

ม. ๑๗๓

ตำราเลขแสดนาภาคหนึ่ง

ว่าด้วยพันที่ราบ

สำหรับชั้นมัธยมศึกษาตอนกลาง และตอนปลาย

พระพิพัฒน์พิทยาภรณ์ (โชติ ผลชีวิติน) เรียบเรียง

พิมพ์ครั้งที่หนึ่งจำนวน ๑๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๕๓๕

ราคาเล่มละ ๕๐ สตางค์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ศรีทอง

บัตติศาสตร์ตามพระราชมัญญัติ

ป
๕๑๑
พ

ก ๐๒๖๗๕

ตำราเลขแล่นภาคหนึ่ง

ว่าด้วยพันที่ราบ

สำหรับชั้นมัธยมศึกษาตอนกลาง และตอนปลาย

พระพิทักษ์พิทยาภรณ์ (โชติ ผลชีวิน) เรียบเรียง

พิมพ์ครั้งที่หนึ่งจำนวน ๑๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๗๕

ราคาเล่มละ ๕๐ สตางค์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ศรีหงส์

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ก ๐๒๖๗๕ น ๓

(สำเนา)



ใบอนุญาตให้ใช้แบบเรียน

ฉบับที่ ๒๗ / ๕๑๗

วันที่ ๓ เดือนธันวาคม พ.ศ. ๒๔๗๕

หนังสือตำราเลขแสนภาคหนึ่ง ของอำมาตย์โท
พระพิสัยทัฬหยาภูน พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง จำนวนหนึ่งพันฉบับ
ใน พ.ศ. ๒๔๗๕

เจ้าหน้าที่ได้ตรวจแล้ว อนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

(ลงนาม) เจ้าพระยาธรรมศักดิ์

เสนาบดีกระทรวงธรรมการ

(ใช้ได้เฉพาะในการพิมพ์คราวนี้เท่านั้น และห้ามมิให้นำใบอนุญาตนี้ไปพิมพ์
ในหนังสือเรื่องอื่นที่มีได้รับอนุญาตเป็นอันขาด)

คำนำ

เลขแสดนาเป็นคณิตศาสตร์แผนกหนึ่ง ซึ่งกล่าวถึงวิธีหาคำนวณระยะทางกว้างยาว และคำนวณเนื้อที่ของรูปต่างๆ เป็นคณิตศาสตร์ที่มีวิชากว้างขวางแผนกหนึ่ง ข้าพเจ้ารวบรวมคณิตศาสตร์แผนกนี้ เพราะ

(๑) คำว่าแผนกนี้ของเรายังมีเป็นขึ้นเป็นขึ้นก่อนกระจัดกระจายอยู่ทีไหนทีหนึ่งไม่ค่อยมีรวบรวมกันเป็นพวกเป็นหมู่ลงได้ ย่อมเป็นการลำบากแก่ผู้เล่าเรียนศึกษาต้องค้นคว้าเป็นอันมาก

(๒) ทนทางการเล่าเรียนศึกษาของชาวเราในทุกวันนี้ก็ไม่ได้ละทิ้งวิชาคำนวณแผนกนี้เสีย ยังต้องการจะให้กุลบุตรและกุลธิดาได้เล่าเรียนกันแพร่หลายมากขึ้น กระทรวงธรรมการก็ได้ตราหลักสูตรไว้ว่า นักเรียนต้องทั้งชั้นเรียนวิชาแผนกนี้อย่างง่ายๆ ทั้งแต่ชั้นมัธยมของต้นขึ้นไป ความจริงการศึกษาถึงสูงขึ้นยังต้องการคำนวณวิชาแผนกนี้มากขึ้นและยากขึ้นตามลำดับ เพราะฉะนั้นควรมิคำรับคำว่าแผนกนี้เป็นภาษาไทยเราโดยแท้

ถ้าจะกล่าวถึงคุณสมบัติแล้ว เลขแสดนาไม่แพ้วิชาความรู้ประเภทอื่น ย่อมมีคุณสมบัติเป็นอเนกประการ กล่าวโดยย่อก็พอจะแลเห็นได้ คือ :-

(๑) เลขแสดนาเป็นบทเรียนที่ผู้ศึกษาต้องใช้ความกำวิจิตรของ

คุณค่ามหาเหตุผลเป็นอันมาก * นับว่าเป็นบทเรียนที่ปลูกความกึกกัให้
 ทัศนะไว้ก็เท่ากับบทเรียนอื่น ๆ

(๒) เลขแสนาไม่มีประโยชน์แก่เพียงสอนให้รู้จักกติกาคำนวณ
 ส่วนกว้างยาวของพื้นแผ่นดินแก่อย่างเกี้ยว ยังมีประโยชน์ช่วยใน
 การเรียนวิทยาศาสตร์สูง ๆ ขึ้นไปอีกเป็นอันมาก

(๓) การหัตถกรรมต่าง ๆ ก็ต้องใช้วิธีเลขแสนาสำหรับวัด
 คำนวณวัตถุที่จะประกอบขึ้นเป็นสิ่งของต่าง ๆ ให้พอดีพอเหมาะกัน
 ใช้แก่เท่านั้นการโยธา เช่น การก่อสร้างเป็นต้น ก็ต้องอาศัยคำนวณ
 วิชคณิตช่วยเหลืออยู่เป็นอันมาก ถ้าจะให้ทั่วถึงแล้วอาจกล่าว
 ได้ว่า เลขแสนาย่อมเกี้ยวแทรกแซงอยู่ในการงานและวิชาความรู้
 ประเภทอื่น ๆ ทั่วไป

ตามเหตุผลซึ่งกล่าวมาแล้วนี้ จะเห็นได้ว่าเลขแสนาเป็นของ
 นำเรียน นำรู้เพียงไร ไม่พิกัดต้องกล่าวถึงประโยชน์อย่างอื่น ๆ ซึ่งยัง
 มองไม่เห็นให้ยืดยาว เพียงแต่ช่วยให้สติปัญญาของเรามีกำลังกล้า
 แข็งขันก็มีประโยชน์พออยู่แล้ว เนื้อเรื่องซึ่งนำมาแสดงไว้ในตำรา
 เล่มนี้อยู่ข้างระบิกยาว ครั้นจะเลือกคัดคัดตอนเอาแต่ส่วนที่ของการ
 จะใช้มากกล่าวก็ย่อมเป็นการยาก อาชญา ๆ เกิน ๆ ไม่พอถึงได้
 และทั้งจะไม่รวบรวมนั้นเป็นหมวดเป็นหมู่ถึงที่กล่าวแล้ว จึงยกไว้ให้
 เป็นหน้าที่ของนักศึกษาเลือกคัดคัดตอนเอาเรียนเอาตามความประสงค์
 ของตน ๆ เองจะดีกว่าที่ข้าพเจ้าจะเลือกคัดให้ ตำรานี้เหมาะแก่ครู
 ภาควิชาและนักเรียนชั้นสูงทั่วไป

ก

ตำราเลขคณิตศาสตร์แผนกนี้ ข้าพเจ้าได้รวบรวมไว้ตั้งแต่ครั้ง
เป็นครูอยู่โรงเรียนฝึกหัดครู ครั้งยังเรียกว่า โรงเรียนฝึกหัดอาจารย์
เป็นเวลานานร่วม ๒๐ ปีมาแล้ว เคยไว้นานจนเก่าเกินสมัย เพราะ
ฉะนั้นจะมีที่ผิดพลาดบกพร่องอยู่เป็นแน่นอนที่เคียว ถึงจะได้แก้ไข
ไขแล้วก็ตามจะไม่ละเอียดยิ่ง ถ้าท่านผู้ใดเห็นผิดพลาดบกพร่อง
ตรงไหนแล้ว บอกให้ข้าพเจ้าทราบ ข้าพเจ้าจะขอบใจมาก จะได้
แก้ไขให้ถูกต้องยิ่งขึ้นในข้างหน้าต่อไป.

โรงเรียนมัธยมวัดเทพศิรินทร์

วันที่ ๑ ธันวาคม พุทธศักราช ๒๔๗๕

พระพิณทัฬหยาภรณ์

สารบัญ

หน้า

คำนำ	ก
บทที่ ๑ หมวดที่ ๑ คำชี้แจง	๑
,, ๒ มาตรา	๒
บทที่ ๒ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	๕
แบบฝึกหัดที่ ๑ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (เขื่องคัน)	๑๒
,, ๒ ,, ,, (ปากขน)	๑๕
บทที่ ๓ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	๑๘
หมวดที่ ๑ ทาเนอท	๑๘
แบบฝึกหัดที่ ๓ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส (ทาเนอท)	๒๐
หมวดที่ ๒ ทาก้าน	๒๓
แบบฝึกหัดที่ ๔ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (ทาก้าน)	๒๕
หมวดที่ ๓ วิชเชกเทอิก ซึ่งเกี่ยวข้องกับรูปสี่เหลี่ยม ผืนผ้า และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	๒๘
แบบฝึกหัดที่ ๕ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส (กำหนดเส้นทแยงมุมและ เนอทให้)	๓๗

	แบบฝึกหัดที่ ๖ โทษะระคน	๔๐
บทที่ ๔	รูปสามเหลี่ยมต่างๆ	๔๓
	แบบฝึกหัดที่ ๗ รูปสามเหลี่ยมอื่นและรูปสามเหลี่ยม มุมฉาก (เบื้องต้น)	๕๓
	แบบฝึกหัดที่ ๘ รูปสามเหลี่ยม (ยากขึ้น)	๕๗
บทที่ ๕	รูปสี่เหลี่ยมคางหมู และรูปสี่เหลี่ยมคางหมูไม่เท่า	๖๑
	หมวดที่ ๑ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	๖๑
	แบบฝึกหัดที่ ๙ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	๖๗
	หมวดที่ ๒ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	๖๙
	แบบฝึกหัดที่ ๑๐ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	๗๑
	หมวดที่ ๓ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูไม่เท่า	๗๓
	แบบฝึกหัดที่ ๑๑ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูไม่เท่า	๗๗
บทที่ ๖	รูปวงกลม	๘๐
	หมวดที่ ๑ เส้นรอบวง, เนือ, รัศมี, รูปวงแหวน	๘๒
	แบบฝึกหัดที่ ๑๒ เส้นรอบวง (เบื้องต้น)	๘๙
	แบบฝึกหัดที่ ๑๓ เส้นรอบวงกับเนือ (ยากขึ้น)	๙๔
	หมวดที่ ๒ รูปวงกลมเกี่ยวข้องกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยม	๙๗

แบบผลิตภัณฑ์ ๑๔ รูปวงกลมกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
รูปวงกลมกับรูปสามเหลี่ยม

๑๐๓

บทที่ ๗ กอรุค และธารุคของรูปวงกลม

๑๐๗

หมวดที่ ๑ กอรุคของรูปวงกลม

๑๐๗

แบบผลิตภัณฑ์ ๑๕ กอรุคของรูปวงกลม

๑๑๐

หมวดที่ ๒ ธารุคของรูปวงกลม

๑๑๒

แบบผลิตภัณฑ์ ๑๖ ธารุคของรูปวงกลม

๑๑๖

บทที่ ๘ เชกเคอร์และเชกเมนตของรูปวงกลม

๑๑๘

หมวดที่ ๑ เชกเคอร์ของรูปวงกลม

๑๑๘

แบบผลิตภัณฑ์ ๑๗ เชกเคอร์ของรูปวงกลม

๑๒๑

หมวดที่ ๒ เชกเมนตของรูปวงกลม

๑๒๓

แบบผลิตภัณฑ์ ๑๘ เชกเมนตของรูปวงกลม

๑๒๗

บทที่ ๙ รูปเส้นคกโค้ง

๑๒๙

แบบผลิตภัณฑ์ ๑๙ รูปเส้นคกโค้ง

๑๓๒

บทที่ ๑๐ รูปคล้ายกัน

๑๓๕

แบบผลิตภัณฑ์ ๒๐ รูปคล้ายกัน (ด้านและเส้นตรง)

๑๔๒

บทที่ ๑๑ รูปหลายเหลี่ยมก้านเท่าและมุมเท่า

๑๔๙

แบบผลิตภัณฑ์ ๒๑ รูปหลายเหลี่ยมก้านเท่าและมุมเท่า

๑๕๔

บทที่ ๑๒ รูปหลายเหลี่ยมก้านไม่เท่า และวิธีตัดพื้นที่

๑๕๗

หมวดที่ ๑ รูปหลายเหลี่ยมก้านไม่เท่า

๑๕๗

แบบฝึกหัดที่ ๒๒ รูปหลายเหลี่ยมมุมไม่เท่า	๑๖๒
หมวดที่ ๒ รูปชั้นบันได	๑๖๕
แบบฝึกหัดที่ ๒๓ รูปชั้นบันได	๑๗๐
หมวดที่ ๓ วิถีแสงพื้นทึบ	๑๗๑
แบบฝึกหัดที่ ๒๔ แปลนและเงา	๑๗๗
บทที่ ๑๓ การรวบรวมกฎเกณฑ์	๑๘๑



ภาคหนึ่ง
ว่าด้วยรูปพื้นราบ

บทที่ ๑
ว่าด้วย
ความเบื้องต้น
หมวดที่ ๑
คำชี้แจง

๑. เลขและเส้นเป็นคณิตศาสตร์แผนกหนึ่ง ซึ่งกล่าวถึงวิชาคำนวณ
ระยะทางกว้างยาว และคำนวณเนื้อที่ของรูปพื้นราบ และพื้นที่ซึ่งมี
ส่วนหนา ด้วยกฎเกณฑ์ที่ค้นหาได้

๒. กฎเกณฑ์ต่างๆ ซึ่งจะนำมาใช้ในตำราเล่มนี้นั้น เก็บรวบรวม
รวมมาจากตำราแผนกอื่นๆ บ้าง มีเรขาคณิต และพีชคณิตเป็นต้น
เพราะฉะนั้นจะไม่พิสดารให้เห็นเหตุผลทั่วไปทุกๆ ข้อ เพราะบางข้อก็ยาก
ยาวยุ่งยากเกินไป แม้จะแสดงไว้ก็ระบุงรุงรังพื้นเสีย แต่จะอ้าง
ไว้ให้ไปตรวจค้นตำราแผนกนั้นๆ เอง

๓. ถ้าผู้ที่จะใช้ตำราเล่มนี้มีความรู้วิชาเรขาคณิตและพีช

คณิตอยู่ข้าง ก็ระเข้าใจเนื้อความได้โดยง่าย ก็จะต้องเป็นผู้มีความ
ชำนาญในวิธีคูณหารทศนิยมที่มีเศษหลาย ๆ ตำแหน่งให้คล่องแคล่ว
ด้วย เรขาคณิตซึ่งนำมาใช้หรืออ้างถึงในตำราเล่มนี้นั้น เป็น
เรขาคณิตของ ซอลต์ และ สกีเวนส์ ผู้ศึกษาส่งสัปดาห์โทรโทร
สอยสวนกุฎิก

หมวดที่ ๒

มาตรา

๔. มาตราวัดทางยาวและวัดเนื้อที่ตารางเหลี่ยม

(๑) มาตราวัดทางยาวอย่างไทย

๔	กระเบียด	=	๑	นิ้ว
๑๒	นิ้ว	=	๑	คืบ
๒	คืบ	=	๑	ศอก
๔	ศอก	=	๑	วา
๒๐	วา	=	๑	เส้น
๔๐๐	เส้น	=	๑	โยชน์

(๒) มาตราวัดทางยาวอย่างเมตริก

๑๐	มิลลิเมตร (มม.)	=	๑	เซ็นติเมตร
๑๐	เซ็นติเมตร (ซม.)	=	๑	เดซิเมตร
๑๐	เดซิเมตร (กม.)	=	๑	เมตร
๑๐	เมตร (ม.)	=	๑	เดคาเมตร

- ๑๐ เทคาเมตร (กคม.) = ๑ เซกโตเมตร
 ๑๐ เซกโตเมตร (ซม.) = ๑ กิโตะเมตร
 ๑๐ กิโตะเมตร (กม.) = ๑ มิวาเมตร (มรม.)

