

ตำราเรียนคณิต

นายพันตรี หลวงนันทพาทย์ไพเราะ





ตำราเรขาคณิต

เล่ม ๓

นายพันตรี หลวงฉันทพาทไพเราะ

(จารัด ดิงหะ)

อาจารย์ประจำกรมยุทธศึกษาทหารบก

เรียบเรียง



๙ 03321

แก้คำผิด

หน้า	บรรทัด	คำผิด	แก้เป็น
ทุกหน้า	ทุกแห่ง	ยุดิต	ยุดิต
๒๐	๕	$XA \perp \parallel CE$	$XA \parallel CE$
๒๑	๔	รูปสามเหลี่ยม	รูปสามเหลี่ยม
๒๒	๔	แห่งเดียว	แห่งเดียว
๒๔	๑	ตรงข้ามบรรทัด	ตรงข้ามข้างบรรทัด
๓๕	๑๒	ทั้งเส้นด	ทั้งเส้นด
๓๖	๖	ทั้งเส้นด	ทั้งเส้นด
๔๘	๑๒	บัญญัติสัมพันธ์	บัญญัติสัมพันธ์
๕๐	๑๖	P กับ	P กับ Q
๖๐	๒	$\perp BC$	BC
๖๔	๕	$c \perp ca$	$c - \perp ca$
๖๗	ที่รูป	C' (ระหว่าง P กับ H)	C
๖๘	๔	$PY \parallel BC$	$P'Y \parallel BC'$
๖๙	ที่รูป	K	R
๗๐	๗	คู่ในของระหว่าง	คู่ในระหว่าง
๗๘	๑๒	รอบ = ๔, ๘ นิ้ว	= ๔, ๘ นิ้ว
๘๖	๓	จะเป็นรูป	จะเป็นรูป

หน้า	บรรทัด	คำผิด	แก้เป็น
๘๖.	๘	$\hat{B}\hat{A}C \therefore = B'\hat{A}C'$	$\hat{B}\hat{A}C = B'\hat{A}C'$
๘๖	๑๒	$C'D' \quad CD$	$C'D' : CD$
๘๗	๑๑	วางรูป	วางรูป
๘๗	๑๓	รูปที่ ๑	รูปที่ ๑
๘๘	๔	$\hat{B} = B'$	$\hat{B} = \hat{B}'$
๘๘	๕	$\hat{B}'C'$	$B'C'$
๘๙	๘	$S'A'B'$	$SA'B'$
๙๒	๑๐	พิสัย	พิสัย
๙๗	๙	โค้ง AB โค้ง CD	โค้ง AB: โค้ง CD
๑๐๐	๔	อยู่	อยู่
๑๐๔	๓	จุด AY	จุด BY
๑๐๘	๔	แต่	แต่ $\hat{B}$
๑๑๒	๖	เดี่ยวน	เดี่ยวน
๑๑๓	๗	รูป	รูป
๑๒๐	๒	เดิม ๑๒ บทที่ ๑	เดิม ๖ บทที่ ๓๑
๑๒๖	๙	แบบผก	แบบผกหัก
๑๓๔	๕	$\triangle FAC$	$\triangle EAC$
๑๗๒	๑๓	$QA \triangle EB$	$QB > EB$
๑๙๗	๗	เส้น	เส้น



คำสั่งและคำชี้แจง

— ๐๕๐ —

ตำราเรขาคณิตเล่ม ๓ ซึ่งนายพันตรี หลวงฉันทพาทไพเราะ (จำรัส สิงหะ) อาจารย์ประจำกรมยทศศึกษาทหารบก เรียบเรียงขึ้นนี้ เจ้าน้ำที่ในกระทรวงกระต่าใหม่ได้ตรวจแล้วเห็นว่าจะเป็นประโยชน์ในการศึกษา เพราะฉะนั้น ให้ผู้ซึ่งมีหน้าที่ใช้ตำราเป็นหลักประกอบในการศึกษาเล่าเรียนต่อไป.

รับคำสั่งลงนามผู้กระทรวงกระต่าใหม่

(ถึงพระนาม) บวรพิพัทธ์

เลขาธิการทหารบก

คำสั่งว่าการกระต่าใหม่ ในพระนคร

วันที่ ๑๐ กรกฎาคม ๒๔๖๘

ตรวจถูกต้องกับต้นฉบับแล้ว

นายพลตรี พระยา

เจ้ากรมยทศศึกษา



แจ้งความ

คำราราชกนิโชดม ๓ น นายพันตรี หล่วงฉันทพาทไพเราะ
(จำรัส สิงหะ) อาจารย์ประจำกรมยุทธศึกษาทหารบก เรียบเรียงขึ้น
และได้มอบกรรมสิทธิ์ให้กระทรวงกระตาดโหม จึงได้ลงทุนพิมพ์ขึ้น
ไว้สำหรับราชการทหารบก และได้จดทะเบียนเป็นกรรมสิทธิ์แล้ว

เพราะฉะนั้นห้ามมิให้ผู้หนึ่งผู้ใดลอกคัดหรือพิมพ์คำราเรื่อนี้
จำหน่าย ก่อนได้รับอนุญาตจากกระทรวงกระตาดโหมเป็นอันขาด.

(ลงนาม) นายพลตรี พระยาอินทรวชิร

เจ้ากรมตำรวจทหารบก

ที่ว่าการกรมตำรวจทหารบก ในพระนคร

วันที่ ๑๐ กรกฎาคม พระพุทธศักราช ๒๔๖๔

คำนำ

ตำราเรขาคณิตเล่ม ๓ นี้ ข้าพเจ้าได้เรียบเรียงต่อจากตำรา
เรขาคณิตเล่ม ๒ ของนายพันโทพระตำรวจตรีพลชั้น (ทอง
สุ่นทานนท์) การที่ข้าพเจ้าแต่งตำราขึ้นนี้เพราะเห็นว่าในเวลานี้
ตำราเรขาคณิตเล่ม ๓ ซึ่งเป็นภาษาไทยสำหรับเป็นคู่มือของนักเรียน
นายร้อยทหารบกยังไม่มี อันเป็นเหตุทำให้ การสอนและการเล่าเรียน
ของนักเรียนนายร้อยทหารบกยังกุ่มอยู่ ไม่ใคร่จะดำเนินไปทันสมัย
สังคมความประสงค์ของราชการ ข้าพเจ้าจึงได้ พยายามรวบรวมวิชา
เรขาคณิตในตอนนี้ขึ้น และได้เรียบเรียงตามความรู้ ที่ได้ศึกษามา
จากท่านอาจารย์ต่าง ๆ ในสมัยเมื่อตนนักเรียนอยู่บ้าง ตามความรู้ที่
ได้ฝึกฝนไว้จากนายพันโทพระตำรวจตรีพลชั้น (ทอง สุ่นทานนท์)
ซึ่งในเวลานี้ยังเป็นผู้ช่วยเจ้ากรมยุทธศึกษาทหารบกอยู่บ้าง ดำเนิน
เรียบเรียงอย่างตำราภาษาต่างประเทศ แล้วทบทวนของสอนนักเรียน
ตลอดตนๆ (ท่านเองเตรียมการสอน) และได้แก้ไข訂正ไปใน
เวลานั้น / แต่การสอนวิชานี้ไม่มีใครสังเกต เพราะนักเรียนต้องเสีย
เวลาไปลอกคัดเสียทำให้การเรียนและการสอนช้าไป ครั้นจะปล่อย
ให้นักเรียนเรียนไปจดไปตามความเข้าใจและจำได้ ก็มักจะบกพร่อง

ข้อความสำคัญไปบ้างบางนาย เพราะฉะนั้นข้าพเจ้าจึงได้รับแจ้ง
พยายามเรียบเรียงจนจนตลอดคดี เพื่อหวังให้เป็นคัมภีร์ของนักเรียน
นายร้อยทหารบก แล้วได้นำเสนอผู้บังคับบัญชาขอความกรุณาช่วย
ตรวจแก้ไขข้อหนึ่ง เป็นลำดับตลอดจนเจ้าหน้าที่ไม่รับตำราทหารบก
ได้ ตรวจแล้วจึงได้จัดการพิมพ์ ขึ้นเป็นเล่ม

อนึ่งตำราเล่มนี้เป็นครั้งแรกซึ่งข้าพเจ้าได้เรียบเรียงขึ้น และ
เรียบเรียงขึ้นตามความสามารถที่จะกระทำได้ เชื่อว่ายังมีสิ่งที่จะ
ตกบกพร่องหรือไม่เรียบร้อยอยู่บ้าง รอท่านผู้ที่ใช้ตำราหนังสือให้
อภัยแก่ข้าพเจ้าด้วย และยังชี้แจงหรือแนะนำในสิ่งที่ไม่เรียบร้อยนั้น
มาให้ ข้าพเจ้าเพื่อตกเติมและแก้ไขด้วยเถิด ข้าพเจ้าจะยินดีและ
ขอบพระคุณที่สุด

ในที่สุดนี้ข้าพเจ้าขอขอบคุณนายร้อยเอก หลวงเวียงนิต รั้งผู้
(มุนี มหาต้นทนะ) ซึ่งได้ช่วยเหลือการแปลภาษาต่างประเทศในสิ่ง
ที่ข้าพเจ้าขอรับ และนายพันโทพระนิมิตร์สุวรรณเสนา (เด็ก
เสนา) ซึ่งเป็นผู้บังคับบัญชาโดยตรงของข้าพเจ้าใน
กรมตำรวจทหารบก ท่านได้ช่วยตรวจแก้ไขข้อผิดพลาดต่าง ๆ ตั้งแต่
ต้นจนปลายด้วยความตั้งใจกระทำให้จริง ๆ ด้วยความหวังจะให้

ประโยชน์แก่ราชการและประชาชนชาวยุโรปซึ่งจะศึกษาวิชาทั่วไป
ท่านทั้งหลายที่ได้ถวายนามมาแสดงความนับถือพระคุณต่อข้าพเจ้าณเวียง
เวียงจันทน์เป็นอย่างยิ่ง.

(ลงนาม) นายพันตรี หลวงฉันทพาทไพเราะ

อาจารย์ประจำกรมยุทธศึกษาทหารบก

วันที่ ๑๐ กรกฎาคม พระพุทธศักราช ๒๔๖๘



สารบัญ

เรื่อง

ว่าด้วยบัญญัติสัมพันธ	หน้า
บทนำที่ ๑ ที่ ๒	๑
บทนำที่ ๓	๖
บทนำที่ ๔	๗
บทนำที่ ๕	๘
บทนำที่ ๖	๑๐
แบบฝึกหัดที่ ๑	๑๑
อ. น. ๕๔	๑๓
อ. น. ๕๕	๑๕
แบบฝึกหัดที่ ๒	๑๗
แบบฝึกหัดที่ ๓	๑๙
อ. น. ๖๐	๒๑
อ. น. ๖๑	๒๓
แบบฝึกหัดที่ ๔	๒๕
แสดงศัพท์แปลเทียบมคด้วยกม	๒๖
อ. น. ๖๒	๒๘

๔
เรื่อง

๐
หน้า

อ. น. ๖๓		๔๑
แบบฝึกหัดที่ ๕		๔๓
อ. น. ๖๔		๔๖
แบบฝึกหัดที่ ๖		๔๙
ตัวโกณมิตร์สัมพันธ์		๕๒
แบบฝึกหัดที่ ๗		๕๕
แสดงศัพท์เรื่องตัวโกณมิตร์สัมพันธ์		๕๗
แสดงอย่างตัวโกณมิตร์		๕๙
กฎเรขาคณิตเป็นรูปตัวโกณมิตร์		๖๑
ร. น. ๓๕		๖๔
ร. น. ๓๖		๖๖
ร. น. ๓๗		๖๗
ร. น. ๓๘		๗๐
หาคำของเจ็ด		๗๓
แบบฝึกหัดที่ ๘		๗๖
แบบฝึกหัดที่ ๙		๗๙
อ. น. ๖๕		๘๑

รายชื่อ

หน้า

ร. น. ๓๕	วิชา ๑	๔๕
อ. น. ๖๖		๔๗
ร. น. ๓๕	วิชา ๒	๕๑
แบบฝึกหัดที่ ๑๐		๕๓
อ. น. ๖๗		๕๔
อ. น. ๖๘	พจนานุกรมพจนาน	๕๕
แบบฝึกหัดที่ ๑๑		๑๐๑
อ. น. ๖๙		๑๐๒
แบบฝึกหัดที่ ๑๒		๑๐๔
อ. น. ๗๐		๑๐๗
แบบฝึกหัดที่ ๑๓		๑๐๙
อ. น. ๗๑		๑๑๑
แบบฝึกหัดที่ ๑๔		๑๑๔
แบบฝึกหัดที่ ๑๕		๑๑๕
อ. น. ๗๒		๑๒๐
แบบฝึกหัดที่ ๑๖		๑๒๒
ร. น. ๘๐		๑๒๔

๔
เรื่อง

หน้า

แบบผูกหัตถ์ ๑๗	๑๒๖
ป. น. ๗๓ □ ฉากเขียวแกว่งกลม	๑๒๗
แบบผูกหัตถ์ ๑๘	๑๓๒
ป. น. ๗๔	๑๓๓
แบบผูกหัตถ์ ๑๙	๑๓๔
ป. น. ๗๕	๑๓๖
ป. น. ๗๖	๑๓๘
แบบผูกหัตถ์ ๒๐	๑๔๐
แบบผูกหัตถ์ ๒๑ ระคนดอกลี	๑๔๓
บทแทรกที่ ๑๒	๑๔๔
บทแทรกที่ ๑๓	๑๔๗
บทแทรกที่ ๑๔	๑๕๑
บทแทรกที่ ๑๕	๑๖๑
แบบผูกหัตถ์ ๒๒	๑๖๓
บทแทรกว่าด้วยกำมาดที่ดี, น้อยที่ดี	๑๖๕
บทแทรกที่ ๑๖	๑๖๗
บทแทรกที่ ๑๗	๑๖๙

เรื่อง

หน้า

บทแทรกที่ ๑๘	๑๗๑
บทแทรกที่ ๑๙	๑๗๓
แบบฝึกหัดที่ ๒๐	๑๗๕
ว่าด้วยข่าว โฉม	๑๘๐
บทแทรกที่ ๒๐	๑๘๓
บทแทรกที่ ๒๑	๑๘๔
บทแทรกที่ ๒๒	๑๘๕
บทแทรกที่ ๒๓	๑๘๘
แบบฝึกหัดที่ ๒๔ ข่าว โฉม	๑๘๙
อุประณียนเทศข่าว โฉม	๑๙๓
บทแทรกที่ ๒๔ ศูนย์ความคล้าย	๑๙๔
แบบฝึกหัดที่ ๒๕	๑๙๘
วงกลมของอิ โฉ โฉมาด	๒๐๐
ว่าด้วย โปดและโปดาร์	๒๐๐
บทแทรกที่ ๒๕	๒๐๒
บทแทรกที่ ๒๖	๒๐๔
บทแทรกที่ ๒๗	๒๐๕

เรื่อง

หน้า

บทแทรกที่ ๒๘	๒๐๘
เซิร์ฟ — คอสมิก	๒๑๑
แบบฝึกหัดที่ ๒๖	๒๑๑
แบบฝึกหัดที่ ๒๗	๒๑๔
บทแทรกที่ ๓๐	๒๑๗
บทแทรกที่ ๓๑	๒๒๐
วงกลมโค — แยกขาด	๒๒๒
แบบฝึกหัดที่ ๒๗	๒๒๒
ว่าด้วยการกลับของ	๒๒๔
แบบฝึกหัดที่ ๒๘	๒๒๖
อ. น. ของเซิร์ฟ	๒๒๘
อ. น. ของเมเนเจอร์	๒๓๑
แบบฝึกหัดที่ ๒๙	๒๓๕

ภาคที่ ๕

ว่าด้วยบัญญัติสัมพันธ์

แสดงศัพท์

๑) ภาติ (Ratio) ของจำนวนหนึ่งต่ออีกจำนวนหนึ่งในชนิดเดียวกัน เป็นการแสดงความเกี่ยวข้องของจำนวนแรกต่อจำนวนหลัง อาจแสดงเป็นเศษส่วน มีจำนวนแรกเป็นเศษ จำนวนหลังเป็นส่วน และอ่านว่าจำนวนแรกต่อจำนวนหลัง

ถ้าจำนวนทั้ง ๒ มีค่าเป็น a กับ b ภาติของจำนวนแรกต่อจำนวนหลังก็เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือจะเขียนว่า $a : b$ ก็ได้

a เรียกว่า “จำนวนแรกของ ภาติ”

b เรียกว่า “จำนวนหลังของ ภาติ”

จำนวนทั้ง ๒ นำมาเปรียบเทียบกันเป็น ภาติ นั้น จำเป็นต้องเป็นจำนวนชนิดเดียวกัน เช่นจะเป็นเลขก็จะต้องเป็นเลขด้วยกัน หรือมูกก็ต้องเป็นมูกด้วยกัน หรือจะเป็นพทกก็ต้องเป็นพทกด้วยกัน จะเป็นเลขกับพทกหรือมูกกับพทกนั้นไม่ได้ เพราะต่างชนิดกัน

อีกประการหนึ่ง ราชโธ ต้องเป็นจำนวนเต็มหรือเป็นเศษส่วนแท้ ไม่ใช่จำนวนตั้งของ

ตัวอย่าง ราชโธ ของเส้นตรงยาว ๖ ซม. ค่ะเส้นตรง ๘ ซม. ก็เท่ากับ $6 : 8$ หรือ $\frac{3}{4}$ ไม่ใช่ ๖ ซม. : ๘ ซม. หรือ $\frac{6}{8}$ ซม.

หมายเหตุ บางทีก็ไม่ได้มารดที่จะบอกขนาดของสิ่ง ๒ สิ่งใน ชนิดเดียวกันเป็นจำนวนอย่างเดียวกันได้ เป็นต้นว่า ด้านของ จัตุรัสยาว ๑ นิ้ว เส้นทะแยงมุมก็ตั้งยาว $\sqrt{2}$ นิ้ว แต่ถ้ของ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็มไม่ลงตัว เพราะฉะนั้นด้านกับเส้นทะแยงมุมของรูป จัตุรัสจึงไม่เป็นจำนวนหน่วยชนิดเดียวกัน จำนวนชนิดนี้เรียกว่า “จำนวนอสังขยา” (Incommensurable) แต่ถ้าเลือกใช้หน่วย ให้มีราคาน้อยที่สุด จำนวนอสังขยา $\sqrt{2}$ กับ ๑ นิ้วก็อาจแสดงได้ อย่างเกือบครบถ้วนทีเดียว เช่นเมื่อทราบว่า $\sqrt{2} = ๑,๔๑๔๒$ แล้ว $\sqrt{2}$ นิ้ว กับ ๑ นิ้ว ก็อาจเป็น ๑๔๑๔ กับ ๑๐๐๐ ได้ เมื่อใช้ $\frac{๑}{๑๐๐๐}$ นิ้วเป็นหน่วย หรือ ๑๔๑๔๒ กับ ๑๐๐๐๐ ได้ เมื่อใช้ $\frac{๑}{๑๐๐๐๐}$ นิ้วเป็นหน่วย ก็จะได้ราคาไม่

ครบถ้วนทุกพร้อมไปบ้างก็เป็นสิ่งเล็กน้อย ไม่น่าจะห่วงหาเหวี่ยง
เพราะฉะนั้นก็ให้ถือเขาว่าเป็นอันถูกต้องใกล้เคียงกับความจริงทีเดียว

๒) ถ้า X เป็นจุดที่แบ่งเส้นตรง AB หรือแบ่ง AB เมื่อ
ตัดออกไปแล้ว ราวคือ ที่จุด X แบ่งเส้นตรง AB ออกไป
เป็น ราวคือ ระหว่างส่วนของเส้นตรง AB คือ $AX:XB$ ไม่ว่า
แบ่งเส้นหรือแบ่งแนว



รูปที่ ๑ เป็นแนวแบ่งเส้น คือแบ่งภายในเส้น AB ที่จุด X

รูปที่ ๒ เป็นแนวแบ่งแนว คือแบ่งแนวของเส้นตรง AB เมื่อ
ตัดออกไปแล้วถึงจุด X

๓) จำนวนเลข $\propto$ จำนวนจะเป็นบัญญัติสัมพันธ์ ได้คือเมื่อ
ราวคือ ของจำนวนที่ ๑ ต่อจำนวนที่ ๒ เท่ากับ ราวคือ ของจำนวน
ที่ ๓ ต่อจำนวนที่ ๔

เช่น a, b, c, d , เป็นจำนวนเลข $\propto$ จำนวน ถ้า $a:b=c:d$
ทั้ง $\propto$ จำนวนนี้เป็นบัญญัติสัมพันธ์ และ a, b, c, d , เรียกว่า
“ส่วนสัมพันธ์”

รูปของบัญญัติสัมพันธ์ ให้เขียนดังนี้ $a : b = c : d$ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

จำนวน a กับ d มีชื่อว่า “นอก” หรือ “ตำแหน่งนอก”
และ b กับ c มีชื่อว่า “ใน” หรือ “ตำแหน่งใน” แต่ d
จำนวนเดียวกันนี้มีชื่อพิเศษว่า ส่วนสัมพันธ์ที่สี่ของ a, b และ c

หมายเหตุ ในบัญญัติสัมพันธ์ $a : b = c : d$ จำนวนที่จะนำ
มาเปรียบเทียบกันภายในภาคใดเดียวกัน จำเป็นต้องเป็นจำนวน
ชนิดเดียวกัน แต่จำนวนใน ภาคใด ที่ ๒ ไม่จำเป็นต้องเหมือนกับ
ใน ภาคใด ที่ ๑ ด้วย เช่น $a : b$ อาจแสดงพื้นที่ แต่ $c : d$ อาจ
แสดงเส้นตรงก็ได้ หรือ $a : b$ แสดงมุม แต่ $c : d$ จะแสดงเส้นตรง
ก็ได้เช่นเดียวกัน ถ้าเช่นนั้น บัญญัติสัมพันธ์เหล่านี้จะหมายความว่า
ภาคใด ของพื้นที่ ๑ ต่อพื้นที่ ๒ เท่ากับ ภาคใด ของเส้นตรงที่ ๑
ต่อเส้นตรงที่ ๒ หรืออีกด้านหนึ่งหมายความว่า ภาคใด มุมที่ ๑
ต่อมุมที่ ๒ เท่ากับ ภาคใด เส้นตรงที่ ๑ ต่อเส้นตรงที่ ๒ ดังนั้น
มิได้อยู่ในกฎข้อห้ามเลย เป็นอันใช้ได้

๔) จำนวน ๓ จำนวนชนิดเดียวกันจะได้ส่วนสัมพันธ์คือเมื่อ
ภาคใด ของจำนวนที่ ๑ ต่อจำนวนที่ ๒ เท่ากับจำนวนที่ ๒ ต่อจำนวน
ที่ ๓

เช่น a, b, c จะเป็นส่วนสัมพันธ์ได้คือเมื่อ $a : b = b : c$

ถ้าเช่นนั้น b ก็มีชื่อว่า "ส่วนสัมพันธ์ส่วนในระหว่าง a กับ c " และจำนวน c ก็มีชื่อว่า "ส่วนสัมพันธ์ที่ ๓ ของ a กับ b "

สังขสูตร

๑) ภาติโก ทั้งหลายต่างก็เท่ากับ ภาติโก เดียวกัน ภาติโก เหล่านี้ย่อมเท่ากันหมด

$$\text{เช่น } a:b = x:y$$

$$\text{และ } c:d = x:y$$

$$\therefore a:b = c:d$$

แปลว่า ภาติโก $a:b$ กับ $c:d$ เป็น ภาติโก ต่างจำนวนกัน แต่ต่างก็มาเท่ากับ ภาติโก $x:y$ ด้วยกัน ภาติโก $a:b$ กับ $c:d$ จึงเท่ากันเองด้วย

๒) ถ้าจำนวนหลายจำนวนต่างก็ ภาติโก ต่อจำนวนใดจำนวนหนึ่งเท่ากัน จำนวนต่าง ๆ เหล่านี้ย่อมเท่ากันหมด

$$\text{เช่น } a:x = b:x \text{ แล้ว } a \text{ ก็ต้องเท่ากับ } b \text{ ด้วย}$$

บทหน้าที่ ๑

จำนวน ๔ จำนวนชนิดเดียวกัน ถ้าได้ส่วนสัมพันธ์กัน เมื่อ
กลับเศษก็ยังคงได้ส่วนสัมพันธ์อยู่

(กลับสัมพันธ์)

สมมติว่า a, b, x, y เป็นจำนวนเลข ๔ จำนวนชนิดเดียวกัน ถ้า
จำนวนเหล่านี้ได้ส่วนสัมพันธ์คือ $a:b = x:y$ แล้ว ก็
อาจพิสูจน์ได้ว่า $b:a = y:x$

พิสูจน์ $\therefore a:b = x:y$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

หรือ $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$ (กลับเศษเป็นส่วน)

หรือ $b:a = y:x$

บทหน้าที่ ๒

จำนวน ๔ จำนวนชนิดเดียวกัน ถ้าได้ส่วนสัมพันธ์กันแล้ว
เมื่อไขว้เศษก็ยังคงได้ส่วนสัมพันธ์กันอีก

(ไขว้สัมพันธ์)

สมมติว่า $a:b = x:y$

อาจพิสูจน์ได้ว่า $a:x = b:y$

พิสูจน์ $\therefore a:b = x:y$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{x} = \frac{x}{y} \times \frac{b}{x}$$

(เอา $\frac{b}{x}$ คูณทั้ง ๒ ข้าง)

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$\therefore a:x = b:y$$

บทนำที่ ๓

จำนวน $\propto$ จำนวนชนิดเดียวกัน ถ้าได้ส่วนสัมพันธ์กันแล้ว

ผลคูณของคู่ในก็เท่ากับผลคูณของคู่นอก

(ผลคูณส่วนสัมพันธ์)

สมมติว่า $a:b = x:y$

อาจพิสูจน์ได้ว่า $ay = bx$

พิสูจน์ $\therefore a:b = x:y$

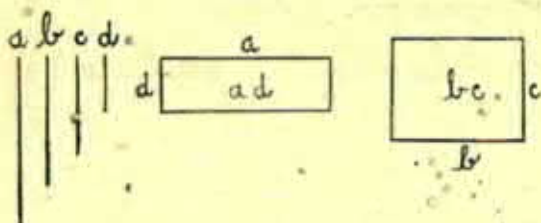
$$\frac{a}{b} \times by = \frac{x}{y} \times by \quad (\text{เอา } by \text{ คูณ})$$

$$\therefore ay = bx.$$

ข้ออนุมาน ถ้า a, b, x, y ซึ่งแสดงความยาวของเส้นตรง

$\propto$ เส้น ได้ส่วนสัมพันธ์กันแล้ว รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกำลังไว้ด้วย

คู่นอกเท่ากับสี่เหลี่ยมมุมฉากกำลังไว้ด้วยคู่ใน



ให้ a, b, c, d เป็นความยาวของเส้นตรง ๔ เส้น และได้ส่วน
สัมพันธ์ คือ $a:b=c:d$

อาจพิสูจน์ได้ว่า $ad=bc$

เช่นเดียวกันถ้า a, b, c เป็นความยาวของเส้นตรง ๓ เส้น และได้ส่วน
สัมพันธ์ $a:b=b:c$ แล้ว ac ก็ $= b^2$ หมายความว่ารูป ๔ เหลี่ยม
มุมฉากกำลังไว้ด้วยคู่ขนาน เท่ากับจัดกำลังไว้ด้วยคู่ใน

บทนำที่ ๕

จำนวน ๔ จำนวนชนิดเดียวกัน ถ้าได้ส่วนสัมพันธ์กันแล้ว
ผลบวกหรือผลลบของจำนวนที่ ๑ กับจำนวนที่ ๒ คือจำนวนที่ ๒
ก็เท่ากับผลบวกหรือผลลบของจำนวนที่ ๓ กับจำนวนที่ ๔ คือ
จำนวนที่ ๔

(เกณฑ์บวกหรือเกณฑ์ลบของส่วนสัมพันธ์)

สมมติว่า $a:b = x:y$

แล้ว

เราจะพิสูจน์ได้ว่า

๑) $a+b:b = x+y:y$

๒) $a-b:b = x-y:y$

พิสูจน์ ๑) $a:b = x:y$

$$\frac{a}{b} + ๑ = \frac{x}{y} + ๑$$

(บวกด้วย ๑)

$$\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$$

$$\therefore a+b:b = x+y:y$$

ดังนั้นเราเรียกว่า “เกณฑ์บวก”

๒) $a:b = x:y$

$$\frac{a}{b} - ๑ = \frac{x}{y} - ๑$$

(ลบด้วย ๑)

$$\frac{a-b}{b} = \frac{x-y}{y}$$

$$\therefore a-b:b = x-y:y$$

ดังนั้นเราเรียกว่า “เกณฑ์ลบ”

ข้ออนุมาน ถ้า $a:b = x:y$ แล้ว

อาจพิสูจน์ได้ว่า $a+b:a-b=x+y:x-y$
 (ทั้งนี้ได้จากเขาเกณฑ์ลบไปหารเกณฑ์บวก)

บทนำที่ ๕

ราติโอ ที่เท่ากันไม่ว่าสักกี่ ราติโอ ถ้าเป็นจำนวนชนิดเดียวกัน
 แล้ว จำนวนแรกคือจำนวนหลังย่อมเท่ากับผลบวกของจำนวนแรก
 คือผลบวกของจำนวนหลัง

(ผลบวกจำนวนแรก : ผลบวกจำนวนหลัง = ราติโอ เดิม)

สมมติว่า $a:x=b:y=c:z=\dots\dots\dots$

อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$a:x = \frac{a+b+c+\dots\dots\dots}{x+y+z+\dots\dots\dots}$$

พิสูจน์ สมมติว่า ราติโอ ทั้งหลายเหล่านี้ $= k$

$$\therefore a=xk, b=yk, c=zk\dots\dots\dots$$

เมื่อบวกกันก็จะไดดังนี้

$$a+b+c+\dots\dots\dots = xk+yk+zk+\dots\dots\dots$$

$$= k(x+y+z+\dots\dots\dots)$$

$$\therefore k = \frac{a+b+c+\dots\dots\dots}{x+y+z+\dots\dots\dots}$$

แต่ได้สมมติแล้วว่า $a:x=k$

$$\therefore a:x = \frac{a+b+c+\dots}{x+y+z+\dots}$$

บทที่ ๒

ถ้าจะแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่งตามอัตราที่กำหนดให้
ไม่ว่าแบ่งเส้นหรือแบ่งแนว อาจแบ่งได้อย่างละหนึ่งเดียวเท่านั้น

(แบ่งเส้นตรงตาม อัตราที่กำหนดจะแบ่งได้หนึ่งเดียว)

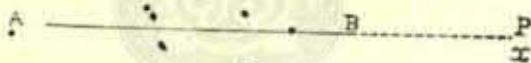
(แบ่งเส้น)



รูปที่ ๑

(แบ่งแนว)

รูปที่ ๒



สมมติว่า A B เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้และ $m:n$ เป็น อัตรา
ที่กำหนดให้ (กำหนดให้ m มากกว่า n)

ให้แสดงให้เห็นว่าการแบ่ง A B ตาม อัตรา $m:n$

จะต้องแบ่งได้หนึ่งเดียวในอย่าง ๑.

พิสูจน์

ก) แบ่งเส้นในรูปที่ ๑

๑) ให้แบ่ง A B ออก $m+n$ ส่วนเท่า ๆ กัน (แบ่ง

เส้นตรง) แล้วจะจุด X ลงในเส้น AB ให้ AX ยาว m ส่วนแล้ว

$\therefore XB$ ก็ต้องยาว n ส่วนของ

$$\therefore AX:XB = m:n$$

คือ X แบ่ง AB ออกได้ ราวใด หนึ่ง n ตามกำหนด

๒) อีกประการหนึ่ง เมื่อ AX ยาว m ส่วน และ

XB ยาว n ส่วน AB ก็ต้องยาว $m+n$ ส่วน

$$\therefore AX:AB = m:m+n$$

ถ้า P แบ่ง AB ออกได้ส่วนตาม ราวใด m:n ที่กำหนดเหมือนกัน

$$\therefore AP:AB = m:m+n$$

$$\therefore AP:AB = AX:AB$$

$$\therefore AX = AP$$

P กับ X ต้องอยู่ที่จุดเดียวกันจึงได้ชื่อว่าแบ่งได้แต่
แห่งเดียว

๒) แบ่งแนวในรูปที่ ๒

๑) แบ่ง AB ออก $m-n$ ส่วนเท่า ๆ กัน คือแบ่ง
เมื่อต่อ AB ออกไปแล้วตามวิธีแบ่งแนว

แล้วจะให้ AX ยาว m ส่วน XB ยาว n ส่วน

$$\therefore AX:XB = m:n$$

คือ AB ถูกจุด X แบ่งออกได้ส่วนตาม ภาติโธ ที่กำหนดให้

๒) ถูกประการหนึ่ง เมื่อ AX ยาว m ส่วน และ XB ยาว n ส่วน AB ก็ยาว $m - n$ ส่วน

$$\therefore AX : AB = m : m - n$$

ถ้า P แบ่ง AB ออกได้ส่วนตาม ภาติโธ $m : n$ ที่กำหนดเหมือนกัน

$$\therefore AP : AB = m : m - n$$

$$\therefore AX : AB = AP : AB$$

$$\therefore AX = AP$$

$\therefore P$ กับ X เป็นจุดเดียวกัน จึงได้ชื่อว่าแบ่ง AB ได้นัดแห่งเดียว

แบบฝึกหัดที่ ๑

๑) จงเติมตัวเลขลงในที่ว่าง

๑) $๓ : ๗ = ๑๕ : ?$

๒) $๒,๕ : ? = ๑๐ : ๓๒$

๓) $? : a c = b c : b c$

๒) จงแก้ปัญญาคณิตศาสตร์ต่อไปนี้โดยให้

๕ ๖๕ : ๗๘ พัด = ๕ ๒๕ : ๓๐ พัด

- ๓) เส้นตรงเส้น ๑ ยาว ๘, ๖ นิ้ว ให้แบ่งเส้นออกตาม รัศมี ๕ : ๗ แล้วหาส่วนทั้ง ๒ ว่ายาวส่วนละเท่าใด
- ๔) จงแบ่งเส้นตรงเส้น ๑ ซึ่งยาว ๔, ๕ ซม. โดยวิธีแบ่งแนวให้ได้ รัศมี ๑๑ : ๘ และหาคะความยาวของส่วนแบ่งทั้ง ๒ ด้วย
- ๕) จงแบ่งเส้นตรงเส้น ๑ ซึ่งยาว a ออกให้ได้ รัศมี $m:n$ แล้วแสดงให้เห็นว่าส่วนทั้ง ๒ นั้นยาว $\frac{m}{m+n} \cdot a$ และ $\frac{n}{m+n} \cdot a$ ตามลำดับ
- ๖) จงแบ่งเส้นตรงเส้น ๑ ซึ่งยาว a โดยวิธีแบ่งแนวออกให้ได้ รัศมี $m:n$ แล้วแสดงให้เห็นว่าส่วนทั้ง ๒ นั้นยาว $\frac{m}{m-n} \cdot a$ และ $\frac{n}{m-n} \cdot a$ ตามลำดับ
- ๗) ถ้า $a:b = x:y$ และ $b:c = y:z$
จงพิสูจน์ให้เห็นว่า $a:c = x:z$
- ๘) ถ้า $a:b = x:y$ จงแสดงให้เห็นว่า $a+b:a = x+y:x$
- ๙) ถ้า a, b, c สัมพันธ์กันจะแสดงให้เห็นว่า $a:c = a^2:b^2$
- ๑๐) เส้นตรง AB และ CD ถูกแบ่งเส้นออกได้ รัศมี ๒ เท่ากันที่จุด X และ Y ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นว่า

$$๑) AB:XB = CD:YD$$

$$๒) AB:AX = CD:CY$$

๑๑) ถ้า a, b, c, d เป็นเส้นตรง x เส้นตั้งนี้ ตัดเส้นขนานจากด้านซ้ายด้วย a และ d เท่ากับเส้นขนานจากด้านซ้ายด้วย b กับ c จงพิสูจน์ว่า $a:b=c:d$

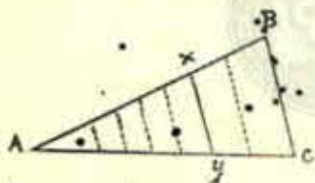
การแบ่งเส้นตรงเป็นส่วนสัมพันธ์

อุปมาณียเทศที่ ๕๘

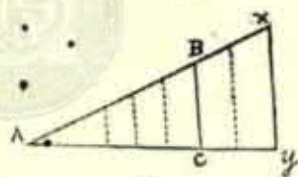
(ยกตเติม ๖ บท ๒)

ถ้าเส้นตรงให้ขนานกับด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านใดด้านหนึ่ง ย่อมตัดด้านอีก ๒ ด้านออกได้ส่วนสัมพันธ์กัน

(เส้นขนานตัดด้านของ Δ ออกได้ส่วนสัมพันธ์)



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

ต้นเหตุ

ให้ ABC เป็นรูป Δ , XY เป็นเส้นตรงขนานกับ

ด้าน BC ตัดด้าน AB กับ AC ตรงจุด X กับ Y

รูปที่ ๑ ตัดในเส้น รูปที่ ๒ ตัดในแนว

ให้พิสูจน์ว่า $AX:XB = AY:YC$

พิสูจน์

สมมุติว่า X แบ่ง AB ออกได้ ราว ๓ : n

คือ $AX : XB = 3 : n$ ก็แปลว่า AX ถูกแบ่งออก
 ๓ ส่วน และ XB ถูกแบ่งออก n ส่วน เท่า ๆ กัน จาก
 จุดแบ่งทุก ๆ จุดใน AX และ XB จะเส้นตรงไปจดด้าน
 ตรงข้าม AC ให้ขนาดกับ BC ทุกเส้น

∴ เส้นขนานเหล่านี้จะไปแบ่ง AY กับ YC ออกเป็น
 ส่วน ๆ เท่า ๆ กัน (เส้นตัดใน Δ ขนานกับฐานย่อม
 แบ่งอีกด้าน ๑ ออกเป็นส่วนเท่า ๆ กัน) ดังนั้น AY ก็
 ถูกแบ่งออก ๓ ส่วน และ YC ก็ถูกแบ่งออก n ส่วน
 เท่า ๆ กันด้วย

$$\therefore AY : YC = 3 : n$$

$$\text{แต่ } AX : XB = 3 : n \quad (\text{พิสูจน์})$$

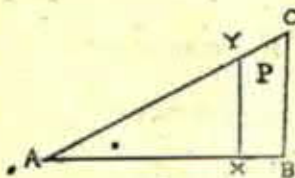
$$\therefore AY : YC = AX : XB$$

จ.ต.พ.

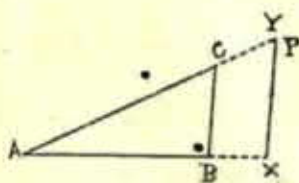
บทกลับ

ถ้าเส้นตรงตัดด้าน ๒ ด้านของรูปสามเหลี่ยมออกได้ส่วน
 สัมพันธ์กันแล้ว เส้นตรงเส้นนี้ย่อมขนานกับด้านของรูปสาม
 เหลี่ยมที่เหลืออยู่

(เส้นตรงตัดด้าน ๒ ด้านของ Δ ได้ส่วนสัมพันธ์กันกับด้านที่เหลือ)



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

สมมุติให้ XY ตัดด้าน AB , AC ของ $\triangle ABC$ ออกได้
 ส่วนสัมพันธ์กัน คือ $AX : XB = AY : YC$ รูปที่ ๑
 ตัดในเส้น รูปที่ ๒ ตัดในแนว

ให้พิสูจน์ว่า $XY \parallel BC$

พิสูจน์ สมมุติว่า XP ขัดจากจุด $X \parallel BC$ จด AC ที่จุด P
 $\therefore AP : PC = AX : XB$ (เส้นขนานตัดด้าน $\triangle$
 ออกได้ส่วนสัมพันธ์)

แต่ $AY : YC = AX : XB$ (โจทย์)

$\therefore AP : PC = AY : YC$

AC ถูกแบ่งในเส้นตั้งรูปที่ ๑ และถูกแบ่งในแนวตั้งรูป
 ที่ ๒ เป็น รัศมีโอ เดียวกัน ที่ P กับจุด Y

∴ จุด P กับจุด Y ต้องอยู่ห่างเดียวกัน
(แบ่งเส้นตรงตาม ราชโธ กำหนดแบ่งได้ห่างเดียว)

— แต่ $XP \parallel BC$ (สร้าง)

∴ $XY \parallel BC$ ด้วย

ข.ต.พ.

ข้ออนุมาน (ตามรูปใน อ.น. ๕๘) ถ้า XY ขนาน
กับ BC แล้วก็จะพิสูจน์ได้ว่า $AX:AB = AY:AC$

พิสูจน์ ตามในรูปที่ ๑ ภาจเห็นได้ว่า

$$AX:AB = m:(m+n)$$

$$\therefore AY:AC = m:(m+n), \quad (\text{เส้นขนานใน } \triangle$$

ขนานกับฐานตัดด้านอีกข้างหนึ่งได้ส่วนเท่า)

$$\therefore AX:AB = AY:AC$$

(บทกลับ) ถ้า $AX:AB = AY:AC$ แล้ว

ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า $XY \parallel BC$

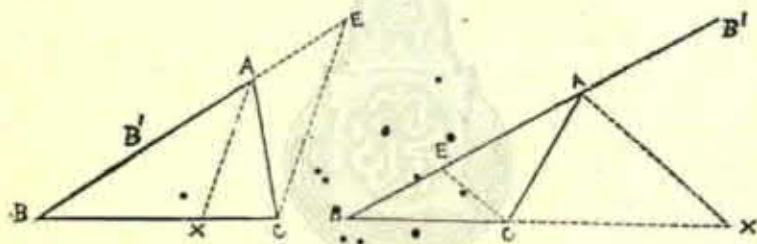
(พิสูจน์ทำนองเดียวกับบทกลับของ อ.น. ๕๘ นั้น)

อุปรมัยนิเทศที่ ๕๘

(ยุคติดเต็ม ๖ บท ๓ กับ A)

ถ้าแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมภายในหรือภายนอกได้ เส้นแบ่งครึ่งย่อมมาบรรจบฐานไม่ว่าเป็นวงกลมหรือแบ่งแนวออก ๒ ส่วนได้ รัศมีเท่ากัน รัศมี ๒ ระหว่างด้านที่เหลื่อ

(เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดมาบรรจบฐานได้ รัศมี = รัศมีของด้านที่เหลื่อ)



รูปที่ ๑

รูปที่ ๒

สมมติให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$, AX เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAC$ รูปที่ ๑ แบ่งภายใน รูปที่ ๒ แบ่งภายนอก คือ AX แบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle$ ที่ประชิดกับ $\angle BAC$

ให้พิสูจน์ว่าการแบ่งครึ่งมุมทั้ง ๒ ประการจะได้ผลว่า

$$BX:XC = BA:AC$$

ตั้ง จาก C ขีดเส้นให้ขนานกับ AX ไปจดด้าน BA หรือต่อ

BA ออกไปจนตัดกันที่จุด E แล้วหมาย B' ลงในเส้น

AB ทั้งในรูปที่ ๑ และรูปที่ ๒ เพื่อสะดวกแก่การเรียก
ชื่อมุม

พิสูจน์ $\therefore \angle A \parallel \angle C$ (ตั้ง)

$\therefore \angle B'AX = \angle AEC$ (มุมนอกมุมในตรง
ข้ามข้างบรรทัดเดียวกัน)

และ $\angle XAC = \angle ACE$ (มุมแย้ง)

แต่ $\angle B'AX = \angle XAC$ (โจทย์)

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$ ด้วย

$\therefore AC = AE$ (ด้านตรงข้ามมุมเท่า)

อีกประการหนึ่งใน $\triangle BCE$

$\therefore \angle A \parallel \angle C$ (ตั้ง)

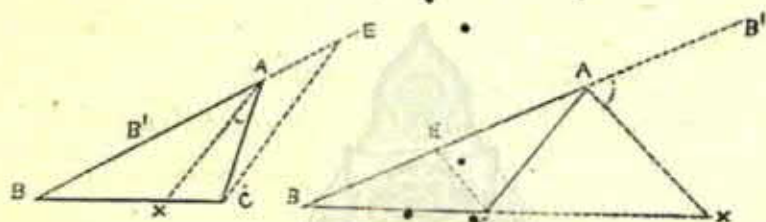
$\therefore BX:XC = BA:AE$ (เส้นขนานตัดด้านได้ส่วน

อัตราส่วน) และโดย $AE = AC$

$\therefore BX:XC = BA:AC$

บทกลับ

ถ้าแบ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมออก ๒ ส่วนให้ได้ รัศมีโอเท่ากับ
 รัศมีอี ระหว่างด้านที่เหลือน้อย ๒ ด้าน เส้นตรงที่ขีดจากจุดแบ่ง
 ไปมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมนี้ย่อมแบ่งครึ่งมุมยอด
 (ส่วนแบ่งฐานกับด้านที่เหลือเป็น รัศมีโอ เท่ากัน)



รูปที่ ๑

รูปที่ ๒

สมมติให้ X แบ่ง BC ออก : แบ่งในเส้นตั้งรูปที่ ๑ และแบ่งใน
 แล้วตั้งรูปที่ ๒ เพื่อให้ $BX:XC=BA:AC$ ขีด
 เส้น XA

ให้พิสูจน์ว่า $\angle B'AX = \angle XAC$

สร้าง จาก C ขีดเส้น CE ให้ขนานกับ AX จด BA หรือเมือ
 ต่อ AB ออกไปท่จุด E

พิสูจน์ ในรูป $\triangle BCE$

$\therefore XA \parallel CE$

(สร้าง)

$$\therefore BX:XC=BA:AE$$

(เส้นขนานตัดด้าน
 $\triangle$ ได้ส่วนเต็มพื้นที่)

$$\text{แต่ } BX:XC=BA:AC$$

(โจทย์)

$$\therefore BA:AE=BA:AC$$

$$\therefore AE=AC$$

$$\therefore \hat{A}EC = \hat{A}CE \quad (\text{มุมตรงข้ามด้านเท่า})$$

$$\text{แต่ } \hat{X}AC = \hat{A}CE \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$\text{และ } \hat{B}'AX = \hat{A}EC \quad (\text{มุมนอกมุมในตรงข้าม
 ข้างบรรทัดเดียวกัน})$$

$$\therefore \hat{B}'AX = \hat{X}AC$$

ช.ด.พ.

