



ตำราเรขาคณิต

ภาคสอง

(สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕)

ของ

รองอำมาตย์ตรี ล่งฮัว ลิมป็นันท์ ป.ม. เนตบัณฑิต

—พิมพ์—

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๑๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๗๔

ราคาเล่มละ ๖๐ สตางค์

ลิขสิทธิ์สงวน

พิมพ์จำหน่ายที่โรงพิมพ์อักษรนิติ บางขุนพรหม



ตำราเรขาคณิต

ภาคสอง

(สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕)

ของ

รองอำมาตย์ตรี ล่งฮัว ลิมปนนท์ ป.ม. เนติบัณฑิต

—*—*—*—

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๑๐๐๐ ฉบับ

พ. ศ. ๒๔๗๔

ราคาเล่มละ ๖๐ สตางค์

ลิขสิทธิ์สงวน

พิมพ์จำหน่ายที่โรงพิมพ์อักษรนิติ บางขุนพรหม

ก 03377 ค1

คำนำ

เนื่องจากข้าพเจ้าได้เรียบเรียง ตำรา เรขาคณิต ภาคหนึ่ง สำหรับ
ใช้ ใน ชั้นมัธยมปีที่ ๔ แล้ว เห็นว่า ถ้าจะมี ตำรา เรขาคณิต
ภาคสองสำหรับใช้ ในชั้นมัธยมปีที่ ๕ ก็คงจะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียน
มากขึ้น และ ทั้ง จะได้เพิ่ม ตำรา วิชา คำนวณ ชั้น ชัก เล่มหนึ่ง เพื่อ
ให้สมแก่ความต้อง การ ของ การศึกษาใน สมัยที่ กำลัง เรืองรุ่งเรือง.

ตำรา เรขาคณิต ภาคสอง นี้ ข้าพเจ้าได้เรียบเรียง ตามแนวของท่าน
อาจารย์ชอลต์ และ สตีเวนส์ และมีบางแห่งที่ เห็นว่าผู้เรียน จะเข้าใจ
ได้โดยยาก ข้าพเจ้าก็ได้เปลี่ยนแปลง แก้ไขเพิ่มเติมเพื่อให้ผู้เรียน
เข้าใจง่ายขึ้น โดยอาศัยความเคยชินที่ได้สอน และ สังเกตดูเมื่อเวลา
สอนนักเรียนในชั้นนี้ ๆ.

หนึ่ง การ เรียบเรียง หนังสือ สำหรับใช้เรียนตำรานี้ ข้าพเจ้ารู้สึก
หนักใจมาก เพราะไม่ใช่ของง่าย โดยเหตุฉะนั้น ข้าพเจ้าจึงได้ใช้
เวลาหาว่า จะเรียบเรียงได้แต่ละภาค แต่ถึง กระนั้น ก็ที่ข้าพเจ้าก็
ยังไม่กล้า รับรองว่า ตำรา เล่มนี้ จะไม่มีข้อบกพร่อง.

เพราะฉะนั้น ข้าพเจ้า จำ เป็น ต้อง ขอ ความ กรุณา แก่ ท่านผู้
ทั้งหลายถ้า พบเห็นความบกพร่องในหนังสือเล่มนี้ ก็ขอได้ โปรดแจ้งให้
ข้าพเจ้า ทราบด้วย จะเป็น พระเดช พระคุณ อย่างยิ่ง.

รองอำมาตย์ตรี ล่งยัว ลิมปนนท์

บ้านเลขที่ ๑๒๕๐ กม. ถนนพญาไท

บัญชีเรื่อง

๑	คำจำกัดความ	หน้า ๑
๒	บทพิสูจน์ที่ ๒๓	๓
๓	แบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับเนื้อหาของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	๖
๔	บทพิสูจน์ที่ ๒๔	๑๑
๕	แบบฝึกหัด	๑๓
๖	บทพิสูจน์ที่ ๒๕	๑๕
๗	แบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับเนื้อหาของรูปสามเหลี่ยม	๑๗
๘	บทพิสูจน์ที่ ๒๖	๑๘
๙	บทพิสูจน์ที่ ๒๗	๒๑
๑๐	แบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับเนื้อหาของรูปสามเหลี่ยม	๒๒
๑๑	แบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับเนื้อหาของรูปสามเหลี่ยม (ต่อ)	๒๔
๑๒	วิธีคำนวณเนื้อหาของรูปสามเหลี่ยม เมื่อรู้ค่าสามด้าน	๒๗
๑๓	แบบฝึกหัด	๒๘
๑๔	บทพิสูจน์ที่ ๒๘	๒๙
๑๕	แบบฝึกหัด	๓๑
๑๖	วิธีหาเนื้อหาของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ	๓๓

๑๗	แบบฝึกหัด	๓๖
๑๘	แบบฝึกหัดว่าด้วยรูปสี่เหลี่ยม	๓๗
๑๙	แบบฝึกหัดแนะนำบทพิสูจน์ที่ ๒๙	๓๙
๒๐	บทพิสูจน์ที่ ๒๙	๔๒
๒๑	พิสูจน์โดยวิธีที่สองของท่านโพธาโกราส	๔๔
๒๒	แบบฝึกหัด	๔๖
๒๓	บทพิสูจน์ที่ ๓๐	๔๙
๒๔	แบบฝึกหัดของบทพิสูจน์ที่ ๒๙, ๓๐	๕๑
๒๕	บทสร้างที่ ๑๖	๕๓
๒๖	แบบฝึกหัดของบทพิสูจน์ที่ ๒๙, ๓๐ (ต่อ)	๕๕
๒๗	บทสร้างที่ ๑๗	๕๘
๒๘	แบบฝึกหัด	๕๙
๒๙	บทสร้างที่ ๑๘	๖๒
๓๐	บทสร้างที่ ๑๙	๖๓
๓๑	แบบฝึกหัด	๖๔
๓๒	เส้นแอกซิสของพีเพอร์โวนซ์และเส้นโคออร์ดิเนต	๖๘
๓๓	แบบฝึกหัด	๗๓
๓๔	แบบฝึกหัดระคน	๘๑

เรขาคณิต ภาคสอง

ว่าด้วยเนื้อที่

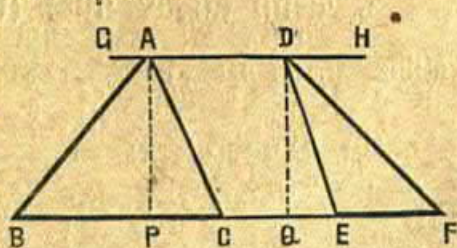
คำจำกัดความ

๑. ส่วนสูง (Altitude or Height) ของรูปสี่เหลี่ยมค้านขนาน เมื่อถือเอาค้านที่กำหนดให้ค้านหนึ่งเป็นฐานแล้ว ส่วนสูง ก็คือ ระยะตั้งฉาก ระหว่าง ค้านฐาน กับ ค้านตรงข้าม.

๒. ส่วนสูง (Altitude or Height) ของรูปสามเหลี่ยม เมื่อถือเอา ค้านที่กำหนดให้ค้านหนึ่งเป็นฐานแล้ว ส่วนสูง ก็คือ ระยะตั้งฉาก ทอดจากยอดซึ่ง อยู่ ตรงข้าม กับ ค้านฐานไป ยัง ค้านฐานนั้น.

หมายเหตุ รูปสี่เหลี่ยมค้านขนานหรือรูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ระหว่างเส้นขนานร่วมกันย่อมจะมีส่วนสูงเท่ากัน.

∴ ให้ AP และ DQ เป็น
ส่วนสูง ของรูป $\triangle ABC$ และ
 $\triangle DEF$ ซึ่ง อยู่ ระหว่างเส้น
ขนาน BE, GH ร่วมกัน.



∴ ก็จะได้เห็นว่ารูป $APQD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมค้าน.

$$\therefore AP = DQ$$

๓. เนื้อที่ (Area) ของรูป ๆ หนึ่ง คือจำนวนพื้นที่ซึ่งอยู่ภายในเส้นล้อมรอบของรูปนั้น.

๔. หนึ่งตารางนิ้ว (A square inch) คือเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสร้างอยู่บนด้าน ๆ หนึ่ง ยาวหนึ่งนิ้ว.



หนึ่งตารางนิ้ว

๕. หนึ่งตารางเซนติเมตร (A square centimetre) คือเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสร้างอยู่บนด้าน ๆ หนึ่ง ยาวหนึ่งเซนติเมตร.



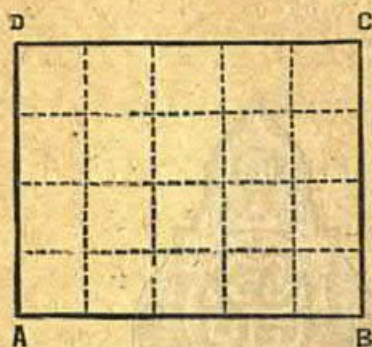
หนึ่งตารางซม.

และคำว่า หนึ่ง ตารางหลา, ตารางฟุต, ตารางเมตร ก็มีความหมายอย่างเดียวกัน.

๖. ฉะนั้น หน่วยของเนื้อที่ (Unit of area) คือเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งอยู่บนด้าน ๆ หนึ่ง ยาวหนึ่งหน่วย (Unit).

บทพิสูจน์ที่ ๒๓

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้าจำนวนหน่วยตามด้านยาว
ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคูณด้วยจำนวนหน่วยตามด้านกว้าง ผลคูณที่
ได้จะเป็นจำนวนตารางหน่วย ซึ่งเป็นเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABCD แทนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง
ซึ่ง มีด้านกว้าง $AD = ๔$ ฟุต, ด้านยาว $AB = ๕$ ฟุต.

จะต้องพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีเนื้อที่ ๒๐
ตารางฟุต.

พิสูจน์ แบ่ง AB ออก เป็น ๕ ส่วนเท่า ๆ กัน และ แบ่ง BC ออก
เป็น ๔ ส่วนเท่า ๆ กัน ลากเส้นจากทุกที่แบ่งในข้างหนึ่งไปยังทุก
ที่แบ่งในอีกข้างหนึ่ง ซึ่ง อยู่ตรง กันข้าม, ให้ขนาน กับข้างอื่น.

ทั้งนี้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ก็ถูก แบ่ง ออก เป็นรูปเล็กๆ
หลายรูป รูปหนึ่ง ๆ แทนหนึ่ง ตารางฟุต.

และ ∴ มีแถวละ ๕ รูป อยู่ ๔ แถว.

∴ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีเนื้อที่ = 5×4 ตารางฟุต.
= ๒๐ ตารางฟุต.

ในการทำงานเกี่ยวกับ ถ้าด้านกว้าง ๆ ๔ หน่วย, ด้านยาว ๆ ๕ หน่วย ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า.

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้มีเนื้อที่ ๔ ตารางหน่วย และ ถ้าด้าน ๆ หนึ่ง ของ รูป สี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาว ๔ หน่วย รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้ ก็จะมีเนื้อที่ ๔ ตารางหน่วย.

และ อาจกล่าวได้สั้น ๆ ว่า.

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง $\times$ ยาว (๑)

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = (ด้าน)^๒ (๒)

ช. ต. พ.

บทแทรก (๑) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหลาย ซึ่งมีด้านกว้าง และด้านยาวเท่ากัน, ย่อมมีเนื้อที่เท่ากัน.

(๒) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหลาย ซึ่งมีเนื้อที่เท่ากัน และมี ด้านยาวเท่ากัน, ย่อมจะมีด้านกว้างเท่ากัน.

หมายเหตุ

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่ง ประกอบด้วย ด้าน AB, AD เพราะด้าน ประชิดทั้งสอง นี้จำกัดขนาด และรูป ของ สี่เหลี่ยมผืนผ้าไว้แน่นอน แล้ว.

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านประชิด AB, AD ให้เขียนว่า
รูป $\square$ ผืนผ้า AB, AD หรือจะเขียนว่า $AB \times AD$ ก็ได้.

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างอยู่บนด้าน AB ให้เขียนว่ารูป $\square$
จัตุรัสบนด้าน AB หรือ AB^2

แบบฝึกหัดว่าด้วยมาตราวัดทางยาวและเนื้อที่

๑. จงสร้างรูปพิสูจน์ให้เห็นว่าทำไม

(๑) ๑ ตารางหลา = $๓^๒$ ตารางฟุต.

(๒) ๑ ตารางฟุต = $๑๒^๒$ ตารางนิ้ว.

(๓) ๑ ตาราง ซม. = $๑๐^๒$ ตาราง มม.

๒. จงสร้างรูปพิสูจน์ให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นตรง
เส้นหนึ่งเป็นสี่เท่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนครึ่งหนึ่งของเส้นตรงเส้นนั้น.

๓. พิจารณาตารางเหลี่ยมพิสูจน์ให้เห็นว่า รูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสบน $๑'' = ๑๐^๒$ ครึ่ง ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน $๐.๑''$

๔. ถ้า ๑ นิ้ว แทน ๕ ไมล์ ๖ ตารางนิ้ว แทนเนื้อที่เท่าใด?

ขยายเนื้อความของบทพิสูจน์ที่ ๒๓

การพิสูจน์ของบทที่ ๒๓ นี้ ได้พิสูจน์โดยสมบัติได้ด้าน
กว้างและด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้มีขนาดเป็นจำนวน
เต็ม แต่ถ้านิยามของด้านกว้างและยาวเป็นเศษส่วน (คือไม่ใช่

จำนวนเต็ม) ก็คงใช้กฎของบทพิสูจน์นี้ได้ ซึ่งจะแสดงให้เห็น
ทั้งต่อไปนี้.

สมมุติว่า ก้าน กว้าง และยาว = ๒.๔ ซม., และ ๓.๒ ซม.
จะพิสูจน์ให้เห็นว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = (๒.๔×๓.๒)
ตาราง ซม.

$$\therefore \text{ก้าน กว้าง} = ๒.๔ \text{ ซม.}$$

$$= ๒๔ \text{ มม.}$$

$$\text{และ } \therefore \text{ก้าน ยาว} = ๓.๒ \text{ ซม.}$$

$$= ๓๒ \text{ มม.}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า} = (๒๔ \times ๓๒) \text{ ตาราง มม.}$$

$$= \frac{๒๔ \times ๓๒}{๑๐๐} \text{ ตาราง ซม.}$$

$$= \frac{๗๖๘}{๑๐๐} \quad "$$

$$= ๗.๖๘ \quad "$$

$$= (๒.๔ \times ๓.๒) \quad "$$

แบบฝึกหัดว่าด้วยเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จงเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีก้านกว้าง (๔) และ ก้านยาว

(๑) ตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ลงบนกระดาษตารางเหลี่ยม จง

กำหนดหา เนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่านี้ และ หักตารางเหลี่ยม
ในรูปนี้ ๆ ว่า จะใกล้เคียงที่คำนวณไว้จริง หรือไม่.

$$๑. a=๒'', b=๓'' \quad ๒. a=๑.๕'', b=๔''$$

$$๓. a=๐.๘'', b=๓.๕'' \quad ๔. a=๒.๕'', b=๑.๔''$$

$$๕. a=๒.๒'', b=๑.๕'' \quad ๖. a=๑.๖'', b=๒.๑''$$

จงกำหนดหา เนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีขนาด ดังต่อไปนี้

$$๗. a=๑๘ \text{ เมตร}, b=๑๑ \text{ เมตร.}$$

$$๘. a=๗ \text{ ฟุต}, b=๗๒ \text{ นิ้ว.}$$

$$๙. a=๒.๕ \text{ กม.}, b=๔ \text{ เมตร.}$$

$$๑๐. a=\frac{๑}{๕} \text{ ไมล์}, b=๑ \text{ นิ้ว.}$$

๑๑. เนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปหนึ่ง = ๓๐ ตาราง ซม.
ด้านยาว = ๖ ซม. จงหา ด้านกว้าง แล้วเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ลงบนกระดาษ ตารางเหลี่ยม และ หัก ตารางเหลี่ยมเหล่านี้ แล้ว
ได้เท่ากันจริงหรือไม่.

๑๒. จงหา ด้านยาว ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปหนึ่ง ซึ่งมีเนื้อที่
๓.๙ ตาราง นิ้ว และ ด้านกว้าง = ๑.๕'' แล้วเขียนรูปลงบนกระดาษ
ตารางเหลี่ยม หัก ตารางเหลี่ยมในรูปนี้ว่า จะใกล้เคียงที่คำนวณไว้จริงหรือไม่.

๑๓. (๑) เมื่อทำห ทวิ ด้านยาว ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขึ้น

สามเท่าโดยไม่เปลี่ยน ก้านกว้าง ถามว่า ท่าน ทวี เนื้อที่ ของ รูปนี้
 ซึ่นกี่เท่า?

(๒) เมื่อท่าน ทวี ทั้ง ก้าน กว้าง และยาว ซึ่น ๓ เท่า ถามว่า
 ท่าน ทวี เนื้อที่ ซึ่น กี่เท่า?

จงเขียนรูปอธิบายคำตอบของท่าน, และกล่าวกฎโดยทั่วไปไว้ด้วย.

๑๔. แผ่นผิงของ ส่วนรูป สี่เหลี่ยม ผืนผ้า แห่งหนึ่ง ก้านกว้าง
 $= ๒.๕''$ ก้านยาว $= ๓.๖''$, หันหว แทน ๑๐ หลา จงหา เนื้อที่
 ของ ส่วน แห่ง นน.

ถ้า ทวี เนื้อที่ ซึ่น ๓๐๐ ตาราง หลา แต่ ก้าน กว้าง คงเดิม
 ถามว่า ก้านยาว จะต้อง เป็นเท่าใด? และจะเขียนลงในแผ่นผิง ยาว กี่หว?