(๓) มาตราวัดทางยาวอย่างอังกฤษ

- ๑๒ นิ้ว = ๑ ฟุต
 ๓ ฟุต = ๑ ยาร์^A หรือหลา
 ๕ $\frac{๑}{๒}$ ยาร์^A หรือหลา = ๑ โปล์
 ๔๐ โปล์^A หรือ } = ๑ เพอร์^Aลอง
 ๒๒๐ ยาร์^A }
 ๘ เพอร์^Aลอง หรือ } = ๑ ไมล์^A
 ๑๗๖๐ ยาร์^A }

(๔) มาตราวัดเนื้อที่การางเหล็กขมอย่างไทย

- ๑๔๔ ตารางนิ้ว = ๑ ตารางคืบ^A
 ๔ ตารางคืบ^A = ๑ ตารางศอก^A
 ๑๖ ตารางศอก^A = ๑ ตารางวา^A
 ๑๐๐ ตารางวา^A = ๑ งาน^A
 ๔ งาน^A หรือ } = ๑ ไร่^A
 ๔๐๐ ตารางวา^A }

(๕) มาตราวัดเนื้อที่ตารางเหลี่ยมอย่างเมตริก

๑๐๐ ตาราง มม.	=	๑ ตาราง ซม.
๑๐๐ ตาราง ซม.	=	๑ ตาราง ก.ซม.
๑๐๐ ตาราง ก.ซม.	=	$\left\{ \begin{array}{l} ๑ ตาราง ม. \\ \text{หรือ} \\ ๑ เซ็นติอาร์ $
๑๐๐ ตาราง ม.	=	$\left\{ \begin{array}{l} ๑ ตาราง ก.คม. \\ \text{หรือ} \\ ๑ อาร์ $
๑๐๐ ตาราง ก.คม. } หรือ ๑๐๐ อาร์	=	$\left\{ \begin{array}{l} ๑ ตาราง ซม. \\ \text{หรือ} \\ ๑ เซกแซร์ $
๑๐๐ ตาราง ซม.	=	๑ ตาราง กม.

(๖) มาตราวัดเนื้อที่ตารางเหลี่ยมอย่างอังกฤษ

๑๔๔ ตารางนิ้ว	=	๑ ตารางฟุต
๙ ตารางฟุต	=	๑ ตารางยาร์ดหรือทล
๓๐ $\frac{๑}{๒}$ ตารางยาร์ดหรือทล	=	๑ ตารางไพล์
๔๐ ตารางไพล์	=	๑ ไร่
๔ ไร่ หรือ ๔๘๔๐ ตารางยาร์ดหรือทล	=	๑ เอเคอร์

บทที่ ๒๒

ว่าด้วย

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

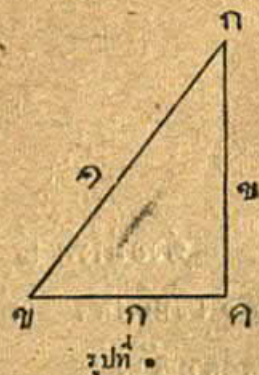
๕. ถ้าจำกัดความ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก

วิธีเรียกด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่นด้าน ก ข (เชิงรูป) เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือด้านตรงฉาก บางทีก็เรียกว่าด้านทะแยง ด้าน ข ค เรียกว่าด้านฐาน ด้าน ค ก เรียกว่าด้านตั้ง และจงจำไว้ว่าถ้ากล่าวขึ้นในที่ใดในตำราเล่มนี้ว่า ด้าน ก หรือ ด้าน ข หรือด้าน ค ให้เข้าใจว่าเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุม ก หรือมุม ข หรือมุม ค คือด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมซึ่งมีพยัญชนะตัวใดกำกับอยู่ก็จะเรียกด้านนั้นให้ตรงกับพยัญชนะนั้น ๆ ด้วย

๖. ถ้าเรารู้ว่าด้านคู่หนึ่งคู่ใดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาวด้านละเท่าใดแล้วก็หาความยาวของด้านที่ ๓ ได้

สมมุติให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมุมที่ ค เป็นมุมฉาก

เราให้ความรู้จากเรขาคณิตบท ข.ค.พ. ที่ ๒๘ ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งตั้งอยู่บนด้านตรงฉาก มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งตั้งอยู่บนอีกสองด้านรวมกัน คือ



$$ก\text{ } \overset{๒}{\text{ช}} = \text{ช } \overset{๒}{ก} + \overset{๒}{ก} \text{ } ก$$

$$\text{ถ้า } ก\text{ } ก\text{ } \text{ช } \text{ } ขาว = ก \text{ } \text{บุญทิ}$$

$$\text{และ } ก\text{ } \text{ } ข\text{ } \text{ } ก\text{ } \text{ } ขาว = ก \text{ } \text{บุญทิ}$$

$$\text{และ } ก\text{ } \text{ } ก\text{ } \text{ } ก\text{ } \text{ } ขาว = ข\text{ } \text{บุญทิ}$$

$$\text{แล้ว } ก\text{ } \overset{๒}{ก} = \overset{๒}{ก} + \overset{๒}{ข}$$

$$\therefore \text{ } ก\text{ } \text{ } ก = \sqrt{\overset{๒}{ก} + \overset{๒}{ข}}$$

ตัวอย่างที่ ๑ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ก้านฐานยาว ๖ วา
ก้านตั้งยาว ๘ วา ก้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าไร ?

$$\left. \begin{array}{l} \text{ก้าน } ก = ๖ \text{ วา} \\ \text{ } \text{ } ข = ๘ \text{ วา} \end{array} \right\} \text{ ระหา } ก\text{ } \text{ } ก$$

$$\text{และ } \overset{๒}{ก} = \overset{๒}{ก} + \overset{๒}{ข} \text{ (ตามกฎข้างบน)}$$

$$= (๖) + (๘)$$

$$= ๑๐๐$$

$$\therefore ก = \sqrt{๑๐๐} = \underline{๑๐} \text{ วา}$$

ตัวอย่างที่ ๒ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ก้านฐานยาว ๒ เมตร
๓๑ เซ็นติเมตร ก้านตั้งยาว ๑ เมตร ๖๐ เซ็นติเมตร ระหา ก้าน
ตรงฉากข้าม

$$\left. \begin{array}{l} \text{ก้าน ก} = ๒ \text{ ม. } ๓๑ \text{ ซม.} = ๒.๓๑ \text{ ม.} \\ \text{,, ข} = ๑ \text{ ม. } ๖๐ \text{ ซม.} = ๑.๖๐ \text{ ม.} \end{array} \right\} \text{ระทาก้าน ก}$$

$$\text{และ } \begin{array}{ccccc} ๒ & ๒ & ๒ & ๒ & ๒ \\ \text{ก} & = & \text{ก} & + & \text{ข} \end{array} = (๒.๓๑) + (๑.๖)$$

$$= ๕.๓๓๖๑ + ๒.๕๖ = ๗.๘๙๖๑$$

$$\therefore \text{ก} = \sqrt{๗.๘๙๖๑} = ๒.๘๑ \text{ ม.}$$

๗. ถ้ารู้ว่ก้านตรงข้ามมุมฉากกับอีกก้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม

มุมฉากยาวเท่าไรแล้ว ก็หาอีกก้านที่ ๓ ได้

เราทราบแล้วว่า

$$\begin{array}{ccccc} ๒ & ๒ & ๒ \\ \text{ก้าน ก} & = & \text{ก} & + & \text{ข} \end{array}$$

$$\therefore \begin{array}{ccccc} ๒ & ๒ & ๒ \\ \text{ก} & = & \text{ก} & - & \text{ข} \end{array}$$

$$\therefore \text{ก้าน ก} = \sqrt{\frac{๒ \quad ๒}{\text{ก} - \text{ข}}}$$

$$\text{และโดยทำนองเดียวกัน } \text{ข} = \sqrt{\frac{๒ \quad ๒}{\text{ก} - \text{ก}}}$$

ตัวอย่างที่ ๑ - ก้านตรงข้ามมุมฉากยาว ๑ ฟุต ๕ นิ้ว ก้านตั้งยาว ๘ ฟุต ๘ นิ้ว ฐานยาวเท่าไร?

$$\left. \begin{array}{l} \text{ก้าน ก} = ๑๕ \text{ ฟุต } ๕ \text{ นิ้ว} = ๑๕๕ \text{ นิ้ว} \\ \text{,, ข} = ๘ \text{ ฟุต } ๘ \text{ นิ้ว} = ๑๐๔ \text{ นิ้ว} \end{array} \right\} \text{ระทาก้าน ก}$$

$$\begin{array}{ccccc} ๒ & ๒ & ๒ \\ \text{และก้าน ก} & = & \text{ก} & - & \text{ข} \end{array}$$

๘

$$= \begin{matrix} ๒ & ๒ \\ (๑๘๕) & - (๑๐๔) \end{matrix}$$

$$= ๓๔๒๒๕ - ๑๐๘๑๖ = ๒๓๔๐๙$$

$$\therefore ก = \sqrt{๒๓๔๐๙} = ๑๕๓ \text{ นิ้ว}$$

$$= ๑๒ \text{ ฟ. } ๙ \text{ น.}$$

ตัวอย่างที่ ๒ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากก้านตรงฉากยาว ๑๕ เมตร
ฐานยาว ๙ เมตร จงหาทั้ง

$$\left. \begin{array}{l} \text{ก้าน ก} = ๑๕ \text{ ม.} \\ \text{,, ก} = ๙ \text{ ม.} \end{array} \right\} \text{ จงหาทั้ง ข}$$

$$\text{และ ข} = \begin{matrix} ๒ & ๒ & ๒ \\ ก & - & ก \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} ๒ & ๒ \\ (๑๕) & - (๙) \end{matrix}$$

$$= (๑๕ + ๙)(๑๕ - ๙)$$

$$= ๒๔ \times ๖ = \begin{matrix} ๒ & ๒ \\ ๒ & \times ๖ \end{matrix}$$

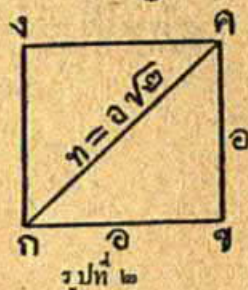
$$\text{ก้าน ข} = ๒ \times ๖ = ๑๒ \text{ ม.}$$

๘. ว่าด้วยการเกี่ยวข้องกับระหว่างกันกับเส้นทแยงมุมของรูปสี่

เหลี่ยมจัตุรัส

ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใด ๆ ถ้าลากเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งเส้นใด
แล้ว จะเห็นว่าเส้นทแยงมุมแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น ๆ ออกเป็น
สามเหลี่ยมมุมฉาก ๒ รูปมีเนื้อที่เท่ากัน และด้านตั้งและด้านฐานยาว
เท่ากัน

สมมุติให้ ก ข คง เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กค
เป็นเส้นทแยงมุม ให้ก้านยาวก้านละ อ ยูนิต
และเส้นทแยงยาว ท ยูนิต



เพราะว่า ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\therefore กค^2 = กข^2 + ขค^2$$

$$\text{หรือ } ท^2 = อ^2 + อ^2 = ๒ อ^2$$

$$\therefore ท = \sqrt{๒อ^2} = อ \sqrt{๒} \dots\dots\dots (๑)$$

$$\begin{aligned} \therefore อ &= \frac{ท}{\sqrt{๒}} = \frac{ท}{\sqrt{๒}} \times \frac{\sqrt{๒}}{\sqrt{๒}} \quad (\text{เพื่อให้ส่วนหมกกรณณ์}) \\ &= \frac{ท \sqrt{๒}}{๒} = \frac{๑}{๒} \times ท \sqrt{๒} \dots\dots\dots (๒) \end{aligned}$$

๑. คือเส้นทแยงมุม = ก้าน $\times \sqrt{๒}$

๒. และก้าน = $\frac{๑}{๒}$ เส้นทแยงมุม $\times \sqrt{๒}$

[ค่าของ $\sqrt{๒} = ๑.๔๑๔๒๑$]

ตัวอย่างที่ ๑ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาว ๓๖๘ ศอก ingsha แล้ว
 หารแบ่งมุม

$$\begin{aligned} \text{๑} &= ๓๖๘ \text{ ศอก} \\ \text{เส้นทแยงมุม} &= \text{ด้าน} \times \sqrt{๒} \text{ [กฎข้อ ๑]} \\ &= ๓๖๘ \times ๑.๔๑๔๒๑ \\ &= \underline{๕๒๐} \text{ ศอกกว่าๆ} \end{aligned}$$

๓๖๘	
๑.๔	๑๔๒๑
๓๖๘.	
๑๔๗.๒	
๓.๖๘	
๑.๔๗	
.๐๗	
๕๒๐.๔๒	

ตัวอย่างที่ ๒ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาว ๑๗ เมตร
 ๓๒ เซนติเมตร ด้านยาวเท่าไร ?

$$\text{ด้าน} = \frac{\text{๑}}{\sqrt{๒}} \text{ เส้นทแยงมุม} \times \sqrt{๒} \text{ [กฎข้อ ๒]}$$

$$= \frac{๑}{\sqrt{๒}} \times ๑๗.๓๒ \times \sqrt{๒}$$

$$= ๑๗.๓๒ \times ๑.๔๑๔๒๑$$

$$= \underline{๑๒.๓๔ \text{ ม. } ๓๕ \text{ ซม.}}$$

๑๗.๓๒	
๑.๔๑	๔๒๑
๑๗.๓๒	
๓.๔๖	๔
.๐๘	๗
.๐๓	๕
.๐๐	๒
๑๒.๓๔	๕

๙. มีโจทย์บางข้อซึ่งเกี่ยวข้องกับแก้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ต้องแก้ด้วยวิธีพีทาโกรัส

ตัวอย่าง บ้านทรงฉากข้ามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาว ๒๔ เมตร และผลบวกของอีกสองด้านยาว ๔๑ เมตร ด้านทั้ง ๒ นั้นยาว ก้านละเท่าไร?

$$\text{ก้าน } ก = ๒๔ \text{ ม. และ } ก + ข = ๔๑ \text{ ม.}$$

$$\therefore ก = (๒๔) = ๔๔๑$$

$$\text{แต่ } ก = ก + ข \text{ [บทพีทาโกรัสที่ ๒๔]}$$

$$\therefore ก + ข = ๔๔๑ \dots\dots\dots(๑)$$

$$ก + ข = ๔๑ \dots\dots\dots(๒)$$

เอาอิเควชัน (๑) ลบกำลัง ๒ ของอิเควชัน (๒) ได้

$$กข = ๔๔๐ \dots\dots\dots(๓)$$

บวกและลบอิเควชัน (๑) ด้วยอิเควชัน (๓) ได้

$$ก + กข + ข = ๑๖๔๑$$

$$ก - กข + ข = ๑$$

$$ก + ข = \frac{+}{-} ๔๑$$

$$ก - ข = \frac{+}{-} ๑$$

$$ก + ข = ๔๑$$

ก - ข	=	- ๑
∴ ก	=	๒๐
^A หรือ ก + ข	=	๔๑
∴ ก - ข	=	๑
∴ ก	=	๒๑
ก	=	<u>๒๐ หรือ ๒๑ ม.</u>
และ ข	=	<u>๒๐ หรือ ๒๑ ม.</u>

แบบฝึกหัดที่ ๑

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
(เบื้องต้น)

๑. กำหนดด้านตั้งและด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ไว้
หาค่าด้านตรงข้ามมุมฉาก

- (ก) ๑๕ ฟ. และ ๘ ฟ.
 (ข) ๓๕ ฟ. ,, ๑๒ ฟ.
 (ค) ๔ ฟ. ,, ๑ ฟ. ๒ น.
 (ง) ๕ ว. ,, ๕ ว. ๑ ศ.
 (จ) ๕ ว. ,, ๕ ศ. ๒๐ น.