สังเกตพิพจน์

ถ้าเราแบ่งเส้นตรงที่มีจุดตัด ออกทั้งในเส้นและในแนว
 คราวละอย่าง ออกเป็นส่วนให้ ได้ ๖ จุด ให้ เดียวกัน เราเรียก
 เส้นนี้ว่าถูกแบ่งออกเป็นฮาร์โมนิก (Harmonic)

จึงอนุมานได้ว่า

ข้ออนุมาน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

ย่อมมาแบ่งฐานออกเป็นฮาร์โมนิก (ไม่ว่าแบ่งครึ่งนอกหรือ

แบ่งครึ่งใน) เพราะว่าส่วนของฐานซึ่งได้แบ่งออกนั้น
เป็น รัศมี เดียวกับด้านอีก ๒ ด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้น

แบบฝึกหัดที่ ๒

(อ.น. ๕๘)

(เขียนรูปกับคำนวณ)

๑) ถ้า AB ยาว ๓, ๔ นิ้ว สร้าง $\triangle ACB$ ขึ้นแล้ว
ตัด AB ออกได้ส่วน AX ยาว ๒, ๑ นิ้ว ขัดเส้น XY แต่จุด X
ขนานกับ BC เติงไปจุด AC ที่จุด Y วัด AY, YC แล้ว
เปรียบเทียบ รัศมี ข้อใดไม่

ก) $AX:XB, AY:YC$

ข) $AB:AX, AC:AY$

ค) $AB:XB, AC:YC$

๒) $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม XY เป็นเส้นตรงที่ขนาน
กับ BC ตัดด้านอีก ๒ ด้านที่จุด X กับ Y

ก) ถ้า AB ยาว ๓, ๖ นิ้ว AC ยาว ๒, ๔ นิ้ว AX
ยาว ๒, ๑ นิ้ว จงคำนวณหาความยาวของ AY

๒) ถ้า AB ยาว $๒,๐$ นิ้ว AC ยาว $๑,๕$ นิ้ว AY ยาว $๐,๙$ นิ้ว จงคำนวณหาความยาวของ BX

ค) ถ้า X แบ่ง AB ออกเป็น ๒ ส่วน อัตรา $๘:๓$ และถ้า AC ยาว $๘,๘$ ซม. จงหา AY กับ YC

๓) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม XY ขนานกับ BC ตัดด้านอีก ๒ ด้านเมื่อตัดออกไปแล้วที่จุด X และ Y

ก) ถ้า AB ยาว $๔,๕$ ซม. AC ยาว $๓,๕$ ซม. และ AX ยาว $๗,๒$ ซม. จงคำนวณหาค่าของ AY แล้ววัดดู

ข) ถ้า X แบ่ง AB ในแนวเป็น ๒ ส่วน อัตรา $๑๑:๔$ และถ้า AC ยาว $๔,๙$ ซม. จงหาส่วนของ AC

พิสูจน์

๔) เส้นขนาน ๓ เส้นย่อมตัดเส้นพาดออกได้ส่วนสัมพันธ์กัน

๕) เส้นตรงที่ตัดจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งแห่งรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า ย่อมขนานกับด้านคู่ขนาน

๖) ABC กับ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยม ๒ รูปตั้งอยู่บนฐานเดียวกันคือ BC จากจุด E ในด้าน BC ได้เส้นตรง

ให้ขนานกับ BA เส้นหนึ่งและขนานกับ BD อีกเส้นหนึ่ง ไปจุด AC กับ DC ที่จุด F กับ G ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $FG \parallel AD$

๗) ในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ขีดเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตัดด้าน BC, CA และ AB (ถ้าไม่พอดังนั้นออกไปรับ) ที่จุด D, E และ F กับให้บรรจบ AB และ AC เป็นมุมเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $BD : CD = BF : CE$

แบบฝึกหัดที่ ๓

(อ.น. ๕๕)

(เขียนรูปกับคำนวณ)

๑) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $a = ๑,๕$ นิ้ว $b = ๒,๔$ นิ้ว $c = ๓,๖$ นิ้ว แล้วแบ่งครึ่ง $\hat{A}$ ภายในและภายนอก ด้วยเส้นตรงซึ่งบรรจบ BC และ BC เมื่อตัดออกไปแล้วที่จุด X กับ Y แล้ววัด BX, XC, BY, และ YC แล้วเทียบ ว่า $BX : XC, BY : YC, BA : AC$

๒) ในรูปสามเหลี่ยม ABC, $a = ๓,๔$ ซม. $b = ๕,๔$ ซม. $c = ๗,๒$ ซม. และเส้นแบ่งครึ่งในกับแบ่งครึ่งนอก ของ $\hat{A}$ จด BC ที่ X กับ Y

จงคำนวณความยาวของส่วนแบ่งที่ฐานซึ่งมี X กับ Y
เป็นจุดแบ่งตัวเขียนรูปสอบ

๓) จงแสดงวิธีสร้าง วิชาวิทย์ ค.น. ๕๕

ก) ในการแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ ออกเป็น ๓ ส่วน
เท่า ๆ กัน

ข) ในการแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ ออกทั้งในแนว
และในเส้นเป็น ๓:๒

พิสูจน์

๔) AD เป็นเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC
มีเส้นแบ่งครึ่ง ADB , และ ADC มาจาก AB, AC ที่จุด
 E และ F จงพิสูจน์ว่า $EF \parallel BC$.

๕) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม จงพิสูจน์ว่าถ้าเส้น
แบ่งครึ่ง $\hat{A}$ กับ $\hat{C}$ ไปจุดเส้นทแยงมุม BD แห่งเดียวกันแล้ว เส้น
แบ่งครึ่ง $\hat{B}$ กับ $\hat{D}$ ก็ต้องไปจุดเส้นทแยงมุม AC แห่งเดียวกัน
ด้วย

๖) จงใช้ ค.น. ๕๕ พิสูจน์ให้เห็นว่าในรูปสามเหลี่ยม
ใด ๆ

ก) เส้นแบ่งครึ่งในเหลี่ยมทั้ง ๓ คงไปบรรจบรวมกัน
แห่งหนึ่ง

ข) เส้นแบ่งครึ่งนอกของมุม ๒ มุมแลเส้นแบ่งครึ่งใน
ของมุมที่ ๓ คงไปบรรจบรวมกันแห่งหนึ่ง

๗) ถ้า I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมประจุของรูป
สามเหลี่ยม ABC และถ้าต่อ AI ออกไปแล้วบรรจบกับ BC ที่
จุด X จงพิสูจน์ว่า $AI:IX = AB+AC:BC$

๘) กำหนดฐานของรูปสามเหลี่ยมให้ และกำหนด
ราติโอ ของด้านอีก ๒ ด้านให้ด้วย จงหาวิถีของจอม

๙) กำหนดฐานและ ราติโอ ของด้านอีก ๒ ด้านให้และ
กำหนดมุมยอดให้ด้วย จงสร้างรูปสามเหลี่ยม

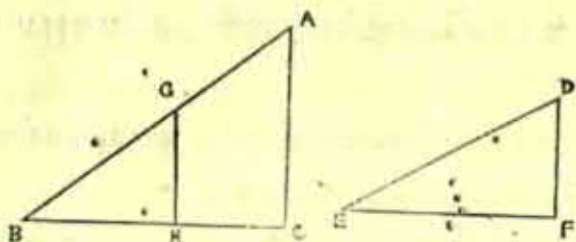
ว่าทวิรูปสามเหลี่ยมมุมเท่า

อุประมายนิเทศที่ ๒๐

(ยুক্তิก เล่ม ๖ บท ๔)

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูปมีมุมเท่ากันมุมต่อมุม ด้านของ
รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ ย่อมได้ส่วนสัมพันธ์กัน

(Δ มุมเท่ากันได้ส่วนสัมพันธ์)



สมมติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็นรูป $\triangle$ ๒ รูป

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E} \text{ และ } \hat{C} = \hat{F}$$

ให้พิสูจน์ว่า $AB:DE = BC:EF = CA:FD$

พิสูจน์ ยก $\triangle DEF$ วางทับ $\triangle ABC$ ให้

จุด E ทับจุด B และ EF ทับ BC

$$\therefore \hat{E} = \hat{B} \quad (\text{โจทย์})$$

$\therefore$ ด้าน ED จึงทับ BA ได้

แต่ไม่ปรากฏว่าด้าน ED และ EF เท่ากับด้าน BA และ

BC ถ้าตั้งนั้นให้จุด D อยู่ที่ G และ F อยู่ที่ H

คือ $\triangle GBH$ แทน $\triangle DEF$ ในตำแหน่งใหม่

$$\therefore \hat{D} = \hat{A} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\text{ก็คือ } \hat{BGH} = \hat{BAC}$$

$\therefore GH \parallel AC$ (มุมนอกมุมในตรงข้ามบรรทัดเดียวกัน)

$\therefore BA : BG = BC : BH$ (เส้นขนานตัดกันได้ส่วนสัมพันธ์) ก็คือ $AB : DE = BC : EF$ นั้นเอง

โดยทำนองเดียวกันถ้ายก $\triangle DEF$ วางทับ $\triangle ABC$

ให้ F ทับ C และ EF ทับ CB และ FD ทับ CA

ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า $BC : EF = CA : FD$

$\therefore AB : DE = BC : EF = CA : FD$

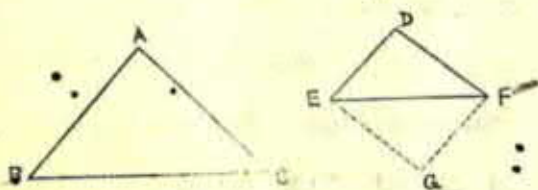
ท.ท.พ.

อุปมาขนิเทศที่ ๖๑

(ยุคลิด เล่ม ๖ บท ๕)

การรูปสามเหลี่ยม ๒ รูปมีด้านสัมพันธ์กันด้านต่อด้าน รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปนั้นจะมุมเท่ากันมุมต่อมุมด้วย และมุมที่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่สัมพันธ์กันนั้นเป็นมุมที่เท่ากัน

(ด้านของ $\triangle$ สัมพันธ์มุมที่เท่ากัน)



สมมุติ ให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็น $\triangle$ ๒ รูป

มีด้านสัมผัสกันด้านต่อด้านคือ

$$AB:DE = BC:EF = AC:DF$$

ให้พิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$

มีมุมเท่ากันมุมต่อมุมด้วย

สร้าง ที่จุด E ในด้าน DE สร้าง $\angle FEG = \hat{B}$ และ

ที่จุด F ในด้าน EF สร้าง $\angle EFG = \hat{C}$

(สร้างมุมเท่ากำหนด)

พิสูจน์ $\because \angle FEG = \hat{B}$ และ $\angle EFG = \hat{C}$ (สร้าง)

$\therefore \angle EGF = \hat{A}$ ($\triangle$ ๒ มุมเท่า)

$\therefore \triangle ABC$ กับ $\triangle EGF$ มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

$\therefore AB:GE = BC:EF$ ($\triangle$ มุมเท่าด้านได้ส่วนสัมพันธ์)

แต่ $AB:DE = BC:EF$ (โจทย์)

$\therefore AB:GE = AB:DE$

$\therefore GE = DE$

โดยทำนองเดียวกัน $GF = DF$

ใน $\triangle GEF$ กับ $\triangle DEF$

$$\therefore GE = DE \quad \text{และ} \quad GF = DF \quad (\text{พิสูจน์})$$

$$\therefore EF \quad \text{เป็นด้านร่วม}$$

$$\therefore \triangle EDF \cong \triangle GEF \quad (\triangle \text{ สามด้านเท่า})$$

$$\therefore \hat{D}EF = \hat{G}EF = \hat{B}$$

$$\text{และ} \quad \hat{D}FE = \hat{G}FE = \hat{C}$$

$$\therefore \hat{D} \text{ ที่เหลือ} = \hat{A} \text{ ที่เหลือ}$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ มีมุมเท่ากับมุมของ } \triangle ABC$$

มุมต่อมุม และมุมที่เท่ากันอยู่ตรงข้ามกับด้านที่สมมุติกันด้วย

ท.ค.พ.

แบบฝึกหัดที่ ๔

ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมเท่ากันมุมต่อมุม

(คำนวณกับเขียนรูป)

คำนวณหาตัวเล็ก่อนแล้วจึงเขียนรูปตอบ

๑) ในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ขีดเส้น XY ขนานกับ BC ดังด้านอีก ๒ ด้านที่จุด X กับ Y

ก) ถ้า AB เท่ากับ ๒,๕ นิ้ว AC เท่ากับ ๒,๐ นิ้ว AX เท่ากับ ๑,๕ นิ้ว จงหา AY

๒) ถ้า AB เท่ากับ ๓,๕ นิ้ว AC เท่ากับ ๒,๑ นิ้ว
 AY เท่ากับ ๑,๒ นิ้ว จงหา AX

๓) ถ้า AB เท่ากับ ๔,๒ ซม. AX เท่ากับ ๓,๖ ซม.
 AY เท่ากับ ๖,๖ ซม. จงหา AC

๒) ในรูปของข้อ ๑

ก) ถ้า AB เท่ากับ ๒,๔ นิ้ว BC เท่ากับ ๓,๖ นิ้ว
 AX เท่ากับ ๑,๔ นิ้ว จงหา AY

ข) ถ้า BC เท่ากับ ๗,๗ ซม. XY เท่ากับ ๕,๕ ซม.
 AX เท่ากับ ๔,๕ ซม. จงหา AB

๓) ในรูปสามเหลี่ยม ABC , a เท่ากับ ๓,๐ นิ้ว b
 เท่ากับ ๓,๖ นิ้ว c เท่ากับ ๔,๒ นิ้ว และ QR ขั้ตขนานกับ AC
 ยาว ๓,๐ นิ้ว จงหาความถี่เหลืออีก ๒ ด้านของ $\triangle QRB$

๔) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมี a เท่ากับ ๘ ซม. b
 เท่ากับ ๗ ซม. c เท่ากับ ๑๐ ซม. กำหนดจุด P ลงในเส้น AB
 ห่างจาก A อยู่ ๔ ซม. ขั้ตเส้น PQ ขนานกับ BC ถามว่า PQ
 กับ QC ยาวเท่าใด

๕) ด้านของสนามรูปสามเหลี่ยมยาว ๓๐๐ เมตร,
 ๓๕๐ เมตร, ๔๐๐ เมตร เมื่อจำลองลงเป็นแผนผังด้านยาว
 ที่สุดวัดได้ ๒,๔ ซม. จงหาด้านอื่น.

๖) ขีด XY ขนานกับด้าน BC ซึ่งเป็นฐานของ
รูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า AX ยาว $๘,๕$ เมตร XY ยาว
 $๓\frac{๑}{๓}$ เมตร และ AY ยาว $๖\frac{๑}{๕}$ เมตร และ XB ยาว $๔\frac{๑}{๕}$ เมตร
จงคำนวณหาด้านอื่น ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ABC .

๗) รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก จาก
จุด P ในด้านตรงข้ามขีดเส้น PQ ขนานกับ AC ถ้า AC เท่ากับ
 $๑\frac{๑}{๕}$ นิ้ว BC เท่ากับ ๓ นิ้ว และ $PQ = ๐,๕$ นิ้ว จงหา
 BQ, BP และ AP

๘) ในรูปสามเหลี่ยม ABC เส้น AD ขีดจาก A
ตั้งฉากกับ BC , ตัดจุด X ซึ่งเป็นจุดใน AD ขีดเส้นขนานกับ
 BC ตัดอีกสองด้านที่จุด P กับ Q ถ้า BC ยาว ๙ ซม. AD
ยาว ๘ ซม. และ DX ยาว ๓ ซม. จงหา PQ

๙) ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี a ยาว ๒ ซม. b
ยาว $๓,๕$ ซม. c ยาว $๔,๕$ ซม. ได้ขีดเส้น BD กับ CE ไปตัด
ด้าน b และ c ที่ D และ E และเส้นทั้ง ๒ นั้นไปตัดกันที่จุด P
ถ้า $EP : PC = DP : PB = ๒ : ๕$ จงหา ED, AD และ DC

พิสูจน์

๑) จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงระหว่างจุดกึ่งกลางของด้าน ๒ ด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะ

ก) ขนานกับด้านที่เหลือ

ข) มีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่เหลือ

๒) ในรูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า $ABCD$ มี $AB \parallel DC$ และเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O จงพิสูจน์ว่า $OA : OC = OB : OD$

ถ้า AB เป็น ๒ เท่าของ DC จงพิสูจน์ว่าจุด O แบ่งเส้นทแยงมุมทั้ง ๒ ออก ๑ ใน ๓ ทั้ง ๒ เส้น

๓) เส้นตรง ๓ เส้นแยกออกจากจุดหนึ่งบนเส้นตรงข้างเดียวกัน ถ้ามีเส้นขนาน ๒ เส้นมาตัดเส้นทั้ง ๓ นี้ที่จุด A, B และ C กับ P, Q และ R ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $AB : BC = PQ : QR$

๔) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู, จากจุด D

ได้ขีดเส้นตัด AB และเคยไปตัด CB ด้วย (คือตัด CB ออกไป) ที่จุด E และ F จึงชี้ให้เห็นว่าเกิดรูปสามเหลี่ยมขึ้น ๓ รูปที่มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม แล้วจึงพิสูจน์ด้วยว่า

$$DA : AE = FB : BE = FC : CD$$

๕) กำหนดจุด D ลงในฐาน AC ของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้วพิสูจน์ว่า ถ้า AD , DC , AB และ BC ถูกแบ่งครึ่งที่จุด E , F , G และ H แล้ว EG จะเท่ากับ HF

๖) AB กับ CD เป็นเส้นตรงขนานกัน, E เป็นจุดกึ่งกลาง CD , AC กับ BE ตัดกันที่จุด F , AE กับ BD ตัดกันที่จุด G จงพิสูจน์ว่า $FG \parallel AB$.

๗) AB เป็นเส้นสัมผัสภายในของวงกลม จาก A ชีดเส้นตรงตัดเส้นรอบวงที่จุด C และตัดทั้งเส้นที่สัมผัสวงกลมตรง B ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า

ก) รูปสามเหลี่ยม CAB กับรูปสามเหลี่ยม BAD มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

ข) AC , AB , AD เป็นส่วนสัมผัสกันทั้งสาม

ค) ถ้าเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้าน AC กับ AD ย่อมมีขนาดคงที่ไม่ว่า AD จะอยู่แห่งใด

๘) ถ้าวัดระยะ AB กับ CD ผ่านจุดใดๆ (เช่น X) ภายในวงกลมวงหนึ่งแล้ววัดเส้น AC กับ BD จึงพิสูจน์ว่า

ก) รูปสามเหลี่ยม AXC กับรูปสามเหลี่ยม DXB มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

$$ข) AX : DX = XC : XB$$

๙) จากจุด X ภายนอกวงกลมได้วัดทั้งเส้น XT และเส้น XA XB ภายในวงกลมนั้นแล้ววัดเส้น AT , TB จึงพิสูจน์ว่า

ก) รูปสามเหลี่ยม AXT กับรูปสามเหลี่ยม TXB มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

$$ข) XA : XT = XT : XB$$

๔. แสดงศัพท์

ข้อ ๑) รูปเหลี่ยม ๒ รูปถ้ามีมุมเท่ากันมุมต่อมุมเป็นลำดับไปได้ชื่อว่ามุมเท่ากัน ให้ใช้คำว่ารูปเหลี่ยม ๒ รูปนั้นเป็นรูปเหลี่ยมมุมเท่ากัน

ข้อ ๒) รูปเหลี่ยมใดๆ ที่มีมุมเท่ากันมุมต่อมุมแล้ว ยังมีด้านใดคู่หนึ่งสัมพันธ์กันอีก รูปเหลี่ยมเหล่านั้นได้ชื่อว่า “รูปคล้ายกัน”

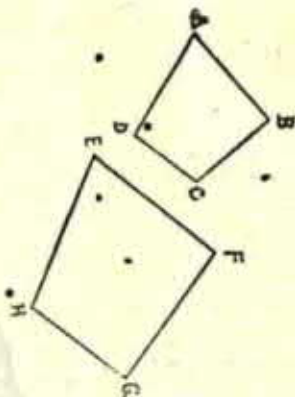
เช่นรูปสี่เหลี่ยม ABCD

กับสี่เหลี่ยม EFGH มี $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

และ $\hat{D}$ เท่ากับ $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ และ $\hat{H}$

ตามลำดับ และมีด้านที่สัมพันธ์กันอีก คือ

$$AB : EF = BC : FG = CD : GH \\ = DA : HE$$



ดังนั้นเราจึงได้ว่า “รูปสี่เหลี่ยมคล้ายกัน”

หมายความว่า การที่รูปจะคล้ายกันนั้นทุกจากจะต้องมีรูปและส่วนคล้ายกันแล้ว มีข้อจำเป็นอยู่ ๒ ประการ คือ

๑) รูปเหล่านั้นต้องมีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

๒) รูปเหล่านั้นต้องมีด้านที่สัมพันธ์กันด้านต่อด้าน

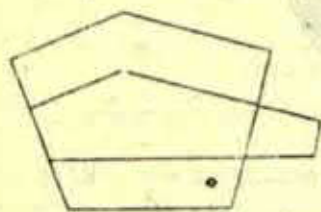
แต่ถ้าจะพูดสำหรับรูปสามเหลี่ยมโดยเฉพาะแล้ว ทั้ง ๒

ประการนี้จะจัดเข้าเป็นข้อสำคัญไม่ได้ เพราะเหตุว่าเมื่อประการหนึ่งประการใดมีขึ้นเป็นอันแล้ว อีกประการหนึ่งก็จะต้องมีขึ้นเป็นอันด้วย คือ

ก) ถ้ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมเท่ากัน ก็ต้องมีด้านที่สัมพันธ์กันด้วย (ตามที่พิสูจน์ได้ ใน ธน. ๖๐)

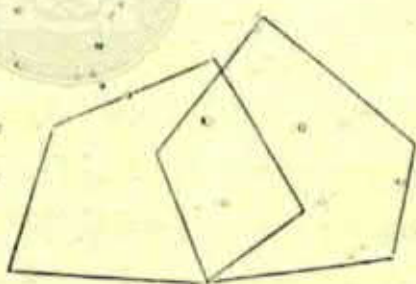
๖) ถ้ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีด้านใดส่วนต้นพันชนกันแล้ว ก็ต้องมีมุมเท่ากันมุมต่อมุมด้วย (ตามทฤษฎีใน อ.น. ๖๑)

ขอให้ผู้ศึกษาพึงเข้าใจเถิดว่า อ.น. ๖๐ และ อ.น. ๖๑ นั้นกล่าวแต่เฉพาะรูปสามเหลี่ยมเท่านั้นไม่พาดพิงไปถึงรูปเหลี่ยมอื่นด้วย เพราะฉะนั้นรูปเหลี่ยมอื่นจะถกฏเกณฑ์อย่างรูปสามเหลี่ยมนั้นไม่ได้ เพราะเหตุว่ารูปเหลี่ยมทั้งหลายนอกจากรูปสามเหลี่ยมนั้นถึงแม้จะมีมุมเท่ากันมุมต่อมุมแล้วก็ตามหาว่าไม่จำพันชนกันได้ หรือมีด้านใดส่วนต้นพันชนกันแล้ว มุมอาจไม่เท่ากันก็ได้ ยังไม่มีกฎเกณฑ์ในที่ใดบังคับให้เป็นไปพร้อมกันเช่นนั้น ดังจะแสดงรูปให้เห็นต่อไปนี้



รูปที่ ๑

ในรูปที่ ๑ แสดงว่ามีมุมเท่ากัน
สามมุม



รูปที่ ๒

แต่ด้านไม่จำเป็นต้อง

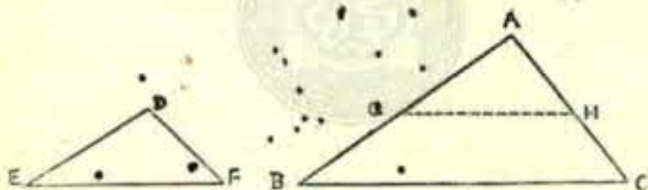
ในรูปที่ ๒ แสดงว่าด้านสัมผัสกัน แต่มุมไม่จำเป็น
ต้องเท่ากันด้วย

อุปมาณียะเทศที่ ๒๒

(บุคคิตเล่ม ๖ บท ๖)

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูปมีมุม มุมหนึ่งเท่ากันกับมุมด้านที่
บรรจบเป็นมุมเท่ากันนั้นได้ส่วนสัมผัสกัน รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป
นั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

(สามเหลี่ยม ๒ ด้านสัมผัสกับมุมระหว่างเท่า)



สมมติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยม

๒ รูป มี $\hat{A} = \hat{D}$ และมีด้าน

$$AB : DE = AC : DF$$

ให้พิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$

เป็นรูป $\triangle$ คล้ายกัน

พจน์

ยก $\triangle DEF$ วางทับ $\triangle ABC$ ให้

จุด D ทับ A และให้ DE ทับ AB

$\therefore \angle EDF = \angle BAC$ (โจทย์)

$\therefore DE$ จึงทับด้าน AC ได้

ให้จุด G และ H เป็นจุดแทน E และ F

ตกอยู่ในตำแหน่งใหม่ คือรูป $\triangle AGH$ แทน $\triangle EDF$

$\therefore AB : DE = AC : DF$ (โจทย์)

ก็คือ $AB : AG = AC : AH$

$\therefore GH \parallel BC$ (บท ๓.๓. ๕๘)

$\therefore \angle AGH = \angle ABC$ และ $\angle AHG = \angle ACB$

(มุมชนมุมในตรงข้ามจึงบรรทัดเดียวกัน)

ก็คือ $\angle EDF = \angle ABC$ และ $\angle DFE = \angle ACB$

$\therefore$ รูป $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

$\therefore AB : DE = AC : DF = BC : EF$ ($\triangle$ มุม

เท่ากันได้สัดส่วน)

$\therefore \triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

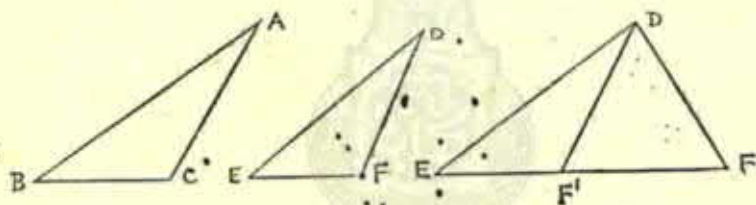
ธ. ศ. พ.

อุประมายืนีเทศที่ ๒๓

(ยุคคิดเล่ม ๖ บท ๗)

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูปมีมุมเท่ากันมุมหนึ่งกับมุมด้านที่
บรรจบเป็นมุมภายนอกหนึ่งได้ส่วนสัมพันธ์กันอยู่แล้ว มุมที่ ๓
ก็คงจะเท่ากัน มื่อนั้นก็คงเป็นคู่ขนาน และถ้าเท่ากัน รูปสาม
เหลี่ยม ๒ รูปนั้นจะเป็นสามเหลี่ยมคล้ายกัน

($\triangle$ มุมหนึ่งเท่ากันบรรจบเป็นอีกมุมหนึ่งได้ส่วนสัมพันธ์)



รูปที่ ๑ รูปที่ ๒ รูปที่ ๓
สมมติให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็น $\triangle$ ๒ รูป

มี $\hat{B} = \hat{E}$ และมีด้าน $AB : DE = AC : DF$

ให้พิสูจน์ว่า $\hat{C} = \hat{F}$ หรือมีฉะนั้นก็ $\hat{C}$ เป็นคู่
ขนานกับของ $\hat{F}$

พจน์ ๑) (ในรูปที่ ๑ กับรูปที่ ๒)

$$\therefore \hat{B} = \hat{E} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\text{ถ้า } \hat{A} = \hat{D} \quad \text{แล้ว}$$

$$\therefore \hat{C} \text{ ก็ต้อง } = \hat{F} \quad (\Delta \text{ ๒ มุมเท่าอีกมุม ๑ เท่า})$$

$\therefore$ ด้านของ Δ ทั้ง ๒ มุมย่อมได้ส่วนสัมพันธ์กัน

(Δ มุมเท่าด้านใดส่วนสัมพันธ์)

$\therefore \Delta ABC$ กับ ΔDEF เป็น Δ คล้ายกัน

พจน์ ๒) (ตามในรูปที่ ๑ กับรูปที่ ๓)

ถ้า $\hat{A}$ ไม่เท่ากับ $\hat{D}$ ก็คงใหญ่กว่ากัน

ต่างว่า $\hat{D}' > \hat{A}$ ทำ $E\hat{D}F' = \hat{A}$

ถ้าดังนั้น ΔABC กับ $\Delta EDF'$ ก็มุมเท่ากัน
มุมต่อมุม

$\therefore AB : DE = AC : DF' \quad (\Delta \text{ มุมเท่าด้านใดส่วนสัมพันธ์})$

$$\text{แต่ } AB : DE = AC : DF \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore AC : DF' = AC : DF$$

$$\therefore DF' = DF$$

$$\therefore D\hat{F}'F' = D\hat{F}'F \quad (\text{มุมตรงข้ามด้านเท่า})$$

$$\text{แต่ } \hat{C} = D\hat{F}'E \quad (\text{พจน์ ๑})$$

$D\hat{F}'E$ เป็นคู่สัมผัสกรของ $D\hat{F}'F$ ก็คือเป็นคู่สัมผัสกร
ของ $D\hat{F}'F'$ ด้วย ($\because D\hat{F}'F' = D\hat{F}'F$)
จึงเห็นได้ว่า $\hat{C}$ เป็นคู่สัมผัสกรของ $\hat{F}$.

ช.ค.พ.

เก้า

ใน อ. น. ๒๓ นั้นข้อที่เคลือบคลุมอยู่ เพราะโจทย์บอก
ว่า $\hat{B} = \hat{E}$ ส่วน $\hat{A}$ กับ $\hat{D}$ นั้นโจทย์ไม่ได้บอกว่าเป็นอย่างไร
จึงอาจเป็นได้ ๒ อย่างคือเท่ากันก็ได้ หรือใหญ่กว่ากันก็ได้ การ
พิสูจน์เราจึงมีเป็น ๒ สถานะ ๑.หนึ่งเท่ากัน อีกสถานะหนึ่งใหญ่กว่ากัน
จะหักล้างกันไปจาก ๒ สถานะนั้นไม่ได้ สถานะที่หนึ่งถ้า
 $\hat{A} = \hat{D}$ แล้วก็ไม่มีความหมายอะไรต่อ $\hat{C}$ ก็ต้องเท่ากับ $\hat{F}$ ชยฺเฮง
(ตามบทพิสูจน์ที่ ๑๖) Δ ทั้ง ๒ ก็เป็น Δ คล้ายกัน สถานะที่ ๒
ถ้า $\hat{A} < \hat{D}$ เราจึงแบ่ง $\hat{D}$ เอาแค่ส่วนเพราะให้เท่ากับ $\hat{A}$
แล้วก็พิสูจน์ได้ว่า $\hat{C}$ เป็นคู่สัมผัสกรกับ $\hat{F}$ ข้อที่ควรสังเกตจำ
ก็คือ ถ้า $\hat{A} = \hat{D}$ แล้ว $\hat{C}$ ก็เท่ากับ $\hat{F}$ ถ้า $\hat{A}$ ไม่เท่ากับ
 $\hat{D}$ แล้ว $\hat{C}$ ก็เป็นคู่สัมผัสกรกับ $\hat{F}$ คงเป็นอยู่ใน ๒ ประการ
นี้เสมอ.

แต่ถ้าจะมีผู้เถียงว่า $\hat{C}$ กับ $\hat{F}$ โจทย์ก็ไม่บอกเหมือนกัน
จะข ๒ สันนิษฐานว่าเท่ากันและไม่เท่ากันบ้างไม่ได้หรือ ตอบว่าแน่
ที่เขยวุดตรงเนี่ยอย่างนั้น แต่ถ้าเราจะยก $\hat{C}$ กับ $\hat{F}$ ขึ้นมาวินิจฉัย
เขื่อนนั้นก็คงไม่ได้รับผลว่า $\hat{C}$ เป็นคู่สมมาตรกับ $\hat{F}$ ได้แต่ $\hat{C} = \hat{F}$
เท่านั้น จึงไม่ยกขึ้นพูดเลยไปพูดถึง $\hat{A}$ กับ $\hat{D}$ เสีย
เหตุเท่านั้นเอง

แบบฝึกหัดที่ ๕

เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

(พิสูจน์)

๑) ในรูปสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่ง
ขนานกับฐาน BC ไปจรดด้านทั้ง ๒ นั้น จะถูกเส้นมัธยฐานที่จรดจาก
จุด A แบ่งครึ่ง

๒) รูปสามเหลี่ยม ABC กับ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$
มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม ถ้า

ก) p, p' เส้นตั้งฉากจาก A และ A' ไปจรดด้าน
ตรงข้าม

ข) R, R' รัศมีของวงกลมประกอบ รูปสามเหลี่ยม

ค) r, r' รัศมีของวงกลมประจุในรูปสามเหลี่ยมจึง
พิสูจน์ว่า รัศมี $p : p', R : R', r : r'$ เท่ากับ รัศมีของ
ด้านคู่ใดคู่หนึ่งในจำพวกด้านที่สัมผัสกัน

ก) จงพิสูจน์ว่ารัศมีของวงกลมซึ่งผ่านจุดกึ่งกลางด้าน
ของรูปสามเหลี่ยม เป็นครึ่งของรัศมีวงกลมประกอบ

๔) ถ้าเส้นตรง AB กับ CD ตัดกันที่จุด X ได้
ผลว่า $XA : XC = XD : XB$

ก) จงพิสูจน์โดย อ.น. ๖๒ ว่า รูปสามเหลี่ยม
 AXD กับรูปสามเหลี่ยม CXB เป็นรูปสามเหลี่ยม คล้ายกัน

ข) แล้วพิสูจน์ว่าจุด A, D, B , และ C เป็นจุด
เรียงกันเป็นวงกลม

๕) จุด A, B และ C อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน
จาก B และ C ได้ขีดเส้นตรง $BP \parallel CQ$ ให้ได้
 $BP : QC = AB : AC$ จงพิสูจน์โดย อ.น. ๖๒ ว่าจุด A, P
และ Q อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกันด้วย

๖) ถ้าในรูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม
 $A'B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ และ $c : c' = b : b'$ ดังนั้นจะได้ผลความจริง
อย่างใดต่อไปอีกบ้าง

แล้วให้ พิจารณา โดยเขียนรูป ถ้ากำหนดดังต่อไปนี้ ให้ข้อจะ
ได้ ผลอย่างไรต่อไปนี้

ก) $c < b$

ข) $c = b$

ค) $c > b$

๗) . ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน P กับ Q
เป็นจุดในเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง ซึ่งขนานกับ AB ขัดเส้น PA กับ
QB บรรจบกันที่จุด R และ PD กับ QC บรรจบกันที่จุด S
จงพิสูจน์ว่า $RS \parallel AD$

๘) ในรูปสามเหลี่ยม ABC เส้นแบ่งครึ่ง $\hat{A}$ จดฐานที่
D และจุดเด่นรวมวงกลมประกอบที่จุด E ขัดเส้น EC จงพิสูจน์ว่า

ก) รูปสามเหลี่ยม BAD กับรูปสามเหลี่ยม
EAC เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

ข) $AB \cdot AC = AE \cdot AD$

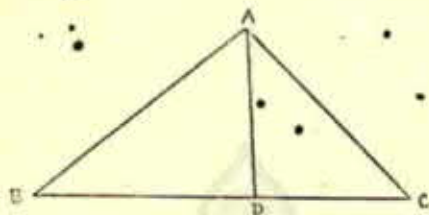
อุประมาณียเทศที่ ๖๔

(ยุคติดเล่ม ๖ บท ๘)

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากถ้าขีดเส้นตรงจากมุมฉากไปตั้งได้ฉาก
กับด้านตรงข้าม รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๓ ข้างได้มุมย่อมเป็นรูป

สามเหลี่ยมคล้ายกัน และต่างก็เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิมด้วย

($\triangle$ เกิดจากเส้นจากมุมฉาก $\perp$ ด้านตรงข้ามเป็น $\triangle$ คล้ายกัน)



สมมุติให้ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากที่ A เป็นมุมฉากจาก A ชัด
เส้น $AD \perp BC$ ให้พิสูจน์ว่า $\triangle BDA$, $\triangle ADC$
และ $\triangle BAC$ ทั้ง ๓ รูปเป็น $\triangle$ คล้ายกัน

พิสูจน์ ใน $\triangle BDA$ กับ $\triangle BAC$,

$$\therefore \hat{BDA} = \hat{BAC} \quad (\text{มุมฉาก})$$

$\therefore \hat{B}$ เป็นมุมร่วม

$$\therefore \text{มุมที่เหลือ } \hat{BAD} = \text{มุมที่เหลือ } \hat{BCA}$$

($\triangle$ ๒ มุมเท่ามุมที่เหลือนั้นเท่า)

$$\therefore BA : BC = AD : AC = BD : BA$$

($\triangle$ มุมเท่ากันได้ส่วนด้านพหุ)

$\therefore \triangle BDA$ กับ $\triangle BAC$ เป็น $\triangle$ คล้ายกัน

โดยทำนองเดียวกัน $\triangle ADC$ กับ $\triangle BAC$ ก็เป็น $\triangle$ คล้ายกัน จึงเห็นได้ว่า $\triangle BDA$ และ $\triangle ADC$ ต่างก็มีมุมเท่ากับมุมของ $\triangle BAC$ มุมต่อมุม

$\therefore \triangle BDA$ กับ $\triangle ADC$ จึงมีมุมเท่ากันเองด้วย

$\therefore$ ด้านจึงได้ส่วนสัมพันธ์กัน ($\triangle$ มุมเท่าด้านได้ส่วนสัมพันธ์)

$\therefore \triangle BDA$ กับ $\triangle ADC$ จึงเป็น $\triangle$ คล้ายกัน

ข.ค.พ.

ข้ออนุมาน (ตามรูปใน ขน. ๖๔)

๑) $\therefore \triangle BDA$ กับ $\triangle DAC$ เป็น $\triangle$ คล้ายกัน

$\therefore DB : DA = DA : DC$ คือ BA เป็นตำแหน่งใน
แห่งบังคับสัมพันธ์

$$\therefore DA^2 = DB \cdot DC$$

๒) $\therefore \triangle BCA$ กับ $\triangle BAD$ เป็น $\triangle$ คล้ายกัน

$\therefore BC : BA = BA : BD$ คือ BA เป็นตำแหน่งในแห่ง
บัญญัติสัมพันธ์

$$\therefore BA^2 = BC \cdot BD$$

๓) $\because$ รูปสามเหลี่ยม CBA กับรูปสามเหลี่ยม CAD เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

$\therefore CB : CA = CA : CD$ คือ CA เป็นค่าหนึ่งในทั้งบัญญัติสามพจน์

$$\therefore AC^2 = CB \cdot CD$$

แบบฝึกหัดที่ ๒

ระคนแต่ อ.น. ๖๐ ถึง อ.น. ๖๔

๑) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านยาว a คือ BC ออกไปทั้ง ๒ ข้างแล้วกำหนดจุด P กับ Q ลงในเส้น BC เฉพาะให้ $BP = CQ = a$ ขีดเส้น AP, AQ ให้พิสูจน์ว่า

$$ก) \quad PQ : PA = PA : PB$$

$$ข) \quad PA^2 = 3a^2$$

๒) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมี A เป็นมุมฉาก AD เป็นเส้นตั้งฉากกับฐาน BC ถ้า AB ยาว ๔ นิ้ว และ AC ยาว

๓ นิ้ว จงพิสูจน์ว่าฐาน BC จะถูกแบ่งออกเป็น ๒ ส่วน ๆ หนึ่ง ยาว ๓, ๒ นิ้ว กับ ๑, ๔ นิ้ว

๓) $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมี $\hat{A}$ เป็นมุมฉาก AD เป็นเส้นตั้งฉากกับด้านตรงข้าม BC จงพิสูจน์ด้วย อ.น. ๒๖ ครั้ง หนึ่ง กับด้วย อ.น. ๖๔ อีกครั้งหนึ่งว่า $BC \cdot AD = AB \cdot AC$

๔) $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมี $\hat{A}$ เป็นมุมฉาก และ AC' ตั้งฉากกับด้านตรงข้าม และ $C'A'$ ขนานกับ CA ถ้า AC ยาว ๑๕ ซม. AB ยาว ๒๐ ซม. จงพิสูจน์ว่า $AC' = ๑๒$ ซม. และ $C'A' = ๙, ๖$ ซม.

๕) วงกลม C มีรัศมี r ที่ปลายเส้นศูนย์กลางได้ขีด ทั้งเส้น ๒ เส้น แล้วขีดอีกเส้นหนึ่งกับ ๒ เส้นก่อนที่ Q กับ R และให้เป็นทั้งเส้นตัดด้วยมีจุดสัมผัสที่ P จงพิสูจน์ว่า

ก) $\triangle QCR$ เป็นมุมฉาก

ข) $PQ \cdot PR = r^2$

๖) วงกลม ๒ วงมีรัศมี r กับ r' สัมผัสกันภายนอก ที่จุด A มีทั้งเส้นที่ร่วมสัมผัสวงกลมที่ P กับ Q จงพิสูจน์ว่า

ก) PQ ตรงข้ามกับมุมฉากที่ A

$$ข) (PQ)^2 = r r'$$

อีกนัยหนึ่งถ้าข้อ PA, QA ออกไปจุดเส้นรอบวงที่ X กับ Y แล้ว
จึงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม PAY กับรูปสามเหลี่ยม XAQ เป็น
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและคล้ายกันด้วย.

