ถูกขนาดกิโลเมตร?

แบบฝึกหัดสำหรับหาสูตร

๑. จงหาพื้นที่ z ของรูปทรงกลมหนึ่งที่มีรัศมี r และเพราะบริเวณที่จะได้มาแสดงด้วยจากวงไฟดวงหนึ่ง ที่วางอยู่ห่างจากพื้นที่รอบนอกของรูปทรงกลมนั้นเป็นระยะ h

๒. จงหาเนื้อทศภาค v ของรูปทรงกลมหนึ่งโดยใช้วิธีแสดงตามราคาของเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ c

๓. จงหาพื้นที่ r ของรูปทรงกลมหนึ่งโดยใช้วิธีแสดงตามราคาของเนื้อทศภาค v ของรูปทรงกลมนั้น

๔. จงหาเส้นศูนย์กลาง d ของรูปทรงกลมหนึ่งโดยใช้วิธีแสดงตามราคาของพื้นที่รอบนอก s ของรูปทรงกลมนั้น

๕. จงหาเส้นรอบวงของวงกลมใหญ่ c ของรูปทรงกลมหนึ่งโดยใช้วิธีแสดงตามราคาของพื้นที่รอบนอก s ของรูปทรงกลมนั้น

๖. จงหาระยะตั้ง a ของรูปปดอกทรงกลมรูปหนึ่งถ้าพื้นที่รอบนอกของรูปนั้นเป็น z และเนื้อทศภาคของรูปทรงกลมนั้นเป็น v

๗. จงพิสูจน์ ให้เห็นว่าเนื้อทศภาคของรูปกรวยเหลี่ยมทรงกลม $v = \frac{a}{b} r$ แล้วหา r โดยวิธีแสดงตามราคาของ v และ b และหา b โดยวิธีแสดงตามราคาของ v และ r

๘. จงหาพื้นที่ z ของรูปปิดออกทรงกลมรูปหนึ่ง ที่มีระยะสูง a
และที่อยู่บนรูปทรงกลมหนึ่ง ที่มีพื้นที่รอบนอก s

แบบฝึกหัดสำหรับหาวิธี

จงหาวิธีของจุด ๆ หนึ่ง ที่มีลักษณะเฉพาะในข้อหนึ่ง ๆ ดังต่อไปนี้

๑. ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนดให้
ให้เสมอ

๒. ห่างจากเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนด
ให้เสมอ

๓. ห่างจากพหุคูณหนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนด
ให้เสมอ

๔. ห่างจากพื้นที่ทรงกลมหนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนด
ให้เสมอ

๕. ห่างจากจุด ๒ จุดที่กำหนดให้ เป็นระยะเท่ากันเสมอ

๖. ห่างจากพหุคูณสองพหุคูณที่กำหนดให้ เป็นระยะเท่า

กันเสมอ

๗. ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนดให้
เสมอ และในขณะเดียวกัน ห่างจากเส้นตรงหนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับ
ระยะที่กำหนดให้เสมอกับ

๘. ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนดให้
เสมอ และในขณะเดียวกัน ห่างจากพื้นราบหนึ่งที่กำหนดให้ เท่า
กับระยะที่กำหนดให้เสมอกับ

๙. ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนดให้
เสมอ และในขณะเดียวกัน ห่างจากจุดอีก ๒ จุดที่กำหนดให้ เท่า
กันเสมอกับ

๑๐. ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ เท่ากับระยะที่กำหนดให้
เสมอ และในขณะเดียวกัน ห่างจากพื้นราบสองพื้นราบที่กำหนดให้
เท่ากันเสมอกับ

จากจุด ๆ หนึ่งหรือหลายจุด ที่มีลักษณะเฉพาะในข้อหนึ่ง ๆ
ดังต่อไปนี้

๑๑. ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้เป็นระยะ d_1 ห่างจากเส้น
ตรงหนึ่งที่กำหนดให้เป็นระยะ d_2 และห่างจากพื้นราบหนึ่งที่กำหนด
ให้เป็นระยะ d_3