๒. กำหนดก้านตรงข้ามมุมฉาก กับด้านหนึ่งให้ให้หาด้านที่ ๓

(ก) ๓๙ ว. และ ๒๐ ว.

(ข) ๘๕ ว. „ ๓๖ ว.

(ค) ๕ ฟ. ๕ น. และ ๔ ฟ. ๘ น.

(ง) ๓๒ บ. ๑ ฟ. „ ๒๔ บ.

(จ) ๒ ม. ๔๑ ซม. และ ๑ ม. ๒๐ ซม.

(ช) ๑๐ ม. ๘๐ ซม. „ ๖ ม.

๓. บันไคเอนพาคหน้าท่าเรือ ณ เชียงใหม่ ห่างจากฝั่งเรือ ณ ๓๖ เมตร ทั้งแต่พื้นถึงหน้าท่าสูง ๔๘ เมตร บันไคยาวเท่าไร?

๔. เรือกลไฟลำหนึ่งออกจากท่าแล้วแล่นตรงไปทางทิศเหนือไกล ๑๖๘ ไมล์ แล้วแล่นคึกตรงไปทิศตะวันออกไกล ๘๕ ไมล์ เรือกลไฟอยู่ไกลจากท่าเป็นทางตรงเท่าไร?

๕. เรือกลไฟลำหนึ่งออกจากท่า แล่นชั่วโมงละ ๑๒ นี้อยก แล่นตรงไปทางทิศใต้ ๓ ชั่วโมง แล้วเลี้ยวตรงไปทิศตะวันออกอีก ๔ ชั่วโมง ถ้าจะแล่นคึกตรงมาที่เดิมจะเป็นหนทางกี่นีก?

๖. วงศาเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีด้านยาว ๑๘ เซนติเมตร (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

๗. วงศาเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีด้านยาว ๕ เมตร ๑๑ เซนติเมตร

๘. เรือลากพระเวรสองลำลำหนึ่งอยู่ห่างสถานีสำหรับรับส่งข่าว

ตรงไปทางตะวันออกเฉียงเหนือ ๑๕ กิโลเมตร อีกลำหนึ่งอยู่ทางทิศ
ตะวันตกเฉียงเหนือ ๘ กิโลเมตร เรือสองลำนี้อยู่ห่างกันเป็นทางตรง
ไกลเท่าไร?

๙. ยันไคยาว ๒๔ ฟุต พาดนอกซานเวียนสูง ๒๑ ฟุต เชิง
ยันไคห่างจากกึ่งนอกซานเท่าไร?

๑๐. ลูกบอลกลิ้งลงจากพื้นกึ่ง ๑๖๘๐ วา ระยะทาง
ระหว่างที่ปล่อยกับลูกบอลกลิ้งอยู่ไกล ๑๔๓๐ วา ถ้าบอลกลิ้ง
ลงอยู่หนึ่งๆ แล้ว เจ้าของจะเหวี่ยงไปบนบอลกลิ้งอยู่ตรงศีรษะ จะต้อง
เหวี่ยงไกลเท่าไร?

๑๑. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม แล้วลากเส้น กค จากยอด ก
ให้ตั้งฉากกับด้าน ขค

ถ้า $กก = ๑๒$ นิ้ว $ขค = ๒๕$ นิ้ว และ $ขก = ๙$ นิ้ว
จงหา กข และ กค

๑๒. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม แล้วลากเส้นตรง กค ให้ตั้ง
ฉากกับด้าน ขค

ถ้า $กข = ๕$ นิ้ว $ขค = ๓$ นิ้ว และ $กค = ๖\frac{๑}{๒}$ นิ้ว
จงหา กค และ กค ยาวเท่าไร?

๑๓. แล่นเรือออกจากท่าตรงไปทางทิศเหนือ ๕ ชั่วโมง แล่น
ชั่วโมงละ ๖ ไมล์ แล้วเลี้ยวตรงไปทางทิศตะวันออก ๘ ชั่วโมง
แล่นชั่วโมงละ ๕ ไมล์ ถ้าจะแล่นกลับที่เดิม แล่นชั่วโมงละ ๑๐ ไมล์
นานเท่าไรจึงจะถึง?

๑๔. เรือลำหนึ่งอยู่ไกลจากที่เดิม ๒๐ ไมล์ ถ้าจะแล่นกลับ
ที่เดิมต้องใช้เวลา ๔ ชั่วโมงจึงจะถึง เมื่อแรกออกนั้น แล่นตรงไป
ทิศตะวันออก ๒ ชั่วโมง แล่นชั่วโมงละ ๔ ไมล์ แล้วเลี้ยวตรงไป
ทิศเหนือ ๒ ชั่วโมง ก็ถึงที่ซึ่งเรือจอดอยู่เดิม ถามว่าตั้งแต่เลี้ยวไป
ทิศเหนือจนมาอยู่เดิมที่นั้น เหนือทางชั่วโมงละเท่าไร?

แบบฝึกหัดที่ ๒
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
(ยากขึ้น)

๑. จงหาเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว ๖ ไร่
๔ หลา ๒ ฟุต (ตอบเป็นฟุต)
๒. จงหาค้นของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว
๑๐๐ วา (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)
๓. บันไถยาว ๔๐ ฟุต ปลายอยู่ที่หน้าต่าวงเวียน ทั้งแต่พื้นดิน
ถึงหน้าต่าวงสูงเท่ากับที่เชิงบันไถห่างจากเวียน จากพื้นดินถึงหน้าต่า
สูงเท่าไร? (ตอบจนถึงนิ้ว)
๔. สนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสเส้นทแยงมุมยาว ๘ เมตร ๑๒ เซ็นติ
เมตร ด้านยาวเท่าไร?
๕. ชายผู้หนึ่งเกี่ยวไถชั่วโมงละ ๔ ไร่ต่อเมตร เขาเกี่ยวรอบสนาม
สี่เหลี่ยมจัตุรัสแห่งหนึ่งไถใน ๓ นาที เส้นทแยงมุมของสนามรูป
จัตุรัสยาวเท่าไร?

๖. ชายผู้หนึ่งออกจากมุมหนึ่ง ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงไปถึง มุมที่อยู่ตรงข้ามสิ้นเวลา ๒๑ นาที ถ้าเขาจะเดินเลยไปจนครบชั่วโมง ก็จะไ้ทางไกล ๓ ไมล์ ถามว่าด้านของจัตุรัสยาวเท่าไร ?

๗. ชายผู้หนึ่งออกจากที่พักเดินตรงไปทิศเหนือไกล ๒๐ เส้น แล้วเลี้ยวตรงไปตะวันออก ๑๕ เส้น กลับย้อนตรงมาทิศใต้ ๒๕ เส้น ถามว่าเขายืนอยู่ไกลจากที่พักเป็นทางตรงไกลเท่าไร ?

๘. ผู้เฝ้าทางผู้หนึ่งออกจากบ้านตรงไปทิศเหนือ ๑๐ เส้น แล้ว เลี้ยวตรงไปตะวันออกสักครู່หนึ่ง ก็กลับวกตรงไปทิศใต้ไกล ๓๑ เส้น เขายืนอยู่ไกลจากบ้านของเขา ๒๕ เส้น ถามว่าระยะทางที่เลี้ยว ตรงไปตะวันออกนั้นไกลเท่าไร ?

๙. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมฉากเส้น กค จากยอด ก ให้ ทั้งไ้ฉากกับด้าน ข ค กำหนดให้ ก ข = ๑๗ วา ก ค = ๒๕ วา ก ค = ๑๕ วา ให้หา ข ค

๑๐. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมฉาก ก ค ให้ทั้งไ้ฉากกับ ข ค ก ข = ๓๗ วา ก ค = ๒๐ วา ก ค = ๑๒ วา ให้หา ข ค

๑๑. ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมก้านไม่เท่ามุม ก ข ค ก ง ค เป็น มุมฉาก ก้าน ก ข = ๑๒ ฟุต, ข ค = ๕ ฟุต และ ค ง = ๑๑.๒ ฟุต ให้หา ก ง

๑๒. ที่กสองหลังปลูกตรงกันข้าม หลังหนึ่งสูงตั้งแต่พื้นจนถึง หน้าต่าง ๔๘ ฟุต อีกหลังหนึ่งสูง ๑๔ ฟุต ถ้าจะเอาบันไดยาว ๕๐ ฟุต

พาคัทธนาต่างหลังนั้น แล้วหันปลายไปพาคัทธนาต่างหลังโน้น (ให้โคน
อยู่ท่เดียวกัน) ก็พอเหมาะกบัทธนาต่างพอดี้ ถามว่าคัทธนาหลังนั้นปลุกต่าง
กันเท่าไร?

๑๓. เวียนสองหลังปลุกตรงกันข้าม อยู่ห่างกัน ๑๑๓ ฟุต
ถ้าเอาบันไดยาว ๘๕ ฟุต พาคัทธนาต่างหลังซึ่งสูง ๗๗ ฟุต ให้พอดี้
แล้ว กลับปลายบันไดมาพาคัทธนาต่างอีกหลังหนึ่ง ก็พอดิ่งพอดี้
ถามว่าเวียนหลังที่ ๒ สูงเท่าไร?

๑๔. ชายผู้หนึ่งเคียวทางไค้ชั่วโมงละ ๔ ไมล์ ออกจากที่พัก
ตรงไปทิศเหนือ ๑๒ ไมล์ แล้วเลี้ยวตรงไปตะวันออก ๑๐ ไมล์
กลับย้อนตรงไปทิศเหนือ ๑๒ ไมล์ก็หยุด ถ้าเขาจะเคียวกลับตรงมาที่พัก
จะเป็นเวลากี่ชั่วโมง? (ใช้วิธีพีชคณิต)

๑๕. บ้านทรงมุมฉากข้ามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาว ๕ ๕ วา
และบ้านหนึ่งเป็น $\frac{3}{4}$ ของอีกบ้านหนึ่ง บ้านทั้งสองนั้นยาวบ้านละเท่าไร?

๑๖. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากบ้านหนึ่งยาว ๖ นิ้ว และบ้านตรง
ฉากยาว ๒ เท่าของอีกบ้านหนึ่ง บ้านที่วั้นยาวเท่าใด (ทศนิยมเพียง
๒ ตำแหน่ง)

๑๗. บ้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากยาว ๑๓ ฟุต
ผลบวกของอีก ๒ บ้าน เป็น ๑๗ ฟุต บ้านทั้งสองนั้นยาวบ้านละเท่าไร?

๑๘. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีบ้านตรงข้ามมุมฉากข้ามยาว ๑๗ ฟุต
อีกสองบ้านนั้นยาวกว่ากันเป็น ๗ ฟุต บ้านทั้งสองนั้นยาวบ้านละเท่าไร?

บทที่ ๓

ว่าด้วย

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

หมวดที่ ๑

หาเนื้อที่

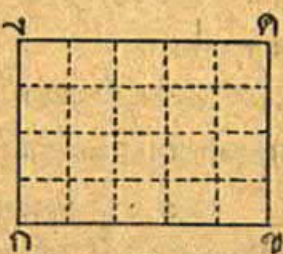
๑๐. คำจำกัดความ

- (๑) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมเป็นมุมฉาก
ทั้ง ๔ มุม แต่ด้านกว้างและด้านยาวยาวไม่เท่ากัน
- (๒) สี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ สี่เหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้ง ๔ ด้าน และมี
มุมเป็นมุมฉากทั้ง ๔ มุม

๑๑. ถ้าเอาด้านกว้างกับด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากใด ๆ
คูณกัน ผลคูณจะเป็นเนื้อที่ตารางสี่เหลี่ยม เป็นต้นว่า ด้านกว้างกว้าง
๔ นิ้ว ด้านยาวยาว ๕ นิ้ว แล้วเนื้อที่ = $4 \times 5 = 20$ ตารางนิ้ว
จะอธิบายด้วยรูปให้เห็นว่าเป็นเช่นนั้นจริง

สมมุติให้ ก ข คง เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม
ฉาก ด้าน ข คง กว้าง ๔ นิ้ว ด้าน ก ข ยาวยาว ๕ นิ้ว

แบ่งด้าน ก ข ออกเป็น ๕ ส่วนเท่า ๆ
กัน และแบ่งด้าน ข คง ออกเป็น ๔ ส่วนเท่า ๆ กัน



รูปที่ ๓

ลากเส้นให้ขนานกันและลากเลียบขึ้นไปให้ถึงด้านตรงข้าม เส้น

เหล่านี้ก็หักกันออกเป็นส่วนส่วนละเท่าๆกัน คือ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ซึ่งมีก้านยาว ๑ นิ้ว ทางก้านกว้างมีอยู่ ๔ แถวแถวหนึ่ง ๆ มีอยู่ ๕ ช่อง
การวางแนว รวมทั้งเส้นมีอยู่ ๒๐ การวางแนวเหมือนกัน เพราะฉะนั้น
เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $= ๔ \times ๕ = ๒๐$ ตารางนิ้วจริง

ความที่ได้อธิบายมาแล้วนั้นสมควรจะวางลงเป็นกฎไว้ว่า

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ก้านกว้าง $\times$ ก้านยาว.....(๑)

เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = (ก้าน)^๒(๒)

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีก้านกว้าง
กว้าง ๒ วา ๓ ศอก ก้านยาวยาว ๔ วา

ก้านยาว = ๔ วา

ก้านกว้าง = ๒ วา ๓ ศอก $= \frac{๑๑}{๕}$ วา

$\therefore$ เนื้อที่ $= ๔ \times \frac{๑๑}{๕} = ๑๑$ ตร. ว.

ตัวอย่างที่ ๒ สนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีก้านยาว ๑๖ วา ๒ ศอก
จงหาเนื้อที่ของสนามนี้

ก้านยาว = ๑๖ วา ๒ ศอก $= ๑๖\frac{๑}{๒}$ วา

เนื้อที่ $= (\text{ก้าน})^๒ = ๑๖\frac{๑}{๒} \times ๑๖\frac{๑}{๒} = ๒๗๒.๒๕$ ตร. ว.

ตัวอย่างที่ ๓ คนได้ขึงแกระผู้หนึ่งเข้าสนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยม
ผืนผ้า ซึ่งมีก้านยาวยาว ๖๖ เมตร ๑๖ เซ็นติเมตร ก้านกว้าง

กว้าง^๕ ของบ้านยาว เสียค่าเช่าอ่าวละ ๒ เปน^๖ ๑๒ จิตถึง ๔ เปน^๗ ชายผู้^๘ เสียค่าเช่าทั้งสิ้นเท่าไร ?