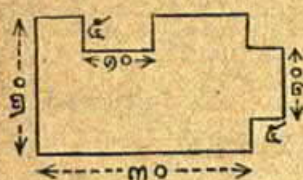
๑๕. จง หา เนื้อที่ ภายใน รั้ว รูป สี่เหลี่ยม ผืนผ้า แห่งหนึ่ง ซึ่งเขียน
 ลงบน แผ่นผิง (มาตราส่วน ๑ ซม. $= ๒๐$ เมตร) วัดได้ ๔.๕ ซม.
 กว้าง ๖.๕ ซม.

๑๖. เนื้อที่ รูป สี่เหลี่ยม ผืนผ้า แห่งหนึ่ง $= ๑๔๔๐$ ตาราง หลา
 ถ้า ก้าน ประชิด ทั้งสอง เขียนไว้ ใน แผ่นผิง $= ๓.๒$ ซม. และ ๔.๕ ซม.
 ถามว่า แผ่นผิง แผ่นนี้ ใช้ มาตรา ส่วนเท่าใด?

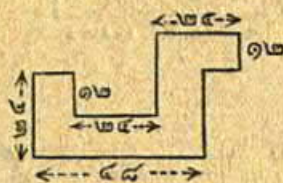
๑๗. เนื้อที่ หารูป สี่เหลี่ยม ผืนผ้า แห่งหนึ่ง $= ๕๒๐๐๐$ ตาราง
 ฟุต เขียน ลงบน แผ่น ผิง มาตรา ส่วน ๑" $= ๑๐๐$ ฟุต ก้าน ยาว
 $= ๓.๒๕''$ ถามว่า ก้านกว้าง เป็นเท่าใด?

จงคำนวณหา เนื้อที่ ภายใน รั้ว ของ แผ่นผิง ข้างล่างนี้ มุม ทุกมุม
เป็น มุมฉาก และ ขนาดที่ เขียนไว้เป็น ฟุต ทั้งหมด.

๑๘.

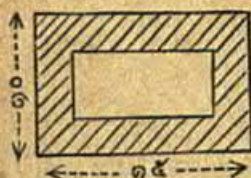


๑๙.



จงคำนวณหา เนื้อที่ ของ เพาะ ส่วนที่ แร ง ของ แผ่น ผิง ต่อไปนี้
ขนาด ที่ เขียนไว้ เป็น ฟุต ทั้งหมด.

๒๐.



๒๑.



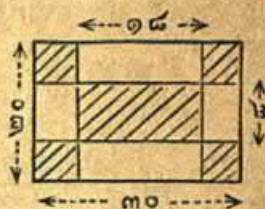
ขอบที่ แร ง กว้าง ๒ $\frac{1}{2}$ ฟุต ตลอด.

ขอบที่ แร ง กว้าง ๔ ฟุต ตลอด.

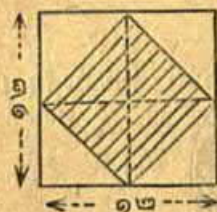
ଉ.ଉ.



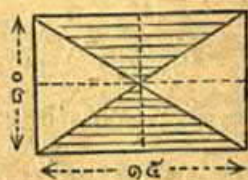
ଉ.ମ.



ଉ.ଉ.

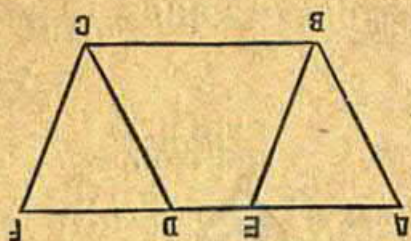


ଉ.ଉ.



บทพิสูจน์ที่ ๒๔

รูปสี่เหลี่ยมค้านขนานซึ่งตั้งอยู่บนฐานร่วมกันและอยู่ระหว่างเส้นขนานร่วมกันจะมีเนื้อที่เท่ากัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ $ABCD, EBCF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมค้านขนานสองรูป ตั้งอยู่บนฐานร่วม BC และอยู่ระหว่างเส้นขนาน BC, AF ร่วมกัน.

จะต้องพิสูจน์ว่า เนื้อที่ของรูป $\square$ ค้านขนาน $ABCD =$ เนื้อที่ของรูป $\square$ ค้านขนาน $EBCF$.

พิสูจน์ ในรูป $\triangle FDC$, และ $\triangle EAB$.

$$\begin{cases} \text{ก้าน } DC = \text{ก้านตรงข้าม } AB \text{ (บ.พ.ส. ๒๑)} \\ \therefore \text{มุมภายในที่ } FDC = \text{มุมภายในที่ตรงข้าม } EAB \text{ (บ.พ.ส. ๑๔).} \\ \text{มุมภายในที่ } DFC = \text{มุมภายในที่ตรงข้าม } AEB \text{ (บ.พ.ส. ๑๔).} \end{cases}$$

$\therefore$ รูป $\triangle FDC =$ รูป $\triangle EAB$ ทุกประการ (บ.พ.ส. ๑๗).

และ $\therefore$ รูป $ABCF$ ทั้งหมด - รูป $\triangle FDC =$ รูป $\square$ ค้านขนาน $ABCD$.

และ $\therefore$ รูป $ABCF$ ทั้งหมท - รูป $\triangle EAB$ = รูป $\square$ ด้าน
ขนาน $EBCF$.

$\therefore$ รูป $\square$ ด้านขนานที่เหลื = รูป $\square$ ด้านขนานที่เหลื.

นั่นคือ รูป $\square$ ด้านขนาน $ABCD$ = รูป $\square$ ด้านขนาน $EBCF$.

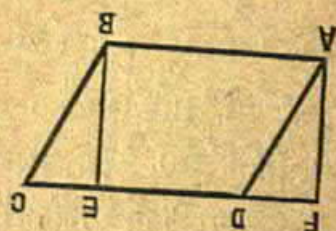
ช.ต.พ.

แบบฝึกหัด

ในรูปของบทพิสูจน์ที่ ๒๔ ด้าน AD, EF ทั้กันอยู่ จงเขียนรูป
ให้ (๑) ด้านสอง ด้านนี้ไม่ทั้กัน (๒) ปลายด้านที่จุด E และ
 D ทั้กันสนิท แล้วพิสูจน์บทพิสูจน์ที่ ๒๔ ตามรูปทั้งสองนี้ เพื่อ
ให้เห็นใจว่าบทพิสูจน์บทนี้ใช้ สำหรับรูปทั้งสองนี้ได้เหมือนกัน.

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

สิ่งที่กำหนดให้ ให้ $ABCD$
เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน รูปหนึ่ง และ
 $ABEF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตั้งอยู่บน
ฐานร่วม AB และมีส่วนสูง BE ร่วมกัน



$\therefore$ ตามบทพิสูจน์ที่ ๒๔ เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 $ABCD$ = เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABEF$.

$$= BA \times BE.$$

$$= \text{ฐาน} \times \text{ส่วนสูง}.$$

บทแทรก: เนื่อง จาก เนื้อที่ ของ รูป สี่เหลี่ยม ก้าน ขนาน ทั้ง
แล้ว แต่ ก้านฐาน และ ส่วน สูง ของ รูป นั้น.

∴ รูปสี่เหลี่ยมก้านขนานซึ่งตั้งอยู่บนฐานเท่ากัน และมีส่วน
สูงเท่ากันย่อมจะมีเนื้อที่เท่ากัน.

แบบฝึกหัด

(คำนวณและสร้างรูป)

๑. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน ซึ่งมี

(๑) ก้านฐาน = ๕.๕ ซม. และ ส่วนสูง = ๔ ซม.

(๒) ก้านฐาน = ๒.๔" และ ส่วนสูง = ๑.๕"

๒. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน ABCD ให้ $AB = ๒\frac{๑}{๒}"$,

$AD = ๑\frac{๑}{๒}"$, และ $\hat{A} = ๖๕^{\circ}$ จงสร้างและวัดเส้นตั้งฉาก
ลากจาก D มาที่ AB แล้วคำนวณหาเนื้อที่ให้ได้ ใกล้เคียงความจริง
ทำไมจึงคำนวณแต่เพียงใกล้เคียงความจริง?

จงคำนวณหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนานนี้ อีก ครั้งหนึ่ง
โดยคำนวณจากก้าน AD และเส้นตั้งฉากลากจาก B มาที่ AD
แล้วหาส่วนเฉลี่ยของผลที่ได้จากการคำนวณทั้งสองครั้ง.

๓. ก้านประชิดทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน = ๓๐ เมตร
และ ๖๕° เมตร มุมในระหว่างก้านทั้งสอง = ๕๐° จงเขียนแผนผัง

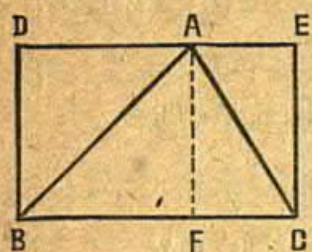
ใช้มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๕ เมตร และคำนวณหาพื้นที่โดย
ลากเส้นตั้งฉากมาที่ด้านยาวครึ่งหนึ่ง และลากมาที่ด้านสั้นอีก
ครึ่งหนึ่ง วัดเส้นตั้งฉากนั้น แล้วหาส่วนเฉลี่ยจากผลที่ได้ทั้งสองครึ่ง.

๔. เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD = ๔.๒$ ตารางนิ้ว
และด้านฐาน $AB = ๒.๘$ นิ้ว จงหาส่วนสูง ถ้า $AD = ๒$
จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น.

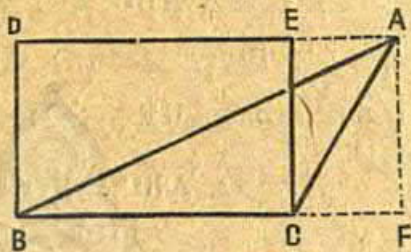
๕. ด้านหนึ่ง ๆ ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปหนึ่ง = ๒"
และเนื้อที่ = ๓.๘๖ ตารางนิ้ว จงคำนวณหาส่วนสูง แล้วสร้างรูป
สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและวัดมุมแหลม หักมุมว่าเท่ากับของค่า.

บทพิสูจน์ที่ ๒๕

เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็นครึ่ง
หนึ่งของเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่บนฐานร่วมกัน และมีส่วน
สูงเท่ากัน.



รูป ๑



รูป ๒

สิ่งที่กำหนดให้ ให้รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสี่เหลี่ยม
ผืนผ้า BDEC ตั้งอยู่บนฐานร่วม BC และมีส่วนสูง AF เท่ากัน.
จะต้องพิสูจน์ว่า รูป $\triangle ABC = \frac{๑}{๒}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
BDEC

พิสูจน์ $\therefore AF$ ตั้งฉากกับ BC

$\therefore$ รูป DF, EF ต่างก็เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$\therefore$ เส้นทแยงมุม AB แบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า DF

(บทแทรก ๓ ของ บ.พ.ส. ๒๑).

$\therefore$ รูป $\triangle ABF = \frac{๑}{๒}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า DF

ในทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่ารูป $\triangle AFC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า FE

$\therefore$ (ในรูป ๑) รูป $\triangle ABF +$ รูป $\triangle AFC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า DF + $\frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า FE

$\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BDEC

$\therefore$ (ในรูป ๒) รูป $\triangle ABF -$ รูป $\triangle AFC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า DF - $\frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า FE

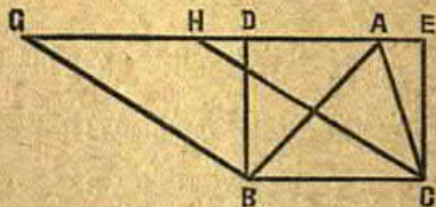
$\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BDEC

ช. ต. พ.

บทแทรก เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับครึ่งหนึ่งของเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูซึ่งอยู่บนฐานร่วมกัน และอยู่ระหว่างเส้นขนานร่วมกัน.

$\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู BCED

และรูปสี่เหลี่ยมคางหมู BCED = รูปสี่เหลี่ยมคางหมู BCHG ใดๆ ซึ่งอยู่บนฐานร่วมกัน และอยู่ระหว่างเส้นขนานร่วมกัน



$\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู BCHG

เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม

ถ้า BC และ AF ยาว a หน่วย และ h หน่วย ตามลำดับ
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BDEC ก็มีเนื้อที่ ah ตารางหน่วย

$\therefore$ เนื้อที่ของรูป $\triangle ABC = \frac{1}{2} ah$ ตารางหน่วย

$\therefore$ จึงกล่าวได้ว่า

เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ ส่วนสูง.

แบบฝึกหัดว่าด้วยเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม

(คำนวณและสร้างรูป)

๑. หาคำนวณหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี

(๑) ฐานฐาน = ๒๔ ฟุต, ส่วนสูง = ๑๕ ฟุต.

(๒) ฐานฐาน = ๔.๘", ส่วนสูง = ๓.๕"

(๓) ฐานฐาน = ๑๖๐ เมตร, ส่วนสูง = ๑๒๕ เมตร.

๒. หงสร้างรูปสามเหลี่ยมจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้.

ในข้อหนึ่ง ๆ ให้สร้างและวัดส่วนสูงโดยถือเอาด้านที่กำหนด
ให้ด้านหนึ่งเป็นฐาน แล้วคำนวณหาเนื้อที่ได้ได้ ใกล้เคียง
ความจริง.

(๑) $a = ๘.๔$ ซม., $h = ๖.๘$ ซม., $c = ๔.๐$ ซม.,

(๒) $h = ๕.๐$ ซม., $a = ๖.๘$ ซม., $A = ๖๕^\circ$

(๓) $a = ๖.๕$ ซม., $B = ๕๒^\circ$, $C = ๗๖^\circ$

๓. (๑) รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก พหุคูณได้เห็นว่า เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้ $= \frac{๑}{๒} BC \times CA$

(๒) ให้ $a = ๖$ ซม., $b = ๕$ ซม., แล้วคำนวณหาเนื้อที่.

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมและวัดด้านตรงข้ามกับมุมฉาก c จงสร้างและวัดเส้นตั้งฉากจาก C ไปที่ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก แล้วคำนวณหาเนื้อที่ได้ได้ใกล้เคียงความจริง.

บอกจำนวนที่คลาดเคลื่อนขึ้นเนื่องจากผลที่ได้ใกล้เคียงความจริง และ คลาดเคลื่อนคิดเป็นร้อยละ เท่าใดของเนื้อที่ ๆ เป็นจริง.

๔. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก, $a = ๒.๘"$, และ $b = ๔.๕"$ C เป็นมุมฉาก จงทำอย่างเดียวกับข้อ ๓ (๒).

๕. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง กำหนดให้.

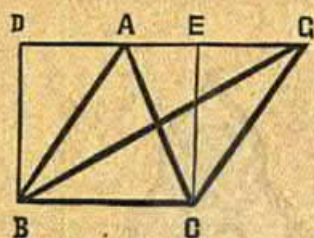
(๑) เนื้อที่ = ๘๐ ตารางนิ้ว, ด้านฐาน = ๑๗๓ นิ้ว จงคำนวณหาส่วนสูง.

(๒) เนื้อที่ = ๑๐.๔ ตารางซม., ส่วนสูง = ๑.๖ ซม. จงคำนวณหาฐาน.

๖. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $a = ๓.๐"$, $b = ๒.๘"$ $c = ๒.๖"$ จงสร้างและวัดเส้นตั้งฉากจาก A มาที่ BC แล้วคำนวณหาเนื้อที่ได้ได้ใกล้เคียงความจริง.

บทพิสูจน์ ที่ ๒๖

รูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่บนฐานร่วมกัน และอยู่ระหว่างเส้นขนาน
ร่วมกัน (คือมีส่วนสูงเท่ากัน) จะมีเนื้อที่เท่ากัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้รูป $\triangle ABC$ และ $\triangle GBC$ อยู่บนฐาน
ร่วม BC และ อยู่ระหว่างเส้นขนาน BC, AG ร่วมกัน.

จะต้องพิสูจน์ว่า เนื้อที่ของรูป $\triangle ABC =$ เนื้อที่ของรูป $\triangle GBC$

พิสูจน์ ถ้า BCED เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอยู่บนฐาน BC
และอยู่ระหว่างเส้นขนาน BC, AG ร่วมกันกับสามเหลี่ยมทั้งสอง
ที่กำหนดให้.

$\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{๑}{๒}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BCED (ป.พ.
ถ. ๒๔).

และ $\therefore \triangle GBC = \frac{๑}{๒}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BCED

(บ. พ. ศ. ๒๔).

∴ เนื้อที่ของรูป $\triangle ABC$ = เนื้อที่ของรูป $\triangle GBC$

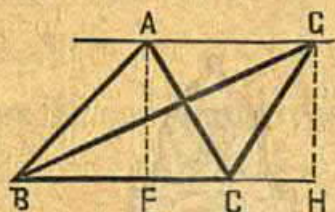
ช. ค. พ.

ในการทำงานเดียวกัน รูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่บนฐานยาวเท่ากัน
และมีส่วนสูงเท่ากัน ย่อมจะมีเนื้อที่เท่ากัน.



บทพิสูจน์ที่ ๒๗

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีเนื้อที่เท่ากัน และอยู่บนฐานร่วมกัน บนข้างเดียวกัน รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น จะอยู่ระหว่างเส้นขนานร่วมกัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้รูป $\triangle ABC, GBC$ อยู่บนฐานร่วม BC มีเนื้อที่เท่ากัน และให้ AF และ GH เป็น ส่วนสูง ของ รูปสามเหลี่ยมทั้งสอง ตามลำดับ.

จะต้องพิสูจน์ว่า AG ขนานกับ BC

พิสูจน์ $\therefore$ รูป $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่ง ประกอบด้วยด้าน BC และ AF (บ.พ.ส. ๒๔).