๑๒. ห่างจากจุด γ หนึ่งที่กำหนดให้เป็นระยะ d_2 ห่างจากพื้นราบหนึ่งที่กำหนดให้เป็นระยะ d_2 และต้องมีระยะห่างจากจุด γ อีก ๒ จุดที่กำหนดให้

๑๓. ห่างจากจุด β หนึ่งที่กำหนดให้เป็นระยะเท่ากับ r กับห่างจากพื้นราบของพื้นราบที่กำหนดให้เป็นระยะเท่ากับ r และห่างจากจุด γ หนึ่งที่กำหนดให้เป็นระยะเท่ากับ r

๑๔. จงหาว่าของจุดศูนย์กลางของรูปทรงกลมหนึ่ง ที่มีพื้นที่รอบนอกด้านกับพื้นราบของพื้นราบที่กำหนดให้ และในขณะเดียวกันรูปทรงกลมนั้นต้องมีพื้นที่รอบนอกด้านไปยังจุดอีกสองจุดที่กำหนดให้ ที่อยู่ในระหว่างพื้นราบทั้ง ๒ นั้นทุก

แบบฝึกหัดพิเศษ

๑. เนื้อที่ตกบาตรของรูปทรงกลมหนึ่งหาด้วยเนื้อที่ตกบาตรของรูปตกบาตรที่บรรจุอยู่ภายในของรูปทรงกลมนั้นเอง โดยมีผลเท่ากับ π หาด้วย $(2\sqrt{3} : 3)$

๒. เนื้อที่ตกบาตรของรูปทรงกลมหนึ่ง หาด้วยเนื้อที่ตกบาตรของรูปตกบาตรที่บรรจุอยู่ภายในของรูปทรงกลมนั้นเอง โดยมีผลเท่ากับ π หาด้วย ๖

๓. จงหาผลหารของเนอติลภาคระหว่างรูปลบภาคทศนิยม
ภายในรูปทรงกลมหนึ่ง และของรูปลบภาคทศนิยมภายในรูป
ทรงกลมหนึ่ง

๔. จงหาผลต่างกันระหว่างเนอติลภาคของรูปลบภาคทศนิยม
หนึ่งทศนิยมภายในรูปทรงกลมที่มี ๑๐ ซม. และของรูป
ลบภาคทศนิยมภายในรูปทรงกลมหนึ่ง

๕. พิจารณาทั้งโคธากับน้ำหนักของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง และ
ต่างก็แบ่งครึ่งของน้ำหนักด้านนั้น ย่อมไปตัดร่วมกันเป็นเส้นตรง
เส้นเดียว

๖. พิจารณาผ่านมายาวรรจุทั้งด้านของมุมด้านหน้ามุมหนึ่ง และ
ต่างก็ไปตั้งโคธากับน้ำหนักตรงข้ามกัน ๆ ย่อมไปตัดร่วมกันเป็นเส้น
ตรงเส้นเดียว

๗. จงเปรียบเทียบเนอติลภาคของรูปทั้งสองที่เกิดขึ้นโดย
การหมุนของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหนึ่ง กับด้านเท่ากับ a และ b
เพื่อทรงหนึ่งหมุนไปโดยเขาคาน a เป็นแกนหมุน และอีกทรงหนึ่ง
เขาคาน b เป็นแกนหมุน

๘. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ผ่านไปยังจุดยอดมุมของมุมด้าน
หน้ามุมใดมุมหนึ่ง ให้เส้นตรงเส้นนั้นทำมุมกับด้านทั้งสามของมุม
เดิมนั้นเท่ากัน

๙. พหุรูปของรูปทรงกลมหนึ่งย่อมเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของพื้นที่
รอบนอกทั้งหมดของรูปกระบอกกลมที่ล้อมอยู่ภายในรูปทรงกลม
นั้น