บ้านยาว = ๒๖ เมตร ๑๒ เซ็นติเมตร = ๒๖.๑๒ เซ็นติเมตร

บ้านกว้าง = $\frac{๕}{๖}$ ของ ๒๖.๑๒ เซ็นติเมตร = ๒๑.๘๐ „

∴ เนื้อที่ = ๒๖.๑๒ × ๒๑.๘๐ = ๕๖๐.๒๔๘๐ ตร.ซม.
= ๕๖๐.๒๔๘ อ่าว

ถ้าราคาอ่าวละ ๕ ๑	= ๕ ๕๖๐.๒๔๘
	<u>๒</u>
ถ้าราคาอ่าวละ ๕ ๒	= ๕ ๑๑๔๐.๕๗๖
๑๐ ร. = $\frac{๑}{๒}$	= ๕ ๒๘๕.๐๔๔
๒ ร. = $\frac{๑}{๒}$ ของ ๑๐ ร.	= ๕ ๕๗.๐๒๒
๔ ด. = $\frac{๑}{๒}$ ของ ๒ ร.	= ๕ ๑๑.๕๐๕
เสียเงินทั้งสิ้น	= ๕ ๑๔๑๒.๒๕๔

แบบฝึกหัดที่ ๓

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(หาเนื้อที่)

๑. หงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ก. บ้านยาวยาว ๓ หลา ๒ ฟุต บ้านกว้างกว้าง ๑ หลา ๑ ฟุต

ข. ก้านยาวยาว ๖ หลา ๑ ฟุต ก้านกว้างกว้าง ๒ หลา ๒ ฟุต

ก. " ๕ $\frac{๑}{๒}$ " ๒ $\frac{๑}{๒}$ " " ๒ " ๑ $\frac{๑}{๒}$ "

๒. รงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ก. ก้านยาวยาว ๒๐ เซ็นติเมตร ก้านกว้าง ๑๕ เซ็นติเมตร

ข. " ๒๕ เซ็นติเมตร " ๕ เซ็นติเมตร

ค. " ๒๒๕ เซ็นติเมตร " ๒๐๐ เซ็นติเมตร

๓. รงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ก. ก้านยาว ๒ ศอก ๓ นิ้ว (ตอบเป็นตารางนิ้ว)

ข. " ๘๘๐ วา (ตอบเป็นไร่)

ค. " ๑๒๓๐ ศอก (ตอบเป็นไร่)

๔. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งก้านยาวยาว ๒๓ เมตร ก้านกว้างเป็น $\frac{๑}{๕}$ ของก้านยาว มีเนื้อที่กี่อาร์?

๕. รงหาค่าจ้างปลูกหญ้าในสนามสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีก้านยาวยาว ๔๐ หลา ก้านกว้างกว้าง ๓๓ หลา ๑ ฟุต เสียค่าจ้างตารางฟุตละ ๓ บาท

๖. รงหาค่าจ้างทาสีเพดานห้องที่ยาว ๖๐ วา ๓ ศอก กว้าง ๕๕ วา เสียค่าจ้างทาตารางวาละ ๕๐ สตางค์

๗. นาแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๑๑๐ วา กว้าง ๕๕ วา หว่านเข้าดินไร่ละ ๓ ถึงครั้ง เข้าปลูกถึงหนึ่งซักราชา ๗๕ สตางค์ หว่านจนเต็มนาจะสิ้นเงินเท่าไร?

๘. ก้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็น ๔๓ ศอก ๑ คืบ
จงหาเนื้อที่

๙. ก้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น ๑๗ วา จงหาเนื้อที่

๑๐. ก้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น ๑๐๐ เมตร เจ้าของ
เขาคิดค่าเช่าอ่าวละ ๕๐ แฟรงก์ ๒๐ ของทิม ใ้ค่าเช่าทั้งสี่เป็น
เท่าไร?

๑๑. สนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีก้านยาว ๒๓ เมตร ๗ เซ็นติเมตร
จงหาเนื้อที่

๑๒. สนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีก้านยาว ๑๐ เมตร ๕ เกจิเมตร จง
หาเนื้อที่

๑๓. ก้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น $\frac{1}{2}$ ของก้านยาว ถ้า
ก้านยาวเป็น ๔๑.๒๓ เซ็นติเมตร จงหาเนื้อที่

๑๔. ก้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น ๗.๒๑ เซกโทเมตร
จงหาเนื้อที่

๑๕. สนามหญารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าก้านยาวยาว ๖๙ เมตร ๒๐
เซ็นติเมตร และก้านกว้างเป็น $\frac{3}{4}$ ของก้านยาว มีผู้มาเช่าทั้งของคิก
เฮาค่าเช่าอ่าวละ ๒๕ แฟรงก์ ใ้ค่าเช่าทั้งสี่เป็นเท่าไร?

๑๖. สนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีก้านยาว ๒๑ เมตร ๑๒ เซ็นติเมตร
เจ้าของให้เขาคิดค่าเช่าอ่าวละ ๒.๕ แฟรงก์ จะใ้ค่าเช่าทั้งสี่เป็น
เท่าไร?

หมวดที่ ๒

หาคำ

๑๒. ถ้ารู้ว่^๕เนื้อ^๕ที่^๕ของ^๕รูป^๕สี่^๕เหล^๕ย^๕ม^๕ผ^๕น^๕ผ^๕า^๕เป็น^๕เท่า^๕ไร^๕ ก็^๕รู้^๕จ^๕ำ^๕นวน^๕
ยาว^๕ของ^๕ก^๕ำ^๕น^๕ใ^๕ค^๕ำ^๕น^๕ห^๕น^๕ง^๕แล^๕ว^๕ ก็^๕ห^๕ำ^๕จ^๕ำ^๕นวน^๕ยาว^๕ของ^๕อ^๕ก^๕ำ^๕น^๕ห^๕น^๕ง^๕ไ^๕้

ไ^๕้^๕อ^๕ธิ^๕บาย^๕มา^๕แล^๕ว^๕ว^๕

$$\begin{aligned} \text{เนื้อ^๕ที่^๕ของ^๕ส^๕ี่^๕เหล^๕ย^๕ม^๕ผ^๕น^๕ผ^๕า^๕} &= \text{กว^๕ำ^๕ง^๕ \times \text{ย^๕าว} \\ \therefore \text{ย^๕าว} &= \frac{\text{เนื้อ^๕ที่^๕}}{\text{กว^๕ำ^๕ง^๕}} \\ \therefore \text{กว^๕ำ^๕ง^๕} &= \frac{\text{เนื้อ^๕ที่^๕}}{\text{ย^๕าว}} \end{aligned}$$

หมาย^๕เห^๕ตุ^๕ จ^๕ง^๕ระ^๕ว^๕ำ^๕ง^๕เม^๕ื่อ^๕ระ^๕ไ^๕้^๕เก^๕ด^๕เ^๕า^๕น^๕ ก็^๕อ^๕เนื้อ^๕ที่^๕เป็น^๕มา^๕ตร^๕ำ^๕ใ^๕ค^๕
ค^๕อ^๕ง^๕กระ^๕ร^๕าย^๕ก^๕ำ^๕น^๕ท^๕ะ^๕เ^๕า^๕ไป^๕ห^๕ำ^๕ร^๕ำ^๕น^๕ไ^๕้^๕เป็น^๕มา^๕ตร^๕ำ^๕น^๕ั^๕ย^๕ เป็น^๕ค^๕ำ^๕ว^๕ เป็น^๕ค^๕ำ^๕ว^๕ เป็น^๕ค^๕ำ^๕ว^๕
เนื้อ^๕ที่^๕เป็น^๕การ^๕ำ^๕ง^๕ฟ^๕ุ^๕ท^๕ ค^๕อ^๕ง^๕กระ^๕ร^๕าย^๕ก^๕ำ^๕น^๕ไ^๕้^๕เป็น^๕ฟ^๕ุ^๕ท^๕ค^๕ำ^๕ว^๕ แล^๕ว^๕จ^๕ำ^๕ห^๕ำ^๕ร^๕ำ^๕ก^๕ำ^๕

ตัวอย่าง^๕ที่^๕ ๑ เนื้อ^๕ที่^๕ของ^๕รูป^๕สี่^๕เหล^๕ย^๕ม^๕ผ^๕น^๕ผ^๕า^๕เป็น^๕ ๓๓๒ ตาราง^๕ห^๕ล^๕า^๕
๔ ตาราง^๕ฟ^๕ุ^๕ท^๕ แล^๕ะ^๕ก^๕ำ^๕น^๕กว^๕ำ^๕ง^๕เป็น^๕ ๑๑ ห^๕ล^๕า^๕ ๑ ฟ^๕ุ^๕ท^๕ จ^๕ง^๕ห^๕ำ^๕ก^๕ำ^๕น^๕ย^๕าว

$$\begin{aligned} \text{เนื้อ^๕ที่^๕} &= ๓๓๒ \text{ ตร. ห. } ๔ \text{ ตร. ฟ.} \\ &= ๓๓๒ \frac{๔}{๑๖} \text{ ตร. ห.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ก^๕ำ^๕น^๕กว^๕ำ^๕ง^๕} &= ๑๑ \text{ ห. } ๑ \text{ ฟ.} \\ &= ๑๑ \frac{๑}{๓} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ก้านยาว} &= ๒๒\frac{๒}{๓} \div ๑๑\frac{๑}{๓} \\
 &= ๑๘\frac{๒}{๓} \text{ หลา} \\
 &= \underline{๑๘ \text{ ถ. } ๒ \text{ ฟ.}}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๒ เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๔-ไร่ ๒ งาน ๙ ตารางวา และก้านยาวยาว ๑๑๕ วา จงหา ก้านกว้าง

$$\begin{aligned}
 \therefore ๔ \text{ ไร่ } ๒ \text{ งาน } ๙ \text{ ตร.ว.} &= ๔.๕๒๒๕ \text{ ไร่} \\
 &= ๑๘๐๙ \text{ ตารางวา} \\
 \therefore \text{ก้านกว้าง} &= \frac{๑๘๐๙}{๑๑๕} \text{ วา} \\
 &= ๑๕.๗๓ \text{ วา} \\
 &= \underline{๑๕ \text{ ว. } ๒ \text{ ศ. } ๒๒ \text{ น.}}
 \end{aligned}$$

ถ้ารู้ว่าเนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใดๆ เป็นเท่าไร ก็หาความยาวของก้านได้

เป็นอันว่า เนื้อที่เป็น ก ตารางวา แล้วอยากจะทราบว่า ก้านยาวเท่าไร ให้หากรณฑ์ชั้นเดียวของเนื้อที่นั้นๆ ตกลัพธ์เป็นจำนวนยาวของก้าน (เรื่องนิกายอธิบายมาครึ่งหนึ่งแล้วว่า เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นด้วยก้านต่อกันคุณกัน)

เพราะฉะนั้นถ้าสมมุติว่า ก้านของจักรวัดยาว o วา

$$\text{แล้ว } o = \sqrt[2]{g} \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore o = \sqrt{g} \text{ วา}$$

$$\text{นั่นคือก้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = \sqrt{\text{เนื้อที่}}$$

ตัวอย่าง จงหา ก้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีเนื้อที่ ๖ ไร่ ๓ งาน

๗๐ ตารางวา

$$\begin{aligned} ๖ \text{ ไร่ } ๓ \text{ งาน } ๗๐ \text{ ตร.ว.} &= ๖,๘๗๐ \text{ ไร่} \\ &= ๒๗๗๐ \text{ ตารางวา} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ก้าน} &= \sqrt{๒๗๗๐} \text{ วา} \\ &= ๕๒.๖๓ \text{ วา} \\ &= \underline{\underline{๕๒ \text{ ว. } ๒ \text{ ศ. } ๑,๒๕ \text{ น.}}} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๔

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(หาค้น)

๑. จงหา ก้นยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ก. เนื้อที่เป็น ๑๘๕ ตารางเชินทิเมตร ก้นกว้างกว้าง

๑๓ ซม.

ข. เนื้อที่เป็น ๒๒๒ อาร์ ก้านกว้างกว้าง ๑๒ เมตร

ก. เนื้อที่เป็น ๑๐๐๐ เฮกแตร์ ก้านกว้างกว้าง ๓๕
เกคาเมตร

ง. เนื้อที่เป็น ๓๕๒๒ ตารางเซ็นติเมตร ก้านกว้างกว้าง
๕๐ ซม.

๒. รงทาก้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ก. เนื้อที่เป็น ๓๔ ไร่ ก้านยาวยาว ๒๐๐ วา

ข. เนื้อที่เป็น ๗๖ $\frac{๑}{๒}$ ไร่ ก้านกว้างกว้าง ๓๐๖ วา

ก. เนื้อที่เป็น ๓๗.๖๖๐๗ ไร่ ก้านยาวยาว ๓๐๐ วา

๓. รงทาก้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ก. เนื้อที่เป็น ๒๘๘ ตารางฟุต (ตอบเป็นฟุต)

ข. เนื้อที่เป็น ๑๕๒ ตารางทลา ๑ ตารางฟุต (ตอบ
เป็นทลา)

ก. เนื้อที่เป็น ๒ $\frac{๑}{๒}$ เฮเคอร์ (ตอบเป็นทลา)

ง. เนื้อที่เป็น ๑๘ $\frac{๓}{๕}$ เฮเคอร์ (ตอบเป็นทลา)

๔. เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น ๑๖๘ ตารางฟุต รงทาลด
บวกของก้านทั้ง ๔ (ตอบเป็นฟุต)

๕. เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น ๒๒ $\frac{๑}{๒}$ เฮเคอร์ รงทาลด
บวกของก้านทั้ง ๔ (ตอบเป็นทลา)

๖. ชาวผู้หนึ่งจะเก็บไว้ครอบครองที่ดินที่มีพื้นที่ ๕ ไร่ ๑๐ เอเคอร์ ถ้าเขาเก็บข้าวโม่งละ ๔ ไมล์ ที่ข้าวโม่งจึงจะรอบ?

๗. เลี้ยก้างทำข้าว ๒๐ หลา ต้นเงิน ๒ เปนที่ ๑๒ ชิลลิง ๓ เปนที่ ถ้าจะทำไว้ให้รอบที่ดินที่มีพื้นที่ ๑๐ เอเคอร์ จะสิ้นเงินเท่าไร?

๘. ที่ที่ดินมีพื้นที่ ๕ ไร่ ๑๐ เอเคอร์ เท่ากับที่ดินที่มีพื้นที่ ๓ ไร่ ๑๐ เอเคอร์ รวมกัน ก้านก้างของ ๔ ที่ที่ดินมีพื้นที่ ๕ ไร่ ๑๐ เอเคอร์ และ ๒๐ ฟุต ถ้าก้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๓๑ ฟุต อีกก้านหนึ่งยาวเท่าไร?

๙. ก้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๓ เท่าของก้านกว้าง และมีพื้นที่ ๗ ไร่ ๑๐ เอเคอร์ จงหา ก้านยาวและก้านกว้าง (ตอบเป็นหลา)

๑๐. เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๑๑๙.๐๒๕ เอเคอร์ ก้านยาวยาว ๔ เท่าของก้านกว้าง จงหา ก้านยาวและก้านกว้าง (ตอบเป็นหลา)

๑๑. ก้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๔ หลา และมีพื้นที่ เท่ากับสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่ ๕ ไร่ ๑๐ หลา จงหา ก้านยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

๑๒. ก้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๔ หลา ๑ ฟุต และมีพื้นที่ เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่ ๓๐ หลา ๑๑ ฟุต จงหา ก้านยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

๑๓. ผู้หนึ่งต้องการที่ดิน ๑๑ เปนที่ ๑๕ ชิลลิง ๔ เปนที่

โดยเสียค่าจ้างตารางฟุตละ ๘ เปนซ์ ถ้าห้องกว้าง ๑๗ ฟุต ๓ นิ้ว
ยาวเท่าไร?

๑๔. ที่นาคปลูกหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เจ้าของให้เขาเช่า
คึกค่าเช่าเอเคอร์ละ ๑๗ ซิลลิง ๖ เปนซ์ ไร่ค่าเช่าทั้งสิ้นเป็นเงิน
๕๓ เปนซ์ ๗ ซิลลิง ๖ เปนซ์ ที่นาคยาวยาว ๘๘๐ หลา ที่นากว้าง
เป็นเท่าไร?

๑๕. สนามรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เจ้าของให้เขาเช่าปลูกหญ้า
คึกค่าเช่าเอเคอร์ละ ๘ ซิลลิง ๔ เปนซ์ ไร่ค่าเช่าทั้งสิ้นเป็น ๘ เปนซ์
๓ ซิลลิง ๔ เปนซ์ ที่นาคของสนามนี้ยาวกี่หลา?