และรูป $\triangle GBC = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่ง ประกอบด้วยด้าน BC และ GH (บ.พ.ส. ๒๔).

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $BC, AF =$ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BC, GH

$\therefore AF = GH$ (บทแทรก ๒ ของ บ. พ. ศ. ๒๓).

และทั้ง AF หนานกับ GH ด้วย ($\therefore$ ต่างก็ตั้งฉากกับ BH).

$\therefore AG$ หนานกับ FH (บ. พ. ศ. ๒๐)

นั่นคือ AG หนานกับ BC

ช. ต. พ.

แบบฝึกหัดว่าด้วยเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม (พิสูจน์)

๑. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, มี $\times Y$ ลากหนานกับฐาน BC ไปตัดด้านอื่นที่ $\times$ และ Y ลากเส้น BY และ $C \times$ จงพิสูจน์ว่า

$$(๑) \text{ รูป } \triangle \times BC = \text{รูป } \triangle YBC$$

$$(๒) \text{ รูป } \triangle B \times Y = \text{รูป } \triangle C \times Y$$

$$(๓) \text{ รูป } \triangle ABY = \text{รูป } \triangle AC \times$$

ถ้า BY และ $C \times$ ตัดกันที่ K จงพิสูจน์ว่า

$$(๔) \text{ รูป } \triangle BK \times = \text{รูป } \triangle CKY$$

๒. จงพิสูจน์ว่า เส้น มีเกียนของรูปสามเหลี่ยม แบ่งรูปสามเหลี่ยม ออกเป็นสองส่วน มีเนื้อที่เท่ากัน.

ท่านจะ แบ่ง รูป สามเหลี่ยม รูป หนึ่ง ออก เป็น สาม ส่วน เท่า ๆ กัน โดยลากเส้น ตรง จาก ขอบ ออก ได้อย่างไร ?

๓. จง พิสูจน์ ว่า เส้น ทแยง มุม ทั้ง สอง ของ รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน จะ แบ่ง รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน ออก เป็น รูป สาม เหลี่ยม สี่ รูป มี เนื้อ ที่ เท่า กัน.

๔. รูป $\triangle ABC$ ด้านฐาน BC ถูก แบ่ง ครึ่ง ที่ X ถ้า Y เป็น จุด ๆ หนึ่ง บน เส้น มี โค้ง AX จง พิสูจน์ ว่า รูป $\triangle ABY$ มี เนื้อ ที่ เท่า กับ รูป $\triangle ACY$

๕. $ABCD$ เป็น รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน, BP, DQ เป็น เส้น ตั้งฉาก ลาก จาก B และ D มา ที่ เส้น ทแยง มุม AC จง พิสูจน์ ว่า $BP = DQ$

ถ้า X เป็น จุด ๆ หนึ่ง บน AC หรือ AC ต่อ ออก ไป จง พิสูจน์ ว่า

$$(๑) \text{ รูป } \triangle ADX = \text{ รูป } \triangle ABX$$

$$(๒) \text{ รูป } \triangle CDX = \text{ รูป } \triangle CBX$$

๖. จง พิสูจน์ โดย ใช้ บท พิสูจน์ ที่ ๒๖ และ ๒๗ ว่า เส้น ตรง ซึ่ง ต่อ ขนาน ถึง กลาง ของ ด้าน ทั้ง สอง ของ รูป สาม เหลี่ยม จะ ขนาน กับ ด้าน ที่ สาม.

๗. จง พิสูจน์ ว่า เส้น ตรง ซึ่ง ต่อ ขนาน ถึง กลาง ของ ด้าน เหนือ ของ รูป สี่ เหลี่ยม คาง หมุ่ จะ ขนาน กับ ด้าน ขนาน ทั้ง สอง.

๘. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $\times$ และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC ถ้า Z เป็นจุด ๆ หนึ่งบน $\times Y$ หรือ $\times Y$ ต่อออกไป จงพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม $AZB = \frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD

๙. ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $\times, Y$ เป็นจุดอยู่บน DC และ AD ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่ารูป $\triangle A \times B$ มีพื้นที่เท่ากับรูป $\triangle BYC$

๑๐. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู, P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่บนรูปสี่เหลี่ยมคางหมูนี้ จงพิสูจน์ว่าผลบวกของรูปสามเหลี่ยม PAB, PCD = $\frac{1}{2}$ ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู.

แบบฝึกหัดว่าด้วยเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม (คำนวณและสร้างรูป)

๑. ด้านของหา รูปสามเหลี่ยมแห่ง หนึ่งยาว ๓๔๖๐ หลา, ๒๐๐ หลา, และ ๑๕๐ หลา จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน ๑" แทน ๑๐๐ หลา) จงเขียนและวัดสัดส่วนสูง แล้วคำนวณหาเนื้อที่ได้ได้ใกล้เคียงความจริงเป็นตาราง หลา.

๒. ด้านสองด้านของ ี่รูปสามเหลี่ยมแห่ง หนึ่งยาว ๑๒๔ เมตร, และ ๑๔๔ เมตร ตามลำดับ และมุมในระหว่าง ด้านทั้งสอง

= ๔๕° จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๒๐ เมตร) จง
วัดสิ่งที่เห็นว่า จำเป็น แล้วคำนวณหาเนื้อที่ให้ได้ใกล้เคียงความจริง.

๓. รูปสามเหลี่ยม ABC มีเนื้อที่ = ๖.๖ ตาราง ซม. และ
ฐาน BC = ๔.๕ ซม. จงหา ส่วนสูง และ คาเส้นโลกัสของ รูป
ยอก A

ถ้าตามสิ่งที่กำหนดให้ไว้ข้างบนนี้ เขาเพิ่มให้อีกประการ
หนึ่ง คือ $BA = ๒.๖$ ซม. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมและวัด CA

๔. รูปสามเหลี่ยม ABC มีเนื้อที่ = ๓.๐๖ ตารางนิ้ว และ
" = ๓.๐" จงหา ส่วนสูงและเส้นโลกัสของ รูป A ให้ $C = ๖๘^{\circ}$
จงสร้างรูปสามเหลี่ยมและวัดด้าน

๕. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน BC, BA
ยาว ๖ ซม. และ ๕ ซม. เสมอไม่เปลี่ยนแปลง ถ้า BC เป็นด้านคงที่
และ BA หมุนไปรอบ B จงแสดง ความเปลี่ยนแปลงของ เนื้อที่
ของรูปสามเหลี่ยม เมื่อ มุม B เพิ่มขึ้น จาก 0° ถึง ๑๘๐°

จงตอบคำถามข้อนี้โดยสร้างรูปสามเหลี่ยมจำนวนหนึ่งโดยที่
มุม B ขึ้นครั้งละ ๓๐° แล้วหาเนื้อที่ทุกครั้งที่ได้ขึ้น และ คอยผล
ที่ได้โดยที่เป็น ตาราง ช่อง ๆ.

(พิสูจน์)

๖. ถ้ารูป สามเหลี่ยม สองรูป มีด้านเท่ากันสองด้าน, ด้านต่อ
ด้าน และมุมใน ระหว่างด้านเท่าต่าง ก็เป็น มุม ประกอบสอง มุม ฉาก
ซึ่งกันและกันจึง พิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม สอง รูป นั้น มีเนื้อ ที่เท่ากัน
รูปสามเหลี่ยมชนิดนี้ อาจ จะ เท่ากัน ทุกประการได้หรือไม่?

๗. เราแสดงวิธี สร้างรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ลง บนฐานของรูป
สามเหลี่ยม ซึ่ง กำหนดให้ และให้ มีเนื้อที่เท่า กัน ด้วย.

๘. ถ้า ต่อ รุก ถึง กลาง ของด้าน ของรูป สามเหลี่ยม รูปหนึ่งไปตาม
ลำดับ เรา พิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม ด้านขนานที่เกิดขึ้นนั้น เป็น ตรงหนึ่ง
ของรูป สามเหลี่ยม.

๙. ABC เป็นรูป สามเหลี่ยม R และ Q เป็นจุดถึงกลาง
ของด้าน AB , AC เรา พิสูจน์ว่าถ้า BQ และ CR ตัดกันที่ X รูป
สามเหลี่ยม BXC จะ เท่ากับรูป สามเหลี่ยม $AQXR$

๑๐. รูป สามเหลี่ยม สอง รูป มีเนื้อ ที่เท่า กันอยู่ บนฐาน ร่วมกัน
แต่อยู่คนละข้าง เรา พิสูจน์ว่า เส้นตรง ซึ่งลาก ต่อระหว่าง รุกยอด
ของรูป สามเหลี่ยม ทั้งสอง จะ ถูก ด้านฐาน แบ่ง ครึ่ง หรือถูกด้าน
ฐาน ต่อ ออกไป แบ่ง ครึ่ง.

(วิธี ต่อไปนี้ อาจ เว้นเสีย ก่อน ก็ได้ จนกว่า จะ ได้เรียบทยพิสูจน์
ที่ ๒๔ แล้ว).

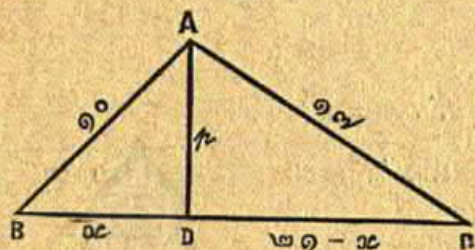
เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม หา จำนวน หา เนื้อที่ของรูปสาม

เหลี่ยม เมื่อรู้ค่าที่กำหนดให้สามด้าน.

ตัวอย่าง จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามยาว

๒๑ ม., ๑๗ ม., และ ๑๐ ม.

ให้ $\triangle ABC$ แทน
รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
ลากเส้น AD ให้ตั้งฉากกับ
 BC และให้ x เป็นความยาว
ของ AD



(ระหาความยาวของ BD เสียก่อน) ให้ $BD = x$ เมตร

$\therefore DC = 21 - x$ เมตร.

ในรูป $\triangle$ มุมฉาก ADB

$$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad (\text{บ.พ.ส. ๒๔})$$

$$= 10^2 - x^2$$

ในรูป $\triangle$ มุมฉาก ADC

$$\therefore AD^2 = AC^2 - DC^2 \quad (\text{บ.พ.ส. ๒๔})$$

$$= 17^2 - (21 - x)^2$$

$$\therefore 10^2 - x^2 = 17^2 - (21 - x)^2$$

$$100 - x^2 = 289 - 441 + 42x - x^2$$

$$-x^2 + x^2 - 42x = -100 + 289 - 441$$

$$-42x = -122$$

$$\therefore 2 = 6$$

$$\text{และ } \therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$\therefore = 100 - 36$$

$$= 64$$

$$= 8$$

$$\therefore 8 = 8$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \therefore \text{เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม} &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{ส่วนสูง} \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times 8 \text{ ตารางเมตร.} \end{aligned}$$

$$= 80 \text{ ตารางเมตร}$$

$$\text{ตอบ เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC} = 80 \text{ ตารางเมตร}$$

แบบฝึกหัด

จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ตามวิธีข้างบนนี้ สำหรับทั้งสาม
ของรูปสามเหลี่ยมยาว.

(๑) ๒๐ ฟุต, ๑๓ ฟุต, ๑๑ ฟุต.

(๒) ๑๕ หลา, ๑๔ หลา, ๑๓ หลา.

(๓) ๒๑ เมตร, ๒๐ เมตร, ๑๓ เมตร.

(๔) ๓๐ ซม., ๒๕ ซม., ๑๑ ซม.

(๕) ๓๗ ฟุต, ๓๐ ฟุต, ๑๓ ฟุต.

(๖) ๕๑ เมตร, ๓๗ เมตร, ๒๐ เมตร.

(๗) ถ้ากำหนดให้ยาว a และ c หน่วย จงพิสูจน์ว่า

$$(ก) z = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$(ข) b^2 = c^2 - \left\{ \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right\}^2$$

(ค) Δ หมายถึง ความยาวเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

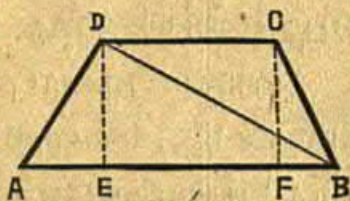
เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม

บทพิสูจน์ที่ ๒๘

(๑) เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ ส่วนสูง $\times$ (ผลบวกของด้านขนาน).

(๒) เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม (ด้านไม่เท่า) $= \frac{1}{2} \times$ เส้นทะแยงมุม $\times$ (ผลบวกของเส้นมุม) (Offsets).

(๑) สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB CD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน AB, CD ขนานกัน ลากเส้น BD ลากเส้นตั้งฉาก CF, DE จาก C และ D มาที่ AB .



จะต้องพิสูจน์ว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$
 $= \frac{1}{2} \cdot DE \times (DC + AB)$.

พิสูจน์ ให้กำหนดขนาด AB, CD ยาว a และ d หน่วยตามลำดับ
 และให้ส่วนสูง CF หรือ DE ยาว h หน่วย.

$\therefore$ เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD =$ เนื้อที่ของรูป $\triangle ABD +$
 เนื้อที่ของรูป $\triangle DBC$.

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE + \frac{1}{2} \cdot DC \cdot CF$$

$$= \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} dh$$

$$= \frac{1}{2} h(a + d).$$

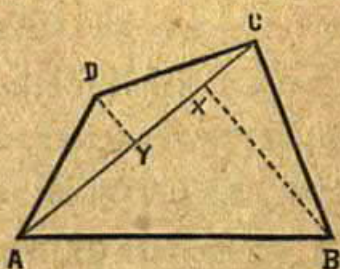
$$= \frac{1}{2} DE(AB + DC).$$

$$= \frac{1}{2} DE(DC + AB).$$

นั่นคือ เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2}$ ส่วนสูง $\times$ (ผลบวก
 ของด้านขนาน).

(๒) สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB
 CD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง.

ลากเส้นทะแยงมุม AC และลาก
 เส้นตั้งฉาก BX, DY จาก B และ D
 มาที่ AC , เส้นตั้งฉากทั้งสองนี้ เรียกว่า
 เส้นมุม.



จะต้องพิสูจน์ว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD = \frac{๑}{๒} \cdot AC$
($BX + DY$).

พิสูจน์ ถ้า AC ยาว d หน่วย BX, DY ยาว p และ q หน่วย
ตามลำดับ.

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD =$ เนื้อที่ของรูป $\triangle ABC +$ เนื้อ
ที่ของรูป $\triangle ADC$

$$= \frac{๑}{๒} \cdot AC \cdot BX + \frac{๑}{๒} \cdot AC \cdot DY$$

$$= \frac{๑}{๒} dp + \frac{๑}{๒} dq.$$

$$= \frac{๑}{๒} d(p + q).$$

$$= \frac{๑}{๒} AC (BX + DY)$$

นั่นคือ เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม $= \frac{๑}{๒} \times$ เส้นทะแยงมุม $\times$ (ผลบวก
ของเส้นมุม).

ช. ต. พ.

แบบฝึกหัด

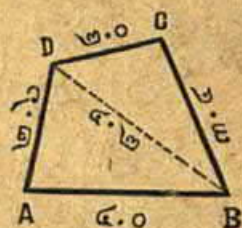
(คำนวณและสร้างรูป)

๑. จงหา เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม คางหมู ซึ่งมีด้านขนานยาว
 ๔.๗ " และ ๓.๓ " และ สูง ๑.๕ "

๒. รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เส้นทะแยงมุม $AC = ๑๗$ ฟุต, และ
เส้นมุมลากจากเส้นทะแยงมุมมาที่ B และ D ยาว ๑๑ ฟุต, และ
 ๙ ฟุต จงหา เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม.

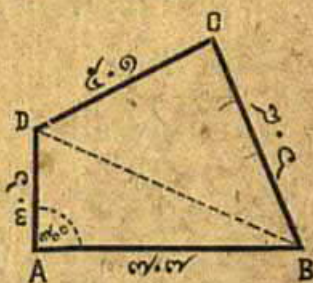
๓. รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นแผนผังของสนาม แห่งหนึ่ง เส้น
ทแยงมุม AC วัดได้ ๘.๒ ซม. และเส้น มุมลากจากเส้น ทแยง
มุมไปที B และ D ยาว ๓.๔ ซม. และ ๒.๖ ซม. ตามลำดับ ถ้า
๑ ซม. ในแผนผัง แทน ๕ เมตร จงหาเนื้อที่ของ สนาม.

๔. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตาม
แผนผัง ขยาย ข้างขวา นี้ ขนาดต่าง ๆ ที่
เขียนไว้เป็น นิ้ว ดังนี้.



จงสร้างและวัดเส้นมุม ซึ่งลากจาก
เส้นทแยงมุม BD มาที่ A และ C แล้วคำนวณหา เนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยม.

๕. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD
ตามขนาดของแผนผัง รูปนี้ ขนาดต่าง ๆ ที่
เขียนไว้เป็น เซนติเมตร ดังนี้.



จงวัดเส้น ที่ เห็นว่าจำเป็น จากรูปของ
ท่านแล้วคำนวณหา เนื้อที่.

๖. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD ให้ด้าน AB ขนาน
กับ ด้าน CD, $AB = 4$, $AD = BC = 2$, $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$

จงวัดเส้น ที่ เห็นว่าจำเป็น แล้วคำนวณ หา เนื้อที่.

๗. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยม คางหมู ABCD ให้ด้าน AB ขนาน

กับด้าน CD , $AB = ๔$ ซม. $CD = ๓$ ซม. และ $AD = BC = ๕$ ซม.

จงวัดเส้นที่เห็นว่าจำเป็น แล้วคำนวณหาพื้นที่.