๗) วงกลม ๒ วงสัมผัสกันภายในที่จุด A มี PQ
เป็นทั้งเส้นตรงร่วม ได้ข้อ PQ ออกไปจุดเส้นกดของศูนย์กลางที่ S
จึงพิสูจน์ว่า ถ้าขีดเส้น PA กับ AQ แล้ว

ก) รูปสามเหลี่ยม SAP กับรูปสามเหลี่ยม
 SAQ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

$$ข) SA^2 = SP \cdot SQ$$

๘) วงกลม ๒ วงตัดกันที่จุด A กับ B ที่ A มีทั้งเส้น
สัมผัสวงละเส้น ต่อกันที่จุดเลยไปจุดรอบวงที่ C กับ D จ
งพิสูจน์ว่าถ้าขีดเส้น BC, BD แล้ว

$$BC : BA = BA : BD$$

ตรีโกณมิติสัมพันธ์

ข้อ ๑



สมมติให้ $\triangle PAQ$ เป็นมุมแหลม กำหนดจุด B ลงใน
 ขา AP ชัด BC ตั้งฉากกับขาของมุมฉากข้างหนึ่งคือ AQ เกิดเป็น
 รูปสามเหลี่ยม $\triangle BAC$ เป็นมุมฉาก และถ้าจะว่ากันถึงมุม A
 แล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นเกี่ยวข้องกับสัมพันธ์กันอย่างไร
 ประการ จึงจำเป็นจะต้องให้ชื่อส่วนสัมพันธ์เหล่านั้นเพื่อสะดวกแก่
 การเขียนและอ่าน คือ

$\frac{\text{ด้านตรงข้าม}}{\text{ด้านตรงฉาก}}$ หรือ $\frac{BC}{AB}$ ให้ชื่อว่า ไซน์ ของมุม A

$\frac{\text{ด้านประชิด}}{\text{ด้านตรงฉาก}}$ หรือ $\frac{AC}{AB}$ ให้ชื่อว่า โคไซน์ ของมุม A

$\frac{\text{ด้านตรงข้าม}}{\text{ด้านประชิด}}$ หรือ $\frac{BC}{AC}$ ให้ชื่อว่า ทังเจนต์ ของมุม A

ถ้ากลับส่วนสัมพันธ์ทั้ง ๓ ประการนี้เสียจะได้ส่วน
สัมพันธ์อีก ๓ ดำรับ คือ

$\frac{\text{ด้านตรงข้าม}}{\text{ด้านตรงข้าม}}$ หรือ $\frac{AB}{BC}$ ให้ชื่อว่า โคเส้นก้นค้ของมุม A

$\frac{\text{ด้านตรงฉาก}}{\text{ด้านประชิด}}$ หรือ $\frac{AB}{AC}$ ให้ชื่อว่า เส้นก้นค้ของมุม A

$\frac{\text{ด้านประชิด}}{\text{ด้านตรงข้าม}}$ หรือ $\frac{AC}{BC}$ ให้ชื่อว่า โคทั้งก้นค้ของมุม A

ส่วนสัมพันธ์ทั้ง ๓ ดำรับที่ใด โทมนให้ชื่อว่า “ส่วน
สัมพันธ์กลับ” ถ้าเรียกรวมกันทั้ง ๖ ดำรับก็เรียกว่า “ตรีโกณ
มิติสัมพันธ์ของมุม A” แต่เพื่อสะดวกแก่การเขียนให้ย่อดังนี้

ถิ $A = \frac{BC}{AB}$, โคเส้น $A = \frac{AB}{BC}$,

โคถิ $A = \frac{AC}{AB}$, เส้น $A = \frac{AB}{AC}$,

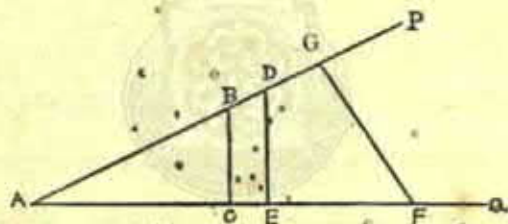
ทุ้ง $A = \frac{BC}{AC}$, โคทุ้ง $A = \frac{AC}{BC}$,

แต่การอ่านต้องอ่านให้เต็มตามชื่อส่วนสัมพันธ์ เช่นเมื่อ
เห็น ถิ A ก็ให้อ่านว่าสินศของมุม A เป็นต้น
หมายเหตุ ตารางเหลี่ยมน้ของส่วนสัมพันธ์เหล่านี้ คือ (ถิ A)^๒
ให้เขียน .ถิ^๒ A

(โคติ A)	ให้เขียน	โคติ A
(ทั้ง A)	"	ทั้ง A
(โคเถะ A)	"	โคเถะ A
(เถะ A)	"	เถะ A
(โคทั้ง A)	"	โคทั้ง A

ส่วนการอ่านคงอ่านเต็มตามใจความเช่น โคติ A ก็ว่าถึง ๒

ของมุม A เป็นต้น
ข้อ ๒



ให้ $\triangle APQ$ เป็นมุมแหลมมีเส้น BC และ DE เป็นเส้นที่ขนาน
กับ PQ และตัด AP ที่ B และ D ในเส้น AP และตัด AQ ที่ C และ E ตามลำดับ และให้ FG ขัดจาก F ใน AQ ไปตั้งได้
ฉากกับ AP ที่ G , จะพิสูจน์ได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC , รูปสาม
เหลี่ยม DAE , รูปสามเหลี่ยม FAG เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

$$\therefore BC : AB = DE : AD = FG : AF$$

แต่ราติโอ ทั้ง ๓ ดำรับกันต่างก็เป็นดี A ของรูปสามเหลี่ยม ABC, รูปสามเหลี่ยม DAE, รูปสามเหลี่ยม AFG แล้วแต่จะเลือก เชาวรูปใด จึงเห็นได้ว่าดี A มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง. ถ้ามุม A ไม่เปลี่ยนแปลง ถึงส่วนสัมพันธ์ดำรับอื่นๆ ก็เหมือนกัน ทั้งสังเกต ไว้ว่าในตรีโกณมิติค่าของส่วนสัมพันธ์หัวใดเกี่ยวข้องกับด้านของ รูปสามเหลี่ยมไม่ ย่อมแล้วแต่ขนาดของมุมทั้งสิ้น

แบบฝึกหัดที่ ๗

๑) ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี C เป็นมุมฉาก กำหนดให้ $a = ๘$, $b = ๑๕$ จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

๒) ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งด้านที่บรรจบเป็น มุมฉากยาว ๓๕ กับ ๑๒ จงหา $\sin$ ด้านตรงฉากและค่าของส่วนสัมพันธ์ ของมุมที่เล็กที่สุด

๓) ถ้า A เป็นมุมแหลม จงพิสูจน์ว่า $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ อาจเปลี่ยนรูปเป็นดังนี้ได้

$$ก) \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$ข) \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$ค) \csc^2 A = 1 + \cot^2 A$$

๕๖

๔) ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก AC เป็นเส้นทแยงมุม ทั้งตั้งได้ฉากกับ AB และ CD ด้วย ถ้า AB เท่ากับ ๑, ๕ ซม. AC เท่ากับ ๓, ๖ ซม. AD เท่ากับ ๘, ๕ ซม. จงสร้างรูป / แล้วหาค่าของ $\angle ABC$, $\angle ACB$, $\angle CDA$, $\angle DAC$

๕) ถ้า A เป็นมุมแหลม จงพิสูจน์ว่า

ก) $\sin(90^\circ - A) = \cos A$

ข) $\cos(90^\circ - A) = \sin A$

๖) จงสร้างมุมแหลมขึ้นให้มีขนาดเท่ากับ $0, 6$ แล้ววัดมุมที่สร้าง

๗) จงสร้างมุมแหลม A จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ก) $\sin A = 0, 4$

ข) $\cos A = 0, 4$

ค) $\tan A = 0, 4$

แล้วจงวัดมุมทุก ๆ ข้อ (ประมาณเพียงองศา)

๘) สร้างมุมแหลม A ใดๆ ให้ $\sin A$ เท่ากับ $0, 6$ วัดมุม A แล้วคำนวณค่าของ $\cos A$ โดยแน่นอน

๙) จงพิสูจน์ข้อต่อไปนี้

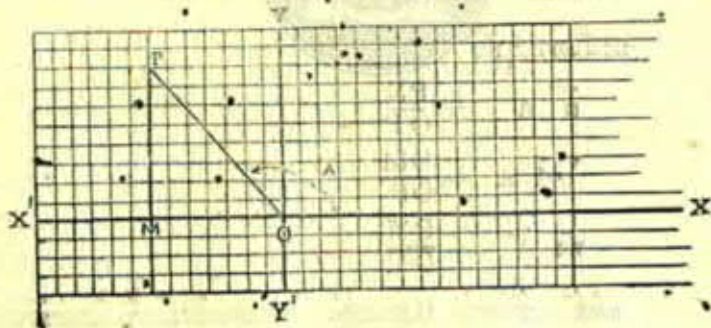
ก) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ข) $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

๑๐) สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ C เป็นมุมฉาก
ด้านตรงข้ามยาว ๑๐ ซม. และทั้ง A เท่ากับ $0^{\circ} ๔๑'$ จงวัด AC
และมุม A แล้วทำค่าของ $\sin A$ โค้ด A ,

๑๑) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จากสิ่งเหล่านี้
ทั้ง A เท่ากับ $0^{\circ} ๗'$ C เท่ากับ 90° ; b เท่ากับ ๒,๘ ซม. วัด
ด้าน c แล้ววัดมุม A ด้วย

ข้อ ๓) สังเกตศัพท์ ในเรื่องตรีโกณมิติระดับพันซ์ ที่เรียนมา
แล้วได้เห็นรูปเฉพาะแต่มุมแหลม อย่าเพิ่งเข้าใจว่าใช้ได้เฉพาะ
มุมแหลมเท่านั้น อาจใช้ได้สำหรับมุมใด ๆ ได้หมด เช่น



สมมติให้ XOX' เป็นเส้นตรง YOY' เป็นเส้นตั้งฉาก
 และให้ A เป็นมุมที่เกิดจากเส้นเวียน OP เวียนรอบจุด O
 โดยออกจากเส้น OX มาหยุดณะตำบลที่ปรากฏใน
 รูป (XOP เกินกว่า 90°) ขัดเส้น PM
 ตั้งฉากกับ XX' เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก POM ,
 PM ก็เป็นด้านตรงข้ามของมุม A , OM ก็เป็นด้าน
 ประชิดของมุม A , OP ก็เป็นด้านตรงฉากของ
 มุม A โดยทำเช่นนี้เส้น OP จะเวียนไปอยู่ในตำบล
 ใด รูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเกิดขึ้นในตำบลนั้นก็จะเป็นรูป
 สามเหลี่ยมมุมฉากของมุมที่เวียนมาได้เสมอ เพราะ
 ฉะนั้นตามรูปนี้

$$\sin A = \frac{PM}{OP}$$

$$\cos A = \frac{OM}{OP}$$

$$\tan A = \frac{PM}{OM}$$

แต่ต้องเข้าใจว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเกิดขึ้นนอกรอบข้าง
 ข้างของ OY หรือจะอยู่ที่อื่นก็ได้ แต่ต้องไม่ใช่มุมแหลม เพราะมุม

แหลมอยู่ในบริเวณ XOY เส้นรอบรูปสามเหลี่ยม POM จะเป็นรูป
สามเหลี่ยมของมุมแหลม POM ไม่ได้ก็เพราะไม่ได้อยู่ในบริเวณ
XOY เพราะฉะนั้นจึงต้องตั้งเครื่องหมายให้แปลกกันเสียว่า เส้น
OM นั้นถ้าอยู่ข้างขวา OY ให้เป็น + (บวก) ถ้าอยู่ข้างซ้าย
OY ให้เป็น - (ลบ) เส้น PM ถ้าอยู่ใต้เส้น XX' ให้
ประจำเครื่องหมาย - (ลบ) ส่วนเส้น OP นั้นจะอยู่ในที่ใด
ให้ประจำเครื่องหมาย + เสมอ เช่นตามรูปนี้

$$\text{ถึ } A = \frac{PM}{OP} = \frac{๘}{๑๐} = ๐,๘$$

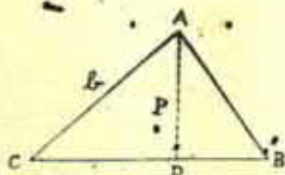
$$\text{โคถึ } A = \frac{-OM}{OP} = \frac{-๖}{๑๐} = -๐,๖$$

$$\text{ทัง } A = \frac{PM}{-OM} = \frac{๘}{-๖} = -\frac{๔}{๓}$$

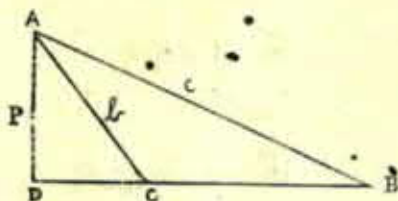
แสดงอย่างตรีโกณมิติ

อทธาทรณที่ ๑

• แสดงระยะสูงของรูปสามเหลี่ยม



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม AD เป็นระยะสูงที่ตกจากมุม A ลงมา
 ตั้งฉากกับ BC ในรูปที่ ๑ ระยะสูงตกภายในฐาน BC ในรูปที่
 ๒ ระยะสูงตกภายนอกรูปสามเหลี่ยมต่อด้านแนวฐาน BC ออกไปไว้

จึงเห็นได้ว่า $\sin C = \frac{AD}{AC}$ แต่ AD และ AC

ประจำเครื่องหมาย $+$ (บวก) ทั้ง ๒ ด้าน เพราะฉะนั้น $\sin C$
 เป็นบวกทั้ง ๒ ด้าน

$\therefore AD = AC \sin C$ ถ้าสมมติว่า

$AD = p$. ก็จะได้ $p = b \sin C$

หรือ $p = c \sin B$

อทหาณที่ ๒ แสดงด้านนอกของทั้งด้านหนึ่ง . บนอีกด้านหนึ่ง .

(รูปในอทหาณที่ ๑)

ในรูปที่ ๑ โคสิ $C = \frac{CD}{CA}$ แต่ CD และ CA

เป็น $+$ (บวก) ทั้งคู่

ในรูปที่ ๒ โคสิ $C = \frac{CD}{CA}$ ในรูปนี้ CD

เป็น $-$ (ลบ)

$\therefore$ รูปที่ ๑, $CD = + b \cos C$ หรือ

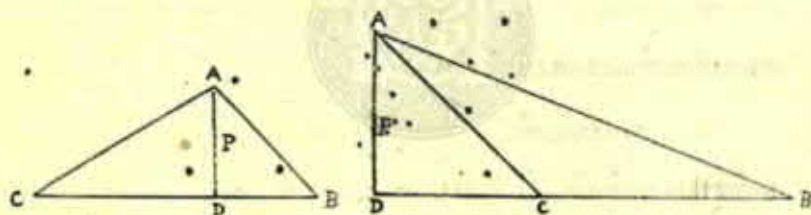
ในรูปที่ ๒, $CD = -b$ โคสิ C.

หมายเหตุ ในรูปที่ ๑, CD คือค่านอกของ CA ช้อยบน CB
 และในรูปที่ ๒, CD ก็คือค่านอกของ CA ช้อยบน CB เช่น
 เดียวกัน แสดงว่าพีทพัศดารเรื่องค่านอกนี้อยู่ในภาคที่ ๔ นี้จน
 แจ่มชัดแล้ว

กฎเรขาคณิต

แสดงอย่างตรีโกณมิติหรือเป็นรูปตรีโกณมิติ

๑) ค่านอกของรูปสามเหลี่ยมย่อมสัมพันธ์กับเส้นส่วนของมุมตรงกันข้าม



รูปที่ ๑

รูปที่ ๒

สมมุติว่า $AD = p$

ได้พิสูจน์มาแล้วในอุทากรณ์ที่ ๑ ว่า

$p = b \cdot \cos C$ และโดยทำนองเดียวกันก็ได้

$$p = c \sin B$$

$$\therefore b \sin C = c \sin B$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

โดยทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{คือค่าของ}$$

รูปสามเหลี่ยมได้บัญญัติสัมพันธ์กับด้านของมุมตรงข้าม

๒) จากผลที่ได้ในข้อ ๑ นั้น จงนำไปใช้พิสูจน์ว่า

เมื่อรูปสามเหลี่ยม ๒ รูป มีมุมเท่ากันมุมต่อมุมแล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมย่อมสัมพันธ์กันด้วย

๓) ตามรูปในข้อ ๑ นั้นจะได้กฎว่า

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\text{พิสูจน์ } \therefore \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

$$= \frac{1}{2} ap$$

แต่ $p = b \sin C$ (ตามพิสัยได้)

$$\therefore \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$$

โดยทำนองเดียวกันก็จะพิสัยได้ว่า

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$$

๔) จงหาสูตรหาพื้นที่โดยอาศัยตรีโกณมิติของพื้นที่

ก) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบอกด้านคู่เคียง ๒ ด้านและมุมในระหว่างด้านทั้ง ๒ นั้นให้

ข) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าบอกด้านหนึ่งกับมุมหนึ่งให้

๕) จงพิสัยให้เห็นว่ารัศมีของวงกลมที่ล้อมอยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยมเป็นสูตรดังนี้

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4 \text{ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม}}$$

๖) ในรูปที่ ๑ เห็นได้ว่า

$$\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{CA} - 2 \cdot BC \cdot CD \quad (\text{ตาม อ.น. ๕๓})$$

และในรูปที่ ๒ ก็เห็นได้ว่า

$$\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{CA} + 2 \cdot BC \cdot CD \quad (\text{ตาม อ.น. ๕๒})$$

๖๔

แต่ในรูปที่ ๑ $CD = +b$ โคสิ C

และในรูปที่ ๒ $CD = -b$ โคสิ C

เมื่อกำหนดแล้วคงได้ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ โคสิ C.

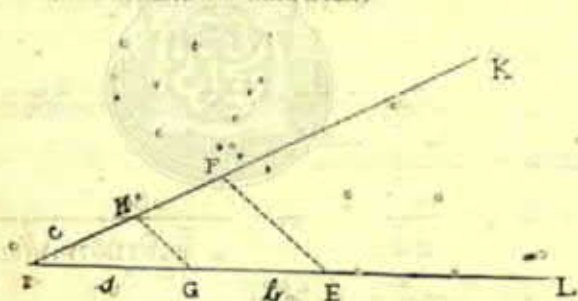
โดยทำนองนี้ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ โคสิ A.

และ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ca$ โคสิ B

เรขานิเทศที่ ๓๕

จงหาส่วนสัมพันธ์ที่ α ให้แก่เส้นตรง m เส้น

(ทาสัมพันธ์ที่ α ให้แก่ m เส้น)



สมมติให้ a , b และ c เป็นเส้นตรง m เส้นที่กำหนดให้

ให้หาส่วนสัมพันธ์ที่ α ให้แก่เส้นตรง a , b

และ c น

วิธีสร้าง ขีดเส้นตรง DL , DK ยาวพอสมควร

และให้มุมรวมกันที่ D ตัด DL ออกได้ $DG = a$

และ $GE = b$ แล้วตัด DK ออกได้ $DH = c$

ขีดเส้น GH และจาก E ขีดเส้น $EF \parallel GH$ ตัด DK ที่ F ,
 HF จะเป็นส่วนสามพหุที่ ๔ ของ a, b และ c ตาม
 ต้องการ

พิสูจน์ $\because GH \parallel EF$ ซึ่งเป็นด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม DEF

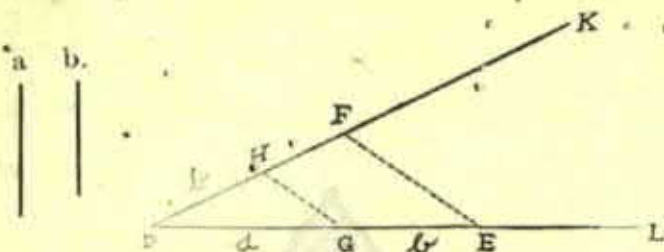
$\therefore DG : GE = DH : HF$ (เส้นขนานตัดด้านสาม
 เหลี่ยมออกได้ส่วนสามพหุ)

แต่ $DG = a, GE = b$ และ $DH = c$

$\therefore a : b = c : HF$ คือ HF เป็นส่วนสามพหุที่ ๔
 ของ a, b และ c

เรขาคณิตที่ ๓๖

จงหาส่วนด้านพื้นที่ที่ ๓ ให้แก่เส้นตรง ๒ เส้น
(หาส่วนด้านพื้นที่ที่ ๓ ให้แก่ ๒ เส้น)



สมมติให้ a, b เป็นเส้นตรง ๒ เส้น ที่กำหนดให้
ให้หาส่วนด้านพื้นที่ที่ ๓ ให้แก่เส้นตรง a และ b
วิธีสร้าง ขีดเส้นตรง DL และ DK ยาวเท่าใดไม่จำกัด
กันเป็นมุมเท่าใดไม่จำกัด ตัด DL ออกได้ $DG = a$
และ $GE = b$ แล้วขีด DK ออกได้ $DH = b$
ขีดเส้นตรง GH แล้วจาก E ขีดเส้น $EF \parallel GH$ ตัด
DK ที่จุด F

HF จะเป็นส่วนด้านพื้นที่ที่ ๓ ของ a และ b

พิสูจน์ ในรูปสามเหลี่ยม DEF

$\therefore GH \parallel EF$ (สร้าง)

$\therefore DG : GE = DH : HF$ (เส้นขนานตัดกันรูป
สามเหลี่ยมออกได้ส่วนด้านพื้นที่)

แต่ $DG=a$, $GE=b$ และ $DH=b$.

$\therefore a:b=b:HF$ คือ HF เป็น

ส่วนสัมพันธ์ที่ ๓ ของ a และ b

วิธีทำเพckeที่ ๓๗

ให้แบ่งเส้นตรงทั้งในเส้นและในแนวออกตาม รัศมีโอ ที่กำหนดให้

(แบ่งเส้นออกตามรัศมีโอที่กำหนด)

m n
 $\parallel$ $\parallel$



สมมติให้ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ และ m กับ n เป็น
 รัศมีโอ ที่กำหนดให้ คือ $m:n$

ให้แบ่งเส้นตรง AB ออกตาม รัศมีโอ $m:n$ น

วิธีสร้าง จาก A ขีดเส้น AH บรรจบ เป็นมุมกับ AB
 พอดีสมควร

ตัด AH ออกได้ $AP = m$

ตัด PH กับ PA ได้ PC กับ PC' ต่างก็เท่ากับ n ทั้งคู่

ขีดเส้น BC และ BC' จาก P

ขีดเส้น $PX \parallel BC$ และ $PY \parallel BC'$

ตัดเส้นและแนว AB ที่จุด X และ Y

เป็นชิ้นแบ่ง AB ในเส้นที่ X และในแนวที่ Y ได้

อัตรา $m : n$ ตามประสงค์แล้ว

พิสูจน์ ก) ในรูปสามเหลี่ยม ABC

$\therefore PX \parallel BC$ (สร้าง)

$\therefore AX : XB = AP : PC$ (เส้นขนานตัดด้านรูปสามเหลี่ยมออกได้ส่วนสัมพันธ์)

แต่ $AP = m, PC = n$

$\therefore AX : XB = m : n$ จริง

ข) ในรูปสามเหลี่ยม ABC'

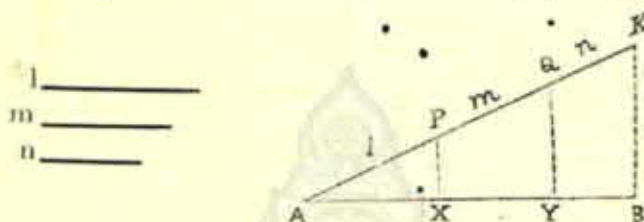
$\therefore PY \parallel BC'$ (สร้าง)

$\therefore AY : YB = AP : PC'$ (เส้นขนานตัดด้านรูปสามเหลี่ยมออกได้ส่วนสัมพันธ์)

$$\text{แต่ } AP = m, PC = n$$

$$\therefore AY : YB = m : n \quad \text{จริง}$$

ข้ออนุมาน ถ้ารัย ร.น. ๓๗ นี้ อาจแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นส่วน ๆ ให้สัมพันธ์กับเส้นตรง ๓ เส้น l, m, n , ได้ (แบ่งเส้น)



สมมุติให้ AB เป็นเส้นตรงที่จะต้องแบ่งและ l, m, n , เป็นเส้นตรง ๓ เส้นที่กำหนดให้

จะต้องแบ่ง AB ออกให้ ได้ส่วนสัมพันธ์กับ l, m , และ n .

วิธีสร้าง รัยเส้นตรงจาก A ทำมุมกับ AB ไม่จำกัดขนาด แล้วตัดสามมุมนี้ให้ ได้ $AP = l, PQ = m, QR = n$ ตามลำดับดังนี้ รัยเส้น RB แล้วรัยเส้นตรงจาก P และ Q ให้ขนานกับ RB จด AB ที่ X และ Y

ดังนั้น AB จะถูกแบ่งที่ X และ Y ตามต้องการ

การพิสูจน์ย่อมเห็นชัดเจนนัยว่า

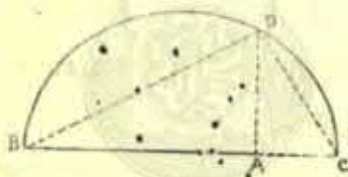
$$AX : i = XY : m = YB : n.$$

โดยบทที่พิสูจน์มาข้างต้น

เรขาคณิตที่ ๓๘

จงหาส่วนสัมผัสในของระหว่างเส้นตรง ๒ เส้นที่กำหนดให้

(หาส่วนสัมผัสในของ ๒ เส้น)



สมมุติให้ BA, AC เป็นเส้นตรง ๒ เส้น

ที่กำหนด

จงหาส่วนสัมผัสในระหว่าง BA กับ AC นี้

วิธีสร้าง ต่อบ BA กับ AC ให้เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน สร้าง

ครึ่งวงกลมบนเส้นตรง ๒ เส้นที่ต่อกันนี้ คือ ครึ่งวง

กลมบน BC ตรงจุด A ชัดเจน $AD \perp BC$ ชัดเจนรอบ
วงกลม D เส้น AD จะเป็นเส้นสัมผัสในระหว่าง AB
กับ AC.

พิสูจน์ ชัดเจน BD และ DC

$\therefore BDC$ เป็นมุมฉาก (มุมในครึ่งวงกลม)

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยม BDC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ
DA เป็นเส้นตรงชัดจากมุมฉาก D มาตั้งได้ฉากกับ
ด้านตรงฉาก BC

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยม BDC รูปสามเหลี่ยม ABD รูป
สามเหลี่ยม ADC ทั้ง ๓ รูปเป็นรูปสามเหลี่ยม
คล้ายกัน (รูปสามเหลี่ยมเกิดจากเส้นจากมุมฉาก
 $\perp$ ด้านตรงฉากเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน)

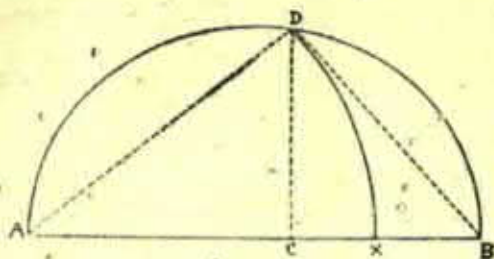
$\therefore AB : AD = AD : AC$ คือ AD เป็นส่วน

สัมผัสใน ระหว่าง AB กับ AC แล้ว

หมายเหตุ ถ้าเส้นตรงที่กำหนดให้เช่น AB กับ AC นั้น

วางทับกัน ก็อาจหาส่วนสัมผัสในได้จากกรณฑ์ AB ออก
ความยาวคงัน

๗/๒



บนเส้น AB สร้างครึ่งวงกลม ตรงจุด C ชีตเส้น
 $\perp$ AB จุดเส้นรอบวงที่ D เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง AD
 เป็นรัศมี ชีตเส้นโค้งตัด AB ที่ X

AX ก็จะเป็นส่วนสัมผัสในระหว่าง AB กับ AC
 เหมือนกัน

พิสูจน์ $\therefore$ รูปสามเหลี่ยม ABD กับรูปสามเหลี่ยม ADC
 เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน (รูปสามเหลี่ยมเกิด
 จากเส้นจากมุมฉาก $\perp$ ด้านตรงฉากเป็นรูปสามเหลี่ยม
 คล้ายกัน)

$$\therefore AB : AD = AD : AC$$

$$\text{แต่ } AD = AX$$

(สร้าง)

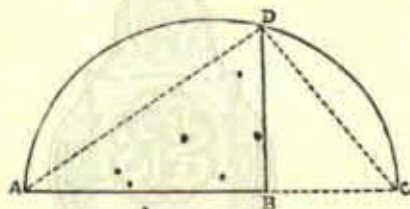
$$\therefore AB : AX = AX : AC \text{ คือ } AX$$

เป็นส่วนสัมพันธ์ในระหว่าง AB กับ AC เหมือนกัน

หาค่าของรูต (Surd) อาศรัยเรลาวิทยา

อทธาหรณ์ หาค่าของ ก) $\sqrt{๕}$

$$\therefore \sqrt{๕} = \sqrt{๕ \times ๑}$$



สร้าง ขีดเส้น AB ยาว ๕ (จะเป็นหน่วยอะไรก็ได้) BC ยาว ๑
เขียนครึ่งวงกลมบน AC แล้วจาก B ขีด $BD \perp AC$ ไปตัด
โค้งวงกลมที่ D

BD จะเป็นส่วนสัมพันธ์ใน ในระหว่าง AB
กับ BC ก็คือในระหว่าง ๕ กับ ๑

พิสูจน์ ๑. ขัดเส้น AD และ DC

$\therefore AB : BD = BD : BC$ (รูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน)

$$\therefore \overline{BD}^2 = AB \cdot BC$$

$$= ๕ \times ๑$$

$$= ๕$$

$$\therefore BD = \sqrt{๕}$$

เมื่อวัด BD ก็จะได้ผล ๒, ๒๔.... ซึ่งเป็นค่าของ $\sqrt{๕}$

$$๒) \sqrt{๒๑}$$

$$\therefore \sqrt{๒๑} = \sqrt{๓ \times ๗}$$

๑. ขัดเส้น AB = ๗ และ EC = ๓ แล้วดำเนินวิธีสร้าง

อย่างในข้อ (ก) คืออย่างเดียวกันกับใน ร.น. ๓๘ แล้ววัด BD
ก็จะได้ผลเป็นค่าของ $\sqrt{๒๑}$ ตามต้องการ

หมายเหตุ ให้แยกจำนวนเลขออกเป็นตัวคูณให้มีจำนวน

เลขพอเหมาะแก่การเขียนรูป ตัวคูณจะเป็นตัวเลขที่มีเศษทศนิยม

หรือเป็นจำนวนเต็มก็ได้แล้วแต่ความสะดวก เช่น จักรหาราคาของ

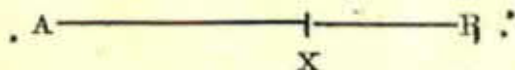
$$\sqrt{๒๓} \text{ กับ } \sqrt{๕๑}$$

$\sqrt{๒๓}$ กับ $\sqrt{๑๑}$ นี่เป็นตัวเลขเพราะเราจะแตก
 $\sqrt{๒๓} = \sqrt{๒๓ \times ๑}$ และ $\sqrt{๑๑} = \sqrt{๑๑ \times ๑}$ อย่างนี้ก็ได้ แต่การ
 เขียนเส้นที่ติดข้องการ ในรูปจะยาวเกะกะไม่สะดวกแก่การเขียนรูปลงใน
 กระดาษที่ทำ

ถ้าจะแตก $\sqrt{๒๓} = \sqrt{๒,๓ \times ๑๐}$ และ $\sqrt{๑๑} = \sqrt{๒,๒ \times ๕}$
 อย่างนี้จะสะดวกกว่าเพราะรูปจะได้ไม่เกะกะ และตัวเลขมีที่คั่นนิยม
 เพียง ๑ ตำแหน่งก็ไม่เป็นการยากที่จะใช้ เครื่องมือในการวัด เพียง
 แต้มไม้บรรทัดฟุ่กก็ใช้ได้แล้ว แต่ก็ไม่จำกัคแน่นอนที่จะต้องแตก
 อย่างนี้เสมอ ขอให้ผู้ศึกษาจงใช้ ไม้บรรทัดของตัวเอง ดัดแล้วแต่
 ความสะดวกเท่านั้น

แสดงศัพท์

ถ้าแบ่งเส้นตรงออกให้ ได้รัศมี ๒ ส่วนนอกกับส่วนในแล้ว
 ส่วนยาวทั้งเส้นต่อส่วนแบ่งที่ยาวค้องเท่ากับส่วนแบ่งที่ยาวต่อส่วน
 แบ่งที่สั้น



เช่น X แบ่ง AB ออกได้ภาคสองส่วนนอกกับส่วนใน คือ
 $AB : AX = AX : XB$ ก็จะได้ข้ออนุมานต่อไปว่า

$$AB \cdot XB = \overline{AX}^2$$

หรืออีกนัยหนึ่งว่า สี่เหลี่ยมมุมฉากทำมุมไว้ด้วยเส้นตรงกับส่วน
 แบ่งส่วนหนึ่งของเส้นตรงนั้นเท่ากับจัตุรัสบนอีกส่วนหนึ่ง

เป็นอันว่าเส้นตรงเส้นใดก็ตามถ้าแบ่งออกเป็นภาคสอง
 นอกกับส่วนในได้ โดยอาศัย ร.น. ๓๓ ที่เรียกว่า แบ่งได้ส่วน
 กลาง (medial) การสร้างและพิสูจน์ของ ร.น. นั้น

แบบฝึกหัดที่ ๘

๑) เขียนรูปาคำและคำนวณตอบดังต่อไปนี้

ก) จงหาส่วนสัมพัทธ์ที่ ๔ ให้แก่ ๒, ๔. ๑, ๔

และ ๑, ๒

ข) จงหาส่วนสัมพัทธ์ที่ ๓ ให้แก่ ๒, ๕ กับ ๑, ๕

ค) จงหาส่วนสัมพัทธ์คู่ใน ในระหว่าง ๗, ๒ ร.น.

กับ ๕, ๐ ร. น.

๒) จงแบ่งเส้นตรงยาว ๒ นิ้ว ออกทั้งในแนวและใน

เดินให้ ได้ ราคิโฮ ๗ : ๓ และจงหาส่วนที่แบ่งทั้ง ๒ ประการนี้ว่า
ยาวเท่าใด โดยเขียนรูปและคำนวณ

๓) จงเขียนรูปหาจำนวนที่ยังไม่ทราบของส่วนสัมพันธ์
ต่อไปนี้แล้วคำนวณตอบ

ก) ๑, ๒๕ : $x = ๑ : ๑$, ๖ ใช้หน่วยเป็นหน่วย

ข) $x : ๔, ๒ = ๔, ๒ : ๖$, ๓ ใช้ ช. ม.

เป็นหน่วย

ค) $x : ๑๖ = ๒๕ : x$ ใช้มาตรา ๑ นิ้ว : ๑๐

๔) จงแบ่งเส้นตรงยาว ๗, ๒ ช. ม. ออก ๓ ส่วน
ให้สัมพันธ์กับ ๒, ๓ และ ๔ แล้ววัดและคำนวณตอบที่ได้

๕) จงแบ่งเส้นตรงยาว ๓, ๕ นิ้ว ออก ๓ ส่วน ให้ส่วน
ที่ ๒ เท่ากับ $\frac{๒}{๓}$ ของส่วนที่ ๑ และส่วนที่ ๓ เท่ากับ $\frac{๓}{๔}$ ของส่วน
ที่ ๒

๖) จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีด้านหนึ่งยาว ๑, ๕ นิ้ว
และให้ มุมที่เท่ากับจุดศูนย์กลางเส้นตรงยาว ๒ นิ้ว วัดด้านของสี่เหลี่ยม
มุมฉากอีกด้านหนึ่ง

๗) จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้ด้วยวิธีสร้างรูป

$$ก) \sqrt{3}$$

$$ข) \sqrt{10}$$

$$ค) \sqrt{\frac{15}{4}}$$

๔) สรุปร่างหาค่าของจำนวนต่อไปนี้ แล้วคำนวณตอบ

ทุกครั้ง

$$ก) \frac{3,5 \times 2,4}{12,8}$$

$$ข) \frac{6,84}{12, 13}$$

$$ค) \frac{2, 74 \times 1, 26}{1, 51}$$

๕) จงสรุปร่างสามเหลี่ยม ABC จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แล้วคำนวณและวัดส่วนของด้านของสามเหลี่ยม

ก) เติรวรอบ (ความยาวของด้านทั้งสามรวมกัน)

$$\text{รอบ} = 4, 8 \text{ นิ้ว และ } \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

ข) เติรวรอบ = 11, 1 ซม.

$$\text{และ } a = \frac{1}{5} b, \quad b = \frac{2}{3} c$$

ค) เติรวรอบ = 11, 8 ซม.

$$\text{และ } \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

๖) $a = 4 \text{ นิ้ว } \hat{A} = 90^\circ \text{ และ } b : c = 5 : 3$

แบบฝึกหัดที่ ๘

ใช้บัญญัติสัมพันธ์ ในการหาความสูงและความยาว

๑) ที่ดินแห่งหนึ่ง ในแผนผังเป็นรูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน $a = ๘$ ข.ม., $b = ๕$, ๖ ข.ม. $c = ๖$, ๔ ข.ม. ถ้าด้านยาวที่สุดในภูมิประเทศยาว ๒๐๐ เมตร ด้านอื่นๆ จะยาวเท่าใด
รั้วคันที่ถนนปรากฏในแผนผังเป็นเส้น PQ ขนานกับ BC จากจุด P ใน AB ห่างจาก A ได้ ๔, ๐ ข.ม. จงหาความยาวของรั้ว

๒) ความเร็วของ A และ B เป็นอัตรา ๘ : ๗
ถามว่า A จะใช้เวลา B ในระยะ ๑๐๐ เมตรเท่าใด ต่างว่า
ทั้ง ๒ คน วิ่งเส้นรอบต้นเส้นรอบปลาย จงแสดงโดยวิธีสร้างรูป

๓) แผนที่มาตราส่วน ๑ นิ้ว : ๒๕ ไมล์ มีจุดในภูมิประเทศ ๓ แห่ง คือ A, B, และ C แต่ B อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือของ A ห่างกันในแผนที่ ๐, ๘ นิ้ว และ C อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A ห่างกันในแผนที่ ๑, ๕ นิ้ว
ถามว่า B กับ C ห่างกันเท่าใดในภูมิประเทศ

๔) ชายฉกรรจ์สูง ๖ ฟุต ยืนอยู่ห่างจากเสาโคม ๓๒ ฟุต
สังเกตเห็นเงาของตนทอดออกไปยาว ๘ ฟุต, ถามว่าเสาโคม
สูงจากพื้นดินเท่าใด และถ้ามีเด็กคนหนึ่งสูง ๕ ฟุตมายืนอยู่ห่าง
จากเสาโคม ๒๐ ฟุต เงาของเด็กนั้นจะทอดออกไปยาวเท่าใด

๕) ชายสูง ๖ ฟุต ยืนอยู่ห่างจากเสาโคม ๑๕ ฟุต
มีเงายาว ๕ ฟุต เสาโคมนั้นสูงจากพื้นดินเท่าใด ถ้าชายคนนั้น
จะมายืนให้ห่างเพียง ๘ ฟุต เงาจะทอดออกไปยาวเท่าใด

๖) ให้หาความกว้างของลำคลองแห่งหนึ่ง โดยปักหลัก
ตงไว้ ทัดตั้งข้างที่คนยืนอยู่และเพาะให้พื้นดินขึ้นมา $\frac{๑}{๔}$ ฟุต แล้วเดิน
หลักในตาสูงจากพื้นดิน ๕ ฟุต ๘ นิ้ว เดินแล้วเดินตรงออกไปได้
ฉากกับลำคลองเป็นระยะ ๒๐ ฟุต จนได้เห็นยอดหลักติดกับแนว
ตรงตลิ่งอีกฟากข้างหนึ่งพอดี

๗) ชาวเจ้าชุกยากทราบความสูงของหอคอยว่าจะสูงเท่า
ใด จึงปักเสาธงลงในดินห่างจากหอ ๒๗ ฟุต แล้วถอยหลังออกไป
ไป ๒ ฟุต จึงได้เห็นยอดเสากับยอดหอเป็นแนวเดียวกัน ถ้าในตา
ชาวเจ้าสูงจากพื้นดิน ๕ ฟุต ๔ นิ้ว และเสาธงสูง ๑๒ ฟุต ถาม
ว่าหอคอยสูงเท่าใด

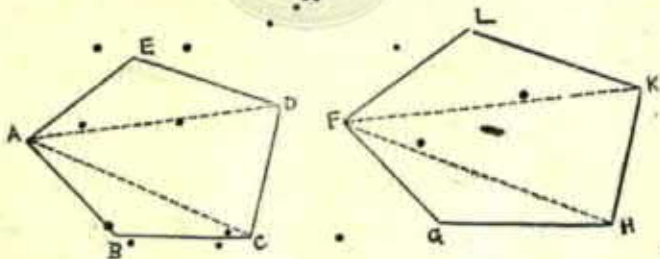
๘) ชายคนหนึ่งอยู่ที่ใต้ของประภาคารเห็นเงาของตน
ซึ่งเกิดจากแสงไฟบนยอดประภาคารนั้นทอดออกไป ๒๔ ฟุต ครั้น
เดินออกไปทางควมออกได้ ๑๖๐ หลา เห็นเงาทอดออกไป ๓๐ ฟุต
ถ้าชายคนนั้นสูง ๖ ฟุต ถามว่าประภาคารสูงจากพื้นดินเท่าใด

รูปคล้ายกัน

อุปมาขณิกที่ ๒๕

รูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้น อาจแบ่งออกเป็นรูปสาม
เหลี่ยมให้คล้ายกันทุก ๆ รูปได้ ส่วนเส้นที่ลากจากหัวมุมถึงกันก็
ย่อมได้ ส่วนสัมพันธ์กันตามลำดับ

(แบ่งหลายเหลี่ยมคล้ายเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกันเส้นแบ่งได้ส่วนสัมพันธ์)



สมมุติให้ $A B C D E$ กับ $F G H K L$

เป็นรูปห้าเหลี่ยมคล้ายกัน จอม A เทียบกับจอม F และ B กับ G ต่อๆ ไปตามลำดับ สมมุติว่าขีดเส้น AC, AD และ FH, FK แล้ว

ให้พิสูจน์ว่า

ก) รูปสามเหลี่ยม ABC , รูปสามเหลี่ยม $F G H$ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน อีกทั้งรูปสามเหลี่ยม ACD รูปสามเหลี่ยม $A D E$ ก็คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม $F H K$ รูปสามเหลี่ยม $F K L$ ตามลำดับกันเป็นๆ ไป

$$ข) A B : F G = A C : F H = A D : F K$$

พจน์

ก) $\therefore$ รูปหลายเหลี่ยม $A B C D E$ กับรูปหลายเหลี่ยม $F G H K L$ เป็นรูปคล้ายกัน (โดยที่)

$$มี \hat{A} \hat{B} C = \hat{F} \hat{G} H$$

$$และ A B : F G = B C : G H$$

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยม $A B C$ กับรูปสามเหลี่ยม $F G H$ ก็เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน (๒ ด้านสัมพันธ์กับมุมระหว่างด้านเท่ากัน)

$$\therefore B \hat{C} A = G \hat{H} F \quad \text{ด้วย}$$

$$\text{แต่ } B \hat{C} D = G \hat{H} K \quad (\text{รูปหลายเหลี่ยมคล้ายกัน})$$

$$\therefore A \hat{C} D = F \hat{H} K \quad (\text{หักแล้วคงเหลือ})$$

$$\text{อนึ่ง } A \hat{C} : F H = B C : G H \quad (\text{รูปสามเหลี่ยม}$$

$$A B C \text{ คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม } F H G)$$

$$\text{และ } B C : G H = C D : H K \quad (\text{รูปหลายเหลี่ยม}$$

$$\text{คล้ายกัน})$$

$$\therefore A C : F H = C D : H K \quad \text{ด้วย}$$

$$\therefore \text{รูปสามเหลี่ยม } A C D \text{ กับ รูปสามเหลี่ยม } F H K$$

ก็เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกันด้วย (๒ ด้านสัมผัสกับมุม
ระหว่างเท่า) โดยที่ด้านตรงข้ามกัน รูปสามเหลี่ยม

$$A D E \text{ ก็คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม } F K L \text{ ด้วยอีก}$$

$$๑) \therefore A B : F G = A C : F H \quad (\text{รูปสาม}$$

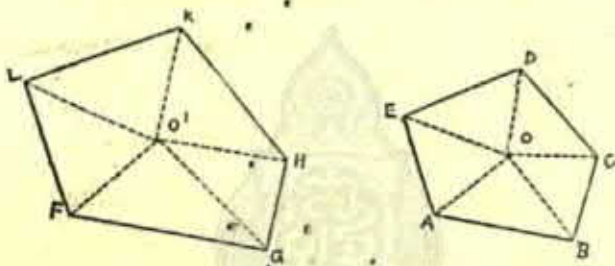
$$\text{เหลี่ยมคล้ายกัน})$$

$$\text{และ } A C : F H = A D : F K \quad (\text{รูปสาม}$$

$$\text{เหลี่ยมคล้ายกัน})$$

$$\therefore A B : F G = A C : F H = A D : F K$$

หมายเหตุ ใน ๒ น ๖๕ นี้ ได้แบ่งรูปเหลี่ยมโดยวิธี
วัดเส้นจากมุมหนึ่งถึงอีกมุมหนึ่ง แต่ความจริงมิได้จำกัดเช่นนั้นจะ
แบ่งออกอย่างไรก็ได้สุดแต่จะให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมีจำนวนเท่ากัน
ทั้ง ๒ รูปก็แล้วกัน เช่น