๑๖. สวนชนกหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เจ้าของให้เขาถือ
คึกค่าเช่าเอเคอร์ละ ๒ เปนซ์ ๑๕ ซิลลิง ต่อไร่ ไร่เงินทั้งสิ้น ๑๘๕ เปนซ์
๑๒ ซิลลิง ๖ เปนซ์ ที่นาคยาวเป็น ๓ เท่าของที่นากว้าง จงหา
ยาวและกว้างของสวนนี้

หมวดที่ ๓

วิธีเปิดเตล็ดขงเกี้ยวข้อง

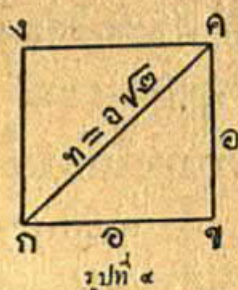
กบ

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

๑๔. จงหาเนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งกำหนดจำนวนยาว

ของเส้นทะแยงมุมให้

สมมุติให้ ก ข คง เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมี ก ค เป็นเส้นทแยงมุมยาว ๓ หน่วย และให้ ก้านยาว ๒ หน่วย เพราะว่า ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\therefore กค^2 = กข^2 + ขค^2$$

$$\text{หรือ } ๓^2 = ๒^2 + ๒^2 = ๒ \times ๒$$

$$\therefore ๒ = \frac{๓^2}{๒} = \frac{๑}{๒} ๓^2$$

$$\text{แต่ } ๒ = \text{เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส}$$

$$\therefore \text{เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = \frac{๑}{๒} (\text{เส้นทแยงมุม})^2$$

ตัวอย่าง จงหาเนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งเส้นทแยงมุมยาว ๖ เมตร ๕๐ เซนติเมตร

$$ท = ๖ \text{ ม. } ๕๐ \text{ ซม.} = ๖.๕ \text{ ม.}$$

$$\text{เนื้อของจัตุรัส} = \frac{๑}{๒} ท^2 \quad (\text{ตามกฎ})$$

$$= \frac{๑}{๒} \times (๖.๕)^2$$

$$= ๒๑.๑๒๕ \text{ ตารางเมตร}$$

๑๕. ถ้าต้องการปูพรม บีกกระพวยและทาสี พื้นห้อง ฝาห้อง และเพดานห้อง เราหาเนื้อของสิ่งเหล่านั้นได้เช่นเดียวกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพราะสิ่งเหล่านั้นมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยม

แผ่นผ้าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้วยเหมือนกัน และจงจำไว้ว่า พรหมที่
จะปลูกก็กระชายที่จะปักก็ และสีที่จะทาก็ก็ ย้อมกินเนื้อที่เท่ากับ
จำนวนเนื้อของพนหรือฝาทหรือเพดานห้องนั้น ๆ พอดี

ตัวอย่าง จงหาราคาของพรหมที่ระบุพื้นที่ที่ยาว ๒๐ ฟุต
กว้าง ๑๘ ฟุต พรหมกว้าง ๓๐ ฟุต ราคาตลาด ๒ เปนซ์

$$\text{พรหมที่ปลูก} = \text{เนื้อที่พนห้อง}$$

$$= 20 \times 18 \text{ ตารางฟุต}$$

$$\text{พรหมกว้าง} = 30 \text{ นิ้ว} = 2\frac{1}{2} \text{ ฟุต}$$

$$\therefore \text{พรหมยาว} = 20 \times 18 \div 2\frac{1}{2} \text{ ฟุต}$$

$$= 144 \text{ ฟุต} = 48 \text{ หลา}$$

$$\text{สิ้นเงิน} = 4 \text{ ซิลลิง ๒ เปนซ์} \times 48$$

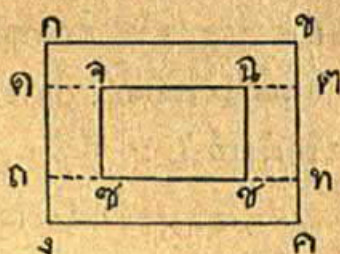
$$= \text{£ } 10$$

๑๖. นอกจากวิธีพนวิกฝ่ายนี้มีวิธีอื่นอีกหลายวิธีซึ่งเกยวแก่การ
คำนวณเนื้อที่ของรูป ๔ เหลี่ยมมุมฉาก เช่น ทักถน ท้าสวน ท้า
สนามหญ้า เหล่านี้เป็นต้น

ตัวอย่างที่ ๑ สนามสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่งมีทางเคียวโดยรอบภายใน
นอกกว้าง ๖ วา วิกอยู่ภายในเมื่อทำถนแล้วในอกยาว ๕๐ วา กว้าง ๔๒ วา

จงหาเนื้อที่ของทางและเนื้อที่ของสนาม

ให้ ก ข คง เป็นรูปภายนอก ก ฉ ข
เป็นรูปภายใน ก่อ ก ฉ และ ข ข ออกไป
ทั้งสองข้างให้ถึงรูป ก, ก, ก และ ก



รูปที่ ๕

$$\text{แล้ว } ก ก = ก ข = ๕๐ \text{ วา}$$

$$\text{และ } ก ก = ก ข = ๖ \text{ วา}$$

$$\therefore ก ฉ = ๓๘ \text{ วา}$$

โดยทำนองเดียวกัน ก ข = ๓๐ วา

$$\begin{aligned} \therefore \text{เนื้อที่ของสนาม} &= ๓๘ \times ๓๐ \text{ ตารางวา} \\ &= \underline{๑๑๔๐} \text{ ตารางวา} \end{aligned}$$

ทางโดยรอบนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ๔ รูป

คือ ก ก, ก ก, ก ข และ ก ข และเท่ากันอยู่สองคู่

$$\text{คือ } ก ก = ก ก \text{ และ } ก ข = ก ข$$

$$\therefore ก ก + ก ก = ๕๐ \times ๖ \times ๒ = ๖๐๐ \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore ก ข + ก ข = ๓๐ \times ๖ \times ๒ = ๓๖๐ \text{ ,,}$$

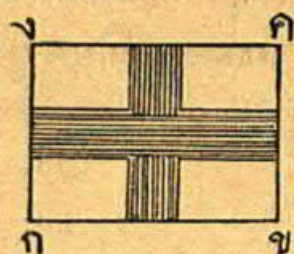
$$\text{เนื้อที่ของทาง} = ๖๐๐ + ๓๖๐ = \underline{๙๖๐} \text{ ,,}$$

ตัวอย่างที่ ๒ พื้นที่แห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง ๒ เส้น
๑๐ วา ยาว ๓ เส้น ๑๕ วา ถูกตัดถนนสองสายสายหนึ่งกว้าง ๘ วา

ผ่ากลางตามยาว อีกสายหนึ่งกว้าง ๔ วา ผ่ากลางตามกว้าง เนื้อที่
ที่เหลือเข้าของระชาบการางวาละ ๔ บาท ๓๖ สตางค์ ชายจนหมดกระ
ได้เงินเท่าไร ?

ตามใจที่ขึ้นต้อง การระทรายเนื้อที่ท
เหลือ ไม่ต้องการระทรายเนื้อที่ถนน ดังนั้น
จะทำให้สองวิธี

วิธีที่ ๑.



รูปที่ ๖

$$กข = ๓ เส้น ๑๕ วา = ๗๕ วา$$

$$ขค = ๒ เส้น ๑๐ วา = ๕๐ วา$$

$$\therefore กข กง = ๗๕ \times ๕๐ \text{ การางวา} \\ = ๓๗๕๐$$

(ทรงตั้งแยกถนน ต้องให้เป็นช่องสายหนึ่งสายใดแต่สายเดียว)

$$\text{เนื้อที่ถนนสายตามยาว} = กข \times \text{กว้างของถนน} \\ = ๗๕ \times ๔ = ๖๐๐ \text{ การางวา}$$

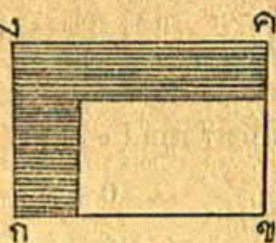
$$\text{เนื้อที่ถนนสายตามกว้าง} = (ขค - ๔) \times \text{กว้างของถนน} \\ = ๔๒ \times ๔ = ๓๖๘ \text{ การางวา}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่ที่เหลือ} = ๓๗๕๐ - (๖๐๐ + ๓๖๘) \\ = ๒๗๘๒ \text{ การางวา}$$

$$\therefore \text{ชายได้เงิน} = ๒๗๘๒ \times ๔.๔๖ \text{ บาท}$$

$$= \underline{๑๒๐๘๕.๙๖๒} \text{ บาท}$$

วิธีที่ ๒ เราเห็นว่าเนื้อที่ที่เหลือนั้นเป็น
สี่เหลี่ยมเท่าๆกัน (รูปที่ ๖) ถ้าเอามารวม
กันเข้าจะเป็นครึ่งรูปพื้นขาว (รูปที่ ๗) หรือ
กล่าวเราเลือนถนน ทั้ง สองสายออกไว้เสีย
ทางหนึ่ง พื้นขาวนั้นก็จะเป็นเนื้อที่ที่เหลืออยู่



$$\therefore \text{เนื้อที่ที่เหลือ} = (ก ข - ๔)(ข ก - ๔)$$

$$= ๖๖ \times ๔๒ \text{ ตารางวา}$$

$$= ๒๗๗๒ \text{ ,}$$

$$\therefore \text{ขายได้เงิน} = ๒๗๗๒ \times ๔.๓๖ \text{ บาท}$$

$$= \underline{๑๒๐๘.๔๓๒} \text{ บาท}$$

๑๗. โจทย์ที่ของแก้กวบววิพิชคณิต

ตัวอย่างที่ ๑ พื้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีเนื้อที่ ๓๗๕ ตารางหลา

เส้นทะแยงมุมยาว ๓๒ หลา จงหาค้นกว้างและยาว

$$\text{ให้ } ก = \text{ก้นยาว}$$

$$ข = \text{ก้นกว้าง}$$

$$\therefore ก + ข = (\text{เส้นทะแยงมุม})^๒ = (๓๒.๕)^๒$$

$$= ๑๐๕๖.๒๕ \text{ หลา} \dots\dots\dots(๑)$$

และ กข = เนื้อรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$= ๓๗.๕ \text{ ตารางหลา} \dots\dots\dots (๒)$$

แก้หาคะแนน (๑) และ (๒) ใต้

$$ก + ข = ๔๒.๔$$

$$ก - ข = ๑๗.๕$$

$$\therefore ก = ๓๐.๙๕ = ๓๐ \text{ หลา}$$

$$\text{และ } ข = ๑๒.๔๕ = \underline{๑๒.๕ \text{ หลา}}$$

ตัวอย่างที่ ๒ ผลบวกของด้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับ
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๖๐ วาเท่ากัน แต่เนื้อที่ต่างกันเป็น ๑๐๐
ตารางวา จงหาความกว้างและด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\text{ด้านทั้ง ๔ ของจัตุรัส} = ๖๐ \text{ วา}$$

$$\therefore \text{ด้านหนึ่ง } \varnothing \text{ ยาว} = ๖๐ \div ๔ = ๑๕ \text{ วา}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่} = (๑๕)^๒ = ๒๒๕ \text{ ตารางวา}$$

$$\text{และด้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า} = ๖๐ \text{ วา}$$

$$\therefore \text{ด้านกว้างกับด้านยาวคู่รวมกัน} = ๖๐ \div ๒ = ๓๐ \text{ วา}$$

$$\text{ให้ } ก = \text{ด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า}$$

$$ข = \text{ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า}$$

$$\therefore ก + ข = ๓๐ \dots\dots\dots (๑)$$

(ในโจทย์ข้างบนนี้ ถ้าเขียนรูปให้เห็นไว้ว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
มีเนื้อที่น้อยกว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

$$\therefore ๒๒๕ - (ก \times ข) = ๑๐๐ \text{ ตารางวา}$$

$$\text{หรือ } ก ข = ๑๒๕ \dots\dots\dots (๒)$$

แก้ข้อเขวชั้น (๑) และ (๒) ได้ผลสำเร็จ

$$ก = \underline{๒๕} \text{ วา}$$

$$ข = \underline{๕} \text{ วา}$$

ตัวอย่างที่ ๓ พันทรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้านยาวยาว ๕๔ เส้น ด้านกว้างกว้าง ๔๔ เส้น มีทางโคยรอบภายในกว้างเท่ากันตลอดไป เหลือเนื้อที่อยู่ ๒๐๐๐ ไร่ ทุ่งหาส่วนกว้างของทาง

$$\text{ให้ } ก = \text{กว้างของทาง}$$

$$\therefore ๕๔ - ๒ก = \text{ส่วนยาวของสนามที่ยังเหลืออยู่}$$

$$๔๔ - ๒ก = \text{,, กว้าง ,,}$$

$$\therefore (๕๔ - ๒ก)(๔๔ - ๒ก) = \text{เนื้อที่ที่เหลือ}$$

$$= ๒๐๐๐ \text{ ตารางเส้น}$$

$$\text{หรือ } ๔ ก - ๒๑๒ ก + ๒๓๗๔ = ๒๐๐๐$$

$$\text{หรือ } ก - ๕๓ ก + ๑๙๖ = ๐$$

$$\text{หรือ } (ก - ๔)(ก - ๔๙) = ๐$$

$$\therefore ก = \underline{๔} \text{ ส. หรือ } ๔๙ \text{ ส.}$$

หมายเหตุ แต่ที่ ก เท่ากับ ๔๙ เส้นนั้น จะเป็นส่วนกว้างของทางไม่ได้ เพราะกว้างกว่าด้านกว้างของสนาม เพราะฉะนั้นส่วนกว้างของทาง = ๔ เส้น

๑๘. พนทรายบางแห่งมีลักษณะเอียงเทไปข้างหนึ่ง เช่น หลังกาเรือน ผังทะเล หรือไม้กระดานที่พิงอยู่กับกำแพงเหล่านั้นเป็นต้น ถ้าเราสามารถยกขึ้นสูงเท่ากันหรือวางลงให้ต่ำเสมอกันได้ ก็จะเห็นเป็นพื้นราบตามธรรมชาตินั่นเอง และถ้าเราทราบว่าพื้นราบเหล่านั้นมีลักษณะเป็นเช่นไร แล้วเราก็ศึกษาคำนวณเนื้อที่ได้ จึงรู้ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง เหล็กแผ่นหนึ่งมีรูปเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง ๕๐ นิ้ว พิงอยู่กับกำแพง ปลายข้างหนึ่งจรดกับส่วนที่สี่ของกำแพงพอดี และกำแพงนี้สูง ๓ ศอก ทั้งแต่เชิงกำแพงออกมา ถึงที่แผ่นเหล็กตั้งอยู่เป็น ๒ ศอก ๑๗ นิ้ว จงหาเนื้อของเหล็กแผ่นนี้

ถ้าเขียนรูปดูจะเห็นว่าเป็นรูปสามเหลี่ยม มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ด้านที่ยาว ๓ ศอก ด้านฐานยาว ๒ ศอก ๑๗ นิ้ว แผ่นเหล็กเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$\begin{aligned}\therefore \text{ส่วนยาวของแผ่นเหล็ก} &= \sqrt{(๒๗)^2 + (๖๕)^2} \text{ นิ้ว} \\ &= \sqrt{๙๔๐๙} = ๙๗ \text{ นิ้ว}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{เนื้อของแผ่นเหล็ก} &= ๙๗ \times ๕๐ = ๔๘๕๐ \text{ ตร.น.} \\ &= \underline{\underline{๔ \text{ ตร. ศ. } ๗๒ \text{ ตร. น.}}}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๕

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(กำหนดเส้นทแยงมุมและเนื้อที่ให้)

๑. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเส้นทแยงมุม

ยาว ๘ ศอก

๒. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว

๕ วา ๒ ศอก

๓. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว

๖ ไปต์ ๒ หลา ๑ ฟุต

๔. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาวยาว ๑๒ เกจิเมตร เส้นทแยง

มุมยาว ๑๕ เกจิเมตร จงหาพื้นที่กว้าง

๕. ด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๙๒ เซ็นติเมตร เส้น

ทแยงมุมยาว ๙๗ เซ็นติเมตร จงหาอีกด้านหนึ่งและหาเนื้อที่ด้วย

๖. ด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๒๐ หลา เส้นทแยง

มุมยาว ๓๖ หลา ๑ ฟุต จ้างเขาปูกระเบื้องให้ทั่วพื้น เสียค่าจ้างตารางฟุต

ละ ๔ ๑/๒ เปนซ์ เสียค่าจ้างทั้งต้นเป็นเงินเท่าไร?