๘. จากกฎที่ว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม $= \frac{๑}{๒}$ เส้นทแยงมุม $\times$ (ผลบวกของเส้นมุม) จงพิสูจน์ว่าถ้าเส้นทแยงมุมทั้งสองตั้งฉากกัน.

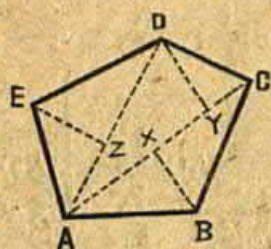
เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม $= \frac{๑}{๒}$ (ผลคูณของเส้นทแยงมุม).

๙. กำหนดความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยม ให้และกำหนดมุมที่อยู่ระหว่างเส้นทแยงมุมให้ด้วย จงพิสูจน์ว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ จะ คงเดิม เสมอ ไม่ว่าเส้นทแยงมุมจะ ตัดกัน ที่ใด ก็ดี.

วิธีหาเนื้อที่ของรูปเหลี่ยมต่างๆ

วิธีที่ ๑ แบ่งรูปเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมหลายๆรูป แล้วคำนวณหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็นรูปๆไป โดยลากเส้นต่างๆที่เห็นว่าจำเป็น และวัดหาความยาวของเส้นเหล่านั้น เมื่อหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมแยก

กันเป็นรูปๆได้แล้ว จึงเอาผลที่หาได้ทุกรูป มาบวกกันเข้า ผลที่ได้คือเนื้อที่ของรูปเหลี่ยม.

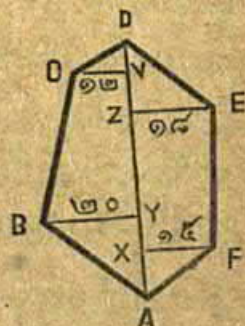


ตัวอย่าง การหาเนื้อที่ของรูปเหลี่ยม ABCDE นี้จะตั้ง
วัดหาความยาวของ AC, AD และลากเส้นมุม BX, DY, EZ,
แล้ววัดหาความยาวของเส้นเหล่านี้.

วิธีที่ ๒ เราอาจหาเนื้อที่ของรูปเหลี่ยมได้ โดยลากเส้นฐาน
(เช่น AD ตามรูปข้างล่างนี้) และลากเส้นมุมจากเส้นฐาน
เส้นเหล่านี้ จะแบ่งรูปเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหลายรูป,
รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก (Right-angled trapeziums) หลาย
รูป เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูจะหาได้โดยวัดเส้นมุมและวัด
เส้นฐานเป็นส่วน ๆ ไป.

ตัวอย่าง ABCDEF เป็นแผนผังของรูปเหลี่ยมรูปหนึ่ง
จงหาเนื้อที่จากแผนผังรูปนี้ ขนาดของเส้นต่างๆได้บอกไว้ใน
ช่องๆแล้ว.

	ค่า	
VC = ๑๒	AD = ๕๐	ZE = ๑๘
	AV = ๕๐	
YB = ๒๐	AZ = ๔๐	
	AY = ๑๘	
	AX = ๑๐	
		XF = ๑๕



การวัดได้วัดจากด้านฐาน AD ไปที่จุดที่ลากเส้นมุม.

$$\begin{aligned}\therefore \text{เนื้อที่ของรูป } \triangle AXF &= \frac{๑}{๒} AX \times XF \\ &= \frac{๑}{๒} \times ๑๐ \times ๑๕ \text{ ตารางหลา} \\ &= ๗๕ \quad ,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เนื้อที่ของรูป } \triangle AYB &= \frac{๑}{๒} AY \times YB \\ &= \frac{๑}{๒} \times ๑๘ \times ๒๐ \quad ,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เนื้อที่ของรูป } \triangle DZE &= \frac{๑}{๒} DZ \times ZE \\ &= \frac{๑}{๒} \times ๑๖ \times ๑๘ \quad ,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เนื้อที่ของรูป } \triangle DVC &= \frac{๑}{๒} DV \times VC \\ &= \frac{๑}{๒} \times ๖ \times ๑๒ \quad ,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู } XF EZ &= \frac{๑}{๒} XZ \times (XF + ZE) \\ &= \frac{๑}{๒} \times ๓๐ \times ๓๓ \text{ ตารางหลา} \\ &= ๔๙๕ \quad ,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู } YBCV &= \frac{๑}{๒} YV \times (YB + VC) \\ &= \frac{๑}{๒} \times ๓๒ \times ๓๒ \text{ ตารางหลา} \\ &= ๕๑๒ \quad ,,\end{aligned}$$

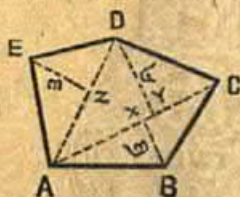
$$\begin{aligned} \therefore \text{พื้นที่ของรูปเหลี่ยม } ABCDEF &= ๗๕ + ๑๘๐ + ๑๔๔ + ๓๖ \\ &\quad + ๔๔๔ + ๕๑๓ \\ &= ๑๔๔๒ \text{ ตารางหลา} \end{aligned}$$

$$\text{ตอบ พื้นที่ของรูปเหลี่ยม } ABCDEF = ๑๔๔๒ \text{ ตารางหลา}$$

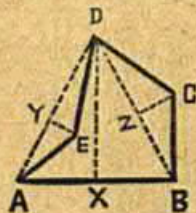
แบบฝึกหัด

๑. จงคำนวณหาพื้นที่ของรูป (๑) และ (๒) ขนาดต่างๆ
ในแผนผังทั้งสองนี้ได้บอกไว้เป็นเส้นทึบเมตร.

(๑)



(๒)

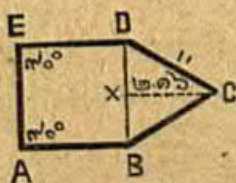


AC = ๖ ซม., AD = ๕ ซม., AB = BD = DA = ๖ ซม.,
ความยาวของเส้นมุมได้บอกไว้แล้วในรูป EY = CZ = ๑ ซม.

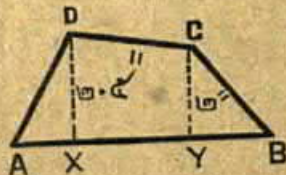
DX = ๕.๒ ซม.

(๒) จงเขียนรูปต่อไปนี้เป็นรูปตามขนาดที่เป็นจริง แล้วคำนวณ
หาพื้นที่ของรูปเหล่านี้.

(๑)



(๒)

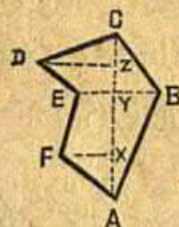


รูปนี้มีด้านเท่ากันทุกด้าน $AX = ๑\frac{๑}{๒}$, $XY = ๒\frac{๑}{๒}$

ยาวด้านละ $๒\frac{๑}{๒}$ $YB = ๑\frac{๑}{๒}$

(๓) จงหาเนื้อที่ของรูป ABCDEF จากส่วนที่วัดได้ต่อไปนี้ และเขียนแผนผังใช้มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๒๐ เมตร.

	เมตร	
	$AC = ๑๔๐$	
$ZD = ๘๐$	$AZ = ๑๕๐$	
$YE = ๔๐$	$AY = ๑๒๐$	
$XF = ๖๐$	$AX = ๕๐$	$YB = ๕๐$



แบบฝึกหัดว่าด้วยรูปสี่เหลี่ยม (พิสูจน์)

๑. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง และ PQRS เป็นรูปที่เกิดขึ้นโดยลากเส้นจากทุกกึ่งกลางของด้านของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ไปตามลำดับ.

จงพิสูจน์ว่า (๑) PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

(๒) เนื้อที่ของ PQRS = $\frac{๑}{๒}$ ของ ABCD

และ พิสูจน์ว่า เนื้อที่ ของ รูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน เป็นครึ่งหนึ่งของ ผลคูณ ของ เส้น ทแยงมุม ของ รูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนนั้น.

สิ่งนี้ จะ เป็นจริง สำหรับ รูป สี่เหลี่ยมใด ๆ ซึ่งมี เส้น ทแยงมุม ตัด กัน เป็นมุมฉาก หรือไม่? จง ตอบ คำถาม โดย สร้างรูป อธิบาย.

๒. จง พิสูจน์ว่า รูป สี่เหลี่ยม ก้านขนาน อาจ ถูก แบ่ง ครึ่ง ด้วย เส้นตรง ซึ่ง ตาก ผ่าน จุด กึ่งกลาง ของ เส้น ทแยงมุม เส้น หนึ่ง และ แสดง ให้ เห็น ว่า รูป สี่เหลี่ยม ก้านขนาน $ABCD$ อาจ ถูก แบ่ง ครึ่ง ด้วย เส้นตรง ที่ ตาก

- (๑) ผ่าน จุด P ที่ กำหนด ได้.
- (๒) ตั้งฉาก กับ ก้าน AB .
- (๓) ขนาน กับ เส้น PQ ที่ กำหนด ได้.

๓. รูป สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ก้าน AB ขนาน กับ ก้าน DC X เป็น จุด กึ่งกลาง ของ ก้าน BC ตาก เส้นตรง PQ ทาก X ให้ ขนาน กับ AD ไปพบ AB และ DC ที่ P และ Q แล้ว พิสูจน์ว่า

- (๑) รูป สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ = รูป สี่เหลี่ยม ก้านขนาน $APQD$.
- (๒) รูป สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ = สองเท่า ของ รูป $\triangle AXD$.

(สร้างรูป)

๔. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตัดกันเป็นมุมฉาก และวัดเส้นทแยงมุมได้ $3.0''$ และ $2.2''$ ตามลำดับ จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม.

จงแสดงให้ เห็น จริง ด้วย รูปว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคงเดิม ไม่ว่าเส้นทแยงมุมจะ ตัดกันที่ไหนก็ได้ แต่ต้องให้ตั้งฉากกัน.

๕. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD, $AB = 4.0$ ซม. $AD = 3.2$ ซม. และระยะตั้งฉากระหว่าง AB และ DC = 3.0 ซม. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู แล้วคำนวณหา ระยะระหว่าง AD และ BC และวัดดูว่า จะได้เท่า นั้น จริง หรือไม่.

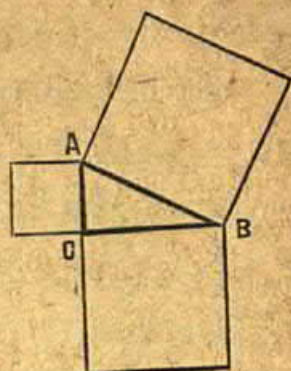
๖. ด้านหนึ่ง ๆ ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $2.5''$ เส้นทแยงมุมยาว $3.4''$ และ $2.4''$ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู แล้ววัดเส้นที่ เห็นว่า จำเป็นและ คำนวณหา เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้.

๗. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู อยู่บนฐานคงที่ AB และมีเนื้อที่ไม่เปลี่ยนแปลง จงหาเส้นโลกัส ของ จุด ที่ เส้นทแยงมุม ตัดกัน.

แบบฝึกหัดแนะนำบทพิสูจน์ที่ ๒๙

รูป ABC ข้างขวานี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็น

มุมฉากมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสร้างอยู่บน
ด้านทั้งสาม จะเปรียบเทียบเนื้อที่ของ
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามกับ
มุมฉาก AB กับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสบนด้าน AC, CB ซึ่งเป็นด้านที่
กางมุมฉาก ACB.



๑. สร้างรูปข้างบนนี้ ทำด้าน $AC = ๓$ ซม. และ
 $BC = ๔$ ซม.

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $AC = ๓^๒$ หรือ ๙
ตาราง ซม. และเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $BC = ๔^๒$
หรือ ๑๖ ตาราง ซม.

ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $AC, BC = ๒๕$
ตาราง ซม.

จงวัดด้าน AB แล้วคำนวณหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน
ด้าน AB เมื่อได้เท่าใดให้เอามา เปรียบเทียบกับผลบวกของรูป
สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสองที่หาได้.

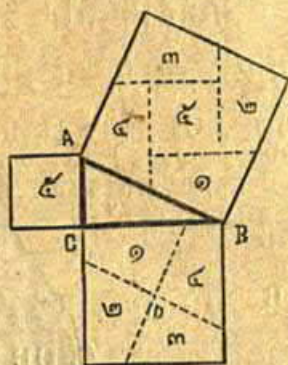
๒. ทำทำนองเดียวกับ ตอนท้ายของข้อนี้ ทำด้าน AC
 $= ๑.๐$ ", และ $BC = ๒.๔$ "

๓. ถ้า $a = ๑๕$, $b = ๘$, $c = ๑๗$ จงพิสูจน์ด้วยวิธี
เลขว่า $c^๒ = a^๒ + b^๒$.

จงเขียนรูปสามเหลี่ยม ABC ลงบนกระดาษ ตารางเหลี่ยม
ให้ด้าน a , b และ c ยาว ๑๕, ๘ และ ๑๗ หน่วย แล้ววัด
มุม ACB.

๔. สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ C เป็นมุมฉาก สร้างรูป
สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AC, CB
และบนด้านตรงข้ามกับมุมฉาก AB

หาจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสบนด้าน CB (คือจุดที่เส้น
ทแยงมุม ตัดกัน)ลากเส้นตรง
สองเส้นผ่านจุดกึ่งกลาง D ให้
เส้นหนึ่งขนานกับด้านตรงข้ามกับ
มุมฉาก, อีกเส้นหนึ่งตั้งฉากกับ



ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก การที่ลากเส้นทั้งสองเช่นนี้ทำให้
แบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งเท่ากันทุกประการ
สี่รูป รูปสี่เหลี่ยมทั้งสี่รูปนี้รวมกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน
AC จะเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB พอดี ดังได้เขียน
ตัวเลขกำกับไว้เป็นคู่ๆ กันไป.

การทดลองข้อนี้สรุปความได้ว่า

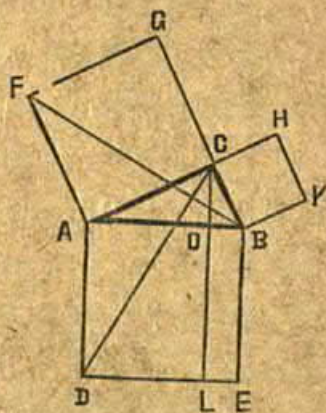
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้าม
กับมุมฉากจะเท่ากับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านอื่นสองด้าน.

บทพิสูจน์ที่ ๒๙

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างอยู่บนด้านตรงข้ามกับมุมฉากจะมีเนื้อที่เท่ากับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสร้างอยู่บนด้านอื่นสองด้าน.

สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุม ACB เป็นมุมฉาก.

จะต้องพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้านตรงข้ามกับมุมฉาก $AB =$ ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้าน AC, CB .



สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ADEB$ บนด้าน AB และสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ACGF, CBKH$ บนด้าน AC, CB .

ลากเส้น CL จาก C ให้ขนานกับ AD หรือ BE .

ลากเส้น CD, FB .

พิสูจน์ $\therefore \angle ACB, \angle ACG$ ต่างก็เป็นมุมฉาก.

$\therefore BC$ และ CG เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน (บ.พ.ส. ๒)

และ $\therefore$ มุมฉาก $BAD =$ มุมฉาก FAC .

เอา $\angle CAB$ บวกเข้าทั้งสองข้าง.

$\therefore \angle CAD$ ทั้งหมด $= \angle FAB$ ทั้งหมด.

ในรูป $\triangle CAD$ และ $\triangle FAB$.

$$\therefore \begin{cases} CA = FA \\ AD = AB \\ \hat{CAD} = \hat{FAB} \end{cases}$$

$\therefore$ รูป $\triangle CAD =$ รูป $\triangle FAB$ (บ.พ.ส. ๔).

และ $\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AL เป็นสองเท่าของรูป $\triangle CAD$ เพราะ อยู่บนฐานร่วม AD และ อยู่ระหว่างเส้นขนาน AD, CL ร่วมกัน.

และ $\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส GA เป็นสองเท่าของรูป $\triangle FAB$ เพราะ อยู่บนฐานร่วม FA และ อยู่ระหว่างเส้นขนาน FA, GB ร่วมกัน.

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $AL =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส GA

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $BL =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส HB โดยลากเส้น CE, AK

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส AE ทั้งหมด = ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส GA, HB .

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้าม กับมุมฉาก $AB =$ ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AC, CB

ช. ต. พ.

สังเกต บทนี้เป็นบทพิสูจน์ของท่านไพธากอรัส (Pythagoras) ผลที่ได้กล่าวได้ดังนี้ คือ

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

นั่นคือ ถ้า a และ c เป็นความยาวของด้านซึ่งทางมุมฉาก
และ ถ้า b เป็นความยาวของด้านตรงข้ามกับมุมฉาก.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 = c^2 - b^2; \text{ และ } b^2 = c^2 - a^2$$

หมายเหตุ ๑ ควรสังเกตผลสำคัญต่อไปนี้

ถ้า CL และ AB ตัดกันที่ O, ให้พิสูจน์ไว้แล้วในบทพิสูจน์
ที่ ๒๔ ว่า

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส GA = รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AL, นั่นคือ AC^2
= รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยด้าน AB, AO (๑)

และ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส HB = รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BL นั่นคือ
 BC^2 = รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยด้าน BA, BO ... (๒)

หมายเหตุ ๒ อาจพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งอยู่บนด้าน
เท่ากันย่อมจะมีเนื้อที่เท่ากัน โดยวิธียกไปวางทับกัน.

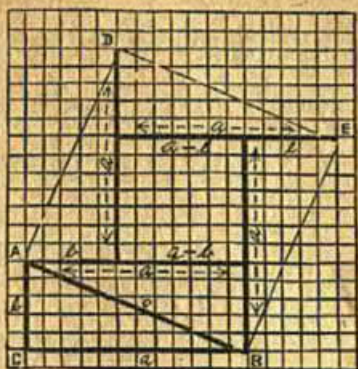
$\therefore$ จึงสรุปความกล่าวถ้อยกันเสียได้ว่า

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปมีเนื้อที่เท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ทั้งสองนั้นจะตั้งอยู่บนฐานยาวเท่ากัน.