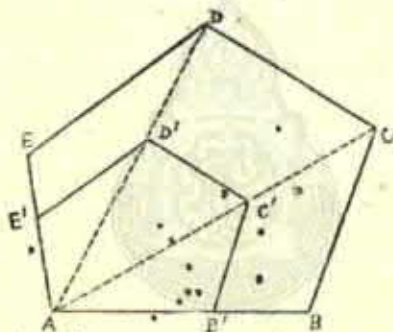
ตั้งจุด O ลงในรูป $ABCDE$ วัดจากจุดนี้ไปยังมุมทุกมุมของ
รูปนี้ ส่วนในรูป $FGHKL$ ก็ให้ทำ $G\hat{F}O' = B\hat{A}O$ และทำ
 $F\hat{G}O' = A\hat{B}O$ ขาของ $G\hat{F}O'$ กับ $F\hat{G}O'$ ก็คง
ไปพบกันแห่งหนึ่ง แห่งนี้ให้ O' อยู่ แล้ววัดจาก O' ไปหามุม
ทุก ๆ มุม ดังนั้นจะได้ตามความประสงค์เหมือนกัน ต่อไป
ให้นักเรียนพิสูจน์เขาเอง

เรขาคณิตที่ ๓๘

วิธีที่ ๑

บนเส้นตรงที่กำหนดให้ จงสร้างรูปเหลี่ยมให้คล้ายกับ
รูปเหลี่ยมที่กำหนดให้

(สร้างรูปเหลี่ยมคล้ายกับรูปเหลี่ยมกำหนด)



สมมติ ให้ $A B C D E$ เป็นรูปเหลี่ยมที่กำหนดให้ และ a เป็น
เส้นตรงที่กำหนดให้ เพื่อเป็นด้านของรูปเหลี่ยมที่จะ
สร้างขึ้นใหม่

วิธีสร้าง ตัดด้าน $A B$ ออกให้ $A B' = a$ วัดเส้น $A C$ และ
 $A D$ แล้วจาก B' วัดเส้น $B' C' \parallel B C$ ตัด $A C$

ที่ C' จาก C' ขีด $C'D' \parallel CD$ ตัด AD ที่ D'
 จาก D' ขีด $D'E' \parallel DE$ ตัด AE ที่ E'

รูป $AB'C'D'E'$ จะเป็นรูปเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore AB' = a$ (สร้าง)

ในรูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม $AB'C'$

$\therefore \hat{B} = \hat{B}$ และ $B'\hat{C}'A = B\hat{C}A$ (มุมนอก
 มุมในข้างบรรทัดเดียวกัน)

และ $B\hat{A}C = B'\hat{A}C'$ (ร่วมกันอยู่)

$\therefore AB' : AB = B'C' : BC$ (รูปสามเหลี่ยม
 มุมเท่ากันได้สัดส่วนกัน)

หรือ $AB' : AB = B'C' : BC = AC' : AC$

โดยทำนองเดียวกัน $AC' : AC = C'D' : CD$
 $= AD' : AD$

และ $AD' : AD = D'E' : DE = AE' : AE$

$\therefore AB' : AB = B'C' : BC = C'D' : CD$

$D'E' : DE = AE' : AE$

โดยเหตุว่าด้านของรูปเหลี่ยมทั้ง ๒ นั้นขนานกันทุกด้าน

(สร้าง)

∴ จะพิสูจน์ ได้ว่ามุมเท่ากันทุกมุมด้วย

$$\text{คือ } \hat{B}' = \hat{B}, \hat{C}' = \hat{C}.$$

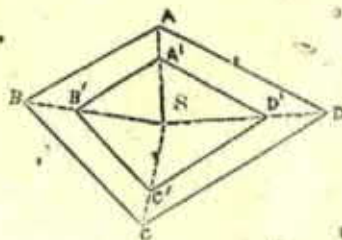
$$\hat{D}' = \hat{D}, \hat{E}' = \hat{E}$$

แต่ $\hat{A}'$ เป็นมุมร่วม

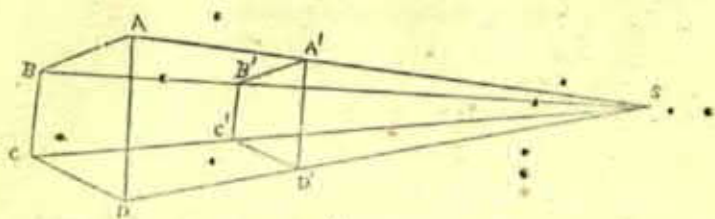
เมื่อรูป $A B C D E$ กับ $A B' C' D' E'$ มีด้านติดส่วน
ตั้งพื้นกันและมุมเท่ากันทุกมุมด้วย ก็เป็นรูปคล้ายกัน
และมีด้านหนึ่งเท่ากับด้านกำหนดแล้ว

อุประมาณียเทศที่ ๒๒

วางรูปเหลี่ยมคล้ายกัน. ๒ รูปตะเพาะ ให้เส้นตรงจากมุมของรูป
หนึ่งผ่านมายังมุมของอีกรูปหนึ่งมุมคือมุม และร่วมด้านเดียวกัน
(เห็นต่อมุมของรูปเหลี่ยมคล้ายกัน ร่วมศูนย์เดียวกัน)



รูปที่ ๒๒



รูปที่ ๒

สมมติให้ $ABCD$ กับ $A'B'C'D'$ เป็นรูปเหลี่ยม
คล้ายกันมีมุมเท่ากันทุกมุม ๆ ต่อกัน และด้านใดส่วน
ด้านหนึ่งขนานต่อกัน เมื่อ $\hat{B} = \hat{B}'$ ดังนั้นเราจึงหาว่า
รูปให้ $A'B' \parallel AB$ และ $\hat{B}'C' \parallel BC$ ได้ตาม
ขบวนการที่เหมือนกันอีกดังนี้ $C'D' \parallel CD$ และ
 $D'A' \parallel DA$ ได้

ให้พิสูจน์ว่า

เมื่อวางรูปมีด้านขนานกันเป็นคู่ ๆ ดังนั้นแล้ว

AA', BB', CC' และ DD' จะมาอยู่บนเส้นเดียวกัน

สร้าง ขีดเส้น AA' แล้วแบ่งแนว AA' ที่ S ให้ได้อัตรา

$$AB : A'B' = SA : SA'$$

ชัดเห็น $S B$ กับ $S B'$ ย่อมจะพิสูจน์ได้ว่า $S B$
กับ $S B'$ เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

พิสูจน์ ในรูปสามเหลี่ยม $S A B$ กับรูปสามเหลี่ยม $S A' B'$

เมื่อ $A B \parallel A' B'$

$\therefore \hat{S} A B = \hat{S} A' B'$ (มุมนอกมุมในข้างเดียวกัน)

และ $\therefore S A : S A' = A B : A' B'$

$\therefore$ รูปสามเหลี่ยม $S A B$ กับ รูปสามเหลี่ยม
 $S A' B'$ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน (๒ ด้านสัมผัส
กับมุมระหว่างเท่ากัน)

$\therefore A \hat{S} B$ ก็ต่อ $A' \hat{S} B'$

$\therefore S B$ กับ $S B'$ เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน ก็เมื่อ

$S B$ กับ $S B'$ เป็นเส้นตรงอันเดียวกันตั้ง $B B'$

ก็ผ่านจุด S ด้วย

โดยทำของ CC' และ DD' ก็ผ่านจุด S
ร่วมแห่งเดียวกันเหมือนกัน

$\therefore AA', BB', CC'$ และ DD' ย่อมมาว่าวน
ศูนย์เดียวกันที่จุด S

ท. ศ. พ.

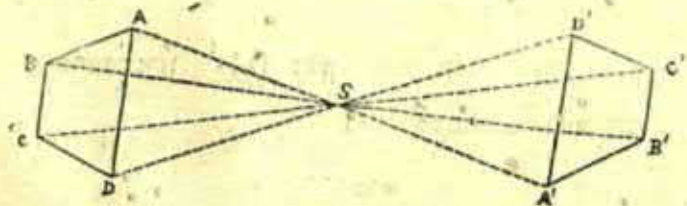
หมายเหตุ

๑) ขอให้สังเกตได้ว่า AA', BB', CC' และ DD' นั้นได้แบ่งแนวที่ S ได้ภาคใด ของด้านเป็นคู่ๆ ในรูปที่กำหนดให้

๒) ในการวางรูปให้ $A'B' \parallel AB$ และ $B'C' \parallel BC$
นั้นอาจวางได้ ๒ อย่าง คือ

ก) $A'B'$ กับ AB อยู่ได้ลำดับดังรูปที่ ๑ และรูป
ที่ ๒ ที่เขียนไว้ใน อ.น. ๖๖ นั้น

ข) $A'B'$ กับ AB อยู่ตรงกันข้ามเช่นในรูปที่จะ
เขียนให้ต่อไป



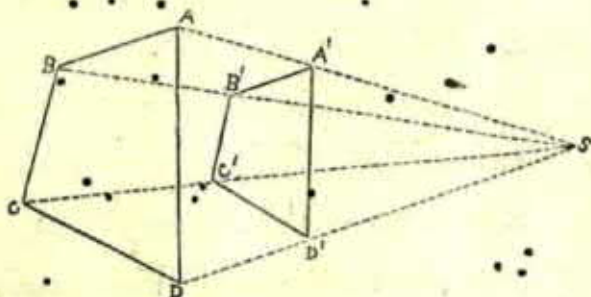
ทั้งนี้ $C'D' \parallel CD$ และ $D'A' \parallel DA$ แล้วหาจุดศูนย์กลางได้ว่า AA', BB', CC' และ DD' ร่วมศูนย์เดียวกัน ตามทำนองเดียวกันกับที่ได้พิสูจน์ให้ดูใน อ.น. ๖๖ นั้น แต่ในที่นี้ S แบ่ง AA' ออกในประเภทแบ่งเต็มได้ ราว ๒ ของด้านเป็นคู่ๆ เหมือนกัน
 ทุกๆ ประการที่กล่าวมาใน อ.น. ๖๖ นี้ S ได้ชื่อว่า “ศูนย์ความคล้าย” หรือ “ศูนย์ร่วม” (Centre of Similarity, or Homothetic centre)

เรขานิเทศที่ ๓๘

วิธีที่ ๒

บนเส้นตรงที่กำหนดให้ . จงสร้างรูปเหลี่ยมให้คล้ายกับรูป
 เหลี่ยมที่กำหนดให้

(สร้างรูปเหลี่ยมคล้ายกับรูปเหลี่ยมกำหนด)



สมมติให้ $ABCD$ เป็นรูปเหลี่ยมที่กำหนดให้ และให้ $A'B'$ เป็นเส้นที่กำหนดให้ วาด $A'B'$ ให้ได้คู่กับ AB ด้วย
ให้สร้างรูปเหลี่ยมบน $A'B'$ ให้คล้ายกันกับรูป
เหลี่ยม $ABCD$ ที่กำหนดให้ :

วิธีสร้าง วาด $A'B'$ ให้ขนานกับ AB แล้วขีดเส้น AA', BB'
ต่อเลยไปบรรจบกันที่ S แล้วขีดเส้น SC, SD จาก B'
ขีดเส้น $B'C' \parallel BC$ ตัด SC ที่ C' จาก C' ขีด
เส้น $C'D' \parallel CD$ ตัด SD ที่ D' ขีดเส้น $A'D'$
รูป $A'B'C'D'$ จะเป็นรูปเหลี่ยมตามความประสงค์

พิสูจน์ ในรูปสามเหลี่ยม SAB กับรูปสามเหลี่ยม $SA'B'$

$$\therefore A'B' \parallel AB \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore \hat{B'A} = \hat{B'A} \text{ และ } \hat{A'B'} = \hat{A'B}$$

(มุมยอดมุมในตรงข้ามข้างบรรทัดเดียวกัน)

$$\text{และ } \hat{A'SB} = \hat{A'SB'} \quad (\text{มุมร่วม})$$

$$\therefore SA' : SA = A'B' : AB = SB' : SB$$

(รูปสามเหลี่ยมมุมเท่าด้านใดส่วนสัมพันธ์)

โดยทำนองนี้อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$SB' : SB = B' C' : BC = SC' : SC$$

$$\text{และ } SC' : SC = C' D' : CD = SD' : SD$$

$$\text{และ } SA' : SA = A' D' : AD = SD' : SD$$

$$\therefore A' B' : AB = B' C' : BC = C' D' : CD \\ = A' D' : AD \quad \text{และพิสูจน์ได้ว่ามุมของรูปเหลี่ยม}$$

$A' B' C' D'$ กับรูปเหลี่ยม $ABCD$ เท่ากันมุมต่อมุม
โดยที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นแล้วว่าทุกด้านและมุมในรูปสาม
เหลี่ยมตามพิสูจน์ข้างต้นก็เท่ากัน ถ้าบวกกันเข้าก็เป็น
มุมของรูปเหลี่ยม

$\therefore$ รูปเหลี่ยม $ABCD$ กับรูปเหลี่ยม $A' B' C' D'$
เป็นรูปเหลี่ยมคล้ายกัน และได้สร้างขึ้นบนด้าน $A' B'$
ที่กำหนดให้ตามค่าที่ประสงค์แล้ว

แบบฝึกหัดที่ ๑๐

๑) บนฐาน AB ยาว ๖, ๕ ซม. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยม
 $ABCD$ จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$\hat{A} = 40^\circ \quad \hat{B} = 70^\circ \quad AB = 4, 4 \text{ ซม.} \quad BC = 3, 2 \text{ ซม.}$
เมื่อสร้างแล้วให้ตั้งศูนย์ความคล้ายลงแห่งใดแห่งหนึ่งแล้ว

๘๔
ก) จำลองรูป $ABCD$ ให้เล็กลง และให้ด้าน
ทุกด้านเป็น ภาติโธ $3:4$

ข) ขยายรูป $ABCD$ ให้ใหญ่ขึ้น และให้ด้าน
ทุกด้านเป็น ภาติโธ $5:4$

๒) สร้างครึ่งวงกลมขึ้นบนเส้นศูนย์กลาง AB แล้ว
บรรจุรูปจัตุรัสลงในมันให้มุม ๒ มุมจกโค้ง อีก ๒ มุมจก AB
ถ้า AB เท่ากับ $2r$ (r = รัศมีของวงกลม) และด้านของจัตุรัส
บรรจุเท่ากับ a จึงแสดงว่า a^2 เท่ากับ $4r^2$

๓) สร้างเส้นคอร์ดที่มีรัศมี $2, 4$ นอนมุมที่จุดศูนย์กลาง
 60° แล้วบรรจุรูปจัตุรัสลงในมัน ถ้ารัศมีของเส้นคอร์ดเท่ากับ r
และด้านของจัตุรัสเท่ากับ a จึงจะได้ค่าจำนวนภาติโธ $a:r$

๔) ในเส้นคอร์ดที่มีรัศมียาว 4 ช.ม. และมีมุม 45°
จึงบรรจุสี่เหลี่ยมมุมฉากลง และให้ด้านที่เฉียงเป็นภาติโธ $2:1$

จึงพิสูจน์ว่าอาจสร้างได้ ๒ รูปแล้วเปรียบเทียบด้านยาว
ทั้ง ๒ รูปนั้น

๕) สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC มีกำหนดให้ $a=4$ ช.ม.
 $b=7$ ช.ม. $c=6$ ช.ม.

เริ่มจากจุด A เป็นศูนย์กลางบรรจุจุดรัศมีในสามเหลี่ยม
ให้มุม ๒ มุมจุด BC อีก ๒ มุมจุด AB, AC

๖) สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $a = 2, b = 110^\circ$
 $\hat{C} = 35^\circ$ แล้วบรรจุสามเหลี่ยมด้านเท่าลงในสามเหลี่ยม ABC
โดยมีลักษณะดังนี้

ก) ด้านหนึ่งขนานกับ BG

ข) ด้านหนึ่งขนานกับเส้นที่กำหนดให้

๗) ในสามเหลี่ยม ABC จงบรรจุสามเหลี่ยมมุมฉาก
หนึ่งซึ่งคล้ายกับสามเหลี่ยม DEF ที่กำหนดให้ จะทำได้กี่ตัว

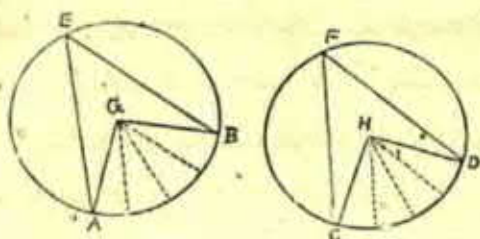
๘) สร้างรูปหกเหลี่ยมเวียน ABCDEF บนเส้นตรง
ยาว ๑, ๒ นิ้วแล้วบรรจุจุดรัศมีด้าน ๒ ด้านขนานกับ AB และ DE
ให้มุมทุก ๆ มุมจุดด้านที่เหลือของรูปหกเหลี่ยมนี้

ข้อปรมัยนิเทศที่ ๖๗

(ยุคติดเล่ม ๖ บทที่ ๓๓)

ในวงกลมที่ผ่ากัน มุมที่จุดศูนย์กลางหรือมุมที่รอบวงกล
ย่อมได้ส่วนสัมพันธ์เดียวกันกับ โค้งตรงข้ามกับมัน

(วงกลมแทนที่ $\odot$ และที่รอบวงสัมพันธ์กับโค้งตรงข้าม)



สมมติให้ G กับ H เป็นวงกลม ๒ วงเท่ากันและ $\widehat{AGB}$ กับ $\widehat{CHD}$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางคู่หนึ่งและ $\widehat{AEB}$ กับ $\widehat{CFD}$ เป็นมุมที่รอบวงอีกคู่หนึ่งตรงข้ามกับโค้ง AB และโค้ง CD ตามลำดับ

ให้พิสูจน์ว่า

ก) $\widehat{AGB} : \widehat{CHD} = \text{โค้ง } AB : \text{โค้ง } CD$

ข) $\widehat{AEB} : \widehat{CFD} = \text{โค้ง } AB : \text{โค้ง } CD$

พิสูจน์ ให้โค้ง AB & โค้ง $DC = m : n$ จะพิจารณาเมื่อ

แบ่งโค้ง AB ออก m ส่วนเท่าๆ กัน และโค้ง CD ออก n ส่วนเท่าๆ กัน กำหนดให้ส่วนหนึ่งของโค้ง ทั้ง ๒ เท่ากันด้วย ชีตเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางมายังจุดแบ่งโค้งทุกๆ จุดทั้ง ๒ วง เมื่อ $\widehat{AGB}$ กับ $\widehat{CHD}$ ที่จุดศูนย์กลางวงกลมเท่ากัน ถูกแบ่งออกเป็น

มุมเล็กๆ ซึ่งตรงข้ามกับโค้งเท่าๆ กันแล้ว มุมก็ย่อมเท่ากัน
ทุกมุม

แต่ $\widehat{AGB}$ ถูกแบ่งออก m ส่วน

และ $\widehat{CHD}$ ถูกแบ่งออก n ส่วน

$$\therefore \widehat{AGB} : \widehat{CHD} = m : n$$

$$\therefore \widehat{AGB} : \widehat{CHD} = \text{โค้ง } AB : \text{โค้ง } CD$$

$$\text{แต่ } \widehat{AEB} = \frac{1}{2} \widehat{AGB} \text{ และ } \widehat{CFD} = \frac{1}{2} \widehat{CHD}$$

(มุม $\odot$ เป็น ๒ เท่ามุมที่รอบวง)

$$\therefore \widehat{AEB} : \widehat{CFD} = \text{โค้ง } AB : \text{โค้ง } CD \text{ อีก}$$

ช. ต. พ.

ข้ออนุมาน. ในวงกลมที่เท่ากันหรือเชื่อมต่อกันที่มีมุมเท่ากัน

ย่อมเท่ากันจึงสามารถพิสูจน์ได้ต่อไปว่า

$$\text{เชือกเตอร์ } \widehat{AGB} : \text{เชือกเตอร์ } \widehat{CHD} = \text{โค้ง } AB : \text{โค้ง } CD$$



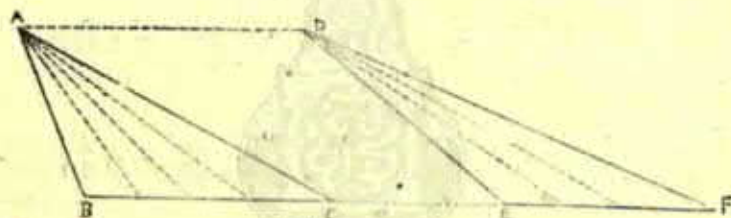
๕๘
พื้นที่ใต้ส่วนสัมผัส

อุประมาณิเทศที่ ๖๘

(ยกติดเต็ม ๖ บทที่ ๑)

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่สร้างเท่ากัน ย่อมได้ส่วนสัมผัสเดียวกัน
กับฐานของรูปสามเหลี่ยมนั้น

(รูปสามเหลี่ยมสูงเท่ากันจะสัมผัสกันด้วยกับฐาน)



สมมติ ให้ ABC กับ DEF เป็นรูป Δ

๒ รูป มีระยะสูงเท่ากัน ตั้งอยู่บนฐาน BC กับ EF
ให้พิสูจน์ว่ารูป ΔABC : รูป $\Delta DEF = BC : EF$

พิสูจน์ ยกรูป ΔABC วางให้ฐาน BC ได้แนวเดียวกับ
กับฐาน EF และขยายข้างเดียวกันของแนวนั้น

ขีดเส้น AD ดังนั้น AD ก็ขนานกับ BF

ให้ $BC : EF = m : n$ ดังนั้น

BC ก็ถูกแบ่งออก m ส่วนเท่า ๆ กัน

และ EF : ก็จะถูกแบ่งออก n ส่วนเท่า ๆ กัน

และส่วนหนึ่ง ๆ เท่ากับส่วนหนึ่ง ๆ ใน BC ด้วย แล้ว
ขีดเส้นตรงจากจุดยอดของรูป $\triangle$ ทั้ง ๒ มายังจุดแบ่งฐาน
ทุก ๆ ส่วน

$\therefore$ รูป $\triangle ABC$ กับรูป $\triangle DEF$ ก็ถูกแบ่งออกเป็น
รูป $\triangle$ เล็ก ๆ ตั้งอยู่บนฐานเท่า ๆ กันและสูงเท่า ๆ กันทุกรูป

$\therefore$ รูป $\triangle$ เหล่านี้มีพื้นที่เท่ากันทุกรูป (รูป $\triangle$ ฐานเท่า
สูงเท่า)

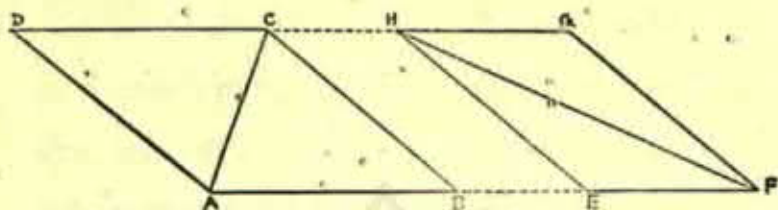
แต่รูป $\triangle ABC$ ถูกแบ่งออก m รูป

และรูป $\triangle DEF$ ถูกแบ่งออก n รูป

$\therefore$ รูป $\triangle ABC : \text{รูป } \triangle DEF = m : n$

$\therefore$ รูป $\triangle ABC : \text{รูป } \triangle DEF = BC : EF$ ด้วย

ข้ออนุมาน พหุเหลี่ยมรูปใดที่มีด้านขนานที่คู่ตรงกันย่อมได้
ส่วนด้านพหุเหลี่ยมเดียวกันกับฐานของสี่เหลี่ยมทั้ง ๒ นั้น



สมมุติ ให้รูป DB กับรูป EG เป็นรูป □ ด้านขนาน ๒ รูป
มีระยะสูงเท่ากันและอยู่บนฐาน AB กับ EF ให้พิสูจน์ว่า
รูป □ DB : รูป □ EG = AB : EF

พิสูจน์ ขีดเส้น AC, HF.

∴ รูป □ ด้านขนาน DE = ๒ รูป Δ ACB
(ฐานเดียวกันสูงเท่า)

และ รูป □ ด้านขนาน EG = ๒ รูป Δ HEF
(ฐานเดียวกันสูงเท่า)

∴ รูป □ DB : รูป □ EG = รูป Δ ABC : รูป Δ HEF
= AB : EF

ในอุปมาชั้นที่ ๒๔ นั้นจะพิสูจน์ อีกนัยหนึ่งก็ได้ ให้ p

เป็นระยะสูงของรูป $\triangle$ ทั้ง ๒ นั้น เมื่อตั้งนั้น

$$\text{พื้นที่รูป } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot p$$

$$\text{และพื้นที่รูป } \triangle DEF = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot p$$

$$\therefore \text{รูป } \triangle ABC : \text{รูป } \triangle DEF = \frac{1}{2} BC \cdot p : \frac{1}{2} EF \cdot p$$

$$\text{หรือรูป } \triangle ABC : \text{รูป } \triangle DEF = BC : EF$$

ธ. ก. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๑๑.

(คำแนะ)

๑) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป มีระยะสูงเท่ากันอยู่บนฐานยาว ๖, ๓ นิ้ว กับ ๕, ๔ นิ้ว ถ้ารูปแรกมีพื้นที่ ๑๒, ๒๕ ตารางนิ้ว รูปหลังจะมีพื้นที่เท่าใด

๒) พื้นที่ของสามเหลี่ยม ๒ รูป เป็นอัตรา ๒๔ : ๑๗ แต่รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ นั้นมีระยะสูงเท่ากัน ถ้าฐานของรูปแรกยาว ๔, ๒ ซม. จงหาฐานของรูปที่ ๒

๓) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป อยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน มีฐานยาว ๑๖, ๒ เมตร กับ ๒๐, ๗ เมตร ถ้ารูปที่ ๑ มีพื้นที่ ๕, ๖๓๐๔ ตารางเมตร จงหาพื้นที่ของรูปที่ ๒

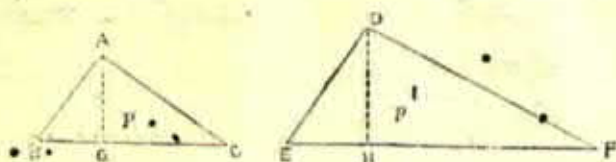
๔) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ๒ รูป มีพื้นที่เป็นอัตรา ๒, ๑ : ๓, ๕ และอยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน ถ้ารูปที่ ๑ มีฐานยาว ๖, ๖ นิ้ว จงหาฐานของอีกรูปหนึ่ง

๕) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป มีฐานร่วมกันแต่อยู่รูปละข้าง รูป ๑ มีระยะสูง ๕๒, ๔๐ เมตร อีกรูป ๑ สูง ๗๐, ๖๒ เมตร ถ้ารูปแรกมีพื้นที่ ๔๗๑๒๐ ตารางเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมเมื่อนำรูปสามเหลี่ยม ๒ รูปนี้ตัดออกเป็นรูปเดียวกัน

อุปมาอุปไมยที่ ๖๙

รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปมีมุม ๆ หนึ่งเท่ากัน จะมีพื้นที่เป็นสัดส่วนพื้นที่เท่ากับส่วนสี่เหลี่ยมระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งล้อมรอบด้วยด้านที่บรรจบเป็นมุมเท่ากันนั้น

(รูปสามเหลี่ยมมุมหนึ่งเท่ากันที่สัมพันธ์เดียวกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากก็เรียกด้วยคำนี้)



สมมุติ ให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็นรูป $\triangle$ ๒ รูปที่มี $\hat{B} = \hat{E}$

ให้พิสูจน์ว่า $\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot BC : DE \cdot EF$

สร้าง ขีดเส้น AG , และ DH ให้ $\perp BC$ และ EF ที่ G และ H ตามลำดับ

พิสูจน์ $\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AG$

$\therefore \triangle DEF = \frac{1}{2} EF \cdot DH$

$\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = \frac{1}{2} BC \cdot AG : \frac{1}{2} EF \cdot DH$
 $= BC \cdot AG : EF \cdot DH \dots (๑)$

ใน $\triangle ABG$ กับ $\triangle DEH$

$\therefore \hat{B} = \hat{E}$ (โจทย์)

และ $\angle AGB = \angle DHE$ (มุมฉาก)

$\therefore B\hat{A}G = E\hat{D}H$ ($\triangle$ ๒ มุมเท่าอีกมุมเท่า)

$\therefore AG : DH = AB : DE$ (Δ มุมเท่ากัน
ได้ ส่วนสัมพันธ์)

$$\text{หรือ } \frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE} \dots\dots\dots (๒)$$

$$\text{แต่ } \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} \dots\dots\dots (๓)$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC \cdot AB}{EF \cdot DE}$$

$$\text{หรือ } \Delta ABC : \Delta DEF = BC \cdot AB : EF \cdot DE$$

ช. ต. พ.

ข้ออนุมาน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีมุมเท่ากันมุมหนึ่ง
จะมีพื้นที่เป็นสัมพันธ์เท่ากับพื้นที่ ในระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม
มุมฉาก ซึ่งตั้งอยู่บนด้วยด้านที่บรรจบเป็นมุมเท่า

แบบฝึกหัดที่ ๑๒

เรื่องพื้นที่ อ. น. ๖๘, อ. น. ๖๘

- ๑) เมื่อพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับถึงฐานคูณด้วย
ระยะสูง ให้พิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมที่อยู่บนฐานเท่ากันมีพื้นที่ได้ส่วน
สัมพันธ์กันระยะสูง

๒) XY ขัดขวางกับ BC ซึ่งเป็นฐานของสามเหลี่ยม ABC ตัดด้าน AB และ AC ออกที่จุด X และ Y ขัดเส้น AY กับ CX แล้วให้พิสูจน์ว่า

$$ก) AX : XB = AY : YC$$

$$ข) AB : AX = AC : AY$$

๓) จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะแบ่งรูปนั้นออกเป็นสามเหลี่ยม ๔ รูป มีพื้นที่ได้ส่วนสัมพันธ์กัน

๔) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปอยู่บนฐานเท่ากันและอยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน ถ้าเส้นตรงขนานกับฐานมาตัดสามเหลี่ยม ๒ รูปนั้นออก ส่วนที่ตัดออกทั้ง ๒ รูปนั้น จะมีพื้นที่เท่ากันส่วนต่อส่วน (คือส่วนบนเท่ากับส่วนบน ส่วนล่างเท่ากับส่วนล่าง)

๕) ในรูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม DEF มี $\hat{B} = \hat{E}$ ถ้า $AB = ๒$, ๗ นิ้ว $BC = ๓$; ๕ นิ้ว $DE = ๒$, ๑ นิ้ว และ $EF = ๑$, ๘ นิ้ว จงแสดงว่า

รูปสามเหลี่ยม ABC : รูปสามเหลี่ยม $DEF = ๕ : ๒$

๖) รูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ กับรูปสามเหลี่ยม $\triangle DEF$ มีพื้นที่เท่ากันและมี $\hat{B} = \hat{E}$ ด้วย ถ้า $AB = ๕, ๖$ ซม. $BC = ๖, ๓$ ซม. $DE = ๗, ๒$ ซม. จงหา EF

๗) ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ กับสี่เหลี่ยมคางหมู $EFGH$ มี $\hat{B} = \hat{F}$ และพื้นที่เป็นอัตรา ๓ : ๔ ถ้า $AB = ๔, ๘$ ซม. $BC = ๑๓, ๕$ ซม. $EF = ๑๐, ๘$ ซม. จงหา FG ถ้า p กับ p' เป็นส่วนของเส้นตั้งที่ลากจาก A กับ E มายัง BC กับ FG แล้ว จงแสดงว่า $p : p' = ๔ : ๕$

๘) จงพิสูจน์สูตรพื้นที่สามเหลี่ยม $ABC = \frac{a}{2} b \sin C$

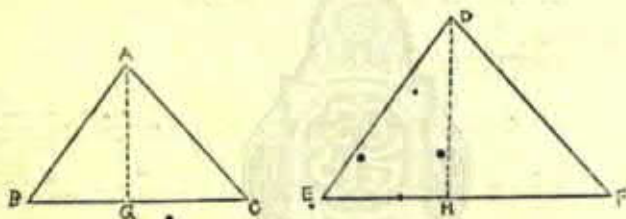
๙) สามเหลี่ยม $\triangle ABC$ เท่ากับสามเหลี่ยม $\triangle DEF$ และ $AB : DE = EF : BC$ จงแสดงว่า $\hat{B}$ กับ $\hat{E}$ เท่ากันหรือเป็นคู่มุมจั่วแก่กัน

๑๐) ในรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ มีเส้นตรง PQ موازيةกับ AB หักที่ P และตัดด้าน AC ที่ Q ถ้ารัศมีเส้น PC แล้วให้ อ. น. ๖๘ พิสูจน์ว่า
รูปสามเหลี่ยม $APQ : \text{รูปสามเหลี่ยม } ABC = AP \cdot AQ : AB \cdot AC$

ข้อประมัยนิเทศที่ ๗๐

(ยกคิดเต็ม ๖ บทที่ ๑๙)

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน ย่อมได้ส่วนด้านพื้นที่
กับพื้นที่ของจตุรัสบนด้านคู่ที่สามพื้นที่กันนั้น
(พื้นที่รูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน ได้สัมพันธ์กับจตุรัสบนด้านคู่ที่สามพื้นที่)



สมมติ ให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็นรูป $\triangle$ คล้ายกัน
มี BC กับ FE เป็นคู่ที่สามพื้นที่กัน

ให้ พหุคูณ $\triangle ABC : \triangle DEF = (BC)^2 : (EF)^2$

สร้าง ขีดเส้น $AG \perp BC$ และ $DH \perp EF$

พหุคูณ $\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AG$

$$\therefore \text{รูป } \triangle DEF = \frac{1}{2} EF \cdot DH$$

$$\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = \frac{1}{2} BC \cdot AG : \frac{1}{2} EF \cdot DH$$

$$= BC \cdot AG : EF \cdot DH$$

แต่ $\hat{A} = \hat{E}$ (รูป $\triangle$ คล้ายกัน)

และมุมที่ $G =$ มุมที่ H (มุมฉาก)

$$\therefore \triangle ABG \text{ กับ } \triangle DEH$$

เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมเท่า

$$\therefore AG : DH = AB : DE \text{ (รูป } \triangle \text{ มุมเท่าด้านสัมผัส)}$$

แต่ $AB : DE = BC : EF$ (รูป $\triangle$ คล้ายกัน)

$$\therefore AG : DH = BC : EF \text{ ด้วย}$$

$$\text{จาก (๑) } \triangle ABC : \triangle DEF = BC \cdot AG : EF \cdot DH$$

$$= BC \cdot BC : EF \cdot EF$$

$$= (BC)^2 : (EF)^2$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๓

(เขียนรูปกับคำนวณ)

๑) ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีเส้นตรง XY ขัดขวางกับ BC มาตัด AB ที่จุด X และตัด AC ที่จุด Y ถ้า AX เป็น $\frac{1}{3}$ ของ AB แล้ว รูปสามเหลี่ยม AXY จะเป็นเศษส่วนเท่าใดของ รูปสามเหลี่ยม ABC

๒) ด้านคู่สัมผัส ๒ ด้านในสามเหลี่ยมคล้ายกันยาว ๔๒ นิ้ว และ ๒๘ นิ้ว ถ้าสามเหลี่ยมใหญ่มีพื้นที่ ๖๔๘๐ ตารางนิ้ว รูปสามเหลี่ยมย่อมจะมีพื้นที่เท่าใด

๓) พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับ ๒๕,๖ ตาราง ซม. และ XY ขนานกับ BC มาตัด AB ออกเป็น ๒ ส่วนได้ภาคย่อย ๕ : ๓. ถามว่าพื้นที่รูปสามเหลี่ยม AXY เท่าใด

๔) รูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน ๒ รูป ที่มีพื้นที่ ๙.๘ ตาราง ซม. รูปที่ ๒ มีพื้นที่ ๒๐๐ ตาราง ซม. ถามว่าด้านคู่สัมผัสแต่ละคู่เป็นภาคย่อยเท่าใด

๕) รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ ๓๒ ตารางนิ้ว และสามเหลี่ยม XYZ มีพื้นที่ ๖๐,๕ ตารางนิ้ว รูปสามเหลี่ยม

ทั้งนี้ของมีค่าเดียวกัน ถ้า XY ยาว $๗, ๗$ นิ้ว ดังนั้น AB จะยาวเท่าใด

๖) จงสังเกตวิธีขีดเส้นตรง XY ให้ขนานกับ BC ขึ้นเป็นฐานของสามเหลี่ยม ABC ฉะนั้นให้ XY แบ่งสามเหลี่ยม ABC ออกได้สามเหลี่ยม AXY เป็น $\frac{๔}{๑๖}$ ของสามเหลี่ยม ABC

พิสูจน์

๗) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี A เป็นมุมฉาก AD ตั้งฉากกับ BC จงพิสูจน์ว่า

รูปสามเหลี่ยม ABD : รูปสามเหลี่ยม $ACD = (BA)^2 : (AC)^2$

๘) รูปสี่เหลี่ยมขนานด้านไม่เท่า $ABCD$ มี AB กับ CD ขนานกัน เส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O ถ้า AB ยาว ๒ เท่าของ CD จงหา รัศมีโต ของสามเหลี่ยม AOB คือสามเหลี่ยม COD

๙) XY ขนานกับ BC ซึ่งเป็นฐานของสามเหลี่ยม ABC และถ้ารูปสามเหลี่ยม AXY : รูปสามเหลี่ยม $XYC = ๔ : ๙$ แล้วจงพิสูจน์ $AX : XB = ๒ : ๑$

๑๐) จงพิสูจน์ว่าพื้นที่สามเหลี่ยมคล้ายกันเป็นอัตราส่วนเดียวกับจัตุรัสบน

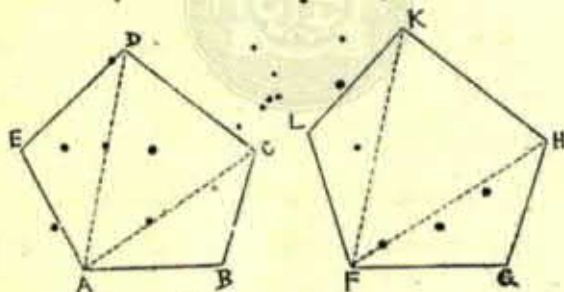
- ก) ระยะซึ่งที่คู่กัน
 ข) มุมแย้งที่คู่กัน
 ค) รัศมีของวงกลมประจุ
 ง) รัศมีของวงกลมประกอบ

ข้อประมัยนี้เทศที่ ๗๑

(บุคคลได้แก่ ๒ บทที่ ๒๐)

พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมคล้ายกัน ย่อมได้ส่วนเดิมพันกับจุดระดับด้าน
 คู่กันตามลำดับ

(พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมคล้ายกันสัมพันธ์กับจุดระดับด้านคู่)



ดังนั้น ให้ $A \cdot B C D E$ กับ $F \cdot G H K L$ เป็นรูปหลายเหลี่ยม
 คล้ายกันมี $A B$ กับ $F G$ เป็นคู่กัน

ให้พิสูจน์ว่า

$$\text{รูป } ABCDE : \text{รูป } FGHL = (AB)^2 : (FG)^2$$

สร้าง

ตัดเส้น AC, AD และ FH, FK

พิสูจน์

$\therefore \triangle ABC$ กับ $\triangle FGH$ เป็น $\triangle$ คล้ายกัน (แบ่ง

รูปหลายเหลี่ยม เป็น $\triangle$ คล้ายกัน)

โดยเหตุเดียวกัน $\triangle ADC$ ก็คล้ายกับ $\triangle FHK$

และ $\triangle AED$ ก็คล้ายกับ $\triangle FKL$

$$\therefore \triangle ABC : \triangle FGH = (AC)^2 : (FH)^2 \quad (\text{พื้นที่ } \triangle \text{ คล้ายกันสัมพันธ์กับจัตุรัสบนด้านคู่สัมพันธ์})$$

และ $\triangle ACD : \triangle HFK = (AC)^2 : (FH)^2$

$$(\text{พื้นที่ } \triangle \text{ คล้ายกันสัมพันธ์กับจัตุรัสบนด้านคู่สัมพันธ์})$$

$$\therefore \triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle HFK$$

$$\text{และ } \triangle ACD : \triangle FHK = (AD)^2 : (FK)^2 \quad (\text{พื้นที่ } \triangle \text{ คล้ายกันสัมพันธ์กับจัตุรัสบนด้านคู่สัมพันธ์})$$

$$\therefore \triangle ACD : \triangle FHK = \triangle ADE : \triangle FKL$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle FGH} = \frac{\triangle ACD}{\triangle FHK} = \frac{\triangle ADE}{\triangle FKL}$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle FGH} = \frac{\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE}{\triangle FGH + \triangle FHK + \triangle FKL}$$

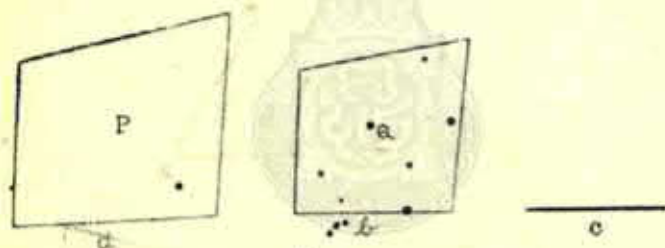
$$(\text{ผลบวกส่วนต้น} : \text{ผลบวกส่วนรอง} = \text{ภาคี่โฮเทิม})$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle FGH} = \frac{\text{รูป } ABCDE}{\text{รูป } FGHIKL} = \frac{(AB)^2}{(FG)^2}$$

$$\text{รูป } ABCDE : \text{รูป } FGHIKL = (AB)^2 : (FG)^2$$

ท. ท. พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ให้ a, b, c เป็นเส้นตรง ๓ เส้นที่คู่ขนาน
ตัดกันก็ คือ $a : b = b : c$ หรือ $b^2 = ac$

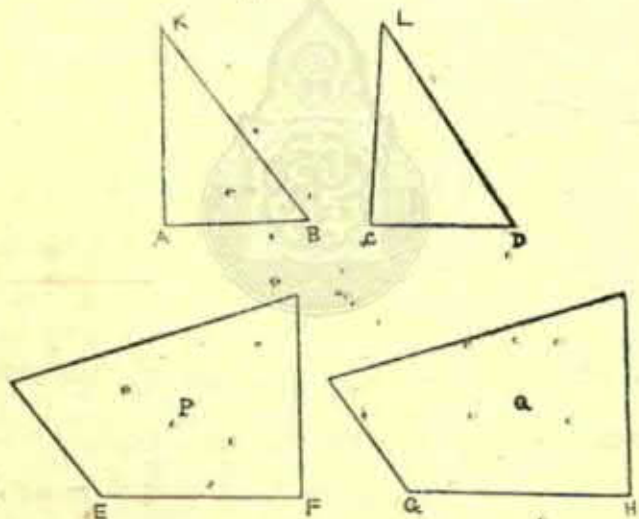


ให้ P กับ Q เป็นรูปคล้ายกันสร้างเส้นแบ่งครึ่ง a กับเส้นตรง b

$$\begin{aligned} \text{รูป } P : \text{รูป } Q &= a^2 : b^2 \\ &= a : ac \quad (b^2 = ac) \\ &= a : c \end{aligned}$$

∴ ถ้าเส้นตรง m เส้นใดตัดส่วนตั้งพหุคูณแล้ว รูปคล้ายกันที่
สร้างบนเส้นเหล่านี้ย่อมจะได้ส่วนตั้งพหุคูณด้วย คือ
รูปบนเส้นที่ ๑ : รูปบนเส้นที่ ๒ = เส้นที่ ๑ : เส้นที่ ๓

ข้ออนุมานที่ ๒ ถ้า $AB : CD = EF : GH$ รูป
คล้ายกันบน AB กับ CD ย่อมได้ส่วนตั้งพหุคูณรูปคล้ายกัน
บน EF กับ GH



ให้รูป ABK สร้างบนเส้น AB เป็นรูปคล้ายกับรูป CDL ซึ่ง
สร้างบน CD และรูป P สร้างบน EF คล้ายกับรูป Q สร้างบน GH

ให้พิสูจน์ว่า รูป $ABK : \text{รูป } CDL = \text{รูป } P : \text{รูป } Q$

พจน์ $\therefore AB : CD = EF : GH$ (โจทย์)

$$\therefore (AB)^2 : (CD)^2 = (EF)^2 : (GH)^2$$

แต่ รูป $ABK : \text{รูป } CDL = (AB)^2 : (CD)^2$

(พื้นที่รูปเหลี่ยมคล้ายกันมีพื้นที่กับจตุรด้านกำลัง)

โดยเหตุเดียวกัน รูป $P : \text{รูป } Q = (EF)^2 : (GH)^2$

$\therefore \text{รูป } ABK : \text{รูป } CDL = \text{รูป } P : \text{รูป } Q$

คือถ้าเส้นตรง ϵ ตัดสี่เหลี่ยมคล้ายกันแล้วจะตัดรูป

เหลี่ยมคล้ายกัน ๒ คู่ สี่เหลี่ยมบนเส้นที่ ๑ กับที่ ๒ คู่ ๑

และสี่เหลี่ยมบนเส้นที่ ๓ กับที่ ๔ อีกคู่ ๑ รูปคล้ายกัน

ทั้ง ๒ คู่ย่อมได้ส่วนสี่เหลี่ยม

แบบฝึกหัดที่ ๑๕

(คำนวณกับเข็ญรูป)

๑) จงแสดงวิธีหาค่าเส้นตรง XY ขนานกับ BC ที่
เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC จะทำให้พื้นที่ของรูปสาม

เหลี่ยม AXY เป็น $\triangle$ ใน $\triangle$ ของรูปสามเหลี่ยม ABC

๒) ด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว $๔, ๐$ $๒, ๕$ $๓, ๒$ ถ้ารูปสามเหลี่ยมคล้ายกับรูปนี้ และมีพื้นที่เป็น ๓ เท่านี้ ถ้าจะยาวด้านละเท่าใด

๓) รูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน ๒ รูปมีพื้นที่เป็นอัตรา $๑๓, ๖๙ : ๑๖, ๘๑$ และระยะสูงของรูปที่ ๑ เท่ากับ $๑๐, ๒๕$ ถามว่าระยะสูงของอีกรูป ๑ ยาวเท่าใด

๔) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่ ๑๖ ตาราง ซม. เส้นตรง XY ขนานกับ BC แบ่ง AB ออกได้ ๓ : ๕ ถ้าขีดเส้นตรง BY จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม BCY

๕) ถ้าเส้นตรง XY คือรูปสามเหลี่ยม ABC โดยขนานกับด้าน BC ทำให้รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นใหม่มีพื้นที่เท่ากับ $\frac{๑}{๔}$ ของรูปเดิม ถามว่า XY ยาวเท่าใด ถ้า BC ยาว ๑๐ ซม.