(กำหนดผลบวกของด้านและพื้นที่ให้)

๗. ถ้าจะกระเบื้องให้รอบสนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสแห่งหนึ่ง ต้องเสีย

เวลา ๑๒ นาที ถ้ากระเบื้องไปจนครบชั่วโมงก็เป็นทางไกล ๕ ๑/๒ ไมล์

จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแห่งนั้น

๘. ร้างเขาทำรวรอบนาสี่เหลี่ยมจัตุรัส เขาคึกเขาคำร้าง
๒๐ หลากข้อ ๒ เปาน์ ๑๑ ซิลถึง ๑ เปนซ์ ทำจนแล้วสิ้นเงิน ๓๓๙
เปาน์ ๗ ซิลถึง รงหาเนื้อที่ของนาแปลงนี้

๙. ชายคนหนึ่งมีผ้าเทีร์ไ้ใช้ชั่วโมงละ ๓ ไมล์ เขาจะเทีร์ให้
รอบสนามสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเนื้อที่ ๒๕ เอเคอร์จะเป็นเวลานานเท่าไร?

๑๐. ผลบวกของจำนวน ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๕๖ วา
และด้านยาวยาว ๑๕ วา รงหาเนื้อที่

๑๑. เสียเงินค่าทำรวรอบสนามสี่เหลี่ยมผืนผ้า ๑๓ เปาน์ ๗
ซิลถึง โดยคึกคำร้าง ๒๐ หลากข้อ ๑ เปาน์ ๒ ซิลถึง ๓ เปนซ์ ถ้า
ด้านยาวของสนามยาว ๘๔ หลา ด้านกว้างเป็นเท่าไร?

(ปูพณ, ทาสี, บั๊กกระกาย)

๑๒. จะปูกระเบื้องหน้าวัดที่พื้นห้องชั้นล่าง ห้องกว้าง ๑๘ ฟุต
ยาว ๒๐ ฟุต กระเบื้องยาว ๖ นิ้ว กว้าง ๕ นิ้ว จะสิ้นกระเบื้องกี่แผ่น?

๑๓. ทรายไปรมณิการแผ่นหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีอยู่
๔๔๐๐ กวบกวงหนึ่งกว้าง ๖ นิ้ว ยาว ๘ นิ้ว ทั้งแผ่นยาวด้านละ
เท่าไร?

๑๔. ห้องห้องหนึ่งกว้าง ๒๕ ฟุต ปูพรมสิ้น ๑๖ ผืนผืนหนึ่งๆ
ยาว ๘ ฟุต กว้าง ๖ ฟุต ๓ นิ้ว รงหาส่วนยาวของห้อง

๑๕. รงหาค่าปูกระเบื้องพื้นห้อง ซึ่งมีรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ด้านยาว ๒๐ ฟุต ปูด้วยกระเบื้องยาว ๙ นิ้ว กว้าง ๔ นิ้ว ค่าจ้างปู
๒๐ แผ่นค่า ๙ เปนซ์

๑๖. สนามสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๕๐ หลา กว้าง ๔๐ หลา จะ
ปลูกหญ้าหญ้ามักหนึ่ง ๆ กินเนื้อที่กว้าง ๖ นิ้ว ยาว ๑ ๑/๒ ฟุต ราคาย
หญ้า ๑๐๐ มักต่อ ๓ ชิลลิง ปลูกจนเต็มสนามจะสิ้นเงินเท่าไร?

๑๗. ห้องห้องหนึ่งยาว ๑๘ ฟุต ๓ นิ้ว กว้าง ๑๖ ฟุต ๔ นิ้ว
ปูด้วยกระดานหน้ากว้าง ๑๔ นิ้ว สิ้นกระดานยาวเท่าไร?

๑๘. ห้องยาว ๒๑ ฟุต กว้าง ๑๕ ฟุต จะปูพื้นด้วยพรมยาว
๔๖ หลา ๒ ฟุต พรมกว้างเท่าไร?

๑๙. โรงหาค่าปูพรมห้องยาว ๓๐ ฟุต กว้าง ๒๑ ฟุต พรม
กว้าง ๑ ๑/๒ หลา ราคายหลาละ ๔ ชิลลิง ๖ เพนนี

๒๐. สนามสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๗๒ เมตร กว้าง ๕๖ เมตร
มีทางโคจรรอบภายในกว้าง ๗ เมตร โรงทาน้ำที่เหลือนอยู่ (ตอบ
เป็นอาร์)

๒๑. ห้องยาว ๒๗ เมตร กว้าง ๒๑.๘ เมตร จะปูพรมตรง
กลาง เหลือที่ว่างไว้โคจรรอบกว้าง ๓ เมตร โรงทาน้ำที่ปูพรม

๒๒. สนามสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๘ เมตร กว้าง ๖.๔ เมตร ทำ
ถนนกว้างเท่ากันให้รอบภายใน เหลือไว้ตรงกลางเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ยาว ๕.๘ เมตร โรงทาสวนกว้างของถนน และส่วนของสนามที่เหลือ

๒๓. โรงทาน้ำของทางกว้าง ๖ เกซีเมตร ทำรอบสนามภายใน
นอก สนามเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๘๐ เกซีเมตร กว้าง ๗๒ เกซีเมตร

แบบฝึกหัดที่ ๒

(โจทย์ระคน)

๑. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว ๑๔ เมตร ๒๒
เซ็นติเมตร จงหาเนื้อที่

๒. ด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๑๓ เมตร ๑๘ เซ็นติเมตร
และเส้นทแยงมุม ๑๘ เมตร ๓๑ เซ็นติเมตร จงหาเนื้อที่

๓. ชายผู้หนึ่งเก็บรวบรวมสัตว์เลื้อยคลานชนิดหนึ่งมา ๓๐ ตัว เขา
เก็บได้ชั่วโมงละ ๒ ตัว จงหาเนื้อที่ของสนามนี้ (ตอบเป็นไร่)

๔. จะทำรั้วรอบสนามสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเนื้อที่ ๓ ไร่ คีตก่า
จ้าง ขวา ต่อ สี่ ศกวงค์ จะสิ้นเงินเท่าไร?

๕. กระดาน ก แผ่น ยาวแผ่นละ ขวา หน้ากว้างแผ่นละ ค นิ้ว
ปูห้องยาว งวา เต็มพอดี ห้องกว้างเท่าไร?

๖. เสียเงินค่าปูพรมห้องยาว ก วา กว้าง ขวา เป็นเงิน ข บาท
โดยที่ค่าปูพรม สี่ สดิ่ง พรมกว้าง ก นว?

๗. เสียเงินค่าปูพรมห้องยาว ก วา พรมกว้าง ค นว ราคาปูพรม
สี่ สดิ่ง เป็นจำนวนเงิน ข บาท จงหาส่วนกว้างของห้อง

(ทำด้วยพีชคณิต)

๘. บ้านทั้ง ๕ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๕๐ ไร่ เนื้อที่เป็น
๑๕๐ ตารางวา จงหาบ้านกว้างและบ้านยาวของรูปสี่เหลี่ยม

๙. บ้านทั้ง ๔ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๕๖ ไร่ เนื้อที่เป็น
๑๕ $\frac{๑}{๒}$ เอเคอร์ จงหาบ้านกว้างและบ้านยาว

๑๐. เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๑๒๐ ตารางวา เส้น
 ทแยงมุมยาว ๑๗ วา ก้านกว้างและยาวเป็นเท่าไร?

๑๑. เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๖๐ ตารางทลหา เส้น
 ทแยงมุมยาว ๑๓ ทลหา ก้านกว้างและยาวเป็นเท่าไร?

๑๒. เนื้อที่นาสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น ๑๖๘ ตารางทลหา เส้นทแยง
 มุมยาว ๒๕ ทลหา จะเกิดไร่รอบบริเวณนานเท่าไร? ถ้าเกิดไร่
 ไร่ ๖ ไร่

๑๓. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างละรูป มีผล
 ยวของกันทั้ง ๔ ยาว ๘๐ วาเท่ากัน แต่มีเนื้อที่ต่างกัน ๑๐๐ ตารางวา
 จงหา ก้านกว้างและก้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

๑๔. ก้านโคยรอบของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยม
 ผืนผ้าอย่างละรูปเป็น ๑๘๐ ทลหาเท่ากัน แต่เนื้อที่ต่างกันเป็น ๒๕
 ตารางทลหา จงหา ก้านกว้างและก้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

๑๕. สนามสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว ๕๐ ฟุต กว้าง ๓๕ ฟุต มีถนน
 รอบภายในกว้างเท่ากัน เหลือเนื้อที่ ๑๐๐ ตารางฟุต จงหา ส่วนกว้าง
 ของทาง

๑๖. ห้องยาว ๒๓ ฟุต กว้าง ๒๒ ฟุต ปูพรมตรงกลาง เหลือ
 ที่ว่างไว้โดยรอบกว้างเท่ากัน พรมยาว ๕๖ ฟุต กว้าง ๓๐ นิ้ว เนื้อ
 ที่ว่างนั้นกว้างเท่าไร?

๑๗. ทำทางรอบภายในสนามสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านยาว ๔๘ ฟุต
๖ นิ้ว กว้าง ๓๖ ฟุต เหลือเนื้อที่ว่างตรงกลาง ๑๒๖ ตารางหลา จะรอบ
หินที่ถนนทางเสี้ยค่าจ้างตารางหลาละ ๔๔ เป็นซี่ จะเสียเงินทั้งสิ้นเท่าไร?

(พนเอนเอียง)

๑๘. กระดานกว้าง ๑๕ นิ้ว พิงอยู่ที่กำแพงสูง ๘ ศอก เอน
ห่างเชิงกำแพง ๖ ศอก จงหาเนื้อที่ของกระดานแผ่นนั้น

๑๙. เรือนกระบอกสำหรับปลูกต้นไม้ พินเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส กั้น
เนื้อที่ ๒๕ ตารางหลา ยืนอยู่สูงเสมออกับกบฏ และทอดคาไปต่อกบฏ
เส้นสายคาจะทำมุมกับความเอนเอียงของหลังคาที่ กบฏเป็นมุมทาง ๖๐°
จงหาเนื้อที่ของหลังคา และกระบอกแผ่นหนึ่ง ๆ ยาว ๑๒ นิ้ว กว้าง ๗ นิ้ว
ไม่กรอบทงสิ้นเป็น ๓๐ ตารางฟุต หลังคานั้นจะมุงด้วยกระบอกกี่แผ่น

๒๐. เรือนกระบอกสำหรับปลูกต้นไม้ มีรูปเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
เนื้อที่พินเป็น ๒๕ ตารางหลา ๔ ตารางฟุต ยืนสูงเสมออกับกบฏ ทอดคาไป
ต่อกบฏ เส้นสายคาจะทำมุมกับความเอนเอียงของหลังคาทาง ๔๕° จง
หาเนื้อที่ของหลังคา

๒๑. เหล็กแผ่นหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว ๑๘ ฟุต พิงอยู่
ที่กำแพง เส้นสายคาทำมุมกับความเอนเอียงของแผ่นเหล็กทาง ๖๐°
พินกั้นที่อยู่ภายในใต้แผ่นเหล็ก คือระหว่างกำแพงกับแผ่นเหล็กทั้ง
อยู่เป็นกี่ตารางฟุต

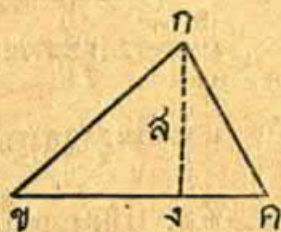
บทที่ ๔

ว่าด้วย

รูปสามเหลี่ยมต่างๆ

๑๙. คำจำกัดความ รูปสามเหลี่ยม คือรูปเส้นตรงที่มีด้าน ๓ ด้าน
 คำว่ารูปสามเหลี่ยมในที่นี้ไม่ได้หมายความว่า เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิด
 ใด ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมแล้ว ต้องขึ้นอยู่กับด้านทั้งสาม ระบุคำอธิบาย
 ต่อไปนี้

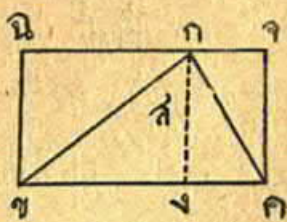
สมมุติให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม
 ตากเส้น กง ให้ตั้งฉากกับด้าน ข ค ซึ่งอยู่
 ตรงข้ามมุม ข ก ค เส้น กง นี้เรียกว่า เส้น
 สูง หรือ ส่วนสูง



รูปที่ ๑

ถ้าเราทราบจำนวนยาวของด้านทั้งสาม หรือทราบจำนวนยาว
 ของส่วนสูงกับด้านที่ส่วนสูงตั้งอยู่แล้ว ก็หาเนื้อที่สามเหลี่ยมนั้น ๆ
 ได้ จะอธิบายให้เห็นที่ละแผนก ๆ ดังต่อไปนี้

๒๐. งบหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งกำหนดจำนวนยาวของ
 ด้านหนึ่ง กับส่วนสูงที่ตั้งอยู่บนด้านนั้นให้
 ให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ข ค เป็น
 ด้านที่กำหนดให้ และให้ กง เป็นส่วนสูง
 สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขึ้นบนฐาน



รูปที่ ๒

ข ค ถ็อมรูปสามเหลี่ยม ก ข ค และให้อยู่ข้างเดียวกันของฐาน
ข ค แล้วจะเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned}\triangle ก ข ง &= \text{ครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม ก ข ค ง} \\ \text{และ } \triangle ก ค ง &= \dots\dots\dots ก ง ค ก \\ \therefore \triangle ก ข ค &= \dots\dots\dots ข ค ก ค \\ &= \frac{1}{2} (ข ค \times ค ก) = \frac{1}{2} (ข ค \times ค)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นวางลงเป็นกฎได้ว่า

$$\text{เนื้อของรูปสามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{สูง} \dots\dots\dots (๑)$$

$$\text{และส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม} = \frac{\text{สองเท่าเนื้อ}}{\text{ฐาน}} \dots\dots\dots (๒)$$

๒๑. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ บ່อมมีด้านตั้งเป็นส่วนสูงอยู่
แล้ว เพราะฉะนั้นเมื่อเอาด้านตั้งคูณกับฐานและหารด้วย ๒ ผลลัพธ์
ก็เป็นเนื้อรูปสามเหลี่ยมนั้น

$$\text{คือเนื้อ } \triangle = \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{ด้านตั้ง}$$

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาเนื้อรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีส่วนสูงยาว ๒ เมตร
๕๐ เซ็นติเมตร ฐานยาว ๑๖ เมตร ๑๕ เซ็นติเมตร

$$\begin{aligned}\text{เนื้อ } \triangle &= \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{สูง} [\text{กฎข้อ ๑}] \\ &= \frac{1}{2} \times ๑๖.๑๕ \times ๒.๕ \\ &= ๘.๐๗๕ \times ๒.๕ \\ &= \underline{๒๐.๑๘๗๕} \text{ ตารางเมตร}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๒ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมแห่งหนึ่งมีเนื้อที่ ๔.๐๑๒๕ ไร่

ฐานยาว ๓ เมตร ๒๑ เซนติเมตร จงหาส่วนสูง

$$\text{เนื้อที่} = ๔.๐๑๒๕ \text{ ไร่}$$

$$\text{ส่วนสูง} = \frac{\text{สองเท่าเนื้อที่}}{\text{ฐาน}} \quad [\text{กฎข้อ ๒}]$$

$$= \frac{๘.๐๒๕}{๓.๒๑} = \underline{๒.๕ \text{ เมตร}}$$

ตัวอย่างที่ ๓ จงหาเนื้อที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ก้านตั้งยาว