๑๐. เนื้อทุกภาคของรูปทรงกลมหนึ่งย่อมเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของเนื้อ
ทั้งหมดของรูปกระบอกกลมที่ล้อมอยู่ภายในรูปทรงกลมนั้น

แบบฝึกหัดทวนสิ่งที่ได้เรียนมาแล้ว

๑. กำหนดของรูปทรงกลมเป็นอย่างไร ?
๒. รูปทรงกลมสองรูปจะเท่ากันได้เมื่อไร ? และเมื่อรูปทรง
กลมเท่ากันแล้ว มีอะไรเท่ากันด้วยบ้าง ?
๓. ถ้าพิจารณาหนึ่งผ่านาคติรูปทรงกลมหนึ่ง รูปนาคติเป็น
อะไร ? ถ้าพิจารณาหนึ่งนาคติรูปทรงกลม? ย่อมจะเป็นเช่นเดียว
กันหรือไม่

๔. จะต้องมียึดสำคัญอย่างไร จึงจะบอกได้ว่าวงกลมต่าง ๆ บนรูปทรงกลมที่กำหนดให้เหมือนกัน ?

๕. อะไรที่เรียกว่าวงกลมใหญ่ของรูปทรงกลมหนึ่ง ? ให้บอกคุณลักษณะทั้งสี่ประการของวงกลมใหญ่ด้วย

๖. มีความเข้าใจว่าอย่างไร เมื่อกล่าวว่าพื้นราบหนึ่งสัมผัสกับรูปทรงกลมหนึ่ง ? และให้แสดงอุปมาอันหนึ่งหรือสองอันที่เกี่ยวกับผิวพื้นราบสัมผัส และยกอุปมาอันหนึ่งที่ตรงกับข้อนี้ในเรขาคณิตพื้นราบ

๗. จงเติมคำลงให้เต็มในข้อความที่จะกล่าวต่อไปนี้ “รูปทรงกลมหนึ่งอาจบรรจุได้ ใน และให้ยกอุปมาอันหนึ่งที่ตรงกับข้อนี้ในเรขาคณิตพื้นราบ

๘. จงเติมคำลงให้เต็มในข้อความที่จะกล่าวต่อไปนี้ “รูปทรงกลมหนึ่งอาจกำหนดได้ โดยอาศัย จุด ที่ไม่อยู่ในพื้นราบอันเดียวกัน และให้ยกอุปมาอันหนึ่งที่ตรงกับข้อนี้ ในเรขาคณิตพื้นราบ

๙. อะไรเป็นจำนวนพิกัดของผลบวกของด้านทั้งหลายของรูปเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ? และอะไรเป็นจำนวนพิกัดของผลบวกของมุมของรูปด้านเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ?

๓๐. ดำเนินการตามข้อนี้ด้วยหรือไม่? ให้ยกคุณลักษณะของ
 ดำเนินการตามข้อนี้ด้วยหรือไม่? ๒ ข้อ

๓๑. มีกรรมเข้าใจอย่างไรถึงรูปตามเหตุนี้ทั้งที่กรรมนั้น
 ให้ยกคุณลักษณะของดำเนินการตามข้อนี้ด้วยหรือไม่? ๒ ข้อ

๓๒. พันธ์ของรูปตามเหตุนี้ทั้งที่กรรมนั้น
 ของรูปตามเหตุนี้ทั้งที่กรรมนั้น

๓๓. มีอะไรที่ควรระวังในข้อนี้? ให้ยกคุณลักษณะของ
 ดำเนินการตามข้อนี้ด้วยหรือไม่? ๒ ข้อ

๓๔. มีอะไรที่ควรระวังในข้อนี้? ให้ยกคุณลักษณะของ
 ดำเนินการตามข้อนี้ด้วยหรือไม่? ๒ ข้อ

๓๕. มีอะไรที่ควรระวังในข้อนี้? ให้ยกคุณลักษณะของ
 ดำเนินการตามข้อนี้ด้วยหรือไม่? ๒ ข้อ

7. 62