๖) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรอบข้างมีด้านหนึ่งยาว $๒, ๕$ ยูนิต มีพื้นที่ $๑๐, ๗๕$ ตารางยูนิต จงหาพื้นที่รูปคล้ายกันซึ่งสร้างรอบด้านหนึ่งยาว ๓ ยูนิต

๗) ด้านยาวของสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว ๑๐,๘ เมตร
 รัศมีของด้านยาว : ด้านกว้าง = ๑๒ : ๕ จงหาความยาวและ
 กว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคล้ายกันซึ่งมีพื้นที่เพียง ๑ ใน ๙ ของ
 รูปก่อน

๘) ในแผนที่มาตราส่วน ๑ : ๑๓๗๖ มีนาแปลงหนึ่ง
 กำหนดได้ ๑๐๐ ตาราง ซ.ม. ถามว่าพื้นที่จริงเท่าใด กับให้
 อธิบายด้วยว่ารูปของพื้นที่นาไม่เป็นการสำคัญสำหรับการคำนวณ
 เช่นนี้

๙) ที่ดินแปลงหนึ่งปรากฏในแผนที่มาตราส่วน ๒๕ นิ้ว
 ต่อ ๑ ไมล์เป็นสี่เหลี่ยม ABCD ถ้า AC = ๒๐ นิ้วและเส้น
 ตีจาก AC ถึง B ยาว ๒๔ นิ้ว จาก AC ถึง D ยาว ๒๖ นิ้ว
 จงหาพื้นที่จริงของที่ดิน

๑๐) ที่ดินแปลงหนึ่งมีพื้นที่ ๑,๘๙ ตารางเฮกโตเมตร
 ในแผนที่แสดงรูปพื้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยม และด้านยาว ๑๓ ซ.ม.
 ๑๕ ซ.ม. ๑๔ ซ.ม. ถามว่าแผนที่ฉบับนี้มีมาตราส่วนเท่าใด

แบบฝึกหัดที่ ๑๕

พิสูจน์

๑) ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี A เป็นมุมฉาก และถ้า AD ตั้งฉากกับ BC ให้พิสูจน์ว่า

$$ก) (BC)^2 : (BA)^2 = BC : BD \text{ (อ.น. ๗๑ ข้อ ๑)}$$

$$ข) (BC)^2 : (CA)^2 = BC : CD \text{ แล้วอนุมานต่อไปว่า } (BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2$$

๒) รูปสามเหลี่ยม ABC มี XY ขนานกับฐาน BC และแบ่งครึ่งพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC ด้วย จงหาราคะ $AX : AB$

และแสดงวิธีแบ่งครึ่งรูปสามเหลี่ยมโดยเส้นตรงที่ขนานกับฐานพร้อมด้วยการพิสูจน์

๓) วงกลม $\odot$ วงสัมผัสกันภายในที่จุด A และมีทั้งเส้นตรงสัมผัสกับวงกลมทั้ง $\odot$ ที่จุด B และ C ถ้าต่อทั้งเส้นนี้ไปบรรจบเส้นศูนย์กลางที่ S ถ้าได้ขีด AB กับ AC ลงแล้ว จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม $SBA : \text{รูปสามเหลี่ยม } SAC = SB : SC$

๔) วงกลม $\odot$ วงตัดกันที่จุด A กับ B และที่ A ขีดทั้งเส้นให้วงกลมทั้ง $\odot$ วงละเส้นจากเส้นรอบวงที่ C กับ D ถ้า

วัด AB, CB, และ BD ให้พิสูจน์ว่า

รูปสามเหลี่ยม CBA : รูปสามเหลี่ยม ABD = CB : BD

๕) DEF เป็นสามเหลี่ยมพีดัล (Pedal) ของสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า

รูปสามเหลี่ยม ABC : รูปสามเหลี่ยม DBF = (AB)² : (BD)²

และรูป AFDC : รูปสามเหลี่ยม DBF = (AD)² : (BD)²

๖) ให้บรรจรูปสามเหลี่ยมลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้ โดยวัดเส้นจากจุดแบ่งครึ่งด้านทั้ง ๓ ถึงกัน ถามว่า รูปสามเหลี่ยมรูปกลางเป็นเศษส่วนของเท่าใดของรูปสามเหลี่ยม ABC

๗) รูปหกเหลี่ยมเรขาคณิตสร้างบนด้านยาว a ซม. แล้วบรรจรูปหกเหลี่ยมรูป ๑ ลง โดยวัดเส้นต่อจุดกึ่งกลางด้านถึงกัน เมื่อเสร็จแล้วบรรจรูปหกเหลี่ยมรูป ๑ ลงไปในรูปที่ ๒ โดยวัดเส้นจากจุดกึ่งกลางด้านอย่างเดียวกับข้างต้น ทำดังนี้ต่อไปแล้วหาราคีโธ ระหว่างรูปที่ ๑ กับรูปที่ ๕

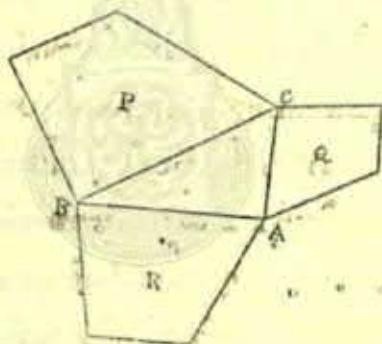
๘) จงแสดงว่าพื้นที่ของรูปเหลี่ยม ๒ รูปที่คล้ายกันและบรรจอยู่ในวงกลมหนึ่งได้ส่วนสัมพันธ์กับจตุรัสบนเส้นศูนย์กลางของวงกลมประกอบ (ยุคติดเต็ม ๑๒ บทที่ ๑)

อุประมาณิเทศที่ ๓๒

(ยุคติดเดิม ๑๒ บทที่ ๑)

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ รูปเหลี่ยมที่สร้างขึ้นบนด้านตรง
 ถาอ้อมเท่ากับผลบวกของรูปเหลี่ยมที่สร้างขึ้นบนด้านที่บรรจบเป็น
 มุมฉาก เมื่อรูปเหลี่ยมทั้งสองคล้ายกับรูปเหลี่ยมที่สร้างขึ้นบน
 ด้านตรงฉากนั้น

(รูปเหลี่ยมบนตรงฉาก = ผลบวกของรูปเหลี่ยมคล้ายกันบนด้านอื่น)



สมมติให้ ABC เป็นรูป Δ มุมฉาก BC เป็นด้านตรงฉาก
 และรูป P รูป Q รูป R เป็นรูปคล้ายกันที่สร้างขึ้นบนด้าน
 อย่างเดียวกันบน BC, AC และ BA ตามลำดับ

ให้พิสูจน์ว่า รูป R + รูป Q = รูป P

พิสูจน์ $\therefore$ AB และ BC เป็นด้านคู่กัน มีรูปคล้ายกัน คือรูป R และ

รูป P สร้างขึ้นบนด้านคู่กัน

$\therefore$ รูป R : รูป P = $(AB)^2 : (BC)^2$ (พื้นที่รูปเหลี่ยมคล้ายกันสัมพันธ์กับจัตุรัสบนด้านคู่).....(๑)

โดยทำนองเดียวกัน

รูป Q : รูป P = $(AC)^2 : (BC)^2$ (๒)

$$(๑) + (๒) \quad \frac{\text{รูป R} + \text{รูป Q}}{\text{รูป P}} = \frac{(AB)^2 + (AC)^2}{(BC)^2}$$

แต่ $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$ (ตรงฉาก = กำลังสองบวก)

$$\therefore \frac{\text{รูป R} + \text{รูป Q}}{\text{รูป P}} = \frac{(BC)^2}{(BC)^2} = ๑$$

$$\therefore \text{รูป R} + \text{รูป Q} = \text{รูป P}$$

ช. ท. พ.

ข้ออนุมาน พื้นที่วงกลมที่อาศัยตรงฉากของรูป

สามเหลี่ยมมุมฉากเป็นเส้นศูนย์กลางนั้นเท่ากับผลบวกของ

พื้นที่วงกลมที่สร้างขึ้นอย่างเดียวกัน มีด้านอีก ๒ ด้านเป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง
กวางด้านละรูป

แบบฝึกหัดที่ ๑๒

ระคน

๑) ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมฉากอยู่ที่ A ขีดเส้น
AD ตั้งฉากกับด้านตรงข้าม BC ที่ D ให้พิสูจน์ว่า

$$ก) (BA)^2 = EC \cdot BD$$

$$ข) (CA)^2 = CB \cdot CD$$

แล้วตั้งโครงขึ้นให้เป็น ค.น. ๓๐ คือ $(BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2$
โดยอาศัยเหตุผลที่พิสูจน์ในข้อนี้

๒) ในรูปของ ค.น. ๗๒ ขีด AD ตั้งฉากกับ BC
ถ้ารูป P = รูปสามเหลี่ยม ABC แล้วจงพิสูจน์ว่า

$$ก) \text{รูป } Q = \text{รูปสามเหลี่ยม } ADC$$

$$ข) \text{รูป } R = \text{รูปสามเหลี่ยม } ADB$$

$$ค.) \text{ ในรูปของ ค.น. ๗๒ ถ้า } AB : AC = ๔ : ๕ \text{ และ}$$

ถ้ารูป $P = \omega, \omega'$ ตาราง ข.ม. จงหาพื้นที่ของรูป Q และพื้นที่
ของรูป R

๔) BY กับ CZ เป็นเส้นส่วนของรูปสามเหลี่ยม ABC
ไขว้กันที่จุด G ขัดเส้น YZ จงหาพื้นที่ของ
รูปสามเหลี่ยม BGC : รูปสามเหลี่ยม YGZ (ดูเต็ม ๑ บทแรก ๓)

๕) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีด้าน $AB = AC$
 $= ๓, ๖$ นิ้ว จาก D ในด้าน AB ขัดเส้น DE ตัด AC เมื่อตัดออกไป
แล้วที่ E และทำรูปสามเหลี่ยม ADE ให้เท่ากับรูปสามเหลี่ยม
 ABC ถ้า $AD = ๑, ๘$ นิ้ว จงหา AE

๖) AB เป็นเส้นสัมผัสภายในของวงกลมแล้วต่อชะยา
 AP, AQ ออกไปพบทั้งเส้นตัดกับ B ที่จุด X และ Y จงพิสูจน์ว่า

ก) รูปสามเหลี่ยม APQ กับรูปสามเหลี่ยม AXY
เป็นรูปคล้ายกัน

ข) จุด P, Q, Y และ X เรียงเป็นวงกลม

๗) ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีเส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน
นอกที่ประชิดมุม A โดยไปพบฐานที่ต่อออกไปแล้วที่จุด D และตัด
วงกลมประกอบที่ E จงพิสูจน์ว่า $AB \cdot AC = AE \cdot AD$

๘) เมื่อไรจึงจะเรียกว่าแบ่งเส้นตรงเป็นอัตราที่คู่กัน
 ก็นั่น ถ้าได้แบ่งเส้นตรงยาว ๑๐ ซม. ออกตามนั้นแล้ว จงหา
 ค่าประมาณของเส้นแบ่ง แล้วตรวจสอบด้วยรูปเรขาคณิต

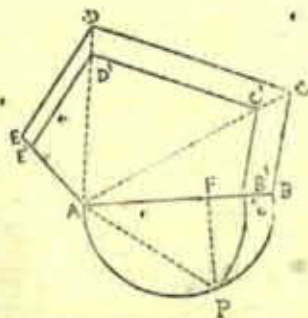
๙) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสาม
 เหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้ และให้มุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 นั้นเท่ากับมุม A ด้วย

๑๐) บนฐานที่กำหนดให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 ให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้ด้วย

เรขาคณิตที่ ๕๐

จงสร้างรูปเหลี่ยมใดคล้ายกับรูปเหลี่ยมที่กำหนดให้ และให้พื้นที่
 ที่เป็นเศษส่วนของรูปที่กำหนดตามกำหนด

(สร้างรูปเหลี่ยมคล้ายกับรูปที่กำหนดตามกำหนด)



ฉันท ให้ $ABCDE$ เป็นรูปเหลี่ยมกำหนด ให้สร้างรูปเหลี่ยม
ให้คล้ายกับรูปเหลี่ยม $ABCDE$ และให้มีพื้นที่เป็น
 $\frac{n}{m}$ ของรูป $ABCDE$ ด้วย

วิธีสร้าง แบ่ง AB ออก m ส่วนแล้วจะเพิ่ม AF เท่ากับ n ส่วน
ของ AB เขียนครึ่งวงกลมบน AB จาก F ชีตเส้น $\perp$
 AB โดยไปตัดเส้นรอบวงที่ P เชื่อม A เป็นจุดศูนย์กลาง
 AP เป็นรัศมีเขียนโค้งไปตัด AB ที่ B' แปลว่าทำ AB'
ให้เป็นเส้นสัมผัสส่วนกลางระหว่าง AF กับ AB (หาส่วน
สัมผัส ในระหว่าง ศูนย์ที่กำหนด) บนเส้น AB' สร้าง
รูป $A'B'C'D'E'$ ให้คล้ายกับรูป $ABCDE$ (สร้าง
รูปเหลี่ยมคล้ายกับรูปเหลี่ยมกำหนด).

ดังนั้นรูป $A'B'C'D'E'$ จะ $= \frac{n}{m}$ ของรูปเหลี่ยม $ABCDE$

พิสูจน์ $\because AB'$ เป็นส่วนกลางระหว่าง AF กับ AB (สร้าง)

$\therefore (AB')^2 = AF \cdot AB$ (ผลคูณส่วนสัมผัส)

และรูป $AB'C'D'E'$ คล้ายกับรูป $ABCDE$ (สร้าง)

$\therefore AB, AB'$ ใต้ส่วนสัมผัสกันตามลำดับด้าน

$\therefore$ รูป $AB'C'D'E' :$ รูป $ABCDE = (AB')^2 : (AB)^2$

(พื้นที่รูปเหลี่ยมคล้ายกันสัมผัสกับจุดวัดบนด้านคู่)

$\therefore$ รูป $AB'C'D'E' :$ รูป $ABCDE = AF \cdot AB : (AB)^2$

$$= AF : AB$$

$$= n : m$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๗

๑) แบ่งรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น ๒ ส่วนพื้นที่เท่ากันโดยริ้วเส้นตรง XY ขนานกับฐาน BC ตัดด้านทั้ง ๒ ที่จุด X กับ Y

ก) โดยวิธีคำนวณ

ข) โดยวิธีวัด

หาภาคี่ ๒ ของ $AX : AB$

๒) แบ่งรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น ๓ ส่วนพื้นที่เท่ากันด้วยเส้น PQ กับ XY ขัดกันที่ฐาน BC ทั้งคู่ ถ้า P กับ X อยู่ใน AB จงพิสูจน์ว่า

$$AP : ๑ = AX : \sqrt{๓} = AB : \sqrt{๓}$$

แล้วแสดงให้กว้างขวางออกไปว่าสามเหลี่ยมแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น ๓ ส่วนเท่าๆ กันได้ด้วยวิธีขีดเส้นตรงขนานกับด้านใดด้านหนึ่ง

๓) สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีด้านยาว ๆ ๘ ซม. ด้านกว้างยาว ๕ ซม. แล้วสร้างอีกรูป ๑ ให้คล้ายกัน แต่มีพื้นที่เป็น ๑ ใน ๓ ของรูปก่อน

วัดความยาวของด้านในรูปหลังด้วยเพียงมิลลิเมตร แล้วตรวจผลด้วยวิธีคำนวณอีกครั้งหนึ่ง

๔) สร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $\hat{A} = ๙๐^{\circ}$ $AB = BC = ๘$ ซม. $AD = DC = ๖$ ซม.

แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมชนิดรูป ๑ ให้คล้ายกันและให้มีพื้นที่ ๓๖ ตาราง ซม. แล้วหาความยาวของด้านที่คู่กับ AB

๕) แบ่งวงกลมซึ่งมีรัศมียาว ๓ นิ้วออกเป็น ๓ ส่วนด้วยวงกลมร่วมศูนย์ ๒ วง

๖) สร้างรูปเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับรูป E ที่กำหนดให้ และให้คล้ายกับรูป S ที่กำหนดให้อีกรูป ๑ (ตามยุคคิดเดิม ๖ บท ๒๕)

[(ก) เปลี่ยนรูป E กับรูป S ให้เป็นจัตุรัสพื้นที่เท่ากัน (ดู ร.น. ๑๕ กับ ร.น. ๓๒)]

(ข) ให้ด้านของจัตุรัสทั้ง ๒ เป็น a, b. ตามลำดับ และให้ s เป็นด้าน ๑ ของรูป S

(ค) หากำของ p คือ p เป็นส่วนต้นพื้นที่ที่ ๔ ของ b, a. และ s ดังนั้นเช่น $b : a = s : p$

(ง) มน p สร้างรูป P คล้ายกับรูป S นี้เพราะให้ p กับ s เป็นด้านคู่กัน แล้วรูป P ก็เป็นรูปที่ต้องประสงค์

$$\therefore \text{รูป } P : \text{รูป } S = p^2 : s^2 = a^2 : b^2 = \text{รูป } E : \text{รูป } S$$

$$\therefore \text{รูป } P = \text{รูป } E]$$

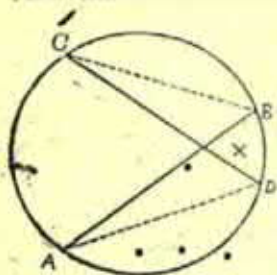
รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

อุปมาณียะเทศที่ ๗๓

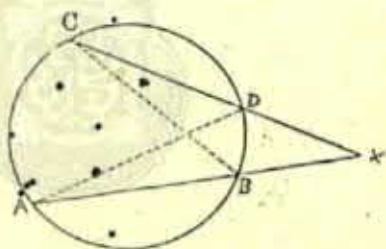
(บุคคลเต็ม ๓ บทที่ ๓๔ กับ ๓๖)

ถ้าชะยา ๒ เส้นของวงกลมตัดกันภายในหรือตัดออกไปตัดกัน
ภายนอกก็ สี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นจากส่วนแบ่งของชะยา
เส้น ๑ ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นจากส่วนแบ่งของ
ชะยาอีกเส้น ๑

(ชะยาตัดในหรือนอกส่วน $\times$ อีกส่วน $=$ (อีกเส้น $\times$ ส่วน $\times$ อีกส่วน $\times$)



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

สมมุติให้ ABC เป็นวงกลมมีชะยา AB กับ CD ตัดกัน
ที่จุด X (รูปที่ ๑ ตัดกันภายใน, รูปที่ ๒ ตัดออกไปตัดกัน
ภายนอก)

ให้พิสูจน์ว่าทั้ง ๒ ประการนี้

รูป □ ถ้า $AX \cdot XB =$ รูป □ ถ้า $CX \cdot XD$

สร้าง ขีดเส้น AD, CB

พิสูจน์ ใน $\triangle AXD$ กับ $\triangle CXB$

$$\therefore \hat{A} \hat{X} D = \hat{C} \hat{X} B \quad (\text{มุมตรงข้าม})$$

(ในรูปที่ ๑ เป็นมุมตรงข้าม แต่ในรูปที่ ๒ เป็นมุมร่วม)

$$\therefore \hat{A} = \hat{C} \quad (\text{มุมตรงข้ามโค้งเดียวกัน})$$

$$\therefore \hat{B} \text{ ที่เหลืออยู่} = \hat{D} \text{ ที่เหลืออยู่}$$

$$\therefore \triangle AXD \text{ กับ } \triangle CXB \text{ เป็น } \triangle \text{ มุมเท่า}$$

$$\therefore XA : XC = XD : XB \quad (\triangle \text{ มุมเท่าด้านใดด้านหนึ่งได้ส่วนอันหนึ่ง})$$

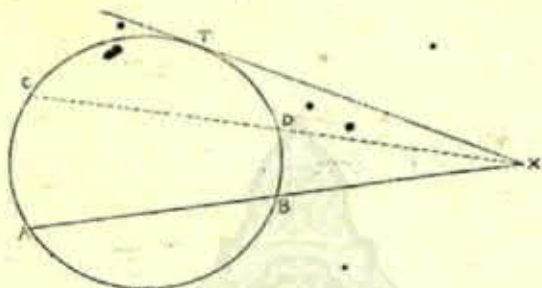
$$\therefore XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

$$\text{ก็ } \square \text{ ถ้า } XA \cdot XB = \square \text{ ถ้า } XC \cdot XD$$

ท. ค. พ.

ข้ออนุมาน จากจุดนอกวงกลมขีดเส้นตัดกับทั้งเส้น

ให้แก่วงกลมนั้น รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทำขึ้นด้วยเส้นตัดทั้งเส้นกับ
ส่วนนอกวงกลมน้อยมเท่ากับจัตุรัสบนทั้งเส้น



เดิมทีให้ X เป็นจุดอยู่ภายนอกวงกลม ABC และ X B A

เป็นเส้นตัด และ X T เป็นทั้งเส้นตัดจากจุด X ไป

ส่วนนอกวงกลม ABC นั้น . .

ให้พิสูจน์ $A X \cdot X B = X T^2$

พจน์ ขัด X D C เป็น เส้นตัด อีกเส้นหนึ่งดังนี้

$$A X \cdot X B = C X \cdot X D$$

(ขยายตามอก, ส่วน ๑ คูณอีกส่วน ๑ = (อีกเส้น ๑)

ดังนั้น ๑ คูณอีกส่วน ๑)

ย่อมเป็นจริงดังนี้เสมอไม่ว่าเซคันต์ XDC จะอยู่
 อย่างไร คราวนี้ให้เซคันต์เวียนรอบจุด X ห่างออก
 ไปจากจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุด C กับ D
 จะใกล้กันเข้าไปและใกล้กันเข้าทุกทีในที่สุดจะทับกันที่จุด
 T ดังนั้นเซคันต์ XDC ก็เป็นทังเส้น XT นั้นเอง
 $\therefore CX \cdot XD$ ก็เป็น $XT \cdot XT = XT^2$
 $\therefore AX \cdot XB = CX \cdot XD = XT^2$

ข. ต. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๑๘

ใช้กระดาษตาราง

๑) จากจุด $(๑, ๗; ๐)$ เป็นจุดศูนย์กลาง
 สร้างวงกลมสัมผัส OY ที่ O ตัด OX ที่ A บรรดา
 เส้นที่ขีดจาก A ตัด OY ที่ Q และตัดวงกลมที่ P ให้แสดง
 $AP \cdot AQ$ เป็นจำนวนคงที่ แล้วทำซ้ำของ $AP \cdot AQ$
 ใช้ นิ้วเป็นมาตรฐานวัด

๒) วงกลมมีรัศมียาว ๑๐ กำหนดศูนย์กลาง C ให้อยู่ที่จุด $(๕; ๖)$ ถ้า TT' เป็นเส้นตรงจุดสัมผัสของทั้งเส้นตั้งฉาก PC จด TT' ที่ Q จงหาค่าของ

(๑) $CQ \cdot CP$

(๒) $PQ \cdot CP$

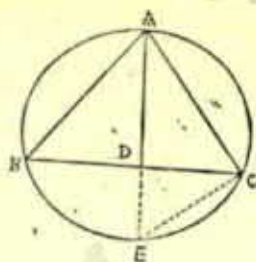
(๓) ส่วนยาวของ TT' .

๓) จากจุดศูนย์กลาง $(๐, ๓; ๐), (๒; ๐)$ สร้างวงกลมให้มรัศมี ๒, ๖ และ ๒, ๔ ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุดรวมและความยาวของเส้นรัศมีนั้น แล้วหาความยาวของทั้งเส้นตั้งฉากวงกลมทั้ง ๒ ครั้งจะพบมีจุดจากจุด $(๑, ๓; ๓, ๔)$ ได้กี่จุดตอบโดยที่

อุประมาณที่ ๗๔

ถ้าเส้นตรงแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ไปจรดฐานตั้งเหลี่ยมมุมฉากเกิดขึ้นจากด้านที่ ๒. ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับตั้งเหลี่ยมมุมฉากเกิดขึ้นจากส่วนแบ่งของฐานบวกด้วยจัตุรัสบนเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดนั้น

$$\{ \text{ด้าน} \times \text{อีกด้าน} = \text{ส่วนฐาน} \times \text{ส่วนฐาน} + (\text{เส้นแบ่งครึ่งมุม})^2 \}$$



สมมติให้ ABC เป็น $\triangle$ มี $\hat{BAC}$ เป็นมุมยอด
 AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{BAC}$ มาจฐาน BC ที่ D
 ให้พิสูจน์ $\square$ ถ้า $AB \cdot AC = \square$ ถ้า $BD \cdot DC$
 $+ AD^2$

สร้าง เส้นวงกลมประกอบ $\triangle ABC$ ตัด AD ออกไปจรด
 วงที่จุด E เชื่อมเส้น EC

พิสูจน์ ใน $\triangle BAD$ กับ $\triangle FAC$

$$\therefore \hat{BAD} = \hat{EAC} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \hat{ABD} = \hat{AEC} \quad (\text{มุมในเข็กลิ่มที่เดียวกัน})$$

$$\therefore \hat{BDA} = \hat{ECA} \quad (\triangle ๒ \text{ มุมเท่าอีกมุม } ๑ \text{ เท่า})$$

$\therefore \triangle BAD$ กับ $\triangle EAC$ เป็น $\triangle$ มุมเท่า

$\therefore AB : AE = AD : AC$ ($\triangle$ มุมเท่าด้านใด
ด้านหนึ่งเหมือนกัน)

$$\begin{aligned}\therefore AB \cdot AC &= AE \cdot AD \\ &= (AD + DE) \cdot AD \\ &= AD^2 + DE \cdot AD.\end{aligned}$$

แต่ $BD \cdot DC = AD \cdot DE$ (ระชาดักภายใน)

$$\therefore \square \text{ ถ้า } AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC$$

ธ. ค. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๑๔

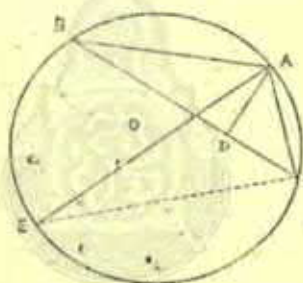
ถ้า A เป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่ประชิดมุม A ขัดเลยไปจุดฐานเมื่อตัดออกไปแล้วที่ D ให้พิสูจน์ว่า

$$AB \cdot AC = BD \cdot DC - AD^2$$

อุปพระนิเทศที่ ๗๕

ถ้าจุดเส้นตรงจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐานแล้ว รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเกิดขึ้นจากด้านทั้ง ๒ ของรูปสามเหลี่ยม บ่อยเท่ากันสี่เหลี่ยมมุมฉากเกิดขึ้นจากเส้นตั้งฉากกับเส้นศูนย์กลางของวงกลมประกอบ

(ถ้า $\bullet$ คู่อีกด้าน $\bullet$ = เส้นศูนย์กลางประกอบจุดศูนย์กลางตั้งได้ฉากกับมุม)



สมมุติ ให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม $AD \perp BC$ และ AE เป็นเส้นศูนย์กลางของวงกลมประกอบรูปสามเหลี่ยม ABC

ให้พิสูจน์ว่า $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

สร้าง จุดเส้น EC

พิสูจน์ ใน $\triangle BAD$ กับ $\triangle EAC$

$$\therefore \hat{BDA} = \hat{AEC} \text{ (มุมฉาก)}$$

$$\therefore \hat{ABD} = \hat{AEC} \text{ (มุมในเชิงเส้นที่เดียวกัน)}$$

$$\therefore \hat{BAD} = \hat{EAC} \text{ (}\triangle ๒ \text{ มุมเท่าอีกมุมองศา)}$$

$$\therefore \triangle BAD \text{ กับ } \triangle EAC \text{ เป็น } \triangle \text{ มุมเท่า}$$

$$\therefore AB : AE = AD : AC \text{ (}\triangle \text{ มุมเท่ากันได้ส่วนสัมพันธ์)}$$

$$\therefore AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

$$\text{คือ } \square \text{ หาก } AB \cdot AC = \square \text{ หาก } AE \cdot AD$$

ช. ท. พ.

หมายเหตุ ถ้า a, b, c เป็นด้านของสามเหลี่ยม ABC

และ R เป็นรัศมีประจุม p เป็นเส้นตั้งฉาก AD

$$\text{ทั้งนี้ } AE \cdot AD = AB \cdot AC$$

$$\text{๒ } R \cdot p = c \cdot b$$

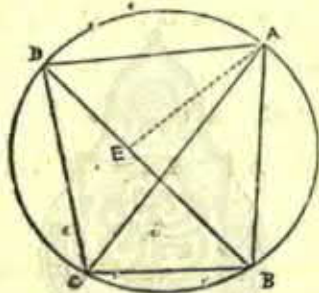
$$R = \frac{c \cdot b}{2p}$$

$$= \frac{abc}{2ap}$$

$$= \frac{abc}{4\Delta}$$

อุประมายน์เทศที่ ๗๖

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเกิดขึ้นจากเส้นทแยงมุม ของรูปสี่
เหลี่ยมประจุอยู่ในวงกลม ขอมเท่ากับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมมุม
ฉาก ๒ รูป ซึ่งเกิดขึ้นจากด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมประจุนั้น
($\square$ ประจุเส้นทแยงมุมคู่กัน = ผลคูณด้านตรงข้ามบวกกัน)



สมมติให้ ABCD เป็น $\square$ ประจุอยู่ในวงกลม BD กับ AC
เป็นเส้นทแยงมุม

$$\text{ให้ พัดจั่ว } AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

สร้าง ทำมุม DAE ให้ $= \angle BAC$

พิสูจน์ ใน $\triangle EAB$ กับ $\triangle DAE$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC$$

(สร้าง)

และ $\hat{EAC}$ เป็นมุมรวม

$$\therefore \hat{DAC} = \hat{EAB} \text{ ด้วย}$$

$$\therefore \hat{ABE} = \hat{ACD} \quad (\text{มุมในเขตก้นหนึ่งเท่าเดียว})$$

$$\therefore \hat{AEB} = \hat{ADC} \quad (\Delta \text{ ๒ มุมเท่าอีกมุม ๑ เท่า})$$

$$\therefore \Delta EAB \text{ กับ } \Delta DAC \text{ เป็น } \Delta \text{ มุมเท่า}$$

$$\therefore BA : AC = BE : CD \quad (\Delta \text{ มุมเท่าด้านใดส่วนสัมพันธ์})$$

$$\therefore BA \cdot CD = AC \cdot BE \dots\dots\dots (๑)$$

ใน ΔDAE กับ ΔCAB

$$\therefore \hat{DAE} = \hat{CAB} \quad (\text{สร้าง})$$

$$\text{และ } \hat{ADE} = \hat{ACB} \quad (\text{มุมในเขตก้นหนึ่งเท่าเดียว})$$

$$\therefore \hat{AED} = \hat{ABC} \quad (\Delta \text{ ๒ มุมเท่าอีกมุม ๑ เท่า})$$

$$\therefore \Delta DAE \text{ กับ } \Delta CAB \text{ เป็น } \Delta \text{ มุมเท่า}$$

$$\therefore DA : CA = DE : CB \quad (\Delta \text{ มุมเท่าด้านใดส่วนสัมพันธ์})$$

$$\therefore DA \cdot CB = CA \cdot DE \dots\dots\dots (๒)$$

$$\begin{aligned}
 (๑) + (๒) \quad BA \cdot CD + DA \cdot CB &= AC \cdot BE \\
 &+ CA \cdot DE \\
 &= AC (BE + DE) \\
 &= AC \cdot DB
 \end{aligned}$$

$$\text{กักข } \square AB \cdot CD + \square AD \cdot CB = \square AC \cdot DB.$$

ท. ท. พ.

แบบฝึกหัดที่ ๒๐

๑) A เป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC จาก A ชีดเส้นมาที่จุด X ในฐาน BC หรือเมื่อต่อฐาน BC ออกไปแล้ว จึงพิสูจน์ให้เห็นว่า วงกลมประกอบ $\triangle ABX$ กับ $\triangle ACX$ เท่ากัน

๒) จาก B และ C ในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ชีดเส้นตรงตั้งฉากกับ AB และ AC ตามลำดับ เส้นทั้ง ๒ นี้ ตัดกันที่จุด D จงพิสูจน์ว่า $BC \cdot AD = ๒ AB \cdot DB$

๓) ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่ประจวบในวงกลม
ตั้งได้ฉากแก่กัน ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งเกิดจาก
ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนี้เท่ากับ ๒ เท่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม
เดิม

๔) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมประจวบในวงกลมและ
เส้นทแยงมุม BD แบ่งครึ่ง AC ให้พิสูจน์ว่า $AD \cdot AB = DC \cdot CB$

๕) ถ้าตัดเส้นจาก A ซึ่งเป็นมุมยอดของสามเหลี่ยม
 ABC ไปจุดฐาน และแบ่งรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็น ๒
รูปคั่นรัศมีของวงกลมประกอบสามเหลี่ยม ๒ รูปนี้จะได้ รัศมี
กับ AB และ AC

๖) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยกำหนดฐานกับมุมยอด
และผลคูณของด้าน ๒ ด้านของสามเหลี่ยมนี้ให้

๗) รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปมีพื้นที่เท่ากันประจวบในวง
กลมเดียวกันและตั้งอยู่บนฐานเดียวกัน ให้พิสูจน์ว่าสี่เหลี่ยมมุม
ฉากซึ่งเกิดจากด้าน ๒ ด้านของรูป ๑ เท่ากับสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่ง
เกิดจากด้าน ๒ ด้านของอีกรูป ๑

๘) P เป็นจุดอยู่ในโค้ง BC ของวงกลมประอบ
สามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ถ้าลากเส้นจาก P ถึงจุด A, B และ C
จงพิสูจน์ให้เห็นว่า $PB + PC = PA$.

๙) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมประอบอยู่ในวงกลม และ
 BD แบ่งครึ่งมุม $A \hat{B} C$ ถ้า A และ C กำหนดอยู่ในเส้นรอบ
วงของวงกลม ให้พิสูจน์ว่า แม้ B จะเคลื่อนไปที่ใด ราบที่
 $AB + BC : BD$ จะมีค่าคงที่เสมอ

๑๐) จากสูตร $R = \frac{abc}{4\Delta}$ จงหาความยาวของ R เมื่อ
ด้านของรูปสามเหลี่ยมมีกำหนดความยาวดังนี้

(ก) ๒๑ นิ้ว ๒๐ นิ้ว ๑๓ นิ้ว

(ข) ๓๐ ซม. ๒๔ ซม. ๑๑ ซม. แล้วจง
เขียนรูปสามเหลี่ยม ใช้ไม้ตราส่วนตามสมควร แล้วตรวจสอบที่ได้
โดยการวัด

แบบฝึกหัดที่ ๒๑

ระคนแต่ละภาคที่ ๑ ถึงภาคที่ ๕

๑) วงกลม ๒ วง ซึ่งมี C และ D เป็นจุดศูนย์กลางตัดกันที่จุด A และ B ขั้วเส้นตรง PAQ ผ่านจุด A ถึงเส้นรอบวงจึงพิสูจน์ว่า

$$(ก) \hat{P}BQ = \hat{C}AD$$

$$(ข) \hat{B}PC = \hat{B}QD$$

๒) AB เป็นเส้นศูนย์กลางของวงกลม CD เป็นระยะขนานกับ AB จากจุด X ภายในเส้น AB ตัดถึงปลายระยะ CD จึงแสดงให้เห็นว่า $XC^2 + XD^2 = XA^2 + XB^2$

๓) ถ้าข้อด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่อาจประจุลงในวงกลมได้ ไปพบกันแล้วจงแสดงว่าเส้นแบ่งครึ่งของมุมทั้ง ๒ ที่บังเกิดขึ้นนั้นตัดกันที่ฉาก

๔) กำหนดมุมยอดและด้านที่ประกอบเป็นมุมยอดด้านหนึ่งกับความยาวของด้านตั้งฉากจากมุมยอดมาตั้งฐาน จงสร้างรูปสามเหลี่ยม

๕) จุด A, B, C เป็นจุด ๓ จุด อยู่ในเส้นตรงเส้น ๑
 จงหาจุด P ในเส้นตรงเส้นนั้น ให้ได้ PB เป็นสัมพัทธ์ส่วนกลาง
 ระหว่าง PA กับ PC

๖) D เป็นจุดอยู่ในฐาน BC ของสามเหลี่ยม ABC
 ผ่านจุด D ขีดเส้น DE, DF ให้ขนานกับด้าน AB, AC จุด
 ตัดกันที่ ๒ ที่จุด E และ F ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นว่ารูป
 สามเหลี่ยม AEF เป็นสัมพัทธ์ส่วนกลางระหว่างรูปสามเหลี่ยม
 FBD กับรูปสามเหลี่ยม EDC

๗) PQ เป็นระยะทางที่อยู่ในวงกลม ถัด PX, QY
 จาก P และ Q ขนานกัน จงแสดงให้เห็นว่า XY สัมพัทธ์กับ
 วงกลมร่วมศูนย์กลางเดียวกันเสมอ

๘) วงกลม ๒ วงสัมผัสกันที่จุด C และมีเส้นตรง ๒
 เส้นตัดผ่านจุด C ทั้งคู่ฉากกัน ปลายจรอบวงที่ P, P' และ
 Q, Q' ตามลำดับ ถ้ามีเส้นตรงอีกเส้น ๑ ผ่านจุดศูนย์กลางของ
 วงกลมทั้ง ๒ จจรอบวงที่ A และ A' จงแสดงให้เห็นว่า

$$(P'P)^2 + (Q'Q)^2 = (AA')^2$$

๙) AE เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC จุดฐานที่ E ถ้า d และ d' เป็นเส้นสัมผัสภายในของวงกลม ๒ วงซึ่งประกอบรูปสามเหลี่ยม ABE และรูปสามเหลี่ยม ACE ตามลำดับจึงได้แก่ให้เห็นว่า $d : d' = BE : EC$

๑๐) AB, AC เป็นระยะยาวของวงกลมเดียวกัน ถ้าตัดเส้นตรงขนานกับทั้งเส้นที่ A ตัด AB ที่ D และตัด AC ที่ E จึงได้แก่ให้เห็นว่า $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

๑๑) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งออกด้วยจุดกำหนด ๒ จุด ให้หาว่าจุดที่ ๓ ซึ่งมีระยะถึงปลายทั้ง ๒ ของเส้นตรงได้ส่วนสัมผัสกับระยะจากจุดนั้น ถึงจุดกำหนดทั้ง ๒

๑๒) กำหนดเส้นตรงได้ฉากจากมุมถึงด้านตรงข้าม ซึ่ง ๓ ด้านให้จึงสร้างรูปสามเหลี่ยม

๑๓) การปลี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีวงกลมประจักษ์ภายในและประกอบภายนอกได้ จึงได้แก่ให้เห็นว่าเส้นตรงที่ต่อจุดสัมผัสตรงข้ามของวงกลมประจักษ์ ได้ฉากซึ่งกันและกัน

๑๔) วงกลม ๒ วงเท่ากันเคลื่อนอยู่ในระหว่างเส้นตรง ๒ เส้นซึ่งตั้งได้ฉากแก่กันและสัมผัสกับวงกลมวงละเส้น ทั้งวงกลมทั้ง ๒ นั้นสัมผัสกันด้วย จึงหาว่าของจุดสัมผัส

๑๔) AB เป็นเส้นศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้ และ AC กับ BD เป็นระยะ ๓ เส้นขนานเดียวกันและตัดกันที่จุด E จึงแสดงให้เห็นว่าวงกลมซึ่งผ่านจุด D, E, C ตัดกับวงกลมที่กำหนดให้เป็นออร์โธโกนาล (Orthogonal)

๑๕) ถ้าวงกลม α วงล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมและสัมผัสกับด้านของรูปสี่เหลี่ยมวงละ ๓ ด้าน จึงแสดงให้เห็นว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งห้าอยู่บนเส้นเป็นวงกลม

๑๖) แบ่งเส้นตรง AB ที่กำหนดให้ ออกที่จุด C และ D ได้ส่วนสัมผัส $AB : AC = AC : AD$ จาก A ชีตเส้น AE ให้เท่ากับ AC จึงแสดงให้เห็นว่า BC กับ CD อยู่ตรงข้ามกับมุมเท่ากันที่ตรงจุด E

๑๗) กำหนดมุมยอด, รัศมีของด้านคู่ที่ประกอบมุมนั้น และเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมประกอบ ให้จึงสร้างรูปสามเหลี่ยม

๑๘) จากจุด O ชีตเส้น OP มาจุดเส้นตรงเส้นหนึ่งถึงจุด P มีจุด Q แบ่ง OP ออกได้รัศมี $OQ : OP$ มีค่าคงที่ จึงหาวิถีของจุด Q

๑๙) จากจุด O ชีตเส้น OP มาจุดเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้ ที่จุด P มีจุด Q แบ่ง OP ออกได้รัศมี $OQ : OP$ มีค่าคงที่ จึงหาวิถีของจุด Q

๒๑) วงกลม ๒ วงเท่ากันตัดกันที่จุด A และจุด B จากจุด C ในเส้นรอบวงของวงกลมวงใดวงหนึ่งขีดเส้นตั้งฉากกับ AB ตัดเส้นรอบวงของวงกลมอีกวงหนึ่งที่ O และ O' จงแสดงให้เห็นว่า O หรือ O' เป็นออร์โธเซนเตอร์ (Orthocentre) ของรูปสามเหลี่ยม ABC. จงแสดงให้เห็นทั้ง ๒ อย่าง