๑๕๓ วา ก้านตรงข้ามมุมฉากยาว ๑๘๕ วา

$$\left. \begin{array}{l} \text{ก้านตรงฉาก} = ๑๘๕ \text{ วา} \\ \text{ก้านตั้ง} = ๑๕๓ \text{ วา} \end{array} \right\} \text{ จงหาฐาน}$$

$$\begin{aligned} \text{ฐาน} &= \sqrt{(๑๘๕)^2 - (๑๕๓)^2} \\ &= \sqrt{(๑๘๕ + ๑๕๓)(๑๘๕ - ๑๕๓)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{๓๓๘ \times ๓๒} = \sqrt{๑๐๘๑๖}$$

$$= ๑๐๔ \times ๘ = ๑๐๔$$

$$\text{เนื้อที่} = \frac{๑}{๒} \text{ ฐาน} \times \text{ก้านตั้ง}$$

$$= \frac{๑}{๒} \times ๑๐๔ \times ๑๕๓ \text{ ตารางวา}$$

$$= ๗๙๕๖ = \underline{๑๙ \text{ ไร่ } ๓ \text{ งาน } ๕๖ \text{ ตารางวา}}$$

ตัวอย่างที่ ๔ - รูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาว ๒๔ วา ก้าน
ทั้งยาว ๔๕ วา จงหาส่วนสูงที่ลากจากมุมฉากถึงด้านตรงข้าม

$$\text{ก้าน ก} = ๒๔ \text{ วา} \quad \text{ก้าน ข} = ๔๕ \text{ วา}$$

$$\text{และก้าน ค} = \text{ก} + \text{ข} = (๒๔) + (๔๕)$$

$$= ๒๖๐๑ \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore \text{ก} = ๕๑ \text{ วา}$$

$$\text{ส่วนสูง} = \frac{\text{สองเท่าเนื้อที่}}{\text{ฐาน}}$$

$$= \frac{๒๔ \times ๔๕}{๕๑}$$

$$= ๒๑.๑๗..... = ๒๑.๒ \text{ วา}$$

๒๒. บอกจำนวนยาวของก้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมให้ ให้
หาเนื้อที่

ใ้ข้ออธิบายวิธีหาส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมาครั้งหนึ่งแล้ว แต่
นั้นก็ต้องรู้ว่าเนื้อที่เป็นเท่าไร และก้านที่ส่วนสูงตั้งอยู่นั้นเป็นเท่าไรด้วย
จึงจะหาส่วนสูงได้ ในข้อนี้รู้จำนวนยาวของก้านทั้ง ๓ ของรูปสาม
เหลี่ยมก็หาส่วนสูงได้ดังต่อไปนี้

ใ้ ก ค ด เป็นรูปสามเหลี่ยม ค ท เป็นส่วนสูง

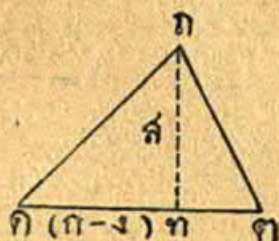
ก้าน กท = ก, คด = ค, ดท = ข ยูนิต และ กท = ง ยูนิต

$$\therefore กท = (ก-ง) \text{ ยูนิต}$$

$$\text{ส่วนสูง } กท = ส \text{ ยูนิต}$$

$\therefore$ ถทค และ ถทค เป็นรูปสามเหลี่ยม

มุมฉากทั้งคู่



รูปที่ ๑๐

$$\therefore กท = กค - กท \text{ หรือ } ส = ข - (ก-ง)$$

$$\text{และ } กท = ทค - กท \text{ หรือ } ส = ค - ง$$

$$\therefore ค - ง = ข - (ก-ง)$$

$$ก - ง = ค - ข + ก$$

$$\therefore ง = \frac{ก - ข + ค}{๒ ก}$$

$$\therefore ส = ค - \left(\frac{ก - ข + ค}{๒ ก} \right)$$

$$= \left(ค + \frac{ก - ข + ค}{๒ ก} \right) \left(ค - \frac{ก - ข + ค}{๒ ก} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(ก+ค) - ข}{๒ ก} \times \frac{ข - (ก-ค)}{๒ ก} \\
 &= \frac{(ก+ข+ค)(ก+ข-ค)(ข+ค-ก)(ก+ค-ข)}{๒ ก \times ๒ ก}
 \end{aligned}$$

ให้ $บ = \frac{๑}{๒}(ก+ข+ค) = (\text{ครึ่งของ ๓ ด้านรวมกัน})$

$\therefore ๒บ = ก+ข+ค = (\text{สามด้านรวมกัน})$

$$\begin{cases}
 ๒บ-๒ก = ก+ข+ค - ๒ก = -ก+ข+ค \\
 ๒บ-๒ข = ก+ข+ค - ๒ข = ก-ข+ค \\
 ๒บ-๒ค = ก+ข+ค - ๒ค = ก+ข-ค
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore ส &= \frac{๒บ(๒บ-๒ก)(๒บ-๒ข)(๒บ-๒ค)}{๒ ก \times ๒ ก} \\
 &= \frac{๑๖ บ(บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)}{๒ ก \times ๒ ก}
 \end{aligned}$$

$$\therefore ส = \frac{๒}{๒๑} \sqrt{๒๒(บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)}$$

เมื่อได้ส่วนสูงแล้ว ก็ขึ้นไปดูที่หาเนื้อที่ได้ แต่ก้านที่ส่วนสูงจะอยู่ยาว ก ยูนิก

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{เนื้อที่ } \triangle &= \frac{๑}{๒} \times ๒ \sqrt{\frac{๒}{๒๑} (บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)} \\
 &= \sqrt{\frac{๒}{๒๑} (บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว ๒๖ วา

๒๘ วา และ ๓๐ วา

บ้าน ก = ๒๖ วา ข = ๒๘ วา และ ค = ๓๐ วา

∴ ๒ บ = ๔๔ วา ∴ บ = ๔๒ วา

$$\therefore \begin{cases} บ - ก = ๔๒ - ๒๖ = ๑๖ \\ บ - ข = ๔๒ - ๒๘ = ๑๔ \\ บ - ค = ๔๒ - ๓๐ = ๑๒ \end{cases}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่ } \triangle = \sqrt{๔๒ \times ๑๖ \times ๑๔ \times ๑๒}$$

$$= \sqrt{๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒ \cdot ๒} = ๓๓๖ \text{ ตารางวา}$$

๒๓. กำหนดจำนวนยาวของบ้านทั้ง ๓ ของรูปสามเหลี่ยมให้
ให้หาส่วนสูงซึ่งตั้งอยู่บนบ้านหนึ่งบ้านใด

ครั้งแรกต้องหาเนื้อที่ก่อนโดยใช้กฎ

$$= \sqrt{บ(บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)}$$

เมื่อได้เนื้อที่แล้วจึงใช้กฎ

$$\text{ส่วนสูง} = \frac{\text{สองเท่าของเนื้อที่}}{\text{ฐาน}}$$

ตัวอย่าง กขคเป็นรูปสามเหลี่ยม บ้าน ก = ๑๕ เมตร ๔๐
เซ็นต์ไมตร บ้าน ข = ๑๐ เมตร ๕๐ เซนต์ไมตร บ้าน ค = ๘ เมตร
๗๐ เซนต์ไมตร จงหาส่วนสูงซึ่งลากจากยอด ก ทั้งได้ฉากกับบ้าน ข ค

$$ก = ๑๕ \text{ เมตร } ๕๐ \text{ เซ็นติเมตร} = ๑๕.๕๐ \text{ เซ็นติเมตร}$$

$$ข = ๑๐ \text{ เมตร } ๙๐ \text{ เซ็นติเมตร} = ๑๐.๙๐ \text{ เซ็นติเมตร}$$

$$ค = ๘ \text{ เมตร } ๗๐ \text{ เซ็นติเมตร} = ๘.๗๐ \text{ เซ็นติเมตร}$$

$$\therefore บ = ๑๗.๕๐ \text{ เซ็นติเมตร}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \sqrt{๑๗.๕๐ \times ๒๑.๐๐ \times ๖.๖๐ \times ๘.๘๐} \text{ ตารางเซ็นติเมตร} \\ &= \sqrt{๒ \ ๒ \ ๒ \ ๒ \ ๒ \ ๒} \\ &= \sqrt{๕ \times ๗ \times ๓ \times ๑๑ \times ๔ \times ๑๐๐} = ๔๖๓๐๐๐ \text{ ตร.ซม.} \\ &= ๔๖.๓ \text{ ตารางเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ส่วนสูงซึ่งตั้งอยู่บน ข ก} &= \frac{\text{สองเท่าเนื้อที่}}{\text{ข ก}} = \frac{๘๒.๔}{๑๕.๕} \text{ เมตร} \\ &= ๖ \text{ เมตร} \end{aligned}$$

๒๔. จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมด้านเท่า และหาส่วนสูง
ซึ่งลากจากมุมหนึ่งมุมใดทั้งนี้ให้ฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้ามด้วย

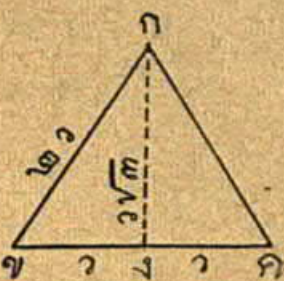
หาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมด้านเท่าด้วยใช้กฎ

$\Delta = \sqrt{บ(บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)}$ ก็ได้ เมื่อได้เนื้อที่แล้ว จงหา
ส่วนสูงตามวิธีที่ทำมาแล้ว แต่ยังมีวิธีอื่นอีกซึ่งไม่ต้องใช้กฎที่กล่าวนี้
จงดูคำอธิบายต่อไปนี้

ในขั้นต้นควรจะรู้เสียก่อนว่า ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมด้านเท่า
ย่อมเท่ากันทั้ง ๓ เส้น และเส้นสูงย่อมแบ่งฐานออกเป็นสองส่วน
เท่า ๆ กันด้วย

ให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมก้านเท่า
และให้ กง เป็นส่วนสูง และให้ก้านยาวก้าน
ละ ๒๖ ๒๖ ๒๖

เมื่อลากเส้นสูงแล้ว เส้นสูงก็แบ่ง
รูปสามเหลี่ยมก้านเท่าออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุม



ฉากสองรูป คือ ก ข กง และ ก ค กง และมีเนื้อที่เท่ากันด้วย

$$\therefore \text{ข ก} = \text{ค ก} = ๖ \text{ ๒๖}$$

$$\text{ก ก} = \text{ก ข} - \text{ข ก} \quad "$$

$$= ๒๖ - ๖ \quad "$$

$$= ๒๐ \quad "$$

$$= ๓๖ \quad "$$

$$\therefore \text{ก ก} \text{ คือ ส่วนสูง} = \sqrt{\frac{๓}{๖}} = ๖ \sqrt{\frac{๓}{๖}} \dots\dots\dots (๑)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{เนื้อที่ } \triangle &= \frac{๑}{๒} (\text{ฐาน} \times \text{สูง}) \\ &= \frac{๑}{๒} ๒๖ \times ๖ \sqrt{\frac{๓}{๖}} \\ &= ๖ \sqrt{\frac{๓}{๖}} \dots\dots\dots (๒) \end{aligned}$$

$$[\text{ค่าของ } \sqrt{\frac{๓}{๖}} = ๑.๗๓๒๐๕]$$

ตัวอย่าง ๖ หาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมก้านเท่า ซึ่งมีก้านยาว
ก้านละ ๒๐ เส้น

$$๒๖ = ๒๐ \text{ เส้น } ๖ = ๑๐ \text{ เส้น}$$

$$\begin{aligned} \text{เนื้อท } \triangle &= \frac{๒}{๖} \sqrt{๓} \text{ [กฎข้อ ๒]} \\ &= ๑๐ \times ๑๐ \times ๑.๗๓๒๐๕ \\ &= ๑๗๓.๒๐๕ \text{ ไร่} \\ &= \underline{๑๗๓ \text{ ไร่ } ๔๒ \text{ ตารางวา}}\end{aligned}$$

๒๕. โจทย์ที่ต้องแก้ด้วยพีชคณิต

ตัวอย่าง บ้านทั้ง ๓ ของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น ๔๒ วา แต่
รู้ว่าบ้านหนึ่งยาว ๑๕ วา เนื้อเป็น ๔๔ ตารางวา อีก ๒ บ้านนั้นยาว
บ้านละกี่วา

$$\text{บ้าน ก} + \text{ข} + \text{ค} = ๔๒ = ๒๖$$

$$\therefore \text{ข} = ๒๑ \text{ วา}$$

$$\text{แต่บ้าน ก} = ๑๕ \text{ ,,}$$

$$\therefore \text{ข} + \text{ค} = ๔๒ - ๑๕ \text{ ,,}$$

$$= ๒๗ \dots\dots\dots (๑)$$

$$\therefore \triangle = \sqrt{๒๑ \times ๖ \times (๒๑ - ๖)(๒๑ - ๖)} = ๔๔$$

$$\therefore ๒๑ \times ๖ \times (๒๑ - ๖)(๒๑ - ๖) = (๔๔)^๒$$

$$\text{หรือ } (๒๑)^๒ - (๖ + \text{ค}) ๒๑ + ๖ \text{ค} = (๔๔)^๒ \dots\dots (๒)$$

$$\therefore (๑) - (๒) \text{ เหลือ } ๖ \text{ ค} = ๑๘๒ \dots\dots (๓)$$

แก้เชิงควadrat (๑) และ (๓) สำเร็จแล้ว

$$\underline{\underline{\text{ข} = ๑๕ \text{ วา } \text{ค} = ๑๓ \text{ วา}}}$$

แบบฝึกหัดที่ ๗

รูปสามเหลี่ยม

สามเหลี่ยมมุมฉาก

(เบื้องต้น)

๑. หน้าที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดพื้นฐานกับ
กันทั้งให้

(ก) ๕ เมตร และ ๘ เมตร

(ข) ๗ หลา ๑ ฟุต และ ๑๓ หลา ๑ ฟุต

(ค) ๑๘ เมตร ๑๕ เซนติเมตร และ ๑๖ เมตร (ตอบ
เป็นอาร์)

๒. หน้าที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดพื้นฐานข้าม
มุมฉากกับพื้นฐานให้

(ก) ๓๗ วา และ ๑๒ วา

(ข) ๖ วา ๑ ศอก และ ๑ วา ๓ ศอก

๓. หน้าที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น ๒๔๒๐ ตารางวา
ฐานยาว ๔๔ วา หน้าที่กันทั้ง

๔. หน้าที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น ๕๐๖ ตารางวา ฐาน
ทั้งยาว ๒๓ วา หน้าที่กันฐาน

๕. หน้าที่กันตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

(ก) หน้าที่ ๖๐ ตารางวา ฐานทั้ง ๘ วา

(๒) เนื้อที่ ๒๔ ตารางวา เมตร ก้านตั้งยาว ๘ เมตร

(กำหนดฐานและส่วนสูงให้)

๖. ฐานของรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

(ก) ฐานยาว ๓๒ ฟุต สูง ๑๗ ฟุต

(ข) ฐานยาว ๔ หลา ๒ ฟุต สูง ๓ หลา ๑ ฟุต

(ค) ฐานยาว ๑๗ เมตร ๕๐ เซ็นติเมตร สูง ๖ เมตร ๘๔ เซ็นติเมตร

๗. ฐานสูงและหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วต่อไปนี้

(ก) ฐานยาว ๕ วา ก้านตั้งยาว ๖ วา ๒ ศอก

(ข) ฐานยาว ๑๖ ๕ วา ก้านตั้งยาว ๑๖ ๒ วา ๒ ศอก

๘. ฐานสูงของรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

(ก) เนื้อที่ ๕๖ ตารางเซนติเมตร ฐานยาว ๑๖ เซ็นติเมตร

(ข) เนื้อที่ ๖๐๘ ตารางเดซิโตเมตร ฐานยาว ๑๔.๕ เดซิโตเมตร

๙. เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็น ๓๗๕ ตารางเดคาเมตร สูง