พิสูจน์โดยวิธีทดลองของท่านไพทาโกราส

๑. ABC เป็นรูป Δ มุมฉากซึ่งกำหนดให้ และ ABED
เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามกับมุมฉาก AB

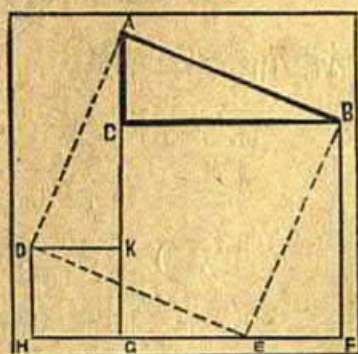
ลากเส้นตรงให้ขนานกับด้าน BC, CA จะเห็นได้โดยง่ายว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BD ถูกแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสี่รูป, รูป Δ ทุกรูปต่างก็เท่ากับ ΔABC ทุกประการ, กับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ตรงกลางอีกหนึ่งรูป.



$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน ตรงข้าม กับมุมฉาก $c =$ รูป Δ มุมฉาก a รูป + รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงกลางหนึ่งรูป.

$$\begin{aligned}
 &= c \cdot \frac{1}{2} ab + (a-b)^2 \\
 &= \frac{1}{2} ab + a^2 - 2ab + b^2 \\
 &= a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

๓. ABC เป็นรูป Δ มุมฉากซึ่งกำหนดได้ และรูป C, F, H, K เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน CB, CA อยู่ติดกัน.



ทำ FE ให้เท่ากับ DH หรือ CA และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส CF, HK ทั้งสองรูปถูกเส้นตรง BE, ED ไขว้กัน.

$\therefore$ จะเห็นว่า สามเหลี่ยม ΔDHE ไปวางปะช่องว่าง ACB ได้ และสามเหลี่ยม ΔBFE ไปปะช่องว่าง AKD ได้.

ถ้าเอารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส CE, HK มาติดต่อกันเข้า
เพื่อให้ได้เป็นรูป $ABED$ รูปเดียว ซึ่ง จะเห็นได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสหนึ่งรูป นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามกับมุมฉาก AB

แบบฝึกหัด

(คำนวณและสร้างรูป)

๑. พสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้มุม C เป็นมุมฉาก และให้

$$(๑) a = ๓ \text{ ซม.}, \quad \angle = ๔ \text{ ซม.}$$

$$(๒) a = ๒.๕ \text{ ซม.}, \quad \angle = ๖.๐ \text{ ซม.}$$

$$(๓) a = ๑.๒'' \quad \angle = ๓.๕''$$

คำนวณ ด้านตรง กับข้ามกับ มุมฉาก c ทุกข้อ แล้ว วิก สอบ ดู
ว่าได้เท่ากันจริง หรือไม่.

๒. พสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้มุม C เป็นมุมฉากและให้

$$(๑) c = ๓.๔'', \quad a = ๓.๐'' \text{ (รูปทสร้างที่ ๑๐)}$$

$$(๒) c = ๕.๓ \text{ ซม.}, \quad \angle = ๔.๕ \text{ ซม.}$$

คำนวณ ด้านที่เหลือทุกข้อ และ วิก สอบ ดูว่า ได้เท่ากันจริงหรือไม่.

(แบบฝึกหัด ต่อไปนี้ ให้ทำโดยวิธีคำนวณ และ ควรเขียนแผน
ผังโดยใช้มาตรา ส่วน ตามสมควร แล้ว วิก สอบ ดูว่า ผลที่คำนวณ
ไว้นี้เท่ากับ ที่ วิก ได้จริง หรือไม่).

๓. บ้านโกแห่งหนึ่ง ตั้งบ้านโกอยู่ห่างจากหน้าบ้าน ๙ ฟุต พาก
ถึง ฟัง หน้าต่าง ซึ่ง อยู่สูง พื้น พื้นดิน ๔๐ ฟุต ถามว่าบ้านโกอันนี้ยาว
เท่าใด ?

๔. เรือลำหนึ่งแล่นไป ทางทิศใต้ ๓๓ ไมล์ แล้วแล่นไป ทาง
ทิศ ตะวันตก ๕๖ ไมล์ ถามว่า เรือลำนั้น อยู่ ห่าง จาก ที่เดิมกี่ไมล์ ?

๕. ชายผู้หนึ่งอยู่ที่สถานีส่งอากาศสัญญาณ แลเห็นเรือสองลำ
ลำหนึ่ง อยู่ ทิศ ตะวันออกเฉียงเหนือไกล ๖.๐ กม. อีกลำ หนึ่ง อยู่
ทิศ ตะวันตกเฉียงเหนือไกล ๑.๑ กม. ถามว่า เรือสองลำ อยู่ ห่าง กัน
เท่าใด ?

๖. บ้านโกอันหนึ่งยาว ๖๕ ฟุต พากถึง หน้าบ้านแห่งหนึ่ง สูงพื้น
ดิน ๖๓ ฟุต ถามว่าพื้นบ้านโกอยู่ห่างจากบ้านเท่าใด ?

๗. B อยู่ทิศ ตะวันออกของ A แต่ไม่รู้ว่าจะห่างกันเท่าใด, C
อยู่ทางทิศใต้ของ B ห่างกัน ๕๕ เมตร AC ห่างกัน ๗๓ เมตร
จงหา AB.

๘. ชายผู้หนึ่งเดินไปทางทิศใต้ ๒๗ ไมล์ แล้วเดินไปทาง
ทิศ ตะวันตก ๒๔ ไมล์ ในที่สุดเขาเดินไปทางทิศเหนืออีก ๒๐ ไมล์
ถามว่าเขา อยู่ ห่าง จาก ที่เดิมเท่าใด ?

๙. ถ้าท่านเดินจาก A ไปทางทิศ ตะวันตก ๒๕ เมตร แล้ว
ไปทางทิศเหนือ ๖๐ เมตร, แล้วไปทาง ทิศ ตะวันออก ๘๐ เมตร

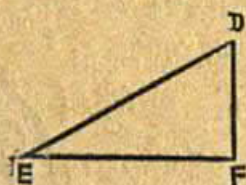
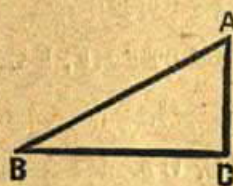
ในที่สุด ท่านก็วิ่งไปทางทิศใต้ อีก ๑๒ เมตร ถามว่าท่านอยู่ห่างจาก A เท่าใด ?

๑๐. บัณฑิตคนหนึ่ง ยาว ๕๐ ฟุต วางปากหน้าต่าง แห่งหนึ่ง สูง ๔๘ ฟุต และเมื่อปากบัณฑิตไป ทางถนนอีกข้างหนึ่ง, จะปากถึงที่ แห่งหนึ่ง สูงเพียง ๑๔ ฟุต ถามว่าถนนกว้างเท่าใด ?



บทพิสูจน์ที่ mo

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างอยู่บนด้านๆหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม
เท่ากับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างอยู่บนด้านอื่นสองด้านของ
รูปสามเหลี่ยมนั้น มุมที่อยู่ระหว่างด้านทั้งสองนั้นจะเป็นมุมฉาก.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมี
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $AB =$ ผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
บนด้าน BC, CA

จะต้องพิสูจน์ว่า มุม ACB เป็นมุมฉาก

ทำ EF ให้เท่ากับ BC

ลาก FD ให้ตั้งฉากกับ EF และทำ FD ให้เท่ากับ CA

ลากเส้น ED

พิสูจน์ $\therefore EF = BC$ (โดยสร้าง).

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $EF =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
บนด้าน BC

และ $\therefore FD = CA$ (โดยสร้าง).

∴ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้าน $FD =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้าน CA

∴ ผลบวกของ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $EF, FD =$ ผลบวกของ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้าน BC, CA

แต่ ∴ EFD เป็นมุมฉาก (โดยสร้าง).

∴ ผลบวกของ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้าน $EF, FD =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน DE (บ. พ. ส. ๒๔).

แต่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $BC, CA =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB (โดยสิ่งที่กำหนดได้).

∴ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน $DE =$ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB

∴ ด้าน $DE =$ ด้าน AB

ในรูป $\triangle ACB$ และ $\triangle DFE$

∴ $\begin{cases} \text{ด้าน } AC = \text{ด้าน } DF & (\text{โดยสร้าง}) \\ \text{ด้าน } CB = \text{ด้าน } FE & (,,,) \\ \text{ด้าน } AB = \text{ด้าน } DE & (\text{โดยได้พิสูจน์มาแล้ว}) \end{cases}$

∴ รูป $\triangle$ ทั้งสองเท่ากันทุกประการ (บ. พ. ส. ๗)

∴ $\hat{ACB} = \hat{DFE}$

แต่ $\hat{DFE}$ เป็นมุมฉาก (โดยสร้าง)

∴ $\hat{ACB}$ ก็เป็นมุมฉาก.

แบบฝึกหัดของบทพิสูจน์ที่ ๒๙, ๓๐

(พิสูจน์)

๑. จงพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดได้ เป็นสองเท่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดได้.

๒. ในรูป $\triangle ABC$, ลากเส้น AD ให้ตั้งฉากกับฐาน BC ถ้ากำหนด $\angle$ ยาวกว่ากำหนด จงพิสูจน์ว่า $\angle - \angle = BD - DC$

๓. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง O เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมนี้ ลากเส้นตั้งฉาก OX, OY, OZ จาก O มาที่ BC, CA, AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$

๔. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีมุม A เป็นมุมฉาก และด้าน AB, AC ถูกเส้นตรง PQ ตัด ลากเส้น BQ, PC จงพิสูจน์ว่า $BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$

๕. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงพิสูจน์ว่าสี่เท่าของผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นมีเดียซึ่งลากจากมุมแหลมทั้งสอง จะเท่ากับห้าเท่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามกับมุมฉาก.

๖. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่า กับ ผล
บวก ของ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่ กำหนดให้ สอง รูป.

๗. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปหนึ่งให้มีเนื้อที่ เท่า กับ ผล
ต่าง กัน ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่ กำหนดให้ สอง รูป.

๘. จง แบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่ง ออกเป็น สอง ส่วน ได้รูป
สี่เหลี่ยมจัตุรัส บน ส่วนหนึ่ง เป็น สอง เท่า ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บน
อีก ส่วน หนึ่ง.

๙. จง แบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่ง ออกเป็นสองส่วน ได้ผลบวกของ
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นตรงที่ ถูกแบ่งนั้น เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ที่ กำหนดให้.

(คำนวณและสร้างรูป)

๑๐. จงพิจารณาเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ รูปใดบ้างที่
เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก.

(๑) $a = ๓๔$ ซม., $b = ๔๘$ ซม., $c = ๕๐$ ซม.

(๒) $a = ๔๐$ ซม., $b = ๑๐$ ซม., $c = ๔๑$ ซม.

(๓) $a = ๓๐$ ซม., $b = ๔๔$ ซม., $c = ๑๐๑$ ซม.

๑๑. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีมุม C เป็นมุมฉาก
จงหาตามบทพิสูจน์ที่ ๓๔ ว่า $AB^2 = ๒ AC^2$ จงเขียนรูปแสดงผล
ข้อนี้ โดยลากเส้นทแยงมุมสองเส้น ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน

ด้าน AB และเส้นทแยงมุมหนึ่งเส้นของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน
ด้าน AC.

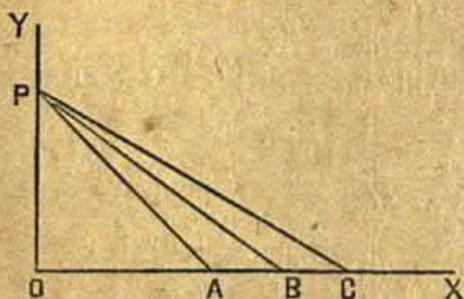
ถ้า $AC = BC = ๒$, พิจารณา AB ให้ใกล้กับส่วน
ร้อยของหนึ่ง พิจารณาสร้างรูปและวัด สอบดูว่า จะได้เท่ากับที่คำนวณไว้
จริงหรือไม่

๑๒. พิจารณาสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสลงบนด้านทแยงมุมยาว
๒ ซม. แล้วคำนวณและวัดหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสนั้น และหาเนื้อที่ด้วย.

บทสร้างที่ ๑๖

พิจารณาสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีเนื้อที่เป็นสองเท่า, สามเท่า,
สี่เท่า.....ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้.

และหาค่าของ $\sqrt{๒}$, $\sqrt{๓}$, $\sqrt{๔}$, $\sqrt{๕}$ เพียง
ใกล้กับความจริง



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้นตั้งฉาก
กัน และให้ OA, OP ยาวด้านละ ๑ หน่วย.

จะต้องสร้าง รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีเนื้อที่ เป็น สองเท่า,
สามเท่า, สี่เท่า, ห้าเท่า..... ของ รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส บน
ด้าน OA.

วิธีสร้าง ลากเส้น PA.

∴ รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส บน PA มีเนื้อที่ เป็นสองเท่าของรูป
สี่เหลี่ยม จัตุรัส บนด้าน OA และ $PA = \sqrt{2}$

ตัด OB ออกจาก OX ให้ยาวเท่ากับ PA.

ลากเส้น PB.

∴ รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส บน PB มีเนื้อที่ เป็นสามเท่าของ
รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส บนด้าน OA และ $PB = \sqrt{3}$

ตัด OC ออกจาก OX ให้ยาวเท่ากับ PB.

ลากเส้น PC.

∴ รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส บนด้าน PC เป็นสี่เท่าของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัส บนด้าน OA.

และ $PC = \sqrt{4}$

และอาจสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีเนื้อที่ เป็นห้าเท่า, หกเท่า,
เจ็ดเท่า..... ของรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส บนด้าน OA และ อาจ
หา ค่า ของ $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ ได้ ในทำนองเดียวกัน.

พิสูจน์ $\therefore$ POA เป็นรูป Δ มุมฉากมีมุม POA เป็น
มุมฉาก.

$$\therefore PA^2 = OA^2 + OP^2.$$

$$= 1 + 1 \text{ ตารางหน่วย.}$$

$$= 2 \quad ,,$$

$$\therefore PA = \sqrt{2}$$

ในทำนองเดียวกันหาพิสูจน์ได้ว่า $PB^2 = 3$ ตารางหน่วย

และ $PB = \sqrt{3}$, $PC^2 = 4$ ตารางหน่วย, $PC = \sqrt{4} \dots\dots$

แบบฝึกหัดของบทพิสูจน์ที่ ๒๙, ๓๐ ต่อ

๑๓. จง พิสูจน์กฎ ก่อไปนี้

เส้นทแยงมุมของ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน $\times \sqrt{2}$

จง หา ความยาวของ เส้น ทแยงมุม ของ รูป สี่เหลี่ยม จัตุรัส บน
ด้าน ๗ หนึ่ง ยาว ๕๐ เมตร เศษของ เซนติเมตร ไม่ คิค.

จง เขียน แผนผัง (มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๑๐ เมตร) แล้ว
วัดเส้นทแยงมุมได้ ได้ ผลใกล้ กับ ความ จริง ที่ สุด.

๑๔. ABC เป็นรูป สามเหลี่ยม ด้านเท่า ความยาว ของ
ด้าน หนึ่ง ๆ = ๒ " หน่วย เส้น ตั้งฉาก ตาก จาก รุกขออก รุกโข
รูกหนึ่ง มา ที่ ด้าน ตรงข้าม = ๔

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \phi = m\sqrt{\frac{a^2}{m^2}}$$

จงสร้างรูป สอดคล้องว่า จะได้เท่านี้หรือไม่, เมื่อคำนวณหนึ่งๆ
ยาว = ๘ ซม.

๑๕. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่ง ด้าน $a = m - \frac{a^2}{m}$, $b = 2m$,
 $c = m + \frac{a^2}{m}$ จงพิสูจน์อย่าง พิเศษคิดว่า $c^2 = a^2 + b^2$

และให้ m และ a มีค่าเป็นตัวเลข ต่างๆ จงหาตัวเลข
หลายๆ ชุด ซึ่งแทน ด้านทั้งสามของ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก.

๑๖. รูป $\triangle ABC$, AD ลากตั้งฉากกับ BC ให้ ϕ
เป็นความยาวของ AD

(๑) ถ้า $a = ๒๕$ ซม. $\phi = ๑๒$ ซม., $BD = ๙$ ซม.
จงหา b และ c

(๒) ถ้า $b = ๔๑$ ", $c = ๕๐$ " $BD = ๓๐$ "
จงหา ϕ และ a และ พิสูจน์ว่า $\sqrt{b^2 - \phi^2} + \sqrt{c^2 - \phi^2} = a$

๑๗. รูปสามเหลี่ยม ABC , AD ลากตั้งฉากกับ BC
จงพิสูจน์ว่า $c^2 - BD^2 = b^2 - CD^2$

ถ้า $a = ๕๑$ ซม., $b = ๒๐$ ซม., $c = ๓๗$ ซม.
จงหา BD แล้วหา ϕ ซึ่งเป็นความยาวของ AD และ หาเนื้อที่
ของ รูป $\triangle ABC$

๑๘. จงใช้วิธีของข้อ ๑๗ หาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีด้านยาวตามที่กำหนดให้ ต่อไปนี้

$$(๑) a = ๑๗", \quad b = ๑๐", \quad c = ๘"$$

$$(๒) a = ๒๕ ฟุต, \quad b = ๑๗ ฟุต, \quad c = ๑๒ ฟุต.$$

$$(๓) a = ๔๑ ซม., \quad b = ๒๘ ซม., \quad c = ๑๕ ซม.$$

$$(๔) a = ๔๐ หลา, \quad b = ๓๗ หลา, \quad c = ๑๓ หลา.$$

๑๙. PQ เป็นไม้ตรงอันหนึ่ง เคลื่อนที่ไปมา ระหว่างไม้บรรทัดตรง OX, OY สองอัน, ซึ่งวางตั้งฉากกัน ไม้เคลื่อนที่ไปทำหนึ่ง OP = ๕.๖ ซม. และ OQ = ๓.๓ ซม. ไม้เคลื่อนที่ไปอีกทำหนึ่ง OP = ๔.๐ ซม. จงหา OQ โดยสร้างรูป แล้วคำนวณดูว่า ท่านสร้างรูปถูกต้องจริงหรือไม่.