๒๒) วงกลมเท่ากัน ๓ วงผ่านจุดร่วมกันที่ A และผ่านกันที่อื่น คือจุด B, C และ D จงแสดงให้เห็นว่าจุด A, B, C และทั้ง ๔ จุดนี้ต่างก็เป็นออร์โธเซนเตอร์ของสามเหลี่ยมซึ่งบังเกิดขึ้นจากคู่จุดทั้ง ๓ ถึงกัน

๒๓) จากจุดที่กำหนดนอกวงกลมขีดเส้นตรงตัดเส้นรอบวง ปลายจุดเส้นรอบวงอีกข้างหนึ่งพอให้เส้นรอบวงที่ตัดกันแบ่งครึ่งเส้นนั้น และเมื่อไรจะขีดไม่ได้

๒๔) กำหนดฐาน, ระยะสูง และรัศมีของวงกลมประกอบให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม



๒๕) กำหนดฐานและมุมของด้านอีก ๒ ด้านให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม แล้วหาว่าจุดที่ตรงเส้นรอบวงจากปลายฐานไปถึงฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมยอดแห่งรูปสามเหลี่ยมนั้น

๒๖) กำหนดจุดศูนย์กลางข้างเคียงให้ ๓ จุด หรือจุดศูนย์กลางประกับจุดศูนย์กลางข้างเคียง ๒ จุดให้ ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม

๒๗) ถ้า O เป็นออร์โธเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม ABC จงแสดงให้เห็นว่า $AO^2 + BC^2 = BO^2 + CA^2 = CO^2 + AB^2 = d^2$. เมื่อ d เป็นเส้นผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมประกอบ

๒๘) ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางโค้งของวงกลมในซีก AB เป็นฐาน D เป็นจุดที่อยู่ในโค้งอีกข้างหนึ่งจงแสดงให้เห็นว่า $AD + DB : DC = AB : AC$

๒๙) D เป็นจุดหนึ่งในด้าน AC ของรูปสามเหลี่ยม ABC และ E เป็นจุดหนึ่งในด้าน AB ถ้า BD, CE แบ่งกันได้ส่วนเป็นอัตรา $๔:๑$ แล้ว D กับ E ก็แบ่ง CA กับ BA ได้อัตรา $๓:๑$

๓๐) ถ้าจุดใด ๆ ๒ จุดจากจุดกำหนด ๒ จุดในเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งอยู่ในระหว่างจุดทั้ง ๒ นั้นได้อัตราตามที่กำหนดให้ แล้ว เส้นตรงเส้นนั้นจะต้องผ่านจุดนอกจุดหนึ่งที่อยู่ที่ เป็นจุดที่ ๓ ด้วย

๓๑) สามมุมยอด A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ลงจุด
เส้นตรงมาตัดฐาน BC ที่ค้อยออกไปที่จุด D ให้ได้ AD เป็นเส้นพินัย
ส่วนกลางระหว่างส่วนแบ่งของฐาน

๓๒) วงกลม ๒ วงสัมผัสกันภายในที่จุด O และ AB
เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมใหญ่สัมผัสวงเล็กที่จุด C และ OA, OB ตัด
วงกลมเล็กที่จุด P และ Q จึงแสดงให้ เห็นว่า
 $OP : OQ = AC : CB$

๓๓) AB เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมขีดเส้นจาก A และ B
ไปพบเส้นรอบวงที่จุด C และตัดกับเส้นผ่านศูนย์กลางที่ตัดได้ฉาก
กับ AB ที่จุด D และ E ถ้า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ให้
แสดงให้ เห็นว่าสี่เหลี่ยมมุมฉาก OD, OE เท่ากับจัตุรัสบนเส้น
สัมผัส

๓๔) คอเส้นศูนย์กลาง AB ออกไปถึงจุด Y ขีด
ทังเส้น YD จาก Y มายังวงกลม จาก D ขีดเส้น DX ตั้งได้
ฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลาง AB ที่จุด X ให้แสดงให้ เห็นว่า X และ
Y แบ่ง AB ออกทั้งภายในและภายนอกเป็นอัตราที่เท่ากัน

๓๕.) ให้หาจุดซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม เมื่อขีด
จากจุดนั้นไปถึงจุดกำหนด ๒ จุดบนเส้นรอบวงกลมนั้น ให้ได้รัศมี
เท่ากับรัศมีที่กำหนดให้

๓๖) กำหนดฐานและเชิงเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดให้จึงสร้างรูปสามเหลี่ยม

๓๗) EA, EA' เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ๒ วงซึ่งสัมผัสกันภายนอกที่จุด E คือระยะ AB ของวงกลมแรก ไปสัมผัสกับวงกลมหลังที่ C' และต่อระยะ $A'B'$ ของวงกลมหลัง ออกไปสัมผัสวงกลมแรกที่จุด C ให้พิสูจน์ว่า

$$AB \cdot A'B' = AC \cdot B'C$$

๓๘) จากจุดกำหนดนอกวงกลมจะตัดเส้นตรงตัดวงกลมที่กำหนดนั้นออกเป็นจำนวนสอง

๓๙) จงแสดงให้เห็นว่าเส้นตรงที่ตัดจากจุดศูนย์กลางของวงกลมประกอบสามเหลี่ยมไปถึงมุมของรูปสามเหลี่ยมนั้นย่อมตั้งได้ฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยมพหุตามลำดับด้าน

๔๐) P เป็นจุดหนึ่งในเส้นรอบวงของวงกลมประกอบสามเหลี่ยม ABC และ PD, PE ตั้งได้ฉากกับด้าน BC, CA ตามลำดับ จงหาวิถีของจุดศูนย์กลางวงกลมประกอบสามเหลี่ยม PDE

๔๑) P เป็นจุด ๑ ในเส้นรอบวงของวงกลมประกอบสามเหลี่ยม ABC จงแสดงให้เห็นว่ามุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้นสัมผัส

(Simson) จาก P กับด้าน BC ย่อมเท่ากับมุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้น AP กับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมประกอบกับจุด A นั้น
 (๔๒) กำหนดฐาน มุมยอดและผลต่างระหว่างมุมฐาน ทั้ง ๒ ให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม

(๔๓) จงแสดงให้เห็นว่าเส้นรอบวงของวงกลมประกอบรูปสามเหลี่ยม < รูปที่เกิดขึ้นจากเส้นตรง ๓ คู่ตัดกันย่อมผ่านกันทุกจุดเดียว

(๔๔) จงแสดงให้เห็นว่าออร์โธเซนเตอร์ (Orthocentre) ของรูปสามเหลี่ยม < รูปที่เกิดขึ้นจากเส้นตรง ๓ คู่ตัดกันย่อมเรียงเป็นเส้นตรงเดียวกัน

(๔๕) รูปเหลี่ยมต่าง ๆ ซึ่งมีจำนวนด้านเท่ากันบรรจุอยู่ในวงกลม รูปที่เป็นรูปเหลี่ยมเวียนจะมีพื้นที่มากที่สุด และรอบเขตร ก็ยาวที่สุดด้วย

(๔๖) กำหนดจุด A และ B ตั้งในเส้นตรง PAB เมื่อเส้น PAB หมุนไปหาจุด P ที่ปลายเส้นย่อยกับที่ ให้ C เป็นจุดหนึ่งอยู่บนพรมรอบข้าง PAB หมุนยี่ จงพิสูจน์ว่าถ้าเราขีดเส้น CA และ CB รูปสี่เหลี่ยมคางหมู CADB จะเกิดขึ้น และวิถีของจุด D ก็จะเป็นวงกลมด้วย

๔๗) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าให้เท่ากับรูปสามเหลี่ยมนำจุดที่กำหนดให้

๔๘) กำหนดขนาด และที่ตั้งของมุมยอดแห่งรูปสามเหลี่ยม และผลบวกแห่งด้านประชิดมุมยอดให้ จงหาจุดของจุดศูนย์กลางวงกลมประกอบ

๔๙) ได้สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าขึ้นบนด้านของสามเหลี่ยม ABC ทุกด้าน ถ้าจุด X, Y และ Z เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมประจุในสามเหลี่ยมด้านเท่าเหล่านั้น จงแสดงให้เห็นว่าสามเหลี่ยม XYZ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วย

๕๐) จงประจูปสามเหลี่ยมลงในวงกลมที่กำหนดให้ และให้ด้าน ๒ ด้านผ่านจุด ๒ จุดที่กำหนด และด้านที่ ๓ ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย

๕๑) จงประจูปสามเหลี่ยมลงในวงกลมที่กำหนดให้ และให้ด้านทั้ง ๓ ผ่านจุด ๓ จุดที่กำหนดให้ด้วย

๕๒) A, B, X และ Y เป็นจุด ๔ จุดอยู่ในเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ O เป็นจุดอยู่ตรงที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก OA, OY เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก OB, OX ถ้าเขียนวงกลมหา O เป็นจุดศูนย์กลาง

กลางและรัศมีเท่ากับรัศมีพื้นที่วงกลางระหว่าง OA กับ OY จึง
พิสูจน์ว่าจุดทุกจุดที่เส้นรอบวงนูนเส้น AB และ XY จะอยู่ตรงข้าม
กับมุมที่เท่ากันเสมอ

๕๓) จงหาวิถีของจุดหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่โดยทำให้ระยะจาก
เส้นตรง ๒ เส้นซึ่งตัดกันได้รวดเร็วไปตามที่กำหนดให้

๕๔) ถ้า S, I และ I' เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ประกอบ, ประจุม, ข้างเคียง ของรูปสามเหลี่ยมตามลำดับ และ
 R, r และ r' เป็นรัศมีของวงกลมนั้นเหล่านั้นตามลำดับเช่นเดียวกัน
และถ้า N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ω จุด จงพิสูจน์ว่า

$$๑) (SI)^2 = R^2 - 2Rr$$

$$๒) (SI')^2 = R^2 + 2Rr'$$

$$๓) NI = \frac{R}{2} R - r$$

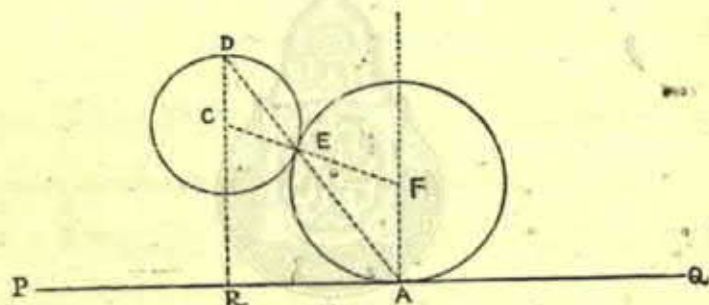
$$๔) NI' = \frac{R}{2} R + r'$$

บทแทรก

ว่าด้วยการสร้างวงกลมบางอย่าง

บทแทรกที่ ๑๒

จงเขียนวงกลมให้สัมผัสกับวงกลมที่กำหนดให้ และสัมผัสกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ จุดกำหนดจุดหนึ่งด้วย
(เขียนวงกลมให้สัมผัสกับวงกลมและเส้นตรงด้วย)



สมมติให้ C เป็นวงกลม PQ เป็นเส้นตรงซึ่งกำหนดให้ และกำหนดจุด A อยู่ภายในเส้นตรง PQ นี้
จะต้องสร้างวงกลมให้สัมผัสกับวงกลม C และสัมผัสกับเส้นตรง PQ ครึ่งจุด A นั้นด้วย

วิธีสร้าง ม.วิธีสร้างอยู่ ๒ วิธี

วิธี ๑. ที่จุด A ขีดเส้น $\perp PQ$ จาก C ซึ่งเป็น
ศูนย์กลางวงกลมขีดเส้นตรง $\perp PQ$ ที่ R แล้ว
ต่อเลยเป็นเส้นผ่านจุดศูนย์กลางไปตัดเส้นรอบวงที่ D
ขีดเส้นจาก D (จุด D อยู่ข้างบน) มาถึง A ตัด
วงกลม C ที่ E ขีดเส้น CE ต่อเลยไปตัดเส้น
ตั้งฉากจาก A ที่ F ไซ้ F เป็นศูนย์กลาง
FA เป็นรัศมีเขียนวงกลม

วงกลม F จะเป็นวงกลมที่ตัดข้องการ

พิสูจน์

$$\therefore \widehat{DEC} = \widehat{FEA} \quad (\text{มุมตรงข้าม})$$

$$\text{แต่ } \widehat{CED} = \widehat{CDE} \quad (\text{มุมตรงข้ามด้านเท่า})$$

$$\text{และ } AF \parallel RD \quad (\text{ตั้งฉาก } \perp PQ)$$

$$\therefore \widehat{CDE} = \widehat{FAE} \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$\therefore \widehat{FEA} = \widehat{FAE} \quad \text{ด้วย}$$

$$\therefore FE = FA \quad (\text{ด้านตรงข้ามมุมเท่า})$$

$\therefore$ วงกลม F สัมผัส PQ ตรง A และสัมผัสวงกลม
ตรง E ด้วย $\therefore AF \perp PQ$ และ CF คือ
จาก $\odot$ เลยออกไป (สร้าง)



$$\therefore H_G = H_A \quad (\text{ต้านตรงข้ามมุมเท่า})$$

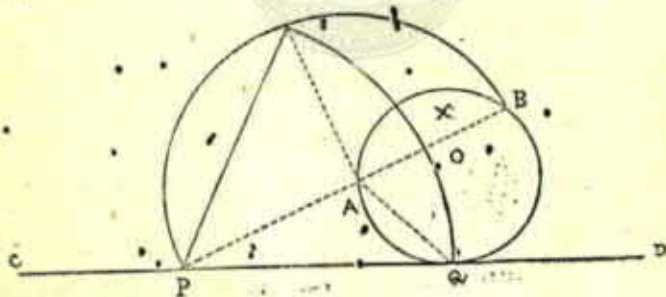
$\therefore$ วงกลม H สัมผัสกับ PQ ตรง A และสัมผัส

วงกลม C ตามต้องการ

บทแรกที่ ดัชนี

จงเขียนวงกลมผ่านจุดกำหนด ๒ จุด และสัมผัสกับเส้นตรงที่
กำหนดให้ด้วย

(เขียนวงกลมผ่าน ๒ จุดและสัมผัสเส้นกำหนด)



สมมติให้ CD เป็นเส้นตรง A และ B เป็นจุดซึ่งกำหนดให้
ให้เขียนวงกลมผ่าน A และ B และสัมผัสกับเส้น
ตรง CD ด้วย

วิธีสร้าง ขึงเส้นตรง AB ต่อเลยไปพบ CD ที่ P
(เมื่อ AB ไม่ขนานกับ CD) ตัด PB ที่ X
ให้ได้ PX เป็นสัมผัสส่วนกลางระหว่าง PA กับ
 PB (หาสัมผัสส่วนในระหว่าง ๒ เส้นที่กำหนดให้)
ใน PD (หรือ PC) ตัดได้ PQ ให้เท่ากับ PX
แล้วเขียนวงกลมผ่าน A, B และ Q (เขียนวงกลม
ผ่าน ๓ จุดได้)

วงกลม ABQ นี้จะเป็นวงกลมที่ผ่าน A และ
 B ทั้งสัมผัสกับ CD ตามความประสงค์

พิสูจน์ $\because PX$ เป็นสัมผัสส่วนกลางระหว่าง PA
กับ PB (สร้าง)

$$\therefore PA : PX = PX : PB$$

$$\text{หรือ} \quad PX^2 = PA \cdot PB$$

$$\text{แต่} \quad PX = PQ \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore PA \cdot PB = PQ^2 \quad \text{ด้วย}$$

แต่วงกลม O ได้ผ่านจุด A, B และ Q แล้ว

$\therefore PQ$ เป็นทังเก้นต์ของวงกลม O

(เส้นนั้นคูณส่วนนอก = (เส้นจต) เส้นจตเป็นทังเก้นต์)

$\therefore$ วงกลม O สัมผัส CD และผ่าน A กับ B ตาม
ความประสงค์แล้ว

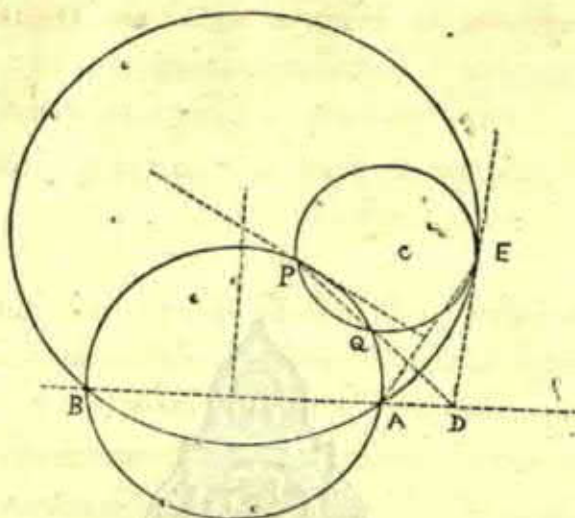


ในบทแทรกที่ ๑๓ นั้นเมื่อขีดเส้น AB ปรากฏว่า AB ขนาน
กับเส้นตรงกำหนดเส้น จะสร้างอย่างใดก็ตามก็ยังไม่เป็นผล
จำเริญ แต่ใจที่ยังพบได้ โดยกว้างขวางมิได้จำกัดว่าจุด A กับ
จุด B จะอยู่แห่งใด เมื่อขีดแนว AB อาจขนานกับเส้นกำหนด
ก็ได้ ไม่ขนานก็ได้ ใจที่ยังมิได้ปฏิเสธว่าถ้าขีดแนว AB ไป
ขนานกับเส้นกำหนดแล้วจะทำได้ ถ้าเช่นนั้นก็ต้องหมายความว่า
จุด A กับจุด B จะอยู่อย่างไรก็ต้องทำได้เช่นนี้ ดังนั้นก็
ขอให้ผู้ที่จะศึกษาวิชาเรขาคณิตและพีชคณิต จะเป็นผลจำเริญ
หวังว่าคงไม่ลำบากนัก จึงมิได้เขียนไว้ในที่นี้

บทแทรกที่ ๑๔

จะเขียนวงกลมให้ผ่านจุดกำหนด ๒ จุด และให้สัมผัส
กับวงกลมที่กำหนดให้ด้วย

(เขียนวงกลมผ่านจุด ๒ จุดและสัมผัสกับวงกลม)



สมมติ ให้จุด A, B เป็นจุดกำหนด ๒ จุด และ C เป็นวงกลม
ที่กำหนดให้ ให้เขียนวงกลมผ่านจุด A และ B และ
ให้สัมผัสกับวงกลม C ที่กำหนดให้ด้วย

วิธีสร้าง เขียนวงกลมผ่าน A และ B ให้ตัดกับวงกลม C
ที่จุด P และ Q ชีตเส้น PQ แล้วต่อ PQ ออก
ไปพบกับเส้น AB เมื่อต่อออกไปแล้วที่ D จาก D
ชิตทั้งเส้น DE ให้สัมผัสกับวงกลม C ที่ E แล้ว
เขียนวงกลมผ่านจุด A และ B และผ่าน E ด้วย

วงกลม ABE จะเป็นวงกลมที่ตัดขวาง

พิสูจน์ $\because DA \cdot DB = DP \cdot DQ = DE^2$ (ระบาศก์กัน
ภายนอกวงกลม, เส้นนั้นคูณส่วนนอก = (ทั้งเส้น) 2)
 $\therefore$ วงกลมที่เขียนผ่านจุด A, B และ E เป็นวงกลมที่
ตัดขวาง เพราะปรากฏว่าจุด E เป็นจุดสัมผัสด้วย



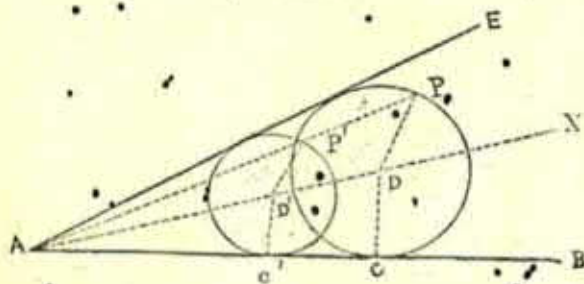
[จงคิดวิธีสร้างและพิสูจน์ ในเมื่อเส้นแบ่งครึ่ง AB คงได้
ฉาก, ต่อดูเลยไปผ่านจุดศูนย์กลางวงกลมกำหนดพอยต์ จะทำได้
อย่างไร]

บทแทรกที่ ๑๕

จงเขียนวงกลมผ่านจุดกำหนด P และให้สัมผัสกับเส้น

ตรง AB, AE ที่กำหนดให้

(เขียนวงกลมผ่านจุด ๑ และสัมผัสกับ ๒ เส้นให้)



สมมติให้ AE, AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ และ P เป็น
จุดกำหนดให้ ให้เขียนวงกลมผ่านจุด P และสัมผัสกับ
 AE และ AB ด้วย

วิธีสร้าง ขีด AX แบ่งครึ่ง BAE บรรดาวงกลมที่สัมผัสกับ
 AE, AB จุดศูนย์กลางจะต้องอยู่ในแนว AX ทั้งสิ้น
(จุดวัดห่างจากเส้นไขว้เท่ากัน) จาก D' ในเส้นตรง
 AX เขียนวงกลมให้สัมผัส AE, AB แล้วขีดเส้นตรง
 AP ตัดวงกลม D' ที่ P' ขีดเส้น $D'P'$ จาก P
ขีดเส้นตรง PD ให้ขนานกับ $D'P'$ ตัด AX ที่ D
เอา D เป็นจุดศูนย์กลาง DP เป็นรัศมีเขียนวงกลม
วงกลม D จะเป็นวงกลมที่ต้องการ

พิสูจน์ ขีด DC และ $D'C'$ ให้ $\perp AB$
 $\therefore DC \parallel D'C'$
 $\therefore \triangle AC'D'$ กับ $\triangle ACD$ เป็น $\triangle$ คล้ายกัน
 $\therefore DC : D'C' = AD : AD'$
และ $\triangle AD'P'$ กับ $\triangle ADP$ ก็เป็น $\triangle$ คล้ายกัน
เช่นเดียวกัน

$$\therefore DP : D^1 P^1 = AD : AD^1$$

$$\therefore DC : D^1 C^1 = DP : D^1 P^1 \quad \text{ด้วย}$$

$$\text{แต่ } D^1 C^1 = D^1 P^1 \quad (\text{รัศมีวงกลมเดียวกัน})$$

$$\therefore DC = DP \quad \text{ด้วย}$$

DC คือรัศมีวงกลม D เขียนให้สัมผัสกับเส้นตรง AE

และ AB เมื่อเทียบกับ DP ด้วยแล้ว ก็เป็นอันเห็น

ได้ว่าวงกลม D ผ่านจุด P และสัมผัสกับ AE, AB

ด้วยตามต้องการ



[จงหาวิธีสร้างและพิสูจน์ ให้ ได้ ผลจริง ในเมื่อเส้น

AB, AE ที่กำหนดให้ชนกัน]



แบบฝึกหัดที่ ๒๒

ใช้กระดาษตาราง

๑) กำหนดวงกลมให้ ๑ วง มีรัศมียาว ๑๐ เส้นยัดวาง

อย่างฉากกำหนด จงเขียนวงกลมให้สัมผัสกับวงกลมที่กำหนด

และสัมผัสกับแกนราบ (แกน X) ที่จุด (๒๐ ; ๐)

แล้วแสดงว่าอาจเขียนวงกลมให้เท่ากันได้ ๒ วง แล้ว

แล้วคำนวณหารัศมีของวงกลมซึ่งอยู่ในจตุรัสคดที่ ๑ และพิกัดของจุดที่สัมผัสกับวงกลมกำหนดให้มันด้วย

๒) กำหนดวงกลมให้ ๑ วงรัศมียาว ๑๐ และศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จงเขียนวงกลมให้สัมผัสกับวงกลมกำหนดตรงจุด $(๒; ๘)$ และสัมผัสกับแกนตั้ง (แกน Y) ด้วย

แล้วแสดงให้เห็นว่าอาจเขียนวงกลมเช่นนี้ได้ ๒ วง เมื่อเขียนได้แล้วจงคำนวณหารัศมี และจุดสัมผัสกับแกนตั้ง (แกน Y)

๓) จงเขียนจตุรัสคดของวงกลมซึ่งมีรัศมียาว ๒ นิ้ว แล้วประจุดวงกลมลงในจตุรัสคดนั้น แล้วจงแสดงว่ารัศมีของวงกลมประจุดเป็นตรรกฐาน $r^2 + ๔r - ๔ = ๐$ และคำนวณให้ทราบว่ารัศมียาวเท่าใด แล้ววัดสี่มุมอีกครั้งหนึ่ง

๔) จงแสดงให้เห็นว่าอาจเขียนวงกลมได้ ๒ วงให้สัมผัสกับแกนพิกัด และผ่านจุด $(๒ \text{ นิ้ว}; ๒ \text{ นิ้ว})$ ด้วย และพิสูจน์ว่ารัศมีของวงกลมทั้ง ๒ เป็นจำนวนตรรกฐาน $r^2 + ๔r\sqrt{๒} - ๘ = ๐$ แล้ววัดรัศมีของวงกลมในพิกัดที่เล็กที่สุด

๕) ขีดเส้นจากจุด $(๒ \text{ นิ้ว}; ๐)$ ถึง $(๐; ๓ \text{ นิ้ว})$ และขีดจากจุด $(๓ \text{ นิ้ว}; ๐)$ ถึงจุด $(๐; ๒ \text{ นิ้ว})$ แล้วเขียน

วงกลมให้สัมผัสกับเส้นที่ขนานและให้ผ่านจุดกำหนดด้วย

๖) จงสร้างวงกลมเท่าๆกัน ๓ วงลงในรูปสามเหลี่ยม
ด้านเท่าซึ่งมีด้านยาว ๓ นิ้วให้สัมผัสกับด้านของรูปสามเหลี่ยม ๒
ด้าน และวงกลมที่เขียนนอก ๒ วง

ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมเหล่านี้ จงพิสูจน์ว่า
 $r (ทั้ง ๖๐^{\circ} + ๙) = \frac{3\pi}{10}$ แล้วหาค่าของ r (เขียนตามตำแหน่ง)

๗) จงเขียนวงกลมเท่าๆกัน ๓ วงลงในวงกลมซึ่งมี
รัศมียาว ๒ นิ้ว วงกลม ๓ วงต่างก็สัมผัสกันและสัมผัสกับวงกลม
ที่เขียนยาว ๒ นิ้วนั้นด้วย

ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมที่เท่าๆกัน จงพิสูจน์ว่า
 $r (๑ + โคไซน์ ๖๐^{\circ}) = ๒$ แล้วหาค่าของ r (เขียนเพียง ๓
ตำแหน่ง)

บทแทรก

ว่าด้วยค่ามากที่สุดและน้อยที่สุด

(Maxima and Minima)

เมื่อ เส้น, มุม, แสง, เปลี่ยนแปลงไปตามข้อที่
กำหนดให้ จะเห็นว่าค่าของมันเริ่มเปลี่ยนแปลงจากน้อยไปหามาก
เมื่อขึ้นไปถึงที่สุดแล้วก็กลับเปลี่ยนแปลงจากมากมาหือน้อย ใน

การเปลี่ยนแปลงจากน้อยไปหามากเช่นนี้เมื่อถึงที่สุด ตรงนั้นให้
เรียกว่า “ค่ามากที่สุด” (Maxima) หรือของนั้นเปลี่ยนแปลง
จากมากมาหาน้อยจนถึงที่สุด ตรงจุดที่ติดนั้นให้เรียกว่า “ค่าน้อย
ที่สุด” (Minima)

ในที่นี้จะกล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงค่ามากที่สุดและน้อยที่
สุด โดยสิ่งนั้นเปลี่ยนแปลงถึงระดับสูงสุดเท่าใดหรือต่ำที่สุดเท่าใด
เกินเต็มหรือลงเต็มที่ แต่ครั้งแรกทีเดียวหาได้เปลี่ยนแปลงขึ้นไป
นิดหนึ่งแล้วกลับลงเสียหนึ่ง ภายหลังกลับขึ้นสูงไปกว่าครั้งแรก
อีกเช่นนี้

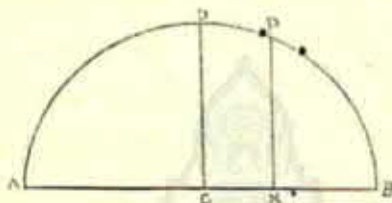
ข้อที่ควรสังเกตมีอยู่ ๒ อย่างสำหรับการเปลี่ยนแปลงเช่นนี้

ข้อ ๑ อนาคตในเรขาคณิตจะเปลี่ยนขึ้นไปถึงค่ามากที่สุด หรือ
เปลี่ยนลงมาถึงค่าน้อยที่สุดที่ตรงจุดกลับ (turning point) ภาพ
เรขาคณิตแสดงค่าของทั้ง ๒ ข้างแห่งจุดกลับนี้ หรือจะเรียกว่าภาพ
ข้างซ้ายและข้างขวาของจุดก็ได้ ย่อมมีภาพเหมือนกันหรือค่าเท่ากัน
เป็นเครื่องสังเกตทำให้ทราบได้ว่า จุดนั้นเป็นจุดกลับหรือเป็นจุด
ที่ค่ามากที่สุดหรือค่าน้อยที่สุด เช่นตัวอย่างในบทแรกที่ ๑๖ นี้

บทแทรกที่ ๑๖

จงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ (แบ่งเส้น) เพื่อให้ได้เหลี่ยม
มุมฉากภายในด้วยส่วนแบ่งทั้ง ๒ นัยพื้นที่มากที่สุด

(แบ่งเส้น, ผลคูณส่วนแบ่งมากที่สุด)



สมมติให้ AB เป็นเส้นตรงที่เรากำลังแบ่ง

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C ขยายครึ่งวงกลมบน AB

จากจุดใด ๆ เช่น X ในเส้นตรง AB ขีดเส้น $XP \perp AB$

ตัดรอบวงที่จุด P แล้วให้สังเกตให้เห็นว่า PX จะตั้ง

อยู่เหนือใด AX, XB จึงจะมีค่ามากที่สุด

พิสูจน์ $AX \cdot XB = PX^2$ (ตัวจริงที่รู้ดี = □ ฉาก)

แต่ PX ตั้งฉากกับ AB และขีดไปจุดเพียง

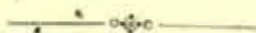
เส้นรอบวง

∴ PX จะยาวที่สุดได้ก็เมื่อ PX เลื่อนขึ้นไปที่สูงที่สุด

∴ จุด X ต้องเลื่อนเข้ามาถึงกลางเส้นตรง AB แล้ว

PX จึงจะจุดโค้งที่สูงที่สุด ได้พิสูจน์แล้วว่า

$AX \cdot XB = PX^2$ เมื่อ PX ยาวที่สุด $AX \cdot XB$ ก็มีความมากที่สุด ในเวลา X แบ่งครึ่ง AB

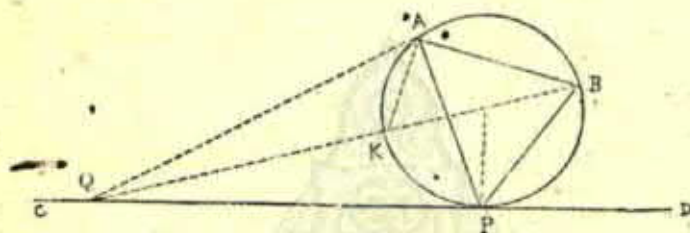


ข้อ ๒ เราอาจทราบขนาดในเรขาคณิตว่า จะมีความมากที่สุดหรือค่าน้อยที่สุดได้ อีกวิธี ๑ โดยจำกัดขนาดสิ่งที่จะหาขึ้นให้ อยู่ในกรอบหรือระหว่างจำนวน ๒ จำนวน หรือจำกัดสิ่งใดไว้ ให้เป็นหลัก เช่น จำกัดความยาวของเส้นตรง แล้วให้หาขนาดของมุมอื่นอยู่ตรงข้ามเส้นนั้นหาค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุดดังนี้ เป็นการพอที่จะหาจุดสูงหรือต่ำได้ ถ้าจะไม่จำกัดอะไรเสียเลยสร้างไปตามบุญตามกรรม เช่นนั้นก็เป็นการยาก ที่จะทำให้เห็นผล แห่งความจริง ได้ จึงคิดว่าอย่าง โนบะแรกต่อไปนี้

สิ่งที่จำกัดหรือกำหนดไว้บางอย่างอาจได้ผล ๒ อย่างบ้าง ไม่ได้เลยบ้าง หรือบ้างที่ก็เหมาะได้ลักษณะเฉพาะอย่างเดียว สิ่งที่จำกัดไว้ แล้วได้ ผลแต่อย่างเดียวนั้นจะเป็นค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุดของขนาดที่เรากำลังสร้าง

บทแทรกที่ ๑๗

กำหนดเส้นตรงไว้ ๒ เส้น ๆ ๑ มีขนาดจำกัด อีกเส้น ๑ ไม่จำกัดขนาด ให้หาจุด ๑ ในเส้นตรงที่ไม่จำกัดขนาด ทำมุมตรงจุดนั้นให้อยู่ตรงข้ามกับเส้นที่จำกัดขนาดเป็นมุมใหญ่ที่สุด
(มุมขนาดใหญ่นี้สุดตรงข้ามเส้นที่สั้น)



นิมิต ให้ AB เป็นเส้นตรงจำกัดความยาว CD เป็นเส้นตรงอีกเส้น ๑ ไม่จำกัดความยาว

• ให้หาจุด ๑ ในเส้นตรง CD ถ้าสร้างมุมตรงจุดนั้นให้อยู่ตรงข้ามกับ AB จะเป็นมุมใหญ่ที่สุด

วิธีสร้าง เขียนวงกลมผ่านจุด A และ B เฉพาะให้ โค้งของวงกลมสัมผัส CD ที่จุด ๑ (P) ด้วย (เขียนวงกลมผ่าน ๒ จุด และสัมผัสเส้นกำหนด) ชีตเส้น AP และ BP

มุม $\widehat{APB}$ ชัดตรงข้ามกับ AB นี้จะเป็นมุมใหญ่

ที่สุดตามประจักษ์

พิสูจน์

ขีดเส้น BQ มาจด CD ที่ Q ตัดเส้นรอบวงที่ K ขีด

เส้น KA และ AQ

$\therefore \widehat{AKB} > \widehat{AQB}$ (มุมนอก $\Delta >$ มุมในตรงข้าม)

แต่ $\widehat{AKB} = \widehat{APB}$ (มุมในซีกเดียวกัน)

$\therefore \widehat{APB} > \widehat{AQB}$ ด้วย

และ $\widehat{APB}$ อยู่ตรงข้ามกับ AB และอยู่ใน CD และ

โค้งของวงกลมนี้ตัด CD แต่จุดเดียว

$\therefore \widehat{APB}$ เป็นมุมใหญ่ที่สุดในเส้น CD และตรง

ข้ามกับ AB ที่กำหนดนั้น



หมายเหตุ ก่อนจะหาจุดใน CD ซึ่งเกิดมุมตรงจุดนี้ตรงข้ามกับ AB เถามุมที่กำหนดให้แน่นอน

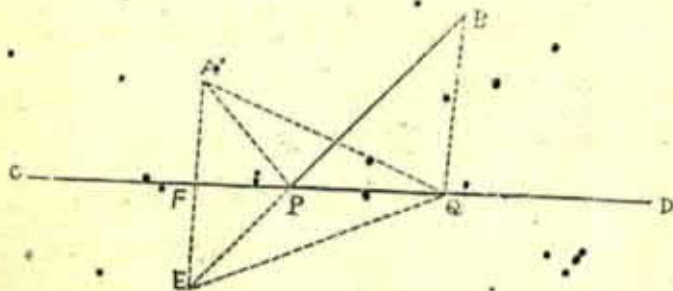
บน AB เขียนซีกหนึ่งทำให้มุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้ (ตามเรขาคณิตที่ ๒๔) ถ้าโค้งของซีกหนึ่งตัด CD จะได้จุด ๒ จุด เกิดมุมตรงข้ามกับ AB ๒ มุมเท่ามุมที่กำหนดให้ แต่ไม่ใช่มุม

ใหญ่ที่สุดตามข้อถาวร บางทีโค้งของเช็กเมนต์ไม้ค้ำ CD เสียเลย ก็คงไม่ได้มุมตามข้อถาวรอีก ทั้งนี้ก็เพราะมุมที่กำหนดไม่เหมาะสม จึงทำให้ได้มากถึง ๒ หรือไม่ได้เลย ที่เราจะได้มุมใหญ่ที่สุด ต้องพยายามกำหนดมุมและเขียนเช็กเมนต์ให้โค้งสัมผัส CD พอเหมาะ จึงจะได้ลักษณะเดียวสมบูรณ์ที่สุด ทางที่ดีควรเขียนวงกลมให้รอบอย่างในบทแทรกที่ ๑๓ จึงจะจำไว้

บทแทรกที่ ๑๔

กำหนดเส้นตรงให้เส้น ๑ กับจุด ๒ จุดอยู่ข้างเส้นกำหนดข้างเดียวกัน จงหาจุด ๑ ภายในเส้นตรงกำหนดนี้ ซึ่งถ้าลากเส้นตรงจากจุดกำหนด ๒ จุดมายังจุดนั้น ให้ผลบวกของเส้นทั้ง ๒ มีค่าน้อยที่สุด

(หาจุดในเส้นได้ผลบวกของเส้นจาก ๒ จุดค่าน้อยที่สุด)



สมมติ ให้ CD เป็นเส้นตรงไม่จำกัดความยาว และจุด A กับจุด B เป็นจุดกำหนด ๒ จุดอยู่ข้างเดียวกันของ CD ให้หาจุด x ใน CD (เช่น P) จะเพาะให้ $AP+PB$ มีค่าน้อยที่สุด

วิธีสร้าง จาก A ขีด $AF \perp CD$ แล้วต่อ AF ออกไปให้ยาวเท่ากับ AF ถึงจุด E ขีดเส้น EB ตัด CD ที่ P ขีดเส้น AP

$AP+PB$ นี้จะมีค่าน้อยที่สุด

พิสูจน์ กำหนดจุด Q ลงใน CD แล้วขีด AQ, BQ และ EQ ดังนั้น $\triangle AFP$ กับ $\triangle EFP$ เป็น $\triangle$ เท่ากันสนิท ($\triangle ๒$ ด้านกับมุมในระหว่างเท่า)

$$\therefore AP = EP$$

โดยทำนองเดียวกัน $AQ = EQ$ และใน $\triangle EQB$

$$\therefore EQ + QB \triangleq EB \quad (๒ \text{ ด้าน } \triangle > \text{ ด้าน } ๑)$$

$$\therefore AQ + QB \text{ ก็ } > EB \text{ ด้วย}$$

$$\text{แต่ } EB = EP + PB = AP + PB$$

$$\therefore AQ + QB > AP + PB \text{ ด้วย}$$

โดยทำนองนี้ $AP + PB$ มีค่าน้อยที่สุด



จึงตั้งแถวขีฟัสจน ในบทนี้ไว้ เพื่อนำไปใช้ ในเวลา

ต้องการ

$$A \hat{P} F = E \hat{P} F \quad (\Delta \text{ เท่ากันสนิท})$$

$$= B \hat{P} D \quad (\text{มุมตรงข้าม})$$

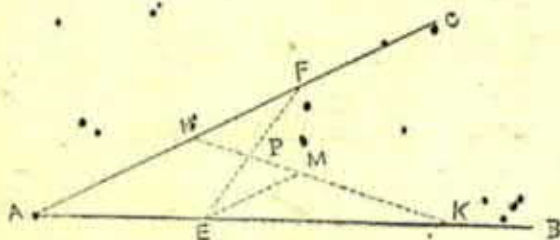
ถ้า $A \hat{P} F + P \hat{B}$ มีค่าน้อยที่สุด

$A \hat{P}$ กับ $P \hat{B}$ ย่อมกระทำมุมกับ CD ตรงจุดนั้น
มีขนาดเท่ากันเสมอ

บทแทรกที่ ๑๔

กำหนดเส้นตรง ๒ เส้นตัดกัน และจุด ๑ อยู่ ในระหว่าง ๒
เส้นนี้ จึงแสดงให้เห็นว่าบรรดาเส้นตรงทั้งหลายซึ่งผ่านจุดนั้นและตัด
เส้นตรงทั้ง ๒ นั้น เส้นใดก็จุดกำหนดแบ่งครึ่ง ย่อมประกอบ
กับเส้นกำหนดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านน้อยที่สุด

(จัดเส้นให้จุดกำหนดแบ่งครึ่งทำให้ Δ มีพื้นที่น้อย)



สมมติ ให้ AC กับ AB ตัดกันที่จุด A และให้ P เป็นจุด
อยู่ในระหว่าง ๒ เส้นนี้ ให้ EF เป็นเส้นตรงผ่านจุด P
และถูก P แบ่งครึ่งทั้งคัตเส้น AB และ AC ด้วย

ให้แสดงว่า $\triangle AEF$ มีพื้นที่น้อยที่สุด

พิสูจน์ ขีดเส้นตรง HK ผ่านจุด P ถึง AC และ AB อีก
เส้น ๑ แต่ P ไม่ได้ขยับถึงกลางเส้นนี้ จาก E ขีดเส้น
 $EM \parallel AC$ ดังนั้น $\triangle HPE \equiv \triangle EMF$
($\triangle ๒$ มุมกลับด้าน ๑ เท่า)

$$\therefore \triangle HPE < \triangle KPE$$

$$\therefore \triangle HPE + \square AHPE < \triangle KPE + \square AHPE$$

$$\text{ก็คือ } \triangle AEF < \triangle AKH$$

โดยทำนองนี้ $\triangle AEF$ ซึ่งเส้น EF ถูก P แบ่งครึ่ง
ประกอบเป็น $\triangle$ มีพื้นที่น้อยที่สุดจริง

แบบฝึกหัดที่ ๒๓

สำหรับค่ามากที่สุดและน้อยที่สุด

๑) กำหนดด้าน ๒ ด้านให้ จงหารูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี
พื้นที่มากที่สุด เมื่อรูปสามเหลี่ยมมีด้าน ๒ ด้านเท่ากับด้านทั้งสอง
ที่กำหนดให้

จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่มากที่สุด เมื่อกำหนด

$a = ๖$ ซม. และ $b = ๔$ ซม.

๒) กำหนดฐานและพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมให้ จงแสดง
ให้เห็นว่าบรรดารูปสามเหลี่ยมที่สร้างได้ตามสิ่งกำหนดนั้น รูปที่เป็น
สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีความยาวด้านรวมกันน้อยที่สุด

แล้วคำนวณขอบเขตของรูปสามเหลี่ยมที่สั้นที่สุด ซึ่งมี
ฐานยาว ๒, ๐ นิ้ว และพื้นที่ ๓, ๑๒ ตารางนิ้ว

๓) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้ มีพื้นที่มากที่สุด ซึ่งมี
ฐานยาว ๑๐ ซม. ให้ มีมุมยอดขนาด ๖๐° แล้วคำนวณหาพื้นที่

๔) ถ้าเขียนวงกลมให้ มีศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดแกน
พิกัด และมี ๑, ๕ นิ้ว แล้วจุดบนเส้น AB จากจุด $(๓$ นิ้ว ; $๐)$ ถึงจุด
 $(๐ ; ๓$ นิ้ว) จงหาจุด ๑ ใน AB ซึ่งตัดทแยงเส้นจากจุดนั้นมายัง

วงกลม จะทำมุมกับเส้น AB มีขนาดใหญ่ที่สุด แล้ววัดขนาดของมุมนั้น

๕) ไม่ตรงกันหนึ่ง เดือนอยู่โดยเพิ่มความยาวของมัน ในระหว่างไม้บรรทัดอีก ๒ อันซึ่งตั้งได้ฉากแก่กัน ไม่ตรงอันนั้นจะเคลื่อนไปถึงตรงไหน จึงจะตั้งกับไม้บรรทัด ๒ อันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมากที่สุด

๖) จงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออก ๒ ส่วน ให้ได้ผลบวกของจตุรด้านส่วนแบ่ง

ก) เท่ากับจตุรด้านที่กำหนดให้

ข) น้อยที่สุด

๗) จงขีดเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดที่วงกลม ๒ วงตัดกัน และให้เฉียดไปจรดรอบวงทั้ง ๒ ข้าง

ก) ให้เส้นที่ขีดนั้นยาวเท่าเส้นตรงที่กำหนดให้

ข) ให้เส้นที่ขีดนั้นยาวที่สุด

๘) จุด A และ B ต่างก็อยู่ห่างจากจุดกำหนด ๒ นิ้ว จงเขียนวงกลมให้สัมผัสกับแกน X และแกน Y ที่จุด A และ B

ก) จงหาจุด O ในโค้งใหญ่ AB ซึ่งให้ได้ผลบวกของพิกัดมีความมากที่สุด

ข) จงหาจุด O ในโค้งเล็ก AB ซึ่งให้ได้ผลบวกของพิกัดค่าน้อยที่สุด

ในทุก ๆ $\frac{1}{2}$ ของวงกลมจะพบจุดกึ่งกลางแล้ววัดต่อไป

๙) ให้วัดเส้นตรงจากจุดกำหนด ๓ จุดไปถึงโค้งของวงกลมที่กำหนดให้ จึงพบว่าเมื่อเส้นตรง ๒ เส้นนี้ทำมุมกับทั้งเส้นตรง $\frac{1}{2}$ เส้นนี้แล้วผลบวกของมุมจะมีค่าน้อยที่สุด

๑๐) แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างโดยกำหนดมุมยอดและความสูง ให้รูปสามเหลี่ยมนี้จะมีพื้นที่น้อยกว่าทุกรูป

ถ้ากำหนดมุมยอด 60° และความสูง ๖ ซม. รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่น้อยที่สุดนั้นจะมีพื้นที่เท่าใด แล้วหาขอบเขตด้วย

๑๑) กำหนดทั้งเส้น ๒ เส้นนี้มาจากจุดเดียวกันสัมผัสกับวงกลมที่กำหนดให้ จึงวัดทั้งเส้นนี้ ออกเส้น ๑ เส้นนี้วัดวงกลมตรงโค้งระหว่างทั้งเส้นทั้งสองนั้น จะพบว่ารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นด้วยทั้งเส้น ๒ เส้นนี้กับทั้งเส้นที่กำหนดมุมพื้นที่มากที่สุด

๑๒) แสดงว่าหาสามเหลี่ยมที่มีมุมยอดใหญ่ที่สุดเมื่อฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาว ๑,๖ นิ้ว และพื้นที่เท่ากับ ๑,๒ ตารางนิ้ว

๑๓) A และ B เป็นจุด ๒ จุดอยู่ภายในวงกลมที่กำหนดหรืออยู่ภายนอกวงกลมทั้งคู่ จงหาจุดอีกจุด ๑ ที่เส้นรอบวงอันเกิดมุมตรงข้ามกับเส้น AB ใหญ่ที่สุด

๑๔) A และ B เป็นจุดอยู่ในแกน X ห่างจากจุดกำเนิด O $๐,๘$ นิ้วและ $๑,๘$ นิ้วตามลำดับ จงแสดงเรขาคณิต P ในแกน Y ซึ่งได้มุม APB ใหญ่ที่สุด แล้วคำนวณหาความยาวของ OP และวัดมุมที่ใหญ่ที่สุดนั้น

๑๕) สี่เหลี่ยมทั้ง ๑ มี ๓ ท่อน ๆ ๑ ยาว ๔๕ ศอก ๓๒ ศอก ๔๕ ศอกตามลำดับ จงหาความยาวระหว่างจุด ๆ ๑ บนฝั่งข้าง ๑ กับสี่เหลี่ยมมุมตรงจุดนั้นตรงข้ามกับสี่เหลี่ยมท่อนกลาง ใหญ่ที่สุด

๑๖) จากจุด P ภายนอกวงกลมซึ่งมี C เป็นจุดศูนย์กลางขีดเส้นตรงตัดวงกลมที่ A และ B ให้สามเหลี่ยม ACB มีพื้นที่มากที่สุด

จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มากที่สุดที่เราเขียนได้ เมื่อรัศมีของวงกลม ๖ ซม. และแสดงว่าพื้นที่รูปสามเหลี่ยมนี้เป็นอิสระไม่ว่าระยะระหว่าง C กับ P จะห่างไกลกันเท่าใด

๑๗) จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่มากที่สุดบรรจุอยู่ในวงกลมอันมีรัศมียาว $๕,๕$ ซม.

๑๘) A และ B เป็นจุดกำหนด ๒ จุดอยู่ภายนอก
วงกลมจงหาจุด P ที่เส้นรอบวงซึ่งได้ $AP^2 + PB^2$ มีค่าน้อยที่สุด

๑๙) เช็กเส้นทแยงของวงกลมที่มี AB เป็นฐาน จงหา
จุด C ในโค้งของเส้นทแยงให้ ได้ผลบวกของ AC, BC มีค่า
มากที่สุด

๒๐) รูปสามเหลี่ยมทั้งหลายซึ่งมีจุดอยู่ในวงกลมเดียวกัน
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าย่อมมีรอบเขตร้อยยาวที่สุด

๒๑) รูปสามเหลี่ยมทั้งหลายที่มีจุดอยู่ในวงกลมที่กำหนด
ให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าย่อมมีพื้นที่มากที่สุด

๒๒) รูปสามเหลี่ยมทั้งหลายที่มีจุดอยู่ในรูปสามเหลี่ยม
ที่กำหนดให้ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าย่อมมีรอบเขตร้อยสั้นที่สุด

๒๓) บรรดารูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมเป็นมุมฉากทุกมุม ถ้า
มีพื้นที่เท่ากันแล้ว รูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าย่อมมีรอบเขตร้อยสั้นกว่าทุกรูป

๒๔) จงเขียนรูปสามเหลี่ยมให้ มีพื้นที่มากที่สุดและให้
มุมของรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากับมุมของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และ
ให้ด้านทั้ง ๓ ผ่านจุด ๓ จุดที่กำหนดให้ ด้วย

บทแทรกว่าด้วยฮาร์โมนิก

แสดงศัพท์

๑) จำนวน m จำนวนที่เรียกว่าอยู่ในอันดับเลขทวิ
(Arithmetical progression) นั้น คือเมื่อผลลบของจำนวน
เลขคู่ท้าย เท่ากับผลลบของจำนวนเลขคู่ต้น

เช่น a, b, c จะเป็นจำนวนเลขทวิในอันดับเลขทวิก็เมื่อ
 $c - b = b - a$ และ b เรียกว่าส่วนกลางของอันดับเลขทวิระหว่าง
 a กับ c

๒) จำนวนเลข m จำนวนที่เรียกว่าอยู่ในอันดับคูณทวิ
(geometrical progression) นั้น คือเมื่อราติโอของจำนวน
ที่ ๓ ต่อจำนวนที่ ๒ มีค่าเท่ากับราติโอของจำนวนที่ ๒ ต่อจำนวนที่ ๑

เช่น a, b, c จะเป็นจำนวนเลขทวิในอันดับคูณทวิก็เมื่อ
 $c : b = b : a$ และ b เรียกว่าส่วนกลางของอันดับคูณทวิระหว่าง
 a กับ c

๓) จำนวนเลข m จำนวนที่เรียกว่าอยู่ในอันดับฮาร์โมนิก
คือเมื่อราติโอของจำนวนที่ ๑ ต่อจำนวนที่ ๓ มีค่าเท่ากับราติโอ

ของผลต่างระหว่างจำนวนที่ ๑ กับจำนวนที่ ๒ ต่อผลต่างระหว่าง
จำนวนที่ ๒ กับจำนวนที่ ๓

เช่น a, b, c จะเป็นจำนวนเลขอยู่ในอันดับฮาร์โมนิกก็
เมื่อ $a : c = a - b : b - c$ และ b เรียกว่าส่วนกลางของอันดับฮาร์
โมนิกระหว่าง a กับ c

หมายเหตุ ตามที่แสดงศัพท์ในอันดับฮาร์โมนิก

$$a : c = a - b : b - c \quad \text{หรือ} \quad \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{b-c}{c} = \frac{a-b}{a}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{b-c}{cb} = \frac{a-b}{ba} \quad (\text{เอา } b \text{ ทวน})$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{b}{cb} - \frac{c}{cb} = \frac{a}{ba} - \frac{b}{ba}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

จะเห็นได้ว่า $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ เป็นจำนวนเลขอยู่ในอันดับบวก

หรือตามศัพท์ในข้อ ๑ ถ้าถ้าย $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ เป็น a, b, c

ก็จะเป็นจำนวนเลขอยู่ในอันดับฮาร์โมนิกไป เพราะฉะนั้นอันดับ

ฮาร์โมนิก ก็คือจำนวนเลขที่กลับมาจากจำนวนเลขในอันดับบวกทวีคูณ
มันเอง

๔) ถ้า A, G, H เป็นส่วนกลางของอันดับบวกทวีคูณ อันดับ
คูณทวีคูณ อันดับฮาร์โมนิกระหว่างจำนวน ๒ จำนวนคือ a กับ
b ตามที่แสดงมาในข้อ ๑, ข้อ ๒, และข้อ ๓ ก็จะได้ผล

$$A \text{ เป็นส่วนกลางของอันดับบวกทวีคูณ } = \frac{a+b}{2}$$

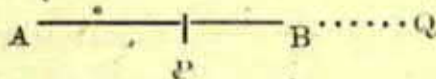
$$G \text{ เป็นส่วนกลางของอันดับคูณทวีคูณ } = \sqrt{ab}$$

$$H \text{ เป็นส่วนกลางของอันดับฮาร์โมนิก } = \frac{2ab}{a+b}$$

แสดงศัพท์

เส้นตรงซึ่งมีความยาวจำกัด เมื่อแบ่งภายในและแบ่ง
ภายนอกออกเป็น ๒ ส่วนได้เท่ากัน ให้เรียกว่า แบ่งเส้น
นั้นได้ฮาร์โมนิก

เช่น



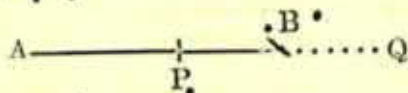
ถ้าเส้นตรง AB ถูกแบ่งออกได้ฮาร์โมนิกที่ P และ Q
ก็ได้ $AP : PB = AQ : QB$ ดังนั้นจุด P และ Q ได้ชื่อว่าเป็น

คู่ขนาน โมนิกของ A และ B ถ้าให้วัดเส้นสัมผัสได้ $AP:AQ=PB:QB$ จากสิ่งที่ปรากฏนี้ ถ้า P และ Q แบ่ง AB ภายในและภายนอก ได้รัวตอเดียวกันแล้ว A และ B ก็แบ่ง PQ ภายในและภายนอก ได้รัวตอเดียวกันเหมือนกัน ถ้าเช่นนั้น A และ B ก็เป็นคู่ขนาน โมนิก ของ P และ Q จึงแสดงได้ต่อไปว่า ถ้า AB ถูกแบ่งออกเป็น ส่วน โมนิกที่ P และ Q และ PQ ก็ถูกแบ่งออกเป็นส่วน โมนิก ที่ A และ B ด้วย

บทแทรกที่ ๒๐

ถ้า AB ถูกแบ่งภายในที่ P และถูกแบ่งภายนอกที่ Q ได้รัวตอเดียวกัน แล้ว AB จะเป็นเส้นสัมผัส โมนิกส่วนกลางระหว่าง AQ กับ AP

(เส้นที่ถูกแบ่งเป็นส่ว โมนิกส่วนกลาง)



สมมติให้ AB เป็นเส้นตรงมีจุด P แบ่งภายในและ Q แบ่ง ภายนอกได้รัวตอเดียวกัน

ให้พิสูจน์ว่า $AQ : AB = AB : AP$

พิสูจน์ $\therefore AQ : QB = AP : PB$ (โจทย์)

$$\therefore AQ : AP = QB : PB$$

$$\therefore AQ : AP = AQ - AB : AB - AP$$

$\therefore AQ, AB, AP$ เป็นอัตราส่วนสามพจน์

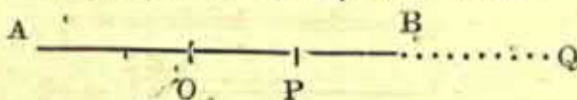
$\therefore AB$ เป็นส่วนกลางของอัตราส่วนสามพจน์ที่วาง AQ กับ AP

จ.ค.พ.

บทแทรกที่ ๒๑

เส้นตรงเส้น ๑ มีจุดแบ่งครึ่ง และจุดอีก ๒ จุดแบ่ง
เส้นและแบ่งแนวได้สามพจน์ โมนิค ตรีเหลี่ยมมุมฉากทำซ้ำไว้ด้วยส่วน
ของเส้นระหว่างจุดแบ่งครึ่งกับจุดแบ่งทั้ง ๒ ย่อมเท่ากับจตุรัสบนครึ่ง
ของเส้นนั้น

(ส่วนเส้นระหว่างจุดแบ่งครึ่งกับจุดแบ่งคู่กัน = (ครึ่งเส้น)^๒)



สมมติให้ O แบ่งครึ่ง AB และ P แบ่งเส้น BQ แบ่งแนวเป็น
สามพจน์ โมนิค คือ $AP : PB = AQ : QB$

ให้พิสูจน์ $OP \cdot OQ = OA^2$

พจน์ $\therefore AP : PB = AQ : QB$ (โจทย์)

$$\therefore AP - PB : AP + PB = AQ - QB : AQ + QB$$

$$\text{หรือ } ๒ OP : ๒ AO = ๒ AQ : ๒ OQ$$

$$\therefore OP \cdot OQ = AO^2$$

ข.ค.พ.

บทกลับ

ถ้า $OP \cdot OQ = AO^2$ แล้วจะแสดงได้ว่า

$AP : PB = AQ : QB$ คือ AB ถูกแบ่งออกเป็นอัตราส่วน

ที่ P และ Q

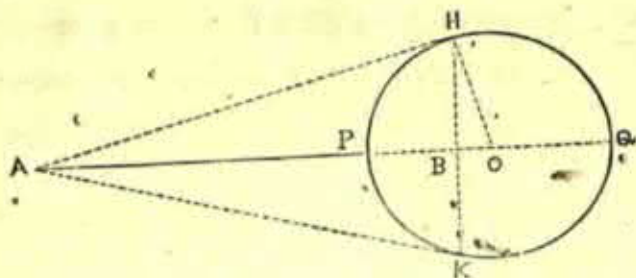
(ให้นักเรียนหาวิธีพจน์ด้วยตนเอง)

บทแทรกที่ ๒๒

จงสร้างรูปหาส่วนกลางของเส้นตรง ๒ เส้น ในอันดับบวก

ทวิ อันดับคู่ทวิ และอันดับฮาร์โมนิก

(หาส่วนกลางของอันดับต่างๆ)



สมมติให้ AP กับ AQ เป็นเส้นตรง ๒ เส้น ยาวไม่เท่ากัน
ให้สร้างรูปหาส่วนกลางระหว่าง AQ และ AP ใน
อันดับบวกทวิ, ลบทวิ, ซาร์ โมนิค

วิธีสร้าง เชื่อม AP กับ AQ วงทับกันลง แล้วเขียน
วงกลมเข้า PQ เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง ได้จุดศูนย์กลางที่
O จาก A ขีดทั้งเส้น AH, AK นามยังวงกลม
O ขีดระยะ HK ระหว่างจุดศูนย์กลางที่ ๒ ตัด AQ ที่ B
ขีดเส้น OH

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 ๑) \quad \therefore AO &= AQ - OQ \\
 &= AQ - OP \\
 &= AQ - (AO - AP) \\
 &= AQ - AO + AP \\
 \therefore ๒ \quad AO &= AQ + AP \\
 \therefore AO &= \frac{๑}{๒} (AP + AQ)
 \end{aligned}$$

$\therefore AO$ เป็นส่วนกลางของอินตัมบวกทวิระหว่าง AP กับ AQ

๒) $AH^2 = AP \cdot AQ$ (เซบาคันออกวงกลม)

$$\therefore AH = \sqrt{AP \cdot AQ}$$

$\therefore AH$ เป็นส่วนกลางของอินตัมบวกทวิระหว่าง AP กับ AQ

๓) $\therefore \triangle$ มุมฉาก AOH กับ $\triangle HOB$ เป็น

$\triangle$ คล้ายกัน

$$\therefore AO : OH = OH : OB$$

$$\therefore AO \cdot OB = OH^2 = OQ^2 \quad (\because OH = OQ)$$

$\therefore PQ$ ถูกแบ่งได้สาม โน้นที่ A และ B (ส่วนเส้นระหว่างจุดแบ่งครึ่งกับจุดแบ่งครึ่งกัน = (ทั้งเส้น)^๒)

เมื่อเป็นเช่นนั้น AB ก็ถูกแบ่งเป็นสาม โน้นที่ P และ Q ด้วยเหมือนกัน

$\therefore AB$ เป็นส่วนกลางของอินตัมระหว่าง AP กับ AQ (เส้นที่ตกแบ่งเป็นสาม โน้นที่ส่วนกลาง)

เป็นอันสำเร็จได้ส่วนกลางระหว่าง AQ กับ AP .
ในอินตัมทั้ง ๓ ตามประสงค์



สมมติให้ BC เป็นฐานกำหนดได้สร้าง $\triangle ABC$ ขึ้นบนฐาน BC นี้นี้อัตรา $BA : AC =$ รัศมีที่กำหนดให้
จงหาวิถีของจุด A

สร้าง แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ภายในด้วยเส้น AP และแบ่งครึ่ง
มุมภายนอกที่ประชิดกับมุม $\angle BAC$ ด้วย AQ เฉย
ลงมาถึงฐาน BC ที่จุด P และ Q ตามลำดับ

พิสูจน์ $\therefore BC$ ถูกแบ่งเส้นที่ P และถูกแบ่งแนวที่ Q
 $\therefore BP : PC = BQ : QC =$ รัศมีที่กำหนดให้
 $\therefore$ จุด P และจุด Q เป็นจุดอยู่คงที่
และ AP, AQ เป็นเส้นแบ่งครึ่งในและแบ่งครึ่ง
นอกของ $\angle BAC$
 $\therefore \angle PAQ = 90^\circ$ (ครึ่งของมุมประชิด)
 $\therefore$ จุดของ A ก็คือโค้งของวงกลมที่เอา PQ เป็น
เส้นผ่านศูนย์กลาง

แบบฝึกหัดที่ ๒๐

ว่าด้วยฮาร์โมนิก

๑) ถ้าเส้นตรง AB ถูกแบ่งที่ X และ Y โดยฮาร์โมนิก
จงแสดงให้เห็นว่า

$$ก) \frac{๒}{AB} = \frac{๑}{AX} + \frac{๑}{AY}$$

$$ข) \frac{๒}{XY} = \frac{๑}{BY} + \frac{๑}{AY}$$

๒) X และ Y เป็นจุดฮาร์โมนิกของ A และ B

ก) ถ้า $AB = ๒,๔$ นิ้ว และ $AX = ๑,๕$ นิ้ว จงหา AY

ข) ถ้า $XY = ๑,๕$ ซม. และ $AY = ๒$ ซม. จงหา BY

๓) เส้นตรงใดๆ ที่ตัดผ่านมุมย่อมถูกตัดได้ฮาร์โมนิกโดยหารของมุมกับเส้นแบ่งครึ่งในและแบ่งครึ่งนอกของมุมนั้นด้วย

๔) กำหนดจุด ๓ จุด B, P และ C ลงในเส้นตรงเส้น ๑ จงหาจุดของจุด F ซึ่ง $B\hat{F}P$ เท่ากับ $P\hat{F}C$

๕) ถ้าขีดเส้นตรงจากจุดถึงกลางฐานของรูปสามเหลี่ยมขึ้นไปตัดด้าน ๑ ของรูปสามเหลี่ยมภายในและเฉยไปตัดอีกด้าน ๑ เมื่อตัดออกไปแล้ว ถ้าขีดเส้นตรงจากยอดของรูปสามเหลี่ยมขนานกับฐานก็จะไปแบ่งส่วนนั้นออกเป็นฮาร์โมนิก.

๖) ถ้าขีดเส้นจากมุม ๑ ที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมไปตัดมันโดยขนานมยออกภายในและเฉยไปตัดด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกด้าน ๑ แล้วขีดเส้นตรงจากมุมยอดขนานกับฐานก็จะไปแบ่งเส้นตรงส่วนนั้นออกเป็นฮาร์โมนิก

๗) P และ Q เป็นคู่ฮาร์โมนิกของ A และ B จุด C อยู่ภายนอกเส้น ถ้า $P\hat{C}Q$ เป็นมุมฉากจึงแสดง CP, CQ เป็นเส้นแบ่งครึ่งในและแบ่งครึ่งนอกของ $\widehat{ACB}$

๘) AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ มีจุด O แบ่งครึ่ง และมีจุด X และ Y แบ่งได้ฮาร์โมนิก จงหาการเปลี่ยนแปลงของ Y และ X เมื่อเลื่อนจาก O ถึง B

กำหนด $AB = 20$ ซม. จงเขียนเรขาคณิตอธิบายการเปลี่ยนแปลงของ OY และ OX เปลี่ยนแปลงไป

๙) จงสร้างรูป แล้วหาส่วนกลางของฮาร์โมนิก ระหว่างเส้นตรง ๒ เส้นที่กำหนดความยาวให้ ในข้อต่อไปนี้จะให้ ได้ โดยถูกต้อง

ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงซึ่งกำหนดให้ ๒ เส้นขนานกัน วัดต่อ ๒ เส้นนี้ คือ AC และ BD แล้ววัดทะแยงมุม คือ AD และ BC ตัดกันที่ O ถ้าวัดเส้น PQ ผ่าน O ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดจนจุดเส้น AC และ BD ดังนั้น PQ จะเป็นส่วนกลางของฮาร์โมนิกระหว่างเส้นกำหนดนั้น

แสดงศัพท์

๑) อันดับของจุดในเส้นตรงเส้น ๑ เรียกว่า ระยะ (range) ถ้าระยะ ๑ มีจุด $\leq$ จุด ซึ่งจุด ๑ เปรียบกับข้อ ๑ เป็นเส้น โหมดระยะนี้เรียกว่า “ระยะฮาร์โมนิก”

๒) อันดับของเส้นตรงทั้งหลายจะเป็นที่เส้นก็ตามซึ่งต่างก็ตัดผ่านจุด ๑ เส้นตรงทั้งหมดนี้ ๑ นั้นเรียกว่า มัดแสง (Pencil)

จุดที่ผ่านกันเรียกว่า “ยอด” ของมัดแสง และเส้นตรงทั้งหมดนั้นเรียกว่า “แสง” (Ray) มัดแสงซึ่งมี $\leq$ แสง ซึ่งจากจุดหนึ่งจุดใดไปสู่ระยะฮาร์โมนิก เรียกว่ามัดแสงฮาร์โมนิก (Harmonic Pencil)

๓) ชุดเส้นตรงเส้น ๑ มาตัดเส้นหนึ่ง ๑ เรียกว่า “เส้นผ่าน” (Transversal)

๔) ถ้าเส้นตรงหนึ่ง ๑ มี $\leq$ เส้น ตัดกันจนบังเกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ (Complete quadrilateral) เส้นตรงเหล่านี้ของตัดกันใด ๒ จุด ซึ่งเรียกว่า “ยอด” ของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์ และชุดเส้นระหว่างยอดที่ตรงกันข้ามถึงกัน เส้นที่ตัดนี้เรียกว่า “เส้นทะแยงมุม”

อุประมายนิเทศ

ในภาคซึ่งว่าด้วยฮาร์โมนิก

๑) ถ้าเส้นผ่านขนานกับแสง ๑ ของมัตแสงฮาร์โมนิก และแสงอีก ๓ เส้นจะตัดเส้นผ่านนั้นออกเป็นส่วนเท่าๆ กันให้พิสัยนบทุกตัวด้วย

๒) เส้นผ่านเส้น ๑ เส้นโดยมุมถูกแสงของมัตแสงฮาร์โมนิก ตัดได้ระยะฮาร์โมนิก

๓) ในมัตแสงฮาร์โมนิกอื่น ๑ ถ้าแสง ๑ แบ่งครึ่งมุมระหว่างแสงอีกคู่ ๑ แสงนั้นจะตั้งฉากกับแสงที่เหลือน้อย

โดยที่กลับ ถ้าแสงคู่ ๑ ตั้งฉากกับแสงอีกคู่ ๑ แสงนั้นจะแบ่งครึ่งมุมในระหว่างแสงอีกคู่ ๑ ทั้งภายในและภายนอก

๔) ถ้า A, P, B, Q และ A', P', B', Q' เป็นจุดแบ่งระยะฮาร์โมนิกบนเส้นตรงที่กำหนดให้ ๒ เส้น AA', PP', BB' ซึ่งเป็นเส้นตรงระหว่างจุด ๓ คู่บนกันที่ S, QQ' จะผ่านจุด S ด้วยเหมือนกัน

๕) ถ้าเส้นตรง ๒ เส้นตัดกันที่ A และถ้า A, P, B, Q และ a, p, b, q เป็นระยะฮาร์โมนิกบนเส้นตรงกำหนด (จุดที่เป็น

คู่กันนั้นได้ (ใช้อักษรตัวเดียวกัน) แล้ว Pp, Bb, Qq จะผ่านกัน
ที่จุด ๑ ทั้ง Pq, Bb, Qp ย่อมจะผ่านกันที่จุด ๑ เหมือนกัน

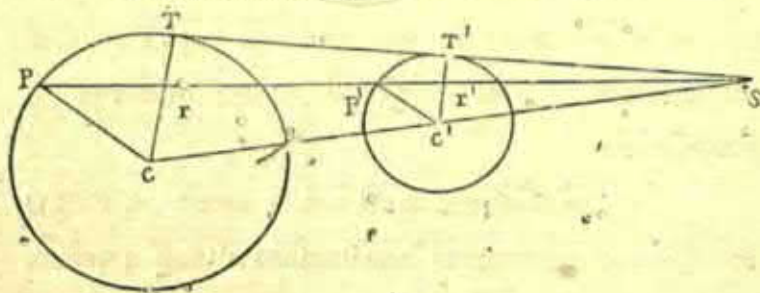
๖) จงใช้ผลที่ได้จากข้อที่เดิมาพิสูจน์ว่า ในรูปสี่เหลี่ยม
บรรจบกันเส้นทแยงมุมเส้น ๑ จะถูกตัดโดยเส้น ในทิศด้วยเส้นทแยงมุม
อีก ๒ เส้น

บทแทรกที่ ๒๔

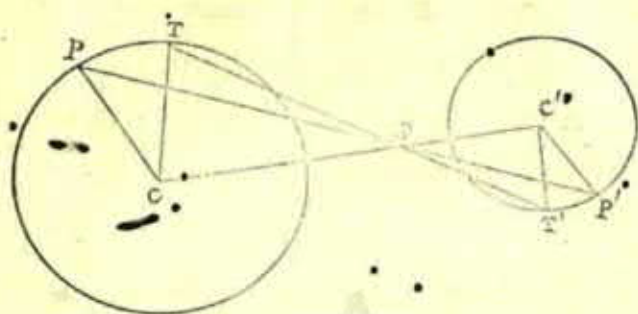
(Centres of Similitude)

บทแทรกที่ ๒๕

ในวงกลม ๒ วง ถ้ารัศมี ๒ เส้นขนานกัน (วงละเส้น)
ซึ่งเส้นตรงผ่านปลายรัศมีทั้ง ๒ ก็ขนานกันนั้นจะไม่ตัดเส้นตลอดศูนย์
ที่จุด ๑ ในเส้นหรือในแนวร่วมกันไม่ว่ารัศมีจะขนานกันในทางใด
(ให้เส้นจากปลายรัศมีขนานไปตัดรัศมีในแนวตลอดศูนย์)



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

สมมติให้ C และ C' เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ๒ วง มีรัศมี r และ r' ตามลำดับ และ $CP, C'P'$ เป็นรัศมีขนานกัน ๒ เส้น (รูปที่ ๑ อยู่ข้างเดียวกับรูปที่ ๒ อยู่ต่างข้างกัน) ให้ PP' ตัด CC' ที่จุด S

ให้พิสูจน์ว่า S ในเส้นตลออกศูนย์เป็นจุดร่วมไม่ว่า CP และ $C'P'$ จะชี้ขนานกันในทางใด

พิสูจน์

(ในรูปที่ ๒) $\triangle SCP, \triangle C'P'S$

$\therefore \angle \hat{P}S = \angle \hat{P}'S$ (มุมภายนอกภายในตรงข้าม)

$\therefore \angle \hat{C}SP$ (รูปที่ ๑) เป็นมุมร่วม (รูปที่ ๒) เป็นมุมตรงข้าม

$$\therefore PCS = P' \hat{C} S \quad (\Delta ๒ \text{ มุมเท่าอีกมุม } ๑ \text{ เท่า})$$

$$\therefore \Delta SCP \text{ กับ } \Delta SC'P' \text{ เป็น } \Delta \text{ มุมเท่า}$$

$$\therefore SC : SC' = CP : C'P' \quad (\Delta \text{ มุมเท่าด้าน} \\ \text{ได้ส่วนสัมพันธ์})$$

$$= r : r'$$

รูปที่ ๑ นั้นแบ่งแนว รูปที่ ๒ แบ่งเส้นโคจรวัดโอ
เดียวกัน คือ $r : r'$

$\therefore$ ต้องแบ่งที่จุดเดียวกันหมดคือที่ S ไม่ว่า CP, C'P'
จะวัดขนานในทางใด (แบ่งเส้นตรงตามวัดโอกำหนด
แบ่งได้ทั้งเดียว)

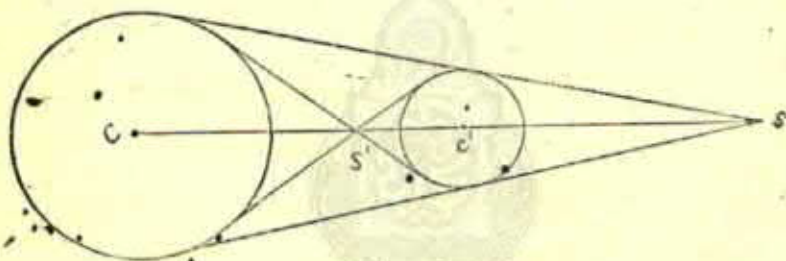
$\therefore S$ เป็นจุดร่วมหรือศูนย์กลาง

ท.ค.พ.

ข้ออนุมานที่ ๑ ให้ TT' เป็นทั้งเส้นส่วนของวงกลม ๒ วง
รูปที่ ๑ เป็นทั้งเส้นส่วน รูปที่ ๒ เป็นทั้งเส้นส่วนแย้ง ทั้ง ๒ ข้อม
วัดมี CT ขนานกับวัดมี C'T' แล้วทั้งเส้น TT' บ่อมนัด
เส้นตลอดอยู่ที่ S ร่วมแห่งเดียวกันด้วย

แสดงที่พหุ

ในรูปข้างล่างนี้ S และ S' แบ่งเส้นตัดยอดศูนย์ในแนว
 และในเส้นเป็นอัตราเท่ากันอัตราของรัศมีของวงกลมทั้ง ๒ S
 และ S' นี้ให้เรียกว่า “ศูนย์ความคล้าย” จุด S เรียกว่า
 “ศูนย์ความคล้ายนอก” และจุด S' เรียกว่า “ศูนย์ความคล้ายใน”



ข้ออนุมานที่ ๒ ทั้งเส้นตรงรวมและทั้งเส้นตรงรวมแย้งยอม

ตัดกันที่เส้นตัดยอดศูนย์ และจุดที่แบ่งเส้นตัดยอดศูนย์ ออกได้ยาว ไม่นึก

$$\therefore SC : SC' = r : r' = S'C : S'C'$$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้ง ๒ และจุดศูนย์ความ

คล้ายนั้นเป็นระยะหาร ไม่นึก

แบบฝึกหัดที่ ๒๕

๑) จากจุดศูนย์กลาง C และ C' ซึ่งห่างกัน ๕,๕ ซม. เขียนวงกลม ๒ วงรัศมี ๓,๒ ซม. และ ๑,๒ ซม. ตามลำดับ จงวัดและคำนวณระยะห่างระหว่างจุด C กับจุดศูนย์กลางความคล้าย

๒) วงกลม ๒ วงจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C และ C' ตามลำดับมีรัศมี ๑,๘ นิ้ว และ ๓,๐ นิ้ว และจุดศูนย์กลางนอกห่างจาก C ๒,๗ นิ้ว จงหาระยะ

ก) ระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้ง ๒

ข) ระหว่างจุดศูนย์กลางนอกและใน

๓) ในรูปที่ ๑ ของบทหลักที่ ๒๔ ถ้า SP คือวงกลม C และ C' ที่ Q และ Q' ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นว่า $SQ.SP' = SP.SQ' = ST.ST'$

ว่าด้วยศูนย์กลางความคล้าย

๔) ในรูปวงกลม ABC , I เป็นจุดศูนย์กลาง และ I' เป็นจุดศูนย์กลางนอกซึ่งอยู่ตรงข้ามกับมุม A กับ A' จุด BC ที่ Y จงแสดงให้เห็นว่า A และ Y เป็นศูนย์กลางความคล้ายของวงกลมทั้ง ๒ นั้น

๕) จงแสดงให้เห็นว่าจุดออร์โทเซนตริกและจุดเซินไทร์ซิด (Centroid) ของรูปสามเหลี่ยมรูป ๑ ข้อมเรียงลำดับเป็นเส้นตรงความคล้ายนอกและในของวงกลมประกอบและวงกลม ๙ จุด

๖) ถ้าวงกลมที่ไม่จำกัดขนาดสัมผัสกับวงกลมที่กำหนดให้ ๒ วง เส้นตรงที่ลากต่อจุดสัมผัสทั้ง ๒ ถึงกันถ้าต่อเลยไปจะผ่านศูนย์กลางคล้ายด้วย และจะสังเกตความแตกต่างของข้อนี้ ว่าจะเป็นอย่างไรม้าง

๗) จงเขียนวงกลมวง ๑ ให้สัมผัสกับวงกลม ๒ วงที่กำหนดให้และผ่านจุดที่กำหนดให้อีกจุด ๑ ด้วย

๘) จงเขียนวงกลมวง ๑ ที่จะสัมผัสกับวงกลม ๓ วงที่กำหนดให้

๙) C_1 , C_2 และ C_3 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้ง ๓ และ S'_1 , S_1 เป็นศูนย์กลางภายในและศูนย์กลางนอกของวงกลม C_2 และ C_3 และ S'_2 , S_2 , S'_3 , S_3 ก็เป็นศูนย์กลางภายในและนอกของวงกลมคู่อื่น ๆ อย่างเดียวกัน จงแสดงให้เห็นว่า เส้น $S'_1 C_1$, $S'_2 C_2$, $S'_3 C_3$ จะผ่านจุดร่วมกันที่จุด ๑

วงกลมออร์โธโกนาล (Orthogonal)

สแดงศัพท์ ถ้าวงกลม ๒ วงตัดกันโดยกระทำให้ทั้งเส้น

๒ เส้นตรงที่ตัดกันจุดหนึ่งตั้งฉากแก่กัน ให้เรียกว่าออร์โธโกนาล หรือเรียกว่าวงกลมตัดกันได้ ออร์โธโกนาล

ให้พิสูจน์

๑) ถ้าวงกลม ๒ วงตัดกันได้ ออร์โธโกนาล ทั้งเส้นตั้งของวงกลมวง ๑ ที่จุดตัดนั้นจะผ่านจุดศูนย์กลางของอีกวง ๑

๒) ถ้าวงกลม ๒ วงตัดกันได้ ออร์โธโกนาล จักรสัมผัสระหว่างจุดศูนย์กลางทั้ง ๒ ของวงกลมเท่ากับผลบวกของจรัลสัมบูรณ์ของวงกลมทั้ง ๒ นั้น

๓) จงหาวิถีของจุดศูนย์กลางวงกลมทั้งหลายที่ตัดวงกลมที่กำหนดให้ ได้ ออร์โธโกนาล ในจุดกำหนด

๔) จงเขียนวงกลมผ่านจุดที่กำหนดให้ และตัดวงกลมที่กำหนดให้ ได้ ออร์โธโกนาล ณ จุดที่กำหนดอีกจุดหนึ่ง

ว่าด้วย โปล์ (Pole) และ โปลาร์ (Polar)

สแดงศัพท์

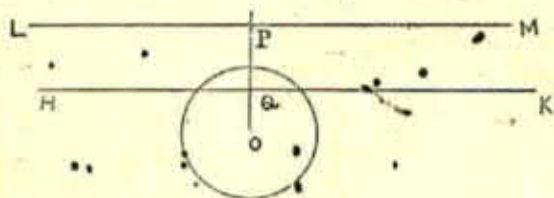
๑) แกน ๒ จุดในเส้นตรงที่ตัดจากจุดศูนย์กลางของวงกลมวง ๑ การปัดเหลี่ยมมุมฉากกำมับด้วยระยะจากจุดศูนย์กลาง

ถึงจุดทั้ง ๒ นั้น เท่ากับจตุรัสบนรัศมีของวงกลมแล้ว จุด ๒ จุด
นี้เรียกว่า "จุดกลับ" ซึ่งกันและกัน

ในรูปตัวอย่างข้างต้นนี้ ถ้า O เป็นจุดศูนย์กลางของวง
กลมและถ้า $OP \cdot OQ = (รัศมี)^2$ จุด P และจุด Q ต่างก็จะ
เป็นจุดกลับซึ่งกันและกัน

และจะเห็นได้ว่าจุด ๑ ของจุดทั้ง ๒ อยู่ภายในวงกลม
กับจุด ๑ จะตั้งอยู่ภายนอกวงกลม

๒) ไปลา^F ของจุดกำหนดเมื่อเกี่ยวกับวงกลมที่กำหนด
ให้ นั่น ก็คือเส้นตรงที่วัดผ่านจุดกลับของจุดกำหนด และตั้งได้
ฉากกับเส้นตรงที่วัดจากจุดกำหนดถึงจุดศูนย์กลางวงกลม จุดกำหนด
นี้ให้เรียกว่าไปด



ในรูปนี้ ถ้า $OP, OQ = (รัศมี)^2$ และถ้า LM กับ HK ซึ่งตัดกันที่จุด P และ $Q \perp OP$ แล้ว HK เป็น โปลาาร์ของ P และ P เป็น โปลาาร์ของเส้น HK เกี่ยวกับวงกลมที่กำหนดให้

LM ก็เป็น โปลาาร์ของจุด Q และจุด Q ก็เป็น โปลาาร์ของเส้น LM

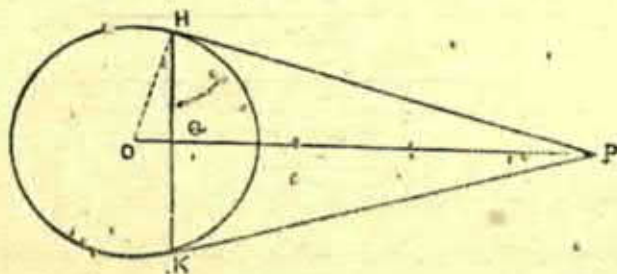
และจะเห็นได้ว่า โปลาาร์ของจุดภายนอกจะต้องตัดวงกลม และ โปลาาร์ของจุดภายในจะต้องอยู่ภายนอกวงกลม และ โปลาาร์ของจุดบนเส้นรอบวงก็เป็นทั้งเส้นสัมผัสของวงกลมตรงจุดนั้น



บทแทรกว่าด้วย โปลาาร์และ โปลาาร์

บทแทรกที่ ๒๕

โปลาาร์ ของจุดภายนอกเกี่ยวกับวงกลม คือ เส้นสัมผัสที่ตัดกันที่จุดสัมผัสของทั้งเส้นตรงที่ ๒ ซึ่งตัดจากจุดกำหนดภายนอกนั้น (ระยะต่อจุดสัมผัสของทั้งเส้นตัดจากไปเป็นโปลาาร์)



สมมติให้ P เป็นจุดกำหนดบนนอกวงกลม O และ PH กับ PK
เป็นทั้งเส้นสัมผัสจาก P ถึงจุดสัมผัสที่ H และ K
ตัด弦ยาว HK ตัด OP ที่ Q

ให้พิสูจน์ว่า弦ยาว HK เป็นไปกลางของจุด P

พิสูจน์ ๑. OH

$\therefore \triangle HQP \equiv \triangle QKP$ (Δ ๒ ด้านกับมุม
ระหว่างเท่า)

$\therefore$ OP ตัด弦ยาว HK ได้มุมฉากที่ Q

$\therefore \triangle POH$ กับ $\triangle PQO$ ต่างก็เป็น

Δ มุมฉากและเป็น Δ คล้ายกัน (Δ เกิด

จากเส้นจากมุมฉาก $\perp$ ด้านตรงข้ามเป็น Δ คล้ายกัน)

$\therefore OP : OH = OH : OQ$

$\therefore OP \cdot OQ = (OH)^2$

$= (PK)^2$

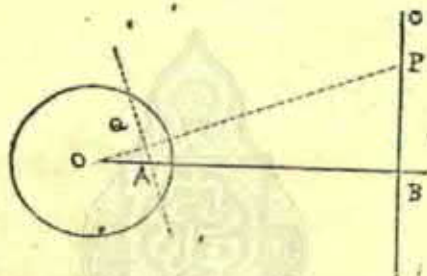
$\therefore HK$ เป็นไปกลางของจุด P

๒.๓.๗.

บทแทรกที่ ๒๒

มีจุดกำหนด ๒ จุด และถ้าไปลาฟของจุดที่ ๑ เกี่ยวข้อง
แก่วงกลมผ่านจุดที่ ๒ แล้วไปลาฟของจุดที่ ๒ ก็จะต้องผ่านจุด
ที่ ๑ ด้วย

(ไปลาฟของจุด = ผ่านจุดคู่ของจุดนั้น)



สมมติให้ BC เป็นไปลาฟของ A ซึ่งเกี่ยวข้องกับวงกลม O

และให้ BC ผ่านจุด P

ให้พิสูจน์ว่าไปลาฟของ P ก็จะต้องผ่านจุด A ด้วย

สร้าง ขั้ว OP จาก A ขั้ว AQ $\perp$ OP

AQ จะเป็นไปลาฟของ P

พิสูจน์ $\therefore$ BC เป็นไปลาฟของ A (โดย)

$\therefore \hat{ABP}$ เป็นมุมฉาก

แต่ $A\hat{Q}P$ ก็เป็นมุมฉาก (ตั้งฉาก)

$\therefore A, Q, P$ และ B เรียงเป็นวงกลม

($\square$ มุมตรงข้ามรวม = 180°)

$\therefore OQ \cdot OP = OA \cdot OB$ (ระยะต่อไปตัดนอกวงกลม)

แต่ $OA \cdot OB = (รัศมี)^2$ (BC เป็นไปตารของ A)

$\therefore OQ \cdot OP = (รัศมี)^2$ ด้วย

และ $AQ \perp OP$ ชัดแล้ว

$\therefore AQ$ เป็นไปตารของ P

$\therefore$ ไปตารของ P ผ่านจุด A

ร.ค.พ.