๒๐. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมหนึ่งที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\angle A$ เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากลากจาก C มาที่ AB และแสดงเนื้อที่ของรูป $\triangle$ นั้นไว้สองวิธี. เพื่อ

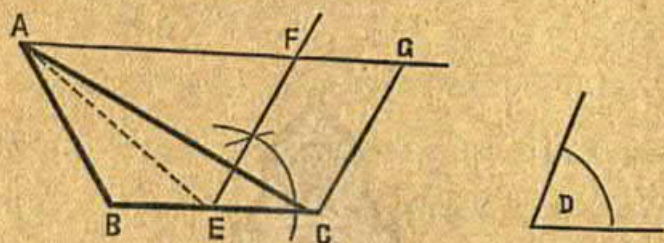
$$\text{พิสูจน์ว่า } \frac{1}{2}ac = ab$$

$$\text{และพิสูจน์ว่า } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

บทสร้างว่าด้วยเนื้อที่

บทสร้างที่ ๑๓

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และมีมุม ๆ หนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งกำหนดให้ และ D เป็นมุมที่กำหนดให้.

จะต้องสร้าง รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่ง ให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC และมีมุม ๆ หนึ่งเท่ากับมุม D .

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง BC ที่ E ทำ $\widehat{CEF}$ ที่ E ในเส้น CE ให้เท่ากับ D , ลากเส้น AFG จาก A ให้ขนานกับ BC ลากเส้น CG จาก C ให้ขนานกับ EF .

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยม $FECG$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งต้องการ.
พิสูจน์ ลากเส้น AE .

∴ รูป $\triangle ABE$ และ $\triangle AEC$ อยู่บนฐาน BE, EC เท่ากัน และมีส่วนสูงร่วมกัน.

∴ รูป $\triangle ABE =$ รูป $\triangle AEC$ (บ.พ.ส. ๓๖).

∴ รูป $\triangle ABC =$ สองเท่าของรูป $\triangle AEC$.

แต่ $FECG$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนาน (โดยสร้าง) และเป็นสองเท่าของรูป $\triangle AEC$.

∴ อยู่บนฐานร่วม EC และอยู่ระหว่างเส้นขนาน EC และ AG ร่วมกัน (บทแทรกของบทพิสูจน์ที่ ๒๔).

∴ รูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนาน $FECG = \triangle ABC$.

และมุมของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนานมุมหนึ่ง คือมุม $CEF =$ มุม D ที่กำหนดให้ (โดยสร้าง)

แบบฝึกหัด

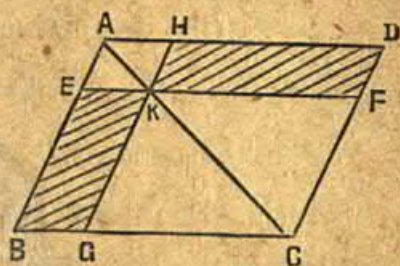
(สร้างรูป)

๑. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสลงบนด้าน ๆ หนึ่งยาว ๕ ซม., และสร้างรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนานรูปหนึ่ง ให้มีเส้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสลงบนฐานร่วมกันและให้มีมุม ๆ หนึ่ง $= ๔๕^{\circ}$.

จง (๑) คำนวณ (๒) วิเคราะห์ความยาวของด้านเฉียงของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนาน.

๒. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ให้ $AB = ๒\frac{๑}{๒}$ " , $AD = ๓$ " และสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนรูปหนึ่ง ให้มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ลงบนฐาน AB .

คำจำกัดความ ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ถ้าลากเส้นขนาน EF, HG ผ่านจุด K ในเส้นทแยงมุม AC ไปที่ด้านของรูปสี่เหลี่ยม รูป EH, GF เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้าน



ขนานรอบ AC (Parallelograms about AC) และรูป EG, HF เรียกว่ารูปประกอบของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งสอง (Complements).

๓. ในรูปของคำจำกัดความที่กล่าวมานี้ จงพิสูจน์ด้วยบทพิสูจน์ที่ ๒๑ ว่า รูปประกอบ (Complements) EG, HF มีพื้นที่เท่ากัน.

และกำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน EG ให้รูปหนึ่ง กับเส้นตรง HK เส้นหนึ่ง จงหาวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งลงบนด้าน HK ให้มีพื้นที่เท่ากัน และมีมุมเท่ากันกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน EG .

๔. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า CDEF ที่กำหนดให้ และให้มีด้าน ๆ หนึ่งเท่ากับเส้นตรง AB ที่กำหนดให้.

ถ้า $AB = ๖$ ซม., $CD = ๘$ ซม., $CF = ๓$ ซม.
จงวัดหาความยาวของ ด้านที่ เหลือ ของรูป สี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่สร้าง.

๕. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AB = ๒.๔$ "
 $AD = ๑.๘$ " และ $A = ๕๕^{\circ}$ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่ง ให้มีมุมและเนื้อที่ เท่ากับ มุมและ เนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ด้านยาววัดได้ ๒.๗" จงวัด ด้าน สั้น.

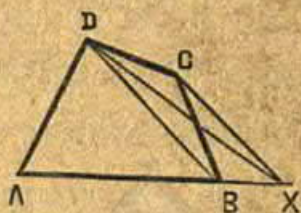
จงสร้างซ้ำอีกครั้งหนึ่ง โดยกำหนดให้ A มีค่าเป็น อย่างอื่น แล้วเปรียบเทียบผลที่หาได้ และ ท่านจะสรุปความได้ ประการใดบ้าง?

๖. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง ลงบน ด้าน ๆ หนึ่งยาว ๕ ซม. ให้มีเนื้อที่ เท่ากับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งอยู่บน ด้าน ๆ หนึ่งยาว ๖ ซม.

จงวัดด้านที่ เหลือ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ คำนวณหาเนื้อที่ ได้ ได้ ใกล้เคียงกับ ความจริง.

บทสร้างที่ ๑๘

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มี เนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้
จะต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม

ABCD

วิธีสร้าง ลากเส้น DB

ลากเส้น CX จากจุด C ให้ขนานกับ DB ไปพบ AB ต่อ
ออกไปที่ X

ลากเส้น DX

$\therefore$ DAX เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่ง ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore$ รูป $\triangle XDB$ และ $\triangle CDB$ อยู่บนฐานร่วม DB

และ อยู่ระหว่างเส้นขนาน DB, CX ร่วมกัน

$\therefore$ เนื้อที่ ของรูป $\triangle XDB$ = เนื้อที่ ของรูป $\triangle CDB$

เอารูป $\triangle ADB$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$\therefore$ รูป $\triangle DAX$ = รูป ABCD

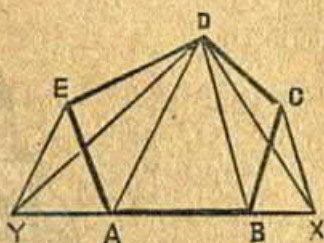
บทแทรก ในทำนองเดียวกัน อาจสร้างรูปเหลี่ยมให้มีเนื้อที่
เท่ากับรูปเหลี่ยมที่กำหนดให้ และให้มีค่าน้อยกว่า ค่าน ของ รูป
เหลี่ยมที่กำหนดให้ หนึ่ง ค่าน และสร้างให้น้อยลงๆ ครั้งละหนึ่งค่าน
เพราะฉะนั้นรูปเหลี่ยมใดๆ ก็อาจสร้าง ลดค่านลง เป็นรูปสามเหลี่ยม
ให้มีเนื้อที่ เท่ากันได้.

ตัวอย่าง รูปห้าเหลี่ยม EDCBA

ข้างขวามีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม

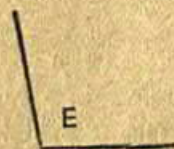
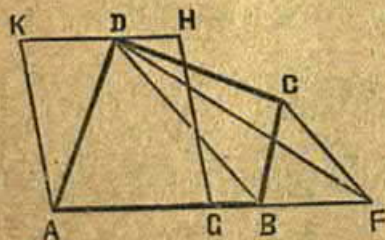
EDXA

รูปสี่เหลี่ยม EDXA อาจลดเป็น
รูป $\triangle DXY$ ให้มีเนื้อที่เท่ากันได้



บทสร้างที่ ๑๙

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูขนานรูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม
ที่กำหนดให้ และมีมุมๆ หนึ่งเท่ากับมุมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และ E เป็นมุมที่กำหนดให้.

จะต้องสร้าง รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่ากับ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ และมีมุม ๆ หนึ่งเท่ากับ มุม E

วิธีสร้าง ลากเส้น DB

ลากเส้น CF ทั่วทุก C ให้ขนานกับ DB ไปพบ AB ที่ ออกไปที่ F

ลากเส้น DF

$\therefore$ รูป $\triangle DAF$ = รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ (บทสร้างที่ ๑๘)

สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AGHK$ ให้มีเนื้อที่เท่ากับ รูป $\triangle DAF$ และมี $\widehat{KAG} = \widehat{E}$ (บทสร้างที่ ๑๗)

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน KG มีเนื้อที่ = รูป $\triangle ADF$
 $=$ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$
 และมี $\widehat{KAG} = \widehat{E}$

หมายเหตุ ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมีด้าน มากกว่า สี่ด้าน จะต้องสร้าง ลาก ลง ทั่ว ละ ด้าน, จนกลายเป็น รูป สามเหลี่ยม.

แบบฝึกหัด

(การแปลงรูปสี่เหลี่ยมให้เป็นรูปสามเหลี่ยม แต่เนื้อที่คงเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมเดิม).

๑. พงสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD จากส่วนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $AB=BC=๕.๕$ ซม., $CD=DA=๔.๕$ ซม., $\hat{A}=๗๕^{\circ}$

จงแปลงรูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม แล้ววัดด้านฐานและ ส่วน สูง ของรูป สามเหลี่ยม คำนวณหาเนื้อที่ ของรูปที่ กำหนดให้ ๆ ได้ ผลใกล้เคียงกับความจริง

๒. พงสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้ $AB=๒.๘''$, $BC=๓.๒''$, $CD=๓.๓''$, $DA=๓.๖''$ และเส้นทแยงมุม $BD=๓.๐''$

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม แล้วหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมให้ ได้ ผลใกล้เคียงกับความจริง.

๓. พงสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า ลงบนฐาน AB ยาว ๔ ซม. ให้มุม A และ B เป็นมุมละ ๑๐๘°

จงแปลงรูปห้าเหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปเดิม แล้วคำนวณหาเนื้อที่ของรูปห้าเหลี่ยม โดยวัดด้านฐานและ ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม.

๔. ABCD เป็นหารูปสี่เหลี่ยม มีขนาดดังนี้ $AB=๔๕๐$ เมตร, $BC=๓๘๐$ เมตร, $CD=๓๓๐$ เมตร, $AD=๓๘๐$ เมตร, และเส้นทแยงมุม $AC=๖๖๐$ เมตร.

จงเขียนแผนผังของนาแห่งนี้ (มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๕๐ เมตร) แปลงแผนผังของท่านเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากับรูปเดิม วัดค่าฐานกับส่วนสูงแล้วคำนวณหาพื้นที่ของนาให้ได้ผลใกล้เคียงความจริง.

(บอกวิธีสร้างและพิสูจน์ด้วย)

๕. จงแปลงรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่าเดิม และได้ฐาน BD ยาวตามที่กำหนดได้ (จุด D อยู่บน BC หรือ BC ต่อออกไป).

๖. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และมีส่วนสูงเท่ากับส่วนสูงที่กำหนดให้.

๗. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้, X เป็นจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC และได้มีจุดยอดอยู่ที่ X และด้านฐานอยู่ในเส้นตรงเดียวกันกับ BC .

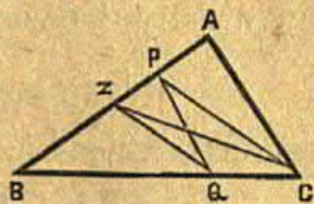
๘. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ได้มีจุดยอดอยู่ที่จุด X ที่กำหนดให้ในเส้น DC และด้านฐานอยู่ในเส้นตรงเดียวกันกับ AB .

๙. จงแสดงให้เห็นว่าจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ออกเป็น

ส่วนเท่า ๆ กันโดยลากเส้นตรง จากจุดยอด ของ รูป สามเหลี่ยม นั้น
ได้ อย่างไร ?

๑๐. จง แบ่ง รูป สามเหลี่ยม ออกเป็น สองส่วนเท่า ๆ กัน โดยลาก
เส้นตรง จากจุด ที่ กำหนดให้ ใน ด้าน ๆ หนึ่ง ของ รูป สามเหลี่ยม นั้น.

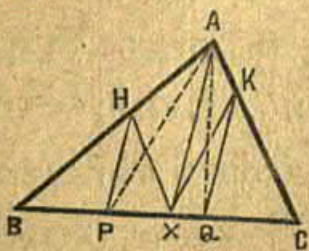
(ให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ ที่ กำหนดให้
และ P เป็น จุด ๆ หนึ่ง อยู่ใน ด้าน AB , แบ่ง
ครึ่ง AB ที่ Z , ลากเส้น CZ, PC ลาก
เส้น ZQ จากจุด Z ให้ขนานกับ CP , ลาก
เส้น PQ .



$\therefore PQ$ แบ่งครึ่งรูป $\triangle ABC$).

๑๑. จง แบ่ง รูป สามเหลี่ยม รูป หนึ่ง ออกเป็น สามส่วนเท่า ๆ กัน
โดยลากเส้นตรง จากจุด ที่ กำหนดให้ จุด หนึ่ง ใน ด้าน ๆ หนึ่ง ของ รูป
สามเหลี่ยม นั้น.

(ให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ ที่ กำหนดให้
และ X เป็น จุด ที่ กำหนดให้ ใน ด้าน BC
แบ่ง BC ออกเป็น สามส่วนเท่า ๆ กัน ที่
จุด P, Q (บทสร้างที่ ๗) ลากเส้น AX
ลากเส้น PH, QK จาก P และ Q ให้ขนานกับ AX .



ลากเส้น XH , XK , เส้นตรงทั้งสองนี้แบ่งรูป Δ ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน และอาจพิสูจน์ได้โดยลากเส้น AP , AQ).

๑๒. จง ตัด รูป สามเหลี่ยม ที่ กำหนด ได้ รูป ห้า ออก ส่วน ห้า ได้ เป็น $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ หรือ ส่วนใด ๆ ก็ ตาม ของ รูป สามเหลี่ยม นั้น โดยลาก เส้น ตรง จาก จุด ที่ กำหนด ได้ ใน ด้าน ๆ หนึ่ง.

๑๓. จง แบ่ง รูป สี่เหลี่ยม รูป หนึ่ง ออก เป็น สอง ส่วน เท่า ๆ กัน โดยลากเส้น ตรง จาก จุด ที่ มุม ขอบ มุม หนึ่ง ของ รูป สี่เหลี่ยม นั้น.

(แปลง รูป สี่เหลี่ยม เป็น รูป สามเหลี่ยม ได้ มี เนื้อ ที่ เท่า กับ รูป สี่เหลี่ยม เดิม แล้ว ลากเส้น จาก จุด ขอบ ไป ที่ จุด ถึง กลาง ของ ด้าน ฐาน).

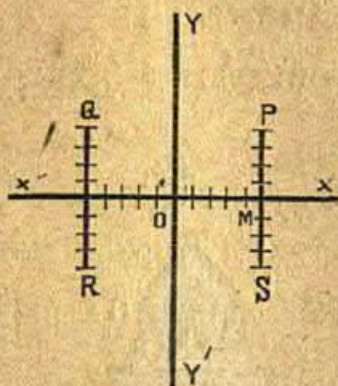
๑๔. จง แบ่ง รูป สี่เหลี่ยม ที่ กำหนด ได้ รูป หนึ่ง ออก เป็น $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ หรือ ส่วนใด ๆ ก็ ตาม โดย ลากเส้น ตรง จาก จุด ขอบ ที่ กำหนด ได้.

เส้นเอกซิสออฟรีเฟอเรนซ์ และเส้นโคออร์ดิเนต

แบบฝึกหัดสำหรับทำบนกระดาษตารางเหลี่ยม

ถ้า XOX' , YOY' เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O , เส้นตรงทั้งสองนี้เป็นเส้นตรงที่ เราจะหาได้ว่า จุด P อยู่ที่ไหน เมื่อถือเอาเส้นตรงทั้งสองนี้เป็นหลัก และรู้ระยะของจุด P ว่าอยู่ห่างจากเส้นตรงทั้งสองนี้เท่าใด เส้นตรงทั้งสองนี้เรียกว่า **เส้นหลัก** (Axes of reference) เส้น XOX' เรียกว่า **เส้นหลัก x** (Axis of x)

และเส้น YOY' เรียกว่า เส้นหลัก y (Axis of y) จุด O ที่เส้นหลักทั้งสอง ตัดกัน เรียกว่า จุดเดิม (Origin).