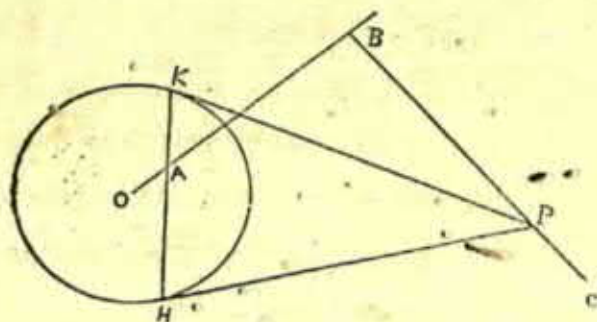
หมายเหตุ เมื่อจุด A ที่กำหนดให้อยู่นอกวงกลมจะพิสูจน์ได้ โดยทำของเดิมวกกันกับข้อข้างบนว่าไปตาร BC ต้องผ่านเหมือนกัน

บทแทรกที่ ๒๐๗

ระยะใด ๆ หนึ่งผ่านจุดกำหนดภายในวงกลม ถ้าตัดทงเส้น

๒ เส้นตรงจุดปลายระยะนั้นไปตกถึง วงของจุดทงเกิดคตกกัน
ย่อมเป็นไปตารของจุดกำหนดนั้น

(วิธีของจุดลักษณะเหมือนกันเป็นไปตารของจุดกำหนด)



สมมติให้ A เป็นจุดกำหนดอยู่ภายในวงกลม HK เป็นเส้นยี่สิบ
ผ่านจุด A และให้ทั้งเส้นตั้งที่จุดสัมผัส H และ K ตัดกัน
ที่จุด P

ให้พิสูจน์ว่าจุดของจุด P เป็นโพลาร์ของจุด A

พิสูจน์ ๑) ทางตรงจะแสดง ให้เห็นว่า P อยู่ในโพลาร์ของ A

$\therefore$ HK เป็นเส้นยี่สิบระหว่างจุดสัมผัสของทั้งเส้นตั้งที่ตัด
จาก P มายังวงกลม O

$\therefore$ HK เป็นโพลาร์ของ P (เส้นยี่สิบต่อจุดสัมผัสของ
ทั้งเส้นตั้งจากโพลเป็นโพลาร์)

เมื่อ HK เป็นโพลาร์ของ P ผ่านจุด A

$\therefore$ ไปลาวัของ A ก็ผ่านจุด P ด้วย (ไปลาวัของจุด ๑ ผ่านจุดคู่ของจุดนั้น)

$\therefore$ จุด P ก็ทั้งเกินคู่คักกันอยู่ในไปลาวัของ A

๒) ทางกลับ จะแสดงให้เห็นว่าจุดใด ๆ ในไปลาวัของ A เป็นจุดที่ทั้งเกินคู่ ขัดจากจุดปลายชะยาผ่านจุดกำหนดไปคักกัน ให้ BC เป็นไปลาวัของ A และให้ P เป็นจุด ๑ อยู่ใน BC ซึ่งทั้งเกินคู่ PH, PK ขัดชะยา HK

$\therefore$ HK เป็นไปลาวัของ P (ชะยาคู่จุดคักคักของทั้งเกินคู่จากไปดเป็นไปลาวั)

$\therefore$ P อยู่ใน BC ซึ่งเป็นไปลาวัของ A

$\therefore$ ไปลาวัของ P ก็คักยังผ่านจุด A ด้วย

(ไปลาวัของจุด ๑ ผ่านจุดคู่ของจุดนั้น)

คักนั้น HK ผ่านจุดกำหนด A

$\therefore$ P เป็นจุดที่ทั้งเกินคู่ ขัดจากจุดปลายชะยาผ่านจุดกำหนดคักกัน

รวมใจความจากข้อ ๑ และข้อ ๒ จะเห็นได้ว่าวิถีของจุดที่ทั้งเกินคู่ ขัดจากปลายชะยาผ่านจุด A เป็นไปลาวัของ A

หมายเหตุ ถ้าจุดกำหนดอยู่ภายนอกวงกลมตามบทแทรก
ที่ ๒๗ ข้อ ๑ ยังเป็นจริงอยู่ แต่บทกลับในข้อ ๒ ใช้ไม่ได้ เพราะ
ว่าจุดทั้งหมดที่พาดผ่านไปอยู่ใน BC

∴ ถ้าจุด A อยู่ภายนอกวงกลม ไปตัด BC ก็จะตัด
วงกลม ไม่มีจุดใด ๆ อยู่ในส่วนของไปตัด ซึ่งอยู่ภายในวงกลม
ที่ทั้งเส้นตัดสามารถมาตัดกันได้

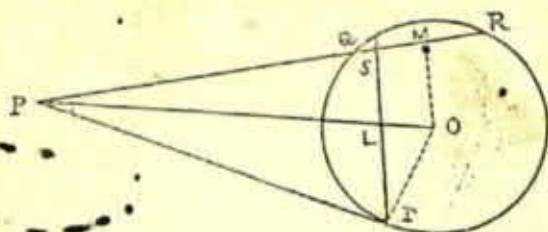
ข้อที่ควรจดจำไว้ คือ

- ๑) ไปตัดของจุดภายนอกอันเกี่ยวข้องกับวงกลมนั้นเป็น
ระยะทางที่วัดจากจุดสัมผัสของทั้งเส้นตัด ที่วัดจากจุดภายนอกนั้น
- ๒) ไปตัดของจุดภายในบนเส้นของจุดที่ทั้งเส้นตัด วัด
จากปลายระยะทางที่หลายซึ่งวัดผ่านจุดภายในวงกลมนั้นตัดกัน
- ๓) ไปตัดของจุดอยู่ในเส้นรอบวงก็คือนั่นทั้งเส้นตัด วัด
จากจุดนั้น

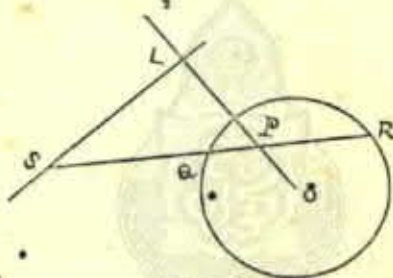
— ๐ —

บทแทรกที่ ๒๘

ระยะใด ๆ ของวงกลมที่วัดผ่านจุดกำหนดจุด ๑ จุดกำหนด
และ ไปตัดของจุดกำหนดนั้นย่อมแบ่งระยะนั้นออกได้ส่วนยาว ไม่นึก
(จุดกำหนดและไปตัดของมันแบ่งระยะได้ยาว ไม่นึก)



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

สมมติ ให้ O เป็นวงกลมกำหนด P เป็นจุดกำหนด และ QR
เป็นเส้นตรงกำหนดตัดผ่านจุด P

๑) เมื่อ P อยู่นอกวงกลมดังในรูปที่ ๑ เราให้
เส้น PT และให้ ไปยาวของ P ตัด PO ที่ L และตัด

QR ที่ S จะต้องพิสูจน์ว่า P และ S แบ่ง QR ออก
ได้ส่วนโมนิก

สร้าง ตัด $OM \perp QR$ ตัด OT

พิสูจน์ $\therefore PQ \cdot PR = PT^2$ (ส่วนของชัวยาคณกัน = ทั้งเส้น^๒)

แต่ $\angle PTO = 90^\circ$

$\therefore PT^2 = PL \cdot PO$ (อ.ม. ๖๔ ขน)

$\therefore PQ \cdot PR = PL \cdot PO$ ด้วย

$\therefore S, L, O, M$ เรียงเป็นวงกลม ($\square$ มุมตรงข้าม
รวม = 180°)

$\therefore PL \cdot PO = PM \cdot PS$ (ชัวยาคัดกันนอกวงกลม)

$\therefore PQ \cdot PR = PM \cdot PS$

$\therefore PQ \cdot PR = PM \cdot PS$

$= (PQ + PR) \cdot PS$

$\therefore PS = \frac{PQ \cdot PR}{PQ + PR}$

$\therefore PQ, PS, PR$ ได้ส่วนยาว โมนิก

$\therefore Q$ กับ R แบ่ง PS ออกได้ส่วนยาว โมนิก และ P
กับ S ก็แบ่ง QR ออกได้ส่วนยาว โมนิก เหมือนกัน

๒) เมื่อ P อยู่ในวงกลมทั้งรูปที่ ๒ ให้ S L เป็น
 โปลาไรของ P ต่อระนาบ QR ออกไปอีกโปลาไรของ P ที่จุด S
พิสูจน์ ∴ โปลาไรของ P ผ่านจุด S

∴ โปลาไรของ S ผ่านจุด P ด้วย

∴ ~~S~~ P ย่อมแบ่ง QR ออกได้ส่วนฮาร์โมนิก
 (ตามที่ได้ พิสูจน์เห็นจริงมาแล้วในข้อ ๑)

ช. ค. พ.

บทพิสูจน์ข้างบนนี้ได้อธิบายเป็นคุณสมบัติฮาร์โมนิก ของ
 โปลาไรและโปลาไร

แสดงศัพท์

รูปสามเหลี่ยมที่เกี่ยวข้องกับวงกลม ด้านของสามเหลี่ยม
 ทุกด้านเป็น โปลาไร ของมุมตรงข้าม ให้เรียกว่า เซ็ฟ-คอนจูเกต
 (Self-Conjugate) อันเกี่ยวข้องกับวงกลม

แบบฝึกหัดที่ ๒๒

ว่าด้วย โปลาไรและโปลาไร

๑) เส้นตรง ๑ ขัดจากจุด ๒ จุดถึงกันย่อมเป็นโปลาไร
 เกี่ยวข้องกับวงกลมของจุดซึ่งโปลาไรของจุดกำหนดทั้ง ๒ นั้นตัดกัน

๒) เส้นตรง ๒ เส้นตัดกันที่จุด ๑ จุดนี้ย่อมเป็น ไปตรของเส้นตรงที่ต่อไปตรของเส้นตรงที่ตัดกันนั้นถึงกัน

๓) จงหาวิถีของ ไปตร ของเส้นตรงทั้งหลายที่ขีดผ่านจุดกำหนดจุดหนึ่ง

๔) จงหาวิถีของ ไปตร เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งวง และทั้งเส้นที่ขีดผ่านจุดศูนย์กลางวงกลม

๕) ถ้าวงกลม ๒ วงตัดกันได้สอง ไรโกนาต และ P Q เป็นเส้นศูนย์กลางของวงกลมวง ๑ ใน ๒ วงนี้ จงแสดงให้เห็นว่า ไปตร ของ P ขีดถึงวงกลมอีกวง ๑ ผ่านจุด Q

๖) ถ้าวงกลม ๒ วงตัดกันได้สอง ไรโกนาต จุดศูนย์กลางของวงกลมทุกวงเป็น ไปตร ของระนาบส่วนที่เกี่ยวข้องกับวงกลมอีกวงหนึ่ง

๗) ขีดเส้นตรงจากจุดใด ๆ ๒ จุดมาถึงจุดศูนย์กลางของวงกลม ย่อมกระทำการที่จุดศูนย์กลางนั้นเท่ากับมุมที่ ไปตร ของจุด ๒ จุดนั้นตัดกัน

๘) O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นเส้นตรงฉากกับความยาว, P อยู่ในเส้นตรง AB จงหาวิถีของจุดกึ่งกลางของ P ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

๙) จุด O อยู่ในเส้นรอบวงของวงกลมกำหนด P เป็นจุดใดๆ ในวงกลม จงหาว่าเส้นที่เชื่อมมุมฉากทำขึ้นด้วย OA กับเส้นที่ลากจาก B กับ ไปลาฟ ของ A เท่ากับเส้นที่เชื่อมมุมฉากทำขึ้นด้วย OB กับเส้นที่ลากจาก A กับ ไปลาฟ ของ B

๑๐) A และ B เป็นจุดกำหนด ๒ จุด และ O เป็นวงกลม จงแสดง ให้เห็นว่าเส้นที่เชื่อมมุมฉากทำขึ้นด้วย OA กับเส้นที่ลากจาก B กับ ไปลาฟ ของ A เท่ากับเส้นที่เชื่อมมุมฉากทำขึ้นด้วย OB กับเส้นที่ลากจาก A กับ ไปลาฟ ของ B

๑๑) A, B, C และ D เป็นจุด ๔ จุด ถ้า ๓ จุดในพวกน้อยอยู่ในเส้นรอบวงของวงกลม DA กับ CB ตัดกันที่ P และ AC กับ BD ตัดกันที่ Q และ BA กับ CD ตัดกันที่ R จงแสดงว่า $\triangle PQR$ เป็นเส้นที่—คอนจูเกต เกี่ยวแก่วงกลม

๑๒) ให้วัดเส้นตรงเพื่อหา ไปลาฟ ของจุดกำหนดซึ่งเกี่ยวข้องกับวงกลมกำหนด และถ้าจุดกำหนดอยู่นอกวงกลม ให้หาวิธีวัดเส้นตรงเพื่อวัดทั้งเส้นที่ลากจากจุดกำหนดให้แก่วงกลมนั้น

๑๓) ถ้ารูปสามเหลี่ยมเป็น เส้นที่—คอนจูเกต ที่เกี่ยวข้องกับวงกลมจุดศูนย์กลางของวงกลม ย่อมเป็น ศูนย์ ไชเซนเบิร์ก ของสามเหลี่ยมนั้น

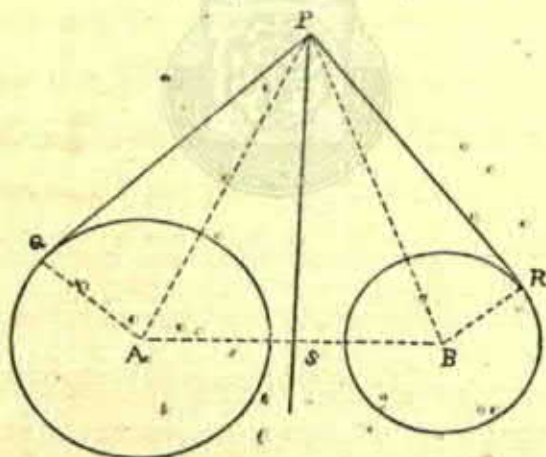
๑๔) ไปตาร ทั้งหลายชั้นเกี่ยวแก่วงกลมกำหนดของจุด
๔ จุดได้ระยะ ชาร์โมนิก ย่อมทำให้เป็น มัดแสงชาร์ โมนิกและ
กลับด้วย

บทแทรกที่ด้วยเรติคัตแอกซีส (Radical axis)

บทแทรกที่ ๒๑๙

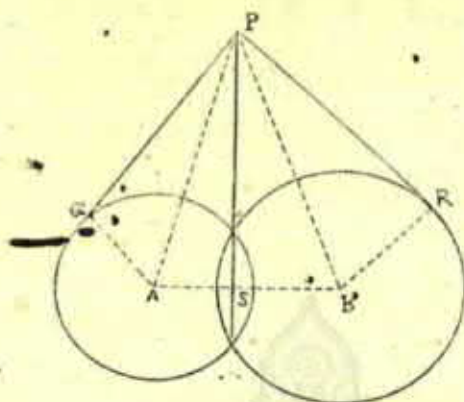
จงหาว่าจุดที่สามารถตัดทั้งเส้นได้ ให้แก่วงกลม ๒ วง
เท่ากันได้

(วิธีของจุดที่ตัดกันทั้งเส้น)



รูปที่ ๑

๒๑๕



รูปที่ ๒

สมมติ ให้ A และ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ๒ วงกำหนด

ให้ และให้วงกลม A มีรัศมียาว a และวงกลม B มีรัศมียาว b และให้ P เป็นจุด ๑ ซึ่งเมื่อลากเส้นสัมผัส PQ ให้วงกลม A เท่ากับเส้นสัมผัส PR ที่ตัดให้วงกลม B

จงหาว่าจุดของจุด P

พิจารณา เชื่อมเส้น PA, PB, AQ, BR และ AB จาก P เชื่อม

$$PS \perp AB$$

พิจารณา $\therefore PQ = PR$ (โดยที่)

$$\therefore PQ^2 = PR^2$$

$$\text{แต่ } PQ^2 = PA^2 - AQ^2 \text{ (ตรงฉาก = คาง + จาน)}$$

$$\text{และ } \therefore PR^2 = PB^2 - BR^2 \text{ (ตรงฉาก = คาง + จาน)}$$

$$\therefore PA^2 - AQ^2 = PB^2 - BR^2$$

$$\therefore PS^2 + AS^2 - AQ^2 = PS^2 + SB^2 - BR^2$$

$$\therefore AS^2 - a^2 = SB^2 - b^2$$

$$\text{หรือ } AS^2 - SB^2 = a^2 - b^2$$

และ S แบ่งเส้นตลอดสมัย AB

$\therefore$ S เป็นจุดอยู่กับที่

ดังนั้นทั้งเส้นตั้งฉากจากจุดเดียวกันและเท่ากันมายังวงกลม

๒ วงนั้น จุดนั้นย่อมอยู่ในแนวเส้นตรงซึ่งตัด AB ได้น่าก เพื่อ
ให้ผลต่างกันของจัตุรัสบนส่วนแบ่งของ AB เท่ากับผลต่างกันของ
จัตุรัสบนรัศมีของวงกลมทั้ง ๒ ที่กำหนดนั้น

อีกประการหนึ่งถ้าเราตั้งเส้นตั้งฉากจากจุดทุกๆ จุดใน SP ใน
รูปที่ ๑ และจากทุกๆ จุดในส่วนของ SP ภายนอกวงกลมในรูป
ที่ ๒ ให้แก่วงกลมทั้ง ๒ วง ขึ้นเส้นตั้งฉากๆ คู่กันย่อมเท่ากัน

ดังนั้นเห็นได้ว่าในรูปที่ ๑ SP ตลอดเส้นเป็นวง แต่ใน
รูปที่ ๒ ละเพื่อส่วนของ SP ที่อยู่ภายนอกวงกลมเป็นวง

ในข้อนี้ ๆ ให้เรียก SP ว่า เรดิกัลแอกซิส
(Radical axis) แห่งวงกลม ๒ วง



ข้ออนุมาน ถ้าวงกลมตัดกันตั้งในรูปที่ ๒ เห็นได้ชัดว่า
เรดิกัลแอกซิส (Radical axis) เป็นเหมือนเส้นตรงซึ่งได้
ตัดผ่านจุด ~~ตัด~~ เริ่มต้น

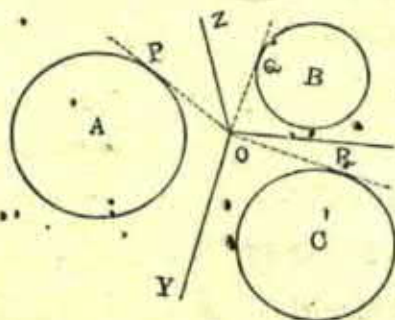
เพราะตามในอุปมาขั้นที่ ๕๖ ได้พิสูจน์แล้วว่าทั้งเส้น
ทั้งหลายที่ตัดจากจุดในส่วนหนึ่งของเส้นยาวรวมที่ออกมาถึงวงกลม ๒ วง
นั้นย่อมยาวเท่ากัน



บทแทรกที่ ๓๐

เรดิกัลแอกซิส แห่งวงกลม ๓ วง ในคู่ ๑ คู่ ๑ นั้นย่อม
รวมเป็นจุดเดียวกัน

(เรดิกัลแอกซิส รวมจุดเดียวกัน)



สมมติ ให้ วงกลม ๓ วงมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ A, B และ C ให้ OZ
เป็น रेक्ति์เอ็กซ์ของวงกลม A และ B และ OY เป็น
เรक्ति์เอ็กซ์ของวงกลม A และ C เรक्ति์เอ็กซ์
ทั้ง ๒ นี้ตัดกันที่จุด O

จะต้งพิสูจน์ว่า เรक्ति์เอ็กซ์ของวงกลม B
และ C จะผ่านจุด O ด้วย

จะได้เห็นจุด O อยู่ภายนอกหรือภายในวงกลมทั้ง
หลายนั้น

พิสูจน์ ๑) เมื่อจุด O อยู่ภายนอกวงกลม จาก O ชีตทั้งเส้น
OP, OQ และ OR ให้แก่วงกลม A, B และ C ตามลำดับ
 $\therefore$ จุด O อยู่ใน เรक्ति์เอ็กซ์ของวงกลม A และ B
(ตามโจทย์)

$$\therefore OP = OQ$$

และ $\therefore$ O อยู่ใน เรक्ति์เอ็กซ์ของวงกลม A และ C
(ตามโจทย์)

$$\therefore OP = OR$$

$$\therefore OQ = OR \quad \text{ด้วย}$$

∴ จุด A เป็นจุดอยู่ใน เรตคัตต์เอกซิดซ์ของวงกลม B และ C ด้วยเหมือนกัน

∴ เรตคัตต์เอกซิดซ์ของวงกลม B และ C ผ่าน O ด้วย
 ๒) ถ้าวงกลมทั้งหลายตัดกันแล้วจุด O ย่อมอยู่ภายในวงกลมเหล่านั้น

เรตคัตต์เอกซิดซ์ย่อมเป็นระยะยาวร่วมของวงกลมทั้ง ๓ ถ้า
 ยกขึ้นหาคู่แต่คราวละ ๒ วงก็จะพิสูจน์ได้ว่าระยะยาวร่วม
 เหล่านี้มาตัดร่วมกันที่จุดเดียว (อาศัยการพิสูจน์จาก
 อุปนัยบทที่ ๕๕)

๔.๕.๕.๖

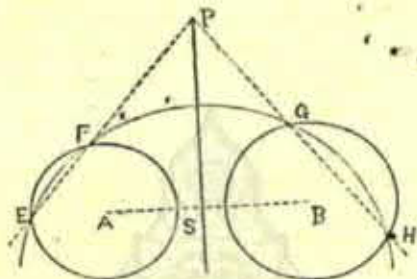
จุดซึ่งเรตคัตต์เอกซิดซ์ของวงกลม ๓ วงตัดกันที่ระบุให้ เรียกว่า

ว่า “ศูนย์เรตคัตต์”

บทแทรกที่ ๓๑

จุดตัดเรคตแองเกิลของวงกลม ๒ วงที่กำหนดให้

(เซตเรคตแองเกิล ในวงกลม ๒ วง)



สมมุติ ให้ A และ B เป็นวงกลม ๒ วงที่กำหนดให้

ให้ เซตเรคตแองเกิล ให้แก่วงกลม ๒ วงนี้

วิธีร่าง ๑) ถ้าวงกลมที่กำหนดให้ตัดกัน ระยะยาวร่วมที่ตัดผ่าน
จุดที่วงกลมตัดกันนั้นจะเป็น เรคตแองเกิลของวงกลม ๒
วงนั้น (ตามข้ออนุมานของบทแทรกที่ ๒๙)

๒) แต่ถ้าวงกลมที่กำหนดให้ ไม่ตัดกันแล้ว จะต้อง
หาจุดทำดังนี้ เว้นวงกลมอีกวง ๑ (จุดศูนย์กลางจะ

อยู่ได้ทั้งคู่ได้ แล้วแต่เหมาะ) ให้ตัววงกลม A ที่จุด E
และ F แล้วตัววงกลม B ที่จุด G และ H ขัดเส้น
EF และ HG แล้วตัดเส้นตรงทั้ง ๒ นั้นออกไปตัดกันที่ P
ตัดเส้น AB แล้วจาก P ขัด $PS \perp AB$

พจน์ PS จะเป็น เวกัลอีกครึ่ง ของวงกลม A และ B
สำหรับวงกลม EFGH

$\therefore PE \cdot PF = PH \cdot PG$ (ระยะที่ออกไปตัดนอก
วงกลม)

$\therefore$ จักรวัดบนทั้งเส้นตัดจาก P ถึงวงกลม A $= PE \cdot PF$
และจักรวัดบนทั้งเส้นตัดจาก P ถึงวงกลม B $= PH \cdot PG$

$\therefore$ ทั้งเส้นตัดจาก P ถึงวงกลม A และวงกลม B ย่อม
เท่ากัน

$\therefore$ P เป็นจุดอยู่ในเวกัลอีกครึ่ง และ PS เป็นเส้นตรง
ตั้งฉากกับเส้นคอร์ดนั้น

$\therefore$ PS เป็นเวกัลอีกครึ่ง (วัดของจุดที่ตัดทั้งเส้นตัดทำ)

แสดงศัพท์

ถ้าวงกลมทุก ๆ คู่ ในจำพวกวงกลมที่กำหนดให้มีเรขาคณิต
แอ็กซีสต์ ร่วมกันอยู่ให้เรียกว่าวงกลมโค-แอ็กซีสต์ (Co-axial)

แบบฝึกหัดที่ ๒๗

ว่าด้วย เรขาคณิตแอ็กซีสต์

๑) จงแสดงให้เห็นว่า เรขาคณิตแอ็กซีสต์ ของวงกลม ๒ วง
ย่อมแบ่งครึ่งทั้งเส้นตรงร่วมศูนย์กลาง

๒) ถ้ารัศมีทั้งเส้นให้ แก่วงกลม ๒ วงจากจุดใด ๆ ใน
เรขาคณิตแอ็กซีสต์ของมัน จงแสดงให้เห็นว่าถ้าเขาจุดที่รัศมีทั้งเส้นนั้น
เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมรัศมียาวเท่ากับทั้งเส้นใดเส้นหนึ่งแล้ว
วงกลมที่เขียนนั้นจะตัดวงกลมทั้ง ๒ ที่กำหนดนั้นได้ สอง ๆ โขงโกนาค

๓) O เป็นจุดศูนย์กลางเรขาคณิตของวงกลม ๓ วงจาก O รัศมี
ทั้งเส้น OT ให้แก่วงกลมวงใดวงหนึ่งใน ๓ วงนี้ จงแสดงให้
เห็นว่าวงกลมวง ๑ ที่เขา O เป็นจุดศูนย์กลางและ OT เป็นรัศมีจะ
ตัดวงกลม ๓ วงที่กำหนดให้นั้นได้ สอง ๆ โขงโกนาค

๔) ถ้าวงกลม ๓ วงสัมผัสกันวงต่อวง ถ้ายกมาพบที่
 ๒ วงจะตัดกันได้ว่าทั้งเส้นตรงรวมทั้งจุดสัมผัสมาด้วยกันเป็นจุดเดียว

๕) ถ้าเขียนวงกลมเอนด้านทั้ง ๓ ของรูปสามเหลี่ยมรูป
 หนึ่งเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เส้นนี้เรื่อก็คงของมันย่อมเป็นฮอว์ โซ
 เซ็นเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมนั้น

๖) วงกลมทั้งหลายที่ผ่านจุดกำหนดจุด ๑ และตัดวงกลม
 กำหนดให้ ได้ ฮอว์ โซโกนาต ย่อมผ่านจุดกำหนดอีกจุด ๑ ด้วย

๗) จงหาวิถีของจุดศูนย์กลางวงกลมทั้งปวงที่ผ่านจุด
 กำหนดและตัดวงกลมกำหนดได้ ฮอว์ โซโกนาต

๘) จงเขียนวงกลมให้ผ่านจุดกำหนด ๒ จุด และตัด
 วงกลมกำหนดได้ ฮอว์ โซโกนาต

๙) จงหาวิถีของจุดศูนย์กลางวงกลมทั้งปวงที่ตัดวงกลม
 กำหนด ๒ วงได้ ฮอว์ โซโกนาต

๑๐) จงเขียนวงกลมผ่านจุดกำหนดจุด ๑ และตัดวงกลม
 กำหนด ๒ วงได้ ฮอว์ โซโกนาต

๑๑) ผลลบของจำนวนทั้งเกินที่ตัดจากจุดใด ๆ มาถึง
 วงกลม ๒ วงเท่ากับ ๒ เท่าดีเหลี่ยมมุมฉากภายในเส้นตรงที่ตัด

จากจุดศูนย์กลางถึงกัน กับเส้นตั้งฉากจากจุดกำหนดในเวกัล
แอ็กซีส ของวงกลมนั้น

๑๒) ในหมู่วงกลมโค-แอ็กซาลซึ่งไม่ตัดกัน จงแสดง
ว่าการเขียนวงกลมเขาจุดใด ๆ ในเวกัลแอ็กซีส เป็นจุด
ศูนย์กลางร่วมกันเท่ากับทั้งเส้นตั้งฉากจากจุดนั้นถึงวงกลมมีวงหนึ่ง
ถ้าพวกนั้นจะพบเส้นตั้งฉากนั้นเป็นจุดอยู่กว่าที่ ๒ จุด

[จุดอยู่กว่าที่เหล่านี้อาจจะเรียกว่า “จุดจำกัด”

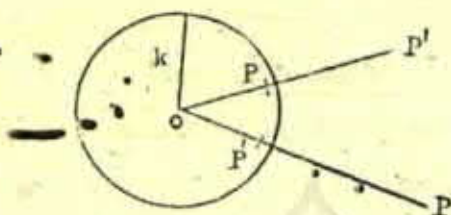
(Limiting points) ของจุดหมุน]

๑๓) ในหมู่วงกลมโค-แอ็กซาลจุดจำกัด ๒ จุดและจุด
ซึ่งวงกลมวง ๑ ในพวกวงกลมโค-แอ็กซาลทุกเส้นตั้งฉากกับเส้น
ทำให้ได้ระยะยาว ไม่นึก

๑๔) ในหมู่วงกลมโค-แอ็กซาลจุดจำกัดย่อมมีไปดาร์
อันเกี่ยวข้องกับแก๊สกลมทั้งหมดของวงกลมโค-แอ็กซาลเดียวกัน

๑๕) ถ้าวงกลม ๒ วงได้ข้อร์ โขโกนาต เส้นศูนย์กลาง
ของวงกลมวง ๑ ย่อมตัดเส้นศูนย์กลางของวงกลมอีกวง ๑ ได้ระยะ
ยาว ไม่นึก

ว่าด้วยการกลับ
แสดงศัพท์



๑) ถ้าจากจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม OP และมีจุด P' อยู่ในเส้นตรง OP หรือเมื่อคี่ OP ชกไป ซึ่งทำให้ $OP \cdot OP' = k^2$ เมื่อ k เป็นจำนวนคงที่ P และ P' นี้เรียกว่า “จุดกลับ” ซึ่งกันและกันเกี่ยวกับวงกลมซึ่ง O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ k

๒) จุด O เรียกว่า “จุดกลับเห็นของการกลับ” และ k เรียกว่า “รัศมีของการกลับ” ดังนั้น k^2 บางทีเรียกว่า “จำนวนคงที่ของการกลับ”

๓) ถ้าจุด B เคลื่อนที่ไป จุด P' ก็ต้องเคลื่อนที่ไปด้วย วัตถุของจุด P' นั้นเรียกว่า “จุดกลับของจุด P ”

จากสแคว์พทรีช ๑ จะเห็นได้ว่าเส้นตรงเส้นหนึ่งเส้นใด
ซึ่งผ่านจุดกำเนิดเป็นเส้นโค้งของตนเอง

—❖—
แบบฝึกหัดที่ ๒๘

- ๑) จงหาเส้นสัมผัสของเส้นตรงเส้น γ ซึ่งไม่ผ่านจุด
กำเนิดของการก่อกำเนิด
- ๒) จงหาวงกลมสัมผัสของวงกลมวง ๑ ขึ้นอยู่กับจุด
อยู่ในเส้นรอบวงของวงกลมนั้น
- ๓) จงหาวงกลมสัมผัสของวงกลมวง ๑ ขึ้นอยู่กับจุดที่
ไม่อยู่ในเส้นรอบวงของวงกลม และให้แสดงด้วยว่าจุดกำเนิด
เป็นศูนย์กลางความคล้ายของวงกลมและวงกลมสัมผัสของมัน
- ๔) เส้นใดๆผ่านจุดกำเนิดของการก่อกำเนิดย่อมตัดวงกลม
๒ เส้นที่สัมผัสกันบนขอบเขตข้างของเส้นนั้น
- ๕) จงอธิบายวิธีหาระยะระหว่างจุด ๒ จุดในเซตโพธิ์
ระยะระหว่างจุดก่อกำเนิดของมัน และระยะของจุดเหล่านี้จากจุดกำเนิด
- ๖) ถ้า O, P, Q, R เป็นจุดเรียงกันเป็นเส้นตรง
และ P', Q', R' เป็นจุดสัมผัสของ P, Q, R ขึ้นอยู่กับจุด
จุด O จงพิสูจน์ว่า

ก) ถ้า OP, OQ, OR เป็นอันดับบวกทั้งคู่ แล้ว
 OP', OQ', OR' ย่อมเป็นอันดับซ้ำ ไม่นับ

ข) ถ้า OP, OQ, OR เป็นอันดับศูนย์ทั้งคู่ แล้ว
 OP', OQ', OR' ก็เป็นอันดับศูนย์ทั้งคู่ด้วย

—) จงหาว่าวงกลมกับของวงกลมประกอบรูปสามเหลี่ยม
 นำจำนวนเกี่ยวข้องกับมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นค่าแทน

๔) จงแสดงว่าวงกลมวง ๑ สามารถเป็นวงกลมกับ
 ของมันเองได้ อันเกี่ยวข้องกับจุดใด ๆ ดังจุด O เป็นค่าแทน

(กำหนด k เท่ากับความยาวของทั้งเส้นจาก O)

๕) จงแสดงว่าวงกลมวง ๑ เป็นวงกลมกับในตัวของมันเอง
 อันเกี่ยวข้องกับจุดศูนย์กลางของวงกลมหรือไรโกนาตใด ๆ

๖) จุด O แบ่งครึ่งระยะ AB ของวงกลมวง ๑ จง
 แสดงว่าจุด O เป็นดังจุดค่าแทน และ OA เป็นรัศมีของวงกลม
 กับและวงกลมกับในตัวของมันเอง

๗) จงแสดงว่าวงกลมใด ๆ ๒ วง สามารถกับในตัวของมันเองได้ (ดูบทแรก ๒๒ พวกเราก็คัดเลือกจุดกำหนดให้จุด
 ค่าแทน O อยู่ใน SP และให้ k เท่ากับความยาวของทั้งเส้น
 จาก O)

๑๒) จงแสดงว่าวงกลมใด ๆ ๓ วง สามารถทับในตัวของมันเองได้ (ดูบทแทรกที่ ๓๐ ในพจนานุกรมเรขาคณิตอีกซีก)

๑๓) จงแสดงว่าถ้าเส้นตรงเส้น ๑ ตัดวงกลม จุด ๑ วง จะเป็นจุดก้นของอีกจุด ๑ ได้ โดยเลือกจุดกำหนดและจำนวนครั้งที่ของการทับให้เหมาะ

๑๔) จงแสดงว่าวงกลมวงใด ๆ ๓ วง อาจทับกับวงกลม ๓ วงได้ จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งห้ายันนัยยอมเรียงเป็นเส้นตรง (ดูข้อ ๓ ในแบบฝึกหัดที่ ๒๗ ทำบทแทรกที่ ๓๑ เรื่องเรขาคณิตอีกซีกและให้จุดกำหนดของการทับอยู่ในเส้นรอบวงของวงกลมฮอโรโกนาต)

๑๕) จงแสดงว่าเส้นศูนย์กลางของวงกลมวง ๑ อาจทับกับวงกลมใด-เอ็กราวจุดฮอโรโกนาต และทับกับวงกลมที่กำหนดให้ด้วยตามลำดับ

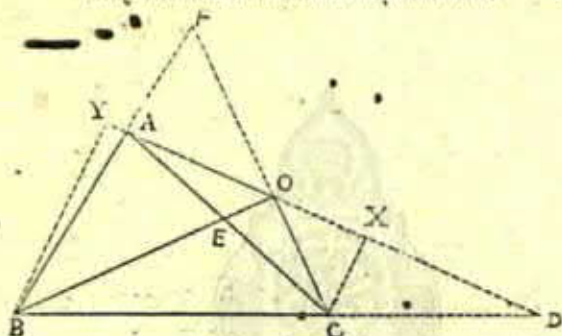
๑๖) P, Q, R เป็นจุด ๓ จุด เรียงลำดับเป็นเส้นตรง จงหาการทับของความที่จะกล่าวถึง คือ

$$PQ + QR = PR$$

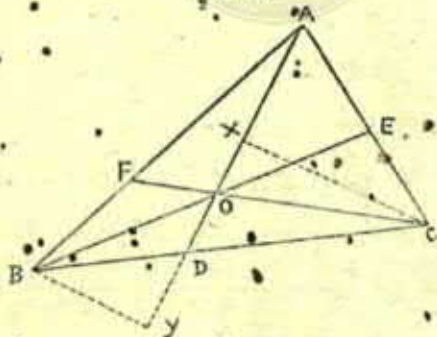


อุปรมัยนิเทศของเซวา (Ceva)

ถ้าลากเส้นตรง ๓ เส้นจากมุมของรูปสามเหลี่ยมมาถ้งด้านตรงข้าม ผ่านจุดร่วมกันเดียว ผลคูณของส่วนของด้าน ๓ ด้านซึ่งแบ่งกันตามลำดับเท่ากับผลคูณของอีก ๓ ด้านซึ่งแบ่งกันนั้น
(ผลคูณส่วนแบ่งของด้านที่เส้นเชื่อมมุมตัดเท่ากัน)



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

สมมติ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีเส้น AD, BE, CF ชัด
จากมุมของรูปสามเหลี่ยมมาบรรจบกันที่จุด O เเลยไปตัดด้าน
ตรงข้ามที่จุด D, E และ F ตามลำดับ

ให้พิสูจน์ว่า $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot AE \cdot FB$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOB, \triangle AOC$ มีฐานร่วมคือ AO ถ้า
ขีดเส้นจาก C ให้ $\perp AD$ ที่ X และขีดจาก $B \perp$
 AD ที่ Y

ดังนั้น $\triangle BYD$ กับ $\triangle CXD$ มีมุมเท่ากัน
มุมต่อมุม

$\therefore BD : DC = BY : CX$ ($\triangle$ ๓ มุมเท่ากันได้
ส่วนด้านพหุ)

$\stackrel{=}{=} \text{ระยะสูงของ } \triangle AOB : \text{ระยะสูง}$
ของ $\triangle AOC :$

$\therefore BD : DC = \triangle AOB : \triangle AOC$ โดยทำเช่น
เดียวกัน $CE : EA = \triangle BOD : \triangle BOA$

และ $AF : FB = \triangle COA : \triangle COB$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} \times \frac{\triangle BOC}{\triangle BOA} \times \frac{\triangle COA}{\triangle COB}$$

$$= ๑.$$

$$\therefore BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

ข.ต.พ.

หมายเหตุ บทกฏของอุปรมัยนิเทศน์ซึ่งอาจพิสูจน์ได้ในทางคณิต
หิมหรือสำคัญมากจะประกาศใจทยไว้ให้เห็น คือ

ถ้าเส้นตรง ๓ เส้นตัดจากมุมของรูปสามเหลี่ยมมา
ตามตรงข้าม ผลคูณของส่วนแบ่งของด้าน ๓ ด้านตาม
ลำดับเท่ากับผลคูณของส่วนแบ่งของด้านอีก ๓ ด้านตาม
ลำดับแล้ว เส้นตรง ๓ เส้นนั้นจะผ่านจุดร่วมกันที่จุด ๑
(เช่นในรูปข้างบนนี้ ก็จะได้ความว่าถ้า

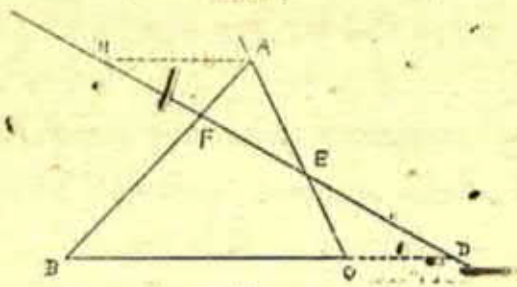
$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$ แล้วก็จะพิสูจน์ได้ว่า
 AD, BE และ CF จะไปผ่านร่วมกันที่จุด ๑ (เช่น
จุด O นั้น))

อุปรมัยนิเทศน์ของเมนเเลอัส (Menelaus)

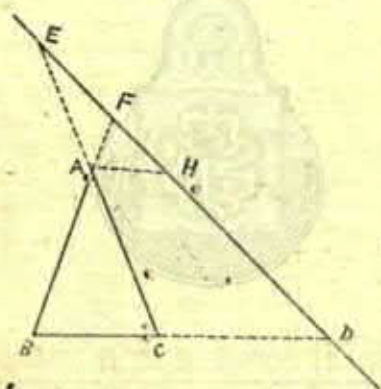
ถ้าเราตัดเส้นตรงเส้น ๑ ตัดด้านทั้ง ๓ ของรูปสามเหลี่ยมหรือ
ตัดด้านของรูปสามเหลี่ยมเมื่อตัดออกไป ผลคูณของส่วนแบ่งของ
ด้าน ๓ ด้านที่ตัดลำดับย่อมเท่ากับผลคูณของส่วนแบ่งของด้านอีก
๓ ด้านตามลำดับ

(ผลคูณส่วนแบ่งของด้านที่เส้นตรงตัดเท่ากัน)

รูปที่ ๑



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

สมมติ ให้ ABC เป็น $\triangle$ ชีตเส้นตรงตัดด้าน BC, CA และ AB ที่จุด D, E และ F ตัดภายในด้านดังรูปที่ ๑ และตัดด้านเมื่อตัดออกไปแล้วดังในรูปที่ ๒)

ให้พิสูจน์ว่า $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$

ร่าง
พิสูจน์

ขีดเส้น $AH \parallel BC$ ตัดกับเส้นตรงที่ตัดที่จุด H

$\therefore \triangle DFB$ กับ $\triangle HAF$ เป็น $\triangle$ ที่มีเท่ากันมุม
เหมือนกัน ก็ต้องเป็น $\triangle$ คล้ายกัน

$$\therefore AF : FB = AH : BD \dots\dots\dots(๑)$$

และ $\triangle DCE$ กับ $\triangle HAE$ ก็เป็น $\triangle$ คล้ายกัน

$$\therefore CE : EA = CD : AH \dots\dots\dots(๒)$$

เอา (๑) คูณกับ (๒)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{AF}{FB} \times \frac{CE}{EA} &= \frac{AH}{BD} \times \frac{CD}{AH} \\ &= \frac{CD}{BD} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{AF}{FB} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{BD} \times \frac{BD}{CD} = ๑$$

$$\therefore AF \cdot CE \cdot BD = FB \cdot EA \cdot CD$$

ร.ค.พ.

หมายเหตุ ในบทนี้เส้นตัดยอมตัดกัน ๒ ด้าน ของรูปสามเหลี่ยม
แล้วตัดกันที่ ๓ เมื่อตัดออกไปแล้วเช่นในรูปที่ ๑ หรือคย

ด้านทั้ง ๓ ออกไปที่เดียวกันในรูปที่ ๒. แต่ที่ พัดจน ไคฉด
เช่นกัน

บทกถาของอุประมัยนเทศน์ ก็อาฬสจณ ในอว
สธได้ จะประกาศใจทยไว้ ให้เห็น คือ

ถ้าจุด ๓ จุดในด้านของรูปสามเหลี่ยม — ด้านและ
ในด้านที่ ๓ เมื่อตัดออกไป หรือจุดอยู่ในส่วนเมื่อตัด
ออกไปทั้ง ๓ ด้าน กระทำให้ผลคูณของส่วนแย้งของ
ด้าน ๓ ส่วนตามลำดับเท่ากับผลคูณของส่วนแย้งของด้าน
อีก ๓ ส่วนตามลำดับแล้ว จุด ๓ จุดนั้นย่อมเรียงกัน
เป็นเส้นตรง *

แสดงศัพท์

๑) ถ้าเส้นตรง ๓ เส้นที่ด้านคือจอมของรูปสามเหลี่ยม
๒ รูปถึงกันไปผ่านร่วมกันที่จุด ๑ ได้ รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปนั้น
เรียกว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมโค-ปอดาร์

๒) ถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูปซึ่งจุดตัดทั้ง ๓ ของด้านคือ
ด้านนั้นเรียงกันเป็นเส้นตรง รูปสามเหลี่ยมทั้ง ๒ นั้นเรียกว่า
เป็นรูปสามเหลี่ยมโค-แอ็กชาด

แบบฝึกหัดที่ ๒๔

๑) จงใช้สมบัติพื้นที่ของเรขาคณิต พิสูจน์คุณสมบัติ

ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนี้

ก) เส้นแบ่งครึ่งทั้งสี่ด้านของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะบรรจบกันที่จุดเดียว

ข) เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะบรรจบกันที่จุดเดียว

ค) เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะบรรจบกันที่จุดเดียว

๒) วงกลมประจุในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABC โดยมีจุด A, B, C และ AB ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ ถ้าเส้น EF, FD และ DE ตัดกันที่จุด P, Q และ R ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า P, Q, R เรียงเป็นเส้นตรง

๓) อย่างเดียวกับรูปในข้อ ๒ นี้ จงแสดงว่าจุด B, D, C และ P เป็นระยะห่างไม่เท่ากัน

๔) ถ้าทั้งสี่ด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABC มีจุด D, E และ F ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นว่า

$BD : CD = BA^2 : AC^2$ แล้วพิสูจน์
ด้วยว่าจุด D, E และ F เรียงเป็นเส้นตรง

*๕๖) เส้นตรงที่ตัดจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมถึงจุด
กึ่งกลางของวงกลมประจุหรือวงกลมข้างเคียงย่อมรวมบรรจบ
ที่จุดหนึ่ง

๖) จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมบริบูรณ์
ย่อมเรียงกันเป็นเส้นตรง*

๗) จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทุกเส้นของรูปสี่เหลี่ยม
บริบูรณ์ เส้นทแยงมุม ๒ เส้นย่อมแบ่งเส้น ๑ ออกได้สาม โมดูล

๘) รูปสามเหลี่ยมโค-ไปดาร์ ย่อมเป็นรูปสามเหลี่ยม
โค-เอ็กซาลต์ด้วย และถ้ากลับเสีย รูปสามเหลี่ยมโค-เอ็กซาลต์
ก็เป็นรูปสามเหลี่ยมโค-ไปดาร์ ได้ด้วยเหมือนกัน

๙) ศูนย์ความคล้าย ๖ ศูนย์ของวงกลม ๓ วง เมื่อ
๓ จุดอยู่ในเส้นตรง ๔ เส้นอีก ๓ จุดก็อยู่ในเส้นตรง ๔ เส้นด้วย

จบภาคที่ ๕

จบตำราเรขาคณิตเล่ม ๓

มีเล่ม ๔ ต่อไป