ตามธรรมเนียมเส้น XOX' มักเขียนเป็น เส้นนอน (Horizontally) และเส้น YOY' เขียนเป็น เส้นตั้ง (Vertically).

การ หัก ระยะ ของ จุด P ว่า อยู่ ห่าง จาก เส้นหลัก x และ y ได้ นี้ ก็ดังนี้

ลากเส้น PM ทาก P ให้ตั้งฉากกับ $X'X$; แล้ววัดระยะ OM และ PM .

OM เรียกว่า แอบซิสสา (Abscissa = ระยะ นอน) ของ จุด P และใช้ x เป็นเครื่องหมาย แทน ระยะ นี้.

PM เรียกว่า ออร์ดิเนต (Ordinate = ระยะ ตั้ง) ของ จุด P และใช้ y เป็นเครื่องหมาย แทน ระยะ นี้.

แนบขั้วตั้ง และ ขั้วทิศเหนือเข้า เรียกว่า โคออร์ดิเนต
(Coordinates = ระยะ ประทับ) ของทุก P และใช้ (x, y) เป็น
เครื่องหมาย แทน ระยะ ทั้งสองนี้.

ทั้งนี้เราก็อาจหาที่ตั้งของทุก ๆ หนึ่งได้ ถ้ารู้ โคออร์ดิเนต
ของทุกนั้น.

ตัวอย่าง จงหาทุก ๆ หนึ่งซึ่ง โคออร์ดิเนตเป็น $(๕, ๔)$

บนเส้น OX ตัด OM ออกยาว ๕ หน่วย

ลากเส้น PM ที่ M ให้ตั้งฉากกับ OX ทำ MP ยาว ๔ หน่วย

∴ ทุก P เป็นทุกซึ่ง มีโคออร์ดิเนตเป็น $(๕, ๔)$.

เส้นหลักทั้งสอง แบ่ง พื้นที่ราบ ออกเป็นสี่ส่วน . (Regions)
คือ XOY, YOX', X'OY', Y'OX เรียกว่า ภาคที่หนึ่ง, ที่สอง,
ที่สาม และที่สี่ (Quadrants).

จะเห็นได้ว่าในภาคหนึ่ง ๆ ย่อมมีทุกอยู่ทุก หนึ่ง ซึ่ง ระยะของ
ทุกในภาคหนึ่ง ๆ กับเส้นหลักทั้งสองนั้น เท่ากับ ระยะของ ทุก P
กับเส้นหลักทั้งสองนั้น ทั้งในรูปข้างบนนี้ กล่าวคือ ๕ หน่วยกับ
๔ หน่วย.

โค ออร์ดิเนตของ ทุกเหล่านี้ มีความหมาย แตก ต่าง กันโดยใช้
เครื่องหมาย บวก (Positive) และ ลบ (Negative sign) ตาม
วิธี ต่อไปนี้.

ระยะนอน (Abscissae) วัดไปตามเส้นหลัก x (x -axis) ไปทางขวาของ จุดเดิม (Origin) เป็นบวก, จำพวกที่ วัดไปทางซ้าย เป็นลบ.

ระยะตั้ง (Ordinates) ซึ่ง อยู่เหนือเส้นหลัก x (x -axis) (คืออยู่ใน ภาคหนึ่งและสอง) เป็นบวก.

จำพวกซึ่ง อยู่ใต้เส้นหลัก x (x -axis) (คือ อยู่ในภาคสามและสี่) เป็นลบ.

ระยะโคออร์ดิเนตของ จุด Q, R, S เป็น $(-๕, -๔)$, $(-๕, -๔)$, และ $(๕, -๔)$ ตามลำดับ.

หมายเหตุ โคออร์ดิเนตของจุดเดิม (Origin) เป็น $(๐, ๐)$.

ควร ทำแบบฝึกหัด ลงบน กระดาษ ตารางเหลื่อม และ เขียน เส้นตรง ตัด กัน สองเส้น เป็นเส้นหลัก เส้นทั้งสองนั้นได้เขียนหนาๆ หน่อยเพื่อให้เห็นได้ชัดเจน แล้ว แบ่งเส้น ทั้งสอง เป็นหัว ๆ สักหนึ่ง หรือ สอง นิ้ว.

กระดาษที่ใช้ใน ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นหัวหนึ่ง ออก เป็น สิบ ส่วน

ตัวอย่าง ๑ โคออร์ดิเนตของจุด A และ B เป็น $(๗, ๘)$ และ

$(-๕, ๓)$ จงหาจุดกึ่งกลางและหาระยะระหว่างจุดทั้งสอง.

เมื่อหาจุดกึ่งกลางเสร็จแล้วก็ให้ในรูปนี้ เราหา หาระยะของ AB

ได้ เพียงใกล้กับความจริงโดยวิธีวัด.

หรือจะทำได้ อย่างนี้ก็ได้ คือลากเส้น
ตรงเส้นหนึ่ง จาก B ให้ขนานกับ XX'
ไปพบกับระยะตั้ง (Ordinate) ของ A ที่ C

$\therefore ACB$ เป็นรูป $\triangle$ มุมฉากซึ่งมี
ด้าน $BC = ๑๒$ และด้าน $AC = ๕$

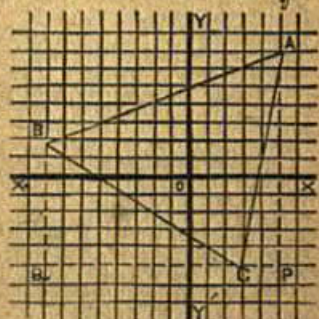
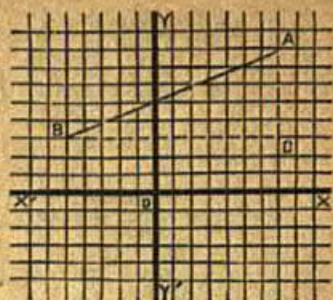
$$\begin{aligned}\therefore AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= ๑๒^2 + ๕^2 \\ &= ๑๔๔ + ๒๕ \\ &= ๑๖๙\end{aligned}$$

$$\therefore AB = ๑๓$$

* ทอษ ระยะระหว่าง A และ B = ๑๓

ตัวอย่าง ๒ โคออร์ดิเนตของ A, B และ C เป็น $(๕, ๗)$,
 $(-๔, ๒)$ และ $(๓, -๕)$ จงหาจุดเหล่านี้ และหาเนื้อที่ของรูป
สามเหลี่ยมซึ่งมีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด.

เมื่อหาจุด A, B และ C ได้ทั้ง
ในรูปนี้แล้ว เราอาจวัด AB ได้และ
ลากเส้นตั้งฉากจาก C มาที่ AB แล้ว
วัดเส้นตั้งฉากนั้นได้.



∴ ถ้าหา คำนวณ หา เนื้อที่ ของ รูป สามเหลี่ยม ได้ ได้ ผล เพียง
ใกล้เคียง กับ ความจริง ได้.

หรือ จะ ทำ กัง นี้ ก็ได้ คือ

ลาก เส้น AP, BQ จาก A และ B ให้ ขนาน กับ YY'

ลาก เส้น PQ, ผ่าน จุด C ให้ ขนาน กับ XX'.

∴ เนื้อที่ ของ รูป $\triangle ABC$ = เนื้อที่ ของ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู APQB -
เนื้อที่ ของ รูป $\triangle$ มุมฉาก APC, และ BQC

$$= \frac{1}{2} PQ (AP + BQ) - \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC - \frac{1}{2} \cdot BQ \cdot QC$$

$$= \frac{1}{2} \times ๑๓ \times ๑๔ - \frac{1}{2} \times ๑๒ \times ๒ - \frac{1}{2} \times ๗ \times ๑๑$$

$$= \frac{๒๔๗}{๒} - ๑๒ - \frac{๗๗}{๒}$$

$$= \frac{๒๔๗}{๒} - \frac{๑๐๑}{๒}$$

$$= \frac{๑๔๖}{๒}$$

$$= ๗๓ \text{ ตารางหน่วย}$$

$$\text{ตอบ เนื้อที่ ของ รูป } \triangle ABC = ๗๓ \text{ ตารางหน่วย}$$

แบบฝึกหัด

๑. จงหา จุดต่อไปนี้ เป็น สำคัญ ๆ

(๑) $(๖, ๔), (-๖, ๔), (-๖, -๔), (๖, -๔)$

(๒) $(๘, ๐), (๐, ๘), (-๘, ๐), (๐, -๘)$

(๓) $(๑๒, ๕), (๕, ๑๒), (-๑๒, ๕), (-๕, ๑๒)$

๒. จงหาจุดต่อไปนี้ และ แสดงให้เห็นว่า จุดเหล่านั้น สำหรับ
หนึ่ง ๆ ต่างก็ อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

$$(๑) \quad (๔, ๗), \quad (๐, ๐), \quad (-๔, -๗);$$

$$(๒) \quad (-๔, ๗), \quad (๐, ๐), \quad (๔, -๗)$$

จงอธิบายผลเหล่านี้ว่า ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น.

๓. จงหาจุดต่อไปนี้ เป็นคู่ ๆ แล้ว ลากเส้น ระหว่างจุดเหล่านั้น
ให้ติดต่อกันเป็นคู่ ๆ และ วัดโคออร์ดิเนตของ จุดกึ่งกลางของเส้น
ที่ลากต่อกัน.

$$(๑) \quad (๔, ๓), \quad (๑๒, ๗); \quad (๒) \quad (๕, ๔), \quad (๑๕, ๑๖)$$

จงแสดงให้เห็นว่าทำไมในข้อหนึ่ง ๆ โคออร์ดิเนตของ จุดกึ่งกลาง
จึง $= \frac{x}{2}$ ของ ผลบวกของ ระยะ หอน (Abscissae) และ $\frac{y}{2}$ ของ ผล
บวกของ ระยะ ตั้ง (Ordinates) ของ จุดที่กำหนดให้สองจุดนั้น.

๔. จงหาจุดเป็นคู่ ๆ ต่อไปนี้ และหาโคออร์ดิเนตของ จุดกึ่ง
กลางของเส้นที่ ลากต่อ ระหว่างจุดเหล่านั้น.

$$(๑) \quad (๐, ๐), \quad (๘, ๑๐); \quad (๒) \quad (๘, ๐), \quad (๐, ๑๐)$$

$$(๓) \quad (๐, ๐), \quad (-๘, -๑๐); \quad (๔) \quad (-๘, ๐), \quad (๐, -๑๐).$$

๕. จงหาโคออร์ดิเนตของ จุด ซึ่ง แบ่งเส้น ตรง ออกเป็น สาม
ส่วนเท่า ๆ กัน เส้นตรงนั้นเป็นเส้นลากต่อจุด $(๐, ๐)$ กับ $(๑๘, ๑๕)$.

๖. จงหาจุดต่อไปนี้ที่เป็นสำหรับ γ

(๑) $(๕, ๐)$, $(๕, ๒)$, $(๕, ๕)$, $(๕, -๑)$, $(๕, -๔)$;

(๒) $(-๔, ๘)$, $(-๑, ๘)$, $(๐, ๘)$, $(๓, ๘)$, $(๖, ๘)$.

จงแสดงให้เห็นว่า จุดเหล่านี้ อยู่บนเส้นตรง สองเส้นซึ่งขนานกับ
เส้นหลัก และ $\perp$ ตามลำดับ แล้วหาโคออร์ดิเนตของจุดที่
เส้นทั้งสองนั้น ตัดกัน.

๗. จงหาจุดต่อไปนี้ และคำนวณหา ระยะ ของ จุดเหล่านี้ว่า
อยู่ห่าง จาก จุดเดิมเท่าใด.

(๑) $(๑๕, ๘)$; (๒) $(-๑๕, -๘)$;

(๓) $(๒.๔'', .๗'')$; (๔) $(-.๗'', ๒.๔'')$ แล้ววัด
สอบดูว่า จะได้เท่านี้จริงหรือไม่.

๘. จงหาจุดเป็นคู่ๆต่อไปนี้ และคำนวณหา ระยะระหว่างจุด
คู่ๆเหล่านั้น.

(๑) $(๔, ๐)$, $(๐, ๓)$; (๒) $(๙, ๘)$, $(๕, ๕)$;

(๓) $(๑๕, ๐)$, $(๐, ๘)$; (๔) $(๑๐, ๔)$, $(-๕, ๑๒)$;

(๕) $(๒๐, ๑๒)$, $(๑๕, ๐)$; (๖) $(๒๐, ๙)$, $(-๑๕, -๓)$.

จงวัด สอบดูว่า จะได้เท่านี้จริงหรือไม่.

๙. จงพิสูจน์ให้เห็นว่า จุด $(-๓, ๒)$, $(๓, ๑๐)$, $(๗, ๒)$
เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วคำนวณและวัดหาความ
ยาวของด้านเท่าหนึ่งด้าน.

๑๐. จงหาทุก แยกทุก คือ $(๐, ๕)$, $(๓, ๔)$, $(๕, ๐)$, $(๔, -๓)$, $(-๕, ๐)$, $(๐, -๕)$, $(-๔, ๓)$, $(-๔, -๓)$. และพิสูจน์ว่าทุกเหล่านี้ที่ทุกต่างก็อยู่บนวงกลมวงหนึ่งซึ่งมีจุดเดิม (Origin) เป็นศูนย์กลาง.

๑๑. จงอธิบายด้วยรูปว่าทำไมระยะระหว่างทุกต่อไปนี้เป็นคู่ๆ กันจึงเท่ากันทั้งหมด.

$$(๑) \quad (๔, ๐), (๐, ๔);$$

$$(๒) \quad (๔, ๐), (๐, ๔);$$

$$(๓) \quad (๐, ๐), (๔, ๔).$$

๑๒. จงลากเส้นตรงต่อ

$$(๑) \quad (๔, ๐) \text{ และ } (๐, ๔);$$

(๒) $(๐, ๐)$ และ $(๔, ๔)$; และพิสูจน์ว่าเส้นเหล่านี้แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันเป็นมุมฉาก.

๑๓. จงพิสูจน์ว่า $(๐, ๔)$, $(๑๒, ๔)$, $(๑๒, -๔)$ ต่างก็เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งซึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้ถูกเส้นหลัก = แบ่งครึ่ง.

๑๔. จุดยอดสามทุกของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น $(๑๔, ๐)$, $(๑๔, ๑๐)$ และ $(๐, ๑๐)$; จงหาโคจรวิถีแคบของทุกยอดทั้งสี่และของทุกกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม.

๑๕. จงพิสูจน์ว่า จุดที่จุด คือ $(0,0)$, $(13,0)$, $(13,12)$, $(5,12)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จงหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมนี้ และหาโคซอรัคแทนต์ของทุกตัวก้นของเส้นทแยงมุม.

๑๖. จงหาเส้นโลกัศของทุก ๆ หนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ไปโดยมีระยะห่างจากจุด $(0,0)$ และ $(4,-4)$ เท่ากันเสมอ เส้นโลกัศจะตัดเส้นหลัก (axes) ที่ไหน?

๑๗. จงพิสูจน์ว่าทุกทาง ๆ ต่อไปนี้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงสร้างรูปแล้วคำนวณหาเนื้อที่.

(๑) $(4,3)$, $(17,3)$, $(17,12)$, $(4,12)$,

(๒) $(3,2)$, $(3,15)$, $(-6,15)$, $(-6,2)$,

(๓) $(5,1)$, $(-8,1)$, $(-8,-8)$, $(5,-8)$

๑๘. จงต่อทุกเหล่านี้ให้ติดกันตามลำดับ $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ รูปสี่เหลี่ยมซึ่งบังเกิดขึ้นนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด? จงหาเนื้อที่.

ถ้าลากทุกถึงกลางของรูปที่หนึ่งให้ติดต่อกันเข้า และบังเกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดอื่นอีกรูปหนึ่ง จงหาเนื้อที่ของรูปนี้.

๑๙. จงหารูปสามเหลี่ยมจากทุกต่อไปนี้เป็นลำดับ ๆ แล้วหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้ ๆ.

- (๑) $(๑๐, ๑๐), (๔, ๐), (๑๘, ๐),$
 (๒) $(๑๐, -๑๐), (๔, ๐), (๑๘, ๐),$
 (๓) $(-๑๐, ๑๐), (-๔, ๐), (-๑๘, ๐),$
 (๔) $(-๑๐, -๑๐), (-๔, ๐), (๑๘, ๐),$

๒๐. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม จากจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- (๑) $(๐, ๐), (๕, ๓), (๖, ๐),$
 (๒) $(๐, ๐), (๓, ๐), (๐, ๖),$

หา เนื้อที่ ของรูป สามเหลี่ยมนี้ ๆ แล้ว วก มุม ทั้ง สาม ของรูป สามเหลี่ยมในข้อ (๑).

๒๑. จงหา รูปสามเหลี่ยม จากจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นสำหรับ ๆ
 จงพิสูจน์ว่า ในข้อหนึ่ง ๆ ด้านหนึ่ง ของรูป สามเหลี่ยม จะ ขนาน กับ เส้น
 หลักเส้นหนึ่ง (Axes) แล้ว หา เนื้อที่ ของ รูปสามเหลี่ยมนี้ ๆ.

- (๑) $(๐, ๐), (๑๒, ๑๐), (๑๒, -๖),$
 (๒) $(๐, ๐), (๕, ๘), (-๑๕, ๘),$
 (๓) $(๐, ๐), (-๑๒, ๑๒), (-๑๒, -๘),$
 (๔) $(๐, ๐), (-๖, -๘), (๒๐, -๘),$

๒๒. รูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ จงพิสูจน์ว่า ด้าน สอง ด้าน ของ
 รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ๆ ขนาน กับ เส้นหลัก (Axes) ทั้งสอง แล้ว
 จงหา เนื้อที่ ของ รูปสามเหลี่ยมนี้ ๆ.

(๑) $(๕,๕)$, $(๑๕,๕)$, $(๑๕,๑๕)$,

(๒) $(๘,๓)$, $(๘,๑๘)$, $(๐,๑๘)$,

(๓) $(๔,๘)$, $(-๑๖,-๔)$, $(๔,-๔)$,

(๔) $(๑,๑๕)$, $(-๑๑,๑๕)$, $(๑,-๗)$

๒๓. จงพิสูจน์ว่า $(-๕,๕)$, $(๗,๑๐)$, $(๑๐,๖)$, $(-๒,๑)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงหาความยาวของด้านทั้งสี่ และเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้.

๒๔. จงพิสูจน์ว่า จุดต่อไปนี้^๕ เป็นจุดที่ทำให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้^๕.

(๑) $(๓,๐)$, $(๓,๓)$, $(๘,๐)$, $(๘,๖)$,

(๒) $(๐,๓)$, $(-๕,๓)$, $(-๒,-๓)$, $(๐,-๓)$,

(๓) $(๘,๔)$, $(๔,๔)$, $(๑๑,-๑)$, $(๓,-๑)$,

(๔) $(๐,๐)$, $(-๑,๕)$, $(-๔,๕)$, $(-๘,๐)$,

๒๕. จงหาเนื้อที่^๕ ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งกำหนดจุดได้ดังต่อไปนี้.

(๑) $(๕,๕)$, $(๒๐,๑๐)$, $(๑๒,๑๔)$,

(๒) $(๗,๖)$, $(-๑๐,๔)$, $(-๔,-๓)$,

(๓) $(๐,-๖)$, $(๐,-๓)$, $(๑๔,๕)$,

(๔) $(๖,๔)$, $(-๗,-๖)$, $(-๒,-๑๕)$,

๒๖. จงพิสูจน์ว่า $(-๕, ๐)$, $(๗, ๕)$, $(๑๙, ๐)$, $(๗, -๕)$, เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จงหาความยาวของด้านและเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้.

๒๗. จงหาคู่จุด $(๐, -๕)$, $(๑๒, ๐)$, $(๔, ๖)$, $(-๘, -๓)$ ให้ติดต่อกันตามลำดับ จงคำนวณหาความยาวของด้านแรกสามด้าน แล้ววัดหาความยาวของด้านที่สี่ จงหาเนื้อที่ของรูปนี้ เฉพาะส่วนที่อยู่ในช่องภาคหนึ่ง และสี่.

๒๘. โคออร์ดิเนตของจุด A, B, C, D สี่จุดเป็น $(-๔, -๔)$, $(-๑๐, ๔)$, $(-๑๐, ๑๓)$, $(๕, ๕)$ ตามลำดับ.

จงคำนวณหาความยาวของ AB, BC, CD และวัด AD แล้วคำนวณหาเนื้อที่ของ ABCD โดยวิธีคิดว่าเป็นผลต่างกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป.

๒๙. จงสร้างรูป ๖ เหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คือ $(๐, -๓)$, $(๘, ๓)$, $(-๔, ๘)$, $(-๔, ๓)$, $(๐, ๐)$. จงหาความยาวของด้านเหล่านี้ จงได้รูปเหล่านี้เป็นไปตามลำดับข้างบนนี้ แล้วแบ่งรูปนี้ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสามรูป แล้วหาเนื้อที่ของรูปนี้.

๓๐. แผนผังของหารูปสามเหลี่ยม ABC สร้างอยู่บนกระดาษตารางเหลี่ยม (มาตราส่วน ๑" = ๑๐๐ หลา) บนแผนผัง

นั้น, โคออร์ดิเนตของ A, B, C เป็น $(-๑, -๓), (๓, ๔), (-๕, -๒)$ ตามลำดับ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม และหาความยาวของด้าน BC , และหาระยะจากด้าน BC ไปยังมุมตรงข้ามของหน้า A .

๓๑. จงพิสูจน์ว่า รุก $(๖, ๐), (๒๐, ๖), (๑๔, ๒๐), (๐, ๑๔)$ เป็น รุกย่อยของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงวัดด้านหนึ่งแล้วคำนวณหาพื้นที่ได้โดยผลใกล้กับความจริง และคำนวณให้ใกล้เคียงอย่างถูกต้องโดย (๑) สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมรอบ รุกย่อยของรูปนี้ (๒) โดยแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดได้ ออกเป็นรูปเล็กๆทั้งในรูปที่ ๑ หน้า ๔๕.

แบบฝึกหัดระคน

๑. AB และ AC เป็นด้านยาวไม่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยม AX เป็นเส้นมีเดียลากจาก A, AP แบ่งครึ่งมุม BAC และ AD เป็นเส้นตั้งฉากลากจาก A มาที่ BC จงพิสูจน์ว่า AP อยู่ระหว่าง AX, AD และมีขนาดความยาวระหว่างความยาวของ AX และ AD .

๒. ABC เป็นรูป สามเหลี่ยมรูปหนึ่ง AH เป็นเส้นตรงแบ่งครึ่งมุม BAC , CLK เป็นเส้นตรงลากจาก C ไปตั้งฉากกับ AH ตัด AH ที่ L , AB ที่ K .

จงพิสูจน์ว่า (๑) $\angle ACK = \frac{1}{2}$ ของ $(\angle ABC + \angle ACB)$.

๓. จงพิสูจน์ว่า ในรูป สามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่ประกอบด้วยเส้นแบ่งครึ่งมุม นอก กับ เส้น ตั้งฉาก ลากจาก มุม นอก มา ยัง กันฐานจะเท่ากับครึ่งหนึ่งของ ผลต่างกันของ มุมที่ฐาน.

๔. จงสร้างรูป สามเหลี่ยม มุมฉากรูปหนึ่ง โดยกำหนดด้านตรงข้ามกับมุมฉากให้หนึ่งด้าน และ ผลต่างกันของด้านอื่นอีกสองด้าน.

๕. จงสร้างรูป สามเหลี่ยม รูปหนึ่ง โดยกำหนดด้านฐานให้หนึ่งด้าน ผลต่างกันของมุมที่ฐาน และ (๑) ผลต่างกันของด้านอื่นอีกสองด้าน (๒) ผลบวกของด้านอื่นอีกสองด้าน.

๖. จงสร้างรูป สามเหลี่ยม หน้าจั่วรูปหนึ่ง โดยกำหนดด้านฐานให้หนึ่งด้าน และ ผลบวกของด้านเท่าหนึ่งด้านกับเส้นตั้งฉากลากจากมุมยอดมาที่ด้านฐาน.

๗. จงแสดงวิธีแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง โดยให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนส่วนหนึ่งเป็นสองเท่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนอีกส่วนหนึ่ง.

๘. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู, O เป็นจุด ๆ หนึ่ง อยู่ภายในมุม BAD หรือภายในมุมตรงข้ามของมุม BAD . เราพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม OAC เท่ากับผลบวกของรูปสามเหลี่ยม OAD, OAB .

ถ้า O อยู่ภายในมุม BAD หรือภายในมุมตรงข้ามของมุม BAD เราพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม OAC เท่ากับผลต่างกันของรูปสามเหลี่ยม OAD, OAB .

๙. เราพิสูจน์ว่า เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีด้านสองด้านเท่ากับเส้นทแยงมุมสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และมุมในระหว่างด้านเท่า, เท่ากับมุมใดมุมหนึ่งในระหว่างเส้นทแยงมุมทั้งสอง.

๑๐. เราหาเส้นโลภัสของทุกคี่กันของเส้นมีเทียบของรูปสามเหลี่ยมทั้งหลายซึ่งสร้างอยู่บนฐานที่กำหนดให้ และมีเนื้อที่เท่ากับเนื้อที่ ๆ กำหนดให้.

๑๑. เราสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปที่สองลงบนฐานของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ ให้มีเนื้อที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และให้มีทุกยอดอยู่ในเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย.

๑๒. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูทำด้วยไม้มีขนพยัคติดไว้ ถ้า AB คงที่ เราหาเส้นโลภัสของทุกกึ่งกลางของ CD .

คำ ทอย ที่ ต้อง อาศัย การ สร้าง รูป ถ้า กลาก เกื่อน ไป ไม่ เกิน
ร้อยละ ๑ ก็ ได้ นับ เป็น ถูก ได้

แบบฝึกหัดหน้า ๖

- (๑) ๖ ตารางนิ้ว (๒) ๖ ตารางนิ้ว (๓) ๒.๘๐ ตารางนิ้ว
(๔) ๓.๕๐ ตารางนิ้ว (๕) ๓.๓๐ ตารางนิ้ว (๖) ๓.๓๖ ตารางนิ้ว
(๗) ๑๙๘ ตารางเมตร (๘) ๔๒ ตารางฟุต
(๙) ๑๐๐๐๐ ตารางเมตร (๑๐) ๑๑๐ ตารางฟุต (๑๑) ๕ ซม.
(๑๒) ๒.๖ นิ้ว (๑๔) ๙๐๐ ตารางหลา; ๔๘ หลา; ๕.๘"
(๑๕) ๑๑๗๐๐ ตารางเมตร (๑๖) ๑ ซม. = ๑๐ หลา (๑๗) ๑.๖"
(๑๘) ๖๐๐ ตารางฟุต (๑๙) ๑๑๕๒ ตารางฟุต (๒๐) ๑๐๐
ตารางฟุต (๒๑) ๑๕๖ ตารางฟุต (๒๒) ๑๑๐ ตารางฟุต (๒๓) ๒๘๘
ตารางฟุต (๒๔) ๗๒ ตารางฟุต (๒๕) ๗๕ ตารางฟุต.

แบบฝึกหัดหน้า ๑๓

- ๑, (๑) ๒๒ ซม.; (๒) ๓.๖" ๒, ๓.๔ ตารางนิ้ว ๓, ๕๗๔.๕
ตารางเมตร ๔, ๑.๕" ๕, ๑.๙๓", ๗๕°

แบบฝึกหัดหน้า ๑๖

- ๑, (๑) ๑๘๐ ตารางฟุต; (๒) ๘.๔ ตารางนิ้ว; ๑๐๐๐๐ ตาราง
เมตร. ๒, (๑) ๑๓.๔๔ ตารางซม.; (๒) ๑๕.๕๐ ตารางซม.

๘๕

(๓) ๒๐.๕๐ ตารางซม. (๓) ๑๕ ตารางซม. ๑.๒%
๔, ๖.๓ ตารางนิ้ว ๕, (๑) ๘"; (๒) ๑๓ ซม. ๖, ๓.๓๖
ตารางนิ้ว

แบบฝึกหัดหน้า ๒๔

(๑) ๑๑๔๐๐ ตาราง หลา (๒) ๖๓๑๒ ตาราง เมตร (๓) ๒.๔ ซม.;
๕.๑ ซม. (๔) ๒.๐๔" ๒.๒๐"

มุม	๐°	๓๐°	๖๐°	๙๐°	๑๒๐°	๑๕๐°	๑๘๐°
ตารางซม.	๐	๗.๕	๑๓.๐	๑๕.๐	๑๓.๐	๗.๕	๐

แบบฝึกหัดหน้า ๒๘

(๑) ๖๖ ตาราง ฟุต (๒) ๘๔ ตาราง หลา (๓) ๑๒๖ ตาราง เมตร
(๔) ๑๓๒ ตาราง ซม. (๕) ๑๘๐ ตาราง ฟุต (๖) ๓.๓๖
ตาราง เมตร

แบบฝึกหัดหน้า ๓๑

(๑) ๖ ตาราง นิ้ว (๒) ๑๗๐ ตาราง ฟุต (๓) ๖๑๕ ตาราง เมตร
(๔) ๘.๔ ตาราง นิ้ว (๕) ๓๑.๒ ตาราง ซม. (๖) ๕.๒๐ ตาราง นิ้ว
(๗) ๒๔ ตาราง ซม.

แบบฝึกหัดหน้า ๓๖

๑, (๑) ๒๕.๕ ตารางซม.; (๒) ๑๕.๖ ตารางซม.
 ๒, (๑) ๘.๘๕ ตารางนิ้ว; (๒) ๘.๕ ตารางนิ้ว (๓) ๑๒๕๐๐ ตารางเมตร

แบบฝึกหัดหน้า ๓๕

(๔) ๓.๓ ตารางนิ้ว (๕) ๗.๕ ซม. (๖) ๓.๖ ตารางนิ้ว

แบบฝึกหัดหน้า ๔๖

๑, (๑) ๕ ซม.; (๒) ๖.๕ ซม.; (๓) ๓.๗"
 ๒, (๑) ๑.๖"; (๒) ๒.๘ ซม. ๓, ๔๑ ฟุต ๔, ๖๕ ไมล์
 ๕, ๖.๑ กม. ๖, ๑๖ ฟุต ๗, ๔๘ เมตร
 ๘, ๒๕ ไมล์ ๙, ๗๓ เมตร ๑๐, ๖๒ ฟุต

แบบฝึกหัดหน้า ๔๒

๑๐, (๑) และ (๓) ๑๑, ๒.๘๓" ๑๒, ๔.๒๔ ซม.; ๑๘
 ตารางซม. ๑๓, ๗๐.๗๑ ตารางเมตร ๑๔, $\frac{1}{2}$ = ๖.๘๓ ซม.
 ๑๖, (๑) ๒๐ ซม.; ๑๕ ซม.;
 (๒) ๔๐ ซม.; ๓๘ ซม. ๑๗, ๓๕ ซม.; ๑๒ ซม.;
 ๓๐๖ ซม.; ๑๘, (๑) ๓๖ ตารางนิ้ว; (๒) ๙๐ ตารางฟุต;
 (๓) ๑๒๖ ตารางซม. (๔) ๒๔๐ ตารางหลา ๑๙, ราว ๆ
 ๕.๑ ซม.

๘๗

แบบฝึกหัดหน้า ๕๕

๑, ๗.๑ ซม. ๔, ๔.๐ ซม. ๕, ๑.๖" ๖, ๓.๑ ซม.;
๑๕.๖ ตารางซม.

แบบฝึกหัดหน้า ๖๕

๑, ๒๓.๙๐ ตารางซม. ๒, ๘.๔๐ ตารางนิ้ว
๓, ๒๗.๕๒ ตารางซม. ๔, ๑๒๙๘๐๐ ตารางเมตร.

แบบฝึกหัดหน้า ๗๓

๓, (๑)(๘, ๕); (๒)(๑๐, ๑๐) ๔, (๑)(๔, ๕);
(๒)(๔, ๕); (๓)(-๔, -๕); (๔)(-๔, -๕)
๕, (๖, ๕), (๑๒, ๑๐) ๖, (๕, ๘) ๗, (๑) ๑๗;
(๒) ๑๗; (๓) ๒.๕" (๔) ๒.๕";
๘, (๑) และ (๒) ๕; (๓) และ (๔) ๑๗; (๕); และ
(๖) ๓๗ ๙, ๑๐ ๑๔, (๐, ๐), (๗, ๕)
๑๕, ๑๓; - (๙, ๖)
๑๖, เส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านทุก (๔, ๐), (๐, -๔)

๑๗, ในข้อหนึ่งๆ มีเนื้อที่ ๑๑๗ ตารางหน่วย

๑๘, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส. ๒ ตารางนิ้ว. ๑ ตารางนิ้ว

๑๙, เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยม ๗๐ ตารางหน่วย

๒๐, เนื้อที่ ๙ ตารางหน่วย. ๓๑, ๗๑, ๗๘

๒๑, (๑) ๙๖; (๒) ๘๐; (๓) ๑๒๐; (๔) ๑๐๔

๒๒, (๑) ๕๐; (๒) ๖๐; (๓) ๑๒๐; (๔) ๑๓๒

๒๓, กว้าง ๕, ๑๓, เนื้อที่ ๖๓

๒๔, (๑) ๒๗; (๒) ๒๑; (๓) ๓๐; (๔) ๒๗.๕

๒๕, (๑) ๕๐; (๒) ๖๕.๕; (๓) ๒๑; (๔) ๘๓.๕

๒๖, กว้าง ๓; เนื้อที่ ๑๒๐.

๒๗, ๑๓, ๑๐, ๑๕, ๘.๒๕, ๔๒, ๓๐.

๒๘, $AB = ๑๐$, $BC = ๙$, $CD = ๑๗$, $DA = ๑๒.๗$.

เนื้อที่ = ๑๓๐.๕

๒๙, ๑๐; ๑๓; ๕; ๕; ๓ เนื้อที่ = ๖๐

๓๐, ๑๖๐๐๐๐ ตารางฟุต; ๑๐๐๐ ฟุต; ๓๒๐ ฟุต

๓๑, กว้าง = ๑๕.๒๓; เนื้อที่ = ๒๓๒ ตารางหน่วย

(ตำนาน)



ใบอนุญาตให้ใช้แบบเรียน



ฉบับที่ ๔๒/๓๕๘

วันที่ ๕ เดือน พฤศจิกายน พ.ศ. ๒๔๗๔

หนังสือ ตำราเรขาคณิต ภาค ๒ ของ รองอำมาตย์ตรี
ถังฮัว ลิมป็นันท์ ป.ม. พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง จำนวนหนึ่งพันฉบับ
ใน พ.ศ. ๒๔๗๔.

เจ้าหน้าที่ได้ตรวจแล้ว อนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

(ลงพระนาม) ชานีนิวัต มหาอำมาตย์เอก

เสนาบดีกระทรวงธรรมการ

(ใช้ให้เฉพาะในการ พิมพ์คราว นี้เท่านั้นและห้ามมิให้นำไป
อนุญาตให้ ไปพิมพ์ในหนังสือเรื่องอื่นที่มิได้รับอนุญาตเป็น จันจาก).