๖๘ เดคาเมตร ฐาน

๑๐. ฐานสูงระหว่างมุมฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

(ก) ก้านตั้งยาว ๔๘ เซ็นติเมตร ฐานยาว ๗๖ เซ็นติเมตร

- (ข) ก้านทั้งยาว ๒๔ เกชิเมตร ฐานยาว ๗ เกชิเมตร
 (ก) ก้านทรงมุมฉากข้ามยาว ๒๔ มิตติเมตร ก้านทั้ง
 ยาว ๒๑ มิตติเมตร (ทศนิยมตำแหน่งเดียว)

(กำหนดก้านทั้ง ๓ ให้)

๑๑. หนา^๕ของรูปสามเหลี่ยม กำหนดก้านทั้ง ๓ ให้

(ก) ๒๑ ฟุต ๒๐ ฟุต ๑๓ ฟุต (ตอบเป็นตารางฟุต)

(ข) ๒๑ ฟุต ๑๗ ฟุต และ ๑๐ ฟุต (ตอบเป็นตารางฟุต)

๑๒. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ก้านตรงข้ามมุม ก = ๑๔ วา

ข = ๑๕ วา ค = ๑๓ วา หนา^๕ส่วนสูงลากจากยอดก ทั้งได้ฉาก
 กับก้าน ข ค

๑๓. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ก้านก = ๑๒๕ วา ข =

๓๗ วา ค = ๑๓๒ วา หนา^๕ส่วนสูงลากจากยอดค ทั้งได้ฉากกับ
 ก้าน ก ข

๑๔. หนา^๕ของรูปสามเหลี่ยมก้านเท่าต่อไปนี้

(ก) ก้านยาว ๑๐ ศอก (ทศนิยมตำแหน่งเดียว)

(ข) ก้านยาว ๑๘ ศอก („ „ „)

(สามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

๑๕. ผลบวกของก้านทั้ง ๓ แห่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็น ๓๒ วา

ฐานยาว ๑๒ วา หนา^๕ของ

๑๖. ผลบวกของจำนวนทั้ง ๓ แห่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็น ๕๐ วา
ฐานยาว ๑๖ วา จงหาเนื้อที่

๑๗. เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ๑๖๕ ตารางวา ฐานยาว
๑๔ วา จงหาความสูง

๑๘. เนื้อที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็น ๖๐ ตารางวา ฐานยาว
๑๐ วา จงหาความสูง

(โจทย์ระคน)

๑๙. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก ก ค = ๑๒
เตี้ย จงหา

(ก) ค่าเช่าไร่ละ ๑๓ บาท ๖๔ สตางค์

(ข) ค่าทำรั้วตั้งแต่ ก ถึง ข คิดวาระ ๗๕ สตางค์

๒๐. ก ข ค เป็นนารูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก เจ้า
ของคึกเขาเช่าแก่ผู้เช่าเอเคอร์ละ ๓ เปนที่ ๑๐ ซิลลิง ได้ค่าเช่า
ทั้งสิ้นเป็นเงิน ๒๙ เปนที่ ๘ ซิลลิง ถ้าบ้าน ก ค ยาว ๕๒๘ หลา
อีกสองบ้านนั้นยาวกันละเท่าไร และระยะทางที่สั้นที่สุดตั้งแต่ ค
ถึง ก ข ยาวกี่หลา (ทศนิยมตำแหน่งเดียว)?

๒๑. ก ข ค เป็นสนามรูปสามเหลี่ยม บ้าน ก ข = ๒๐ หลา
ข ค = ๓๗ หลา ก ค = ๕๑ หลา เจ้าของคึกเขาเช่าแก่ผู้เช่าตาราง
หลาละ ๔ เปนที่ ๓ ซิลลิง ๔ เปนที่ จะได้ค่าเช่าทั้งสิ้นเป็นเงินเท่าไร?
และส่วนสูงระหว่าง ค กับ ก ข เป็นเท่าไร?

แบบฝึกหัดที่ ๘

รูปสามเหลี่ยม

(ยากขึ้น)

๑. รูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๒๘๑ มิลลิเมตร ๒๓๑ มิลลิเมตร และ ๑๖๐ มิลลิเมตร เนื้อที่เป็นเท่าไร?

๒. รูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๑๕๔ วา ๑๐๘ วา และ ๘๗ วา เนื้อที่เป็นกี่ไร่?

๓. จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว

ก. ๑๔ วา ๘ วา และ ๗ วา

ข. ๑๑ เมตร ๑๐ เมตร และ ๘ เมตร

๔. สนาปรูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๒๑ เทคาเมตร ๑๖ เทคาเมตร และ ๑๑ เทคาเมตร ให้เขาเข้าตารางเทคาเมตรละ ๔๕ แพร่งก็จะได้ค่าเช่าทั้งสิ้นเป็นเงินเท่าไร?

๕. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมด้าน ขค = ๑๘ วา คก = ๑๓ วา และ กข = ๑๑ วา จงหาเส้นตั้งฉากที่ลากจาก ค ซึ่งเป็นมุมยอด ถึง ก ข

๖. ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว ๑๕ ๔ นิ้ว ด้านทั้งยาว ๘๕ นิ้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้

๗. รูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๖๘ คมก ๗๕ คมก และ ๗๗ คมก
 จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมนี้
 (สามเหลี่ยมด้านเท่า)

$$\sqrt{3} = ๑.๗๓๒๐๕$$

๘. ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว ๗ คมก จงหาผล
 บวกของด้านทั้ง ๓

๙. ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว ๑๒ วา จงหาเนื้อที่
 (ทศนิยม ๓ ตำแหน่ง)

๑๐. เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็น ๓๐ ตารางหลา จง
 หาผลบวกของด้านทั้ง ๓

๑๑. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีด้านยาว ๒๐ ฟุต จงหาค่าของ
 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีเนื้อที่เท่ากัน

๑๒. รูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๕ เส้น ๗ เส้น และ ๘ เส้น จง
 หาค่าของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมนี้
 (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

๑๓. เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า กับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 ซึ่งตั้งอยู่บนฐานอันเดียวกัน ต่างกันเป็น $๖\frac{๑}{๒}$ เซกอร์ จงหาค่าที่รวม
 กันยาวเท่าไร? (ตอบเป็นหลา)

๑๔. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วกับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าตั้งอยู่บน

ฐานยาว ๑๖ ฟุตด้วยกัน แต่เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็น ๒ เท่า
ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาค่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

๑๕. กขคย เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก ค ย, ข ค, ค ย, และ
ง ค ก, เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าตั้งอยู่บนด้านทั้ง ๔ ด้านของอกภายนอก
ของพิสัยนี้ให้เห็นว่า สว ค ก เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และถ้า
ด้าน ก ข ยาว ๒๐ ฟุต จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหม่
(ทศนิยมตำแหน่งเดียว)

๑๖. ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ก ข ค ยาว ๖ ฟุต ก เป็น
จุดอยู่ที่ด้าน ก ข ห่างจาก ก ๒ ฟุต และ ค เป็นจุดอยู่ที่ด้าน ข ค ห่าง
จาก ข ๒ ฟุต และ ย เป็นจุดที่อยู่ในด้าน ค ก ห่างจาก ค ๒ ฟุต จง
แสดงให้เห็นว่า ค ก ย เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วหาเนื้อที่ด้วย

๑๗. รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหนึ่งมีด้านเป็น ๓, ๔ และ ๕ ส่วน ผล
บวกของด้านทั้ง ๓ เป็น ๘๔ ฟุต ยาวด้านละเท่าไรและหาเนื้อที่ด้วย

๑๘. รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหนึ่งมีด้านเป็น ๗, ๘ และ ๙ ส่วน จ้าง
เขาทำรั้วโดยรอบ เสียค่าจ้าง ๑๒ หลาต่อ ๗ ซิตถึง ๖ เปนซ์ เสียทั้ง
สิ้น ๙ เปนซ์ ๑๕ ซิตถึง ด้านยาวด้านละเท่าไร?

(ทำด้วยพีชคณิต)

๑๙. ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหนึ่งมีส่วนเป็น ๑๓, ๒๐ และ
๒๑ เนื้อที่ ๑๑๓๔ ตารางฟุต ด้านยาวด้านละเท่าไร?

๒๐. ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหนึ่งมีส่วนเป็น ๑๓, ๑๒ และ

๕ ต้องเสียภาษีที่ดินเคเซอร์ละ ๕ ชิลลิง ๓ เพนนี เสียไปทั้งสิ้น ๑๘ เพนนี ๑๓ ชิลลิง ๘ เพนนี กำนับวากำนละเท่าไร ?

๒๑. ผลบวกของกำนทั้ง ๓ แห่งรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น ๒๔ เส้น เนื้อที่ ๒๔ ไร่ กำนับวากำนละเท่าไร ?

๒๒. ผลบวกของกำนทั้ง ๓ แห่งรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น ๔๐ ฟุต เนื้อที่ ๖๐ ตารางฟุต กำนับวากำนละเท่าไร ?

๒๓. ผลบวกของกำนทั้ง ๓ แห่งรูปสามเหลี่ยมเป็น ๔๘ ฟุต กำนหนึ่งยาว ๑๐ ฟุต เนื้อที่ ๘๔ ตารางฟุต อีกสองกำนนับยาวกำนละเท่าไร ?

๒๔. กำนทั้ง ๓ ของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น ๕๔ เมตร กำนหนึ่งยาว ๒๑ เมตร เนื้อที่ ๑๒๖ ตารางเมตร อีกสองกำนนับยาวกำนละเท่าไร ?

บทที่ ๕

ว่าด้วย

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

หมวดที่ ๑

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๒๖. จำกัความ

(๑) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านคู่กัน และ
ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามขนานกัน

(๒) ส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ เส้นตรงที่ลากตั้ง
ให้ฉากระหว่างด้านตรงกันข้าม

(๓) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า คือ รูปสี่เหลี่ยมด้าน
ขนาน ซึ่งมีด้านเท่ากันทั้ง ๔ ด้าน แต่ไม่มีมุมเป็นมุมฉาก

เราทราบคุณสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้จากเรขาคณิต
บทพิสูจน์ที่ ๒๑ ว่า

(๑) ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน

(๒) มุมที่อยู่ตรงกันข้ามเท่ากัน

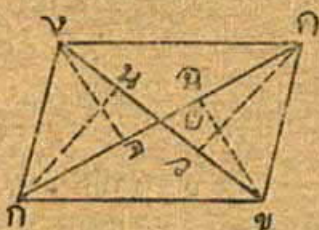
(๓) เส้นทแยงมุมแบ่งพื้นที่ออกเป็น ๒ ส่วนเท่า ๆ กัน

(๔) เส้นทแยงมุมตัดกันออกเป็น ๒ ส่วนเท่า ๆ กัน

(๕) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าตัดกัน
ให้มุมฉาก

- (๖) เส้นตรงซึ่งลากจากทุกที่ก้านคู่พวกกันทั้ง ๒ คู่ (คือมุมที่อยู่ตรงกันข้าม) ให้ทั้งได้ฉากกับเส้นทะแยงมุม เส้นทั้งฉากทั้ง ๒ นั้นยาวเท่ากัน

สมมุติให้ ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยม
ก้านขนาน ก ค และ ง ข เป็นเส้นทะแยงมุม
ตัดกันที่จุดบ และ กน, ขค, คว, งร, เป็น
เส้นทั้งฉากซึ่งลากจากก้านคู่พวกกันลงมาทั้ง



รูปที่ ๑๒

ได้ฉากกับเส้นทะแยงมุม ก ค และ ข ง เส้นเหล่านี้ย่อมเท่ากัน คือ
กบ = คบ, ขบ = งบ, กน = คว, และ ขค = งร เนื้อรูป
สามเหลี่ยม กขค = กงค, กขง = ขคง และรูปสามเหลี่ยม
กขช, ขชค, คชง, และ งชก มีเนื้อที่เท่ากันทั้ง ๔ รูป

สิ่งต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วย่อมช่วยในการคำนวณเนื้อที่ของรูป
สี่เหลี่ยมก้านขนานได้เป็นอันมาก ขอจำไว้ เมื่ออ้างถึงในที่ใด ๆ ว่าจะได้
ไม่ฉงน

๒๗. โจทย์หาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน หรือรูปสี่เหลี่ยม
ขนมเปียกปูนก้านไม่เท่า

- (๑) บอกจำนวนยาวของก้านทั้ง ๒ กับเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่ง
เส้นใดให้ ให้หาเนื้อที่

ถ้ารู้ว่าก้าน ก ข, ข ค และเส้นทะแยงมุม ก ค (จงดูรูปที่ ๑๓)

หรือเส้นตรงแยงมุม ac ยาวเท่าไรแล้ว ก็หาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม abc หรือ $ข ก ง$ ได้ ด้วยใช้กฎ

$\Delta = \sqrt{b(b-a)(b-c)(b-c)}$ แล้วเอา ๒ คูณ ผลคูณเป็น เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน

การที่เอา ๒ มาคูณ ก็เพราะว่า เส้นตรงแยงมุมแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็น ๒ ส่วนเท่าๆ กัน คือเนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมเป็น ๒ เท่าของรูป สามเหลี่ยม

(๒) บวกจำนวนยาวของเส้นตรงแยงมุม และบวกจำนวนยาว ของเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงแยงมุมให้ ให้หาเนื้อที่

คือรู้จำนวนยาวของเส้น ac หรือ $ข ง$ กับรู้เส้น cd หรือ $กน$ แล้วหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม abc หรือ $ข ก ง$ ได้โดยใช้กฎ

$$\text{เนื้อที่ } \Delta = \frac{1}{2} \text{ ยาว} \times \text{สูง}$$

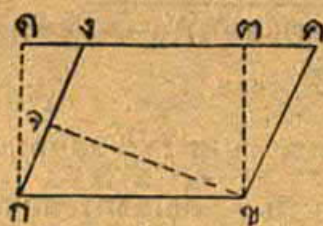
$$\text{หรือ} = \frac{1}{2} ac \times cd$$

$$\text{หรือ} = \frac{1}{2} ขง \times กน$$

แต่เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมเป็น ๒ เท่าของรูปสามเหลี่ยม abc หรือ $ข ก ง$ เพราะฉะนั้น $ac \times cd$ หรือ $ขง \times กน$ เป็นเนื้อที่ของ รูปสี่เหลี่ยมก้านขนานได้ทีเดียว (ไม่ต้องเอา $\frac{1}{2}$ คูณ)

(๓) บวกจำนวนยาวของก้านหนึ่งก้านใด กับบอกล้วนสูง ระหว่างก้านตรงข้าม คู่หนึ่งคู่ใดให้ ให้หาเนื้อที่

คือรู้จำนวนยาวของด้าน กข หรือ ขค กับรู้ส่วนสูง ขค หรือ
ขข แล้วก็หาเนื้อที่ได้



รูปที่ ๑๑

ถ้าเอา กข $\times$ ขค จะเกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขึ้น เช่น รูป
กขคค และทำนองเดียวกัน ถ้าเอา กง $\times$ ขข ก็เกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยม
มุมฉากขึ้นเหมือนกัน

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน กขคก กับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก กขคค
ตั้งอยู่บนฐานอันเดียวกัน คือ กข มีส่วนสูงเท่ากัน คือ ขค

$\therefore$ เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน กขคก

= เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก กขคค (เรขาคณิต
บทพิสูจน์ที่ ๒๔)

= กข $\times$ ขค

$\therefore$ เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ฐาน $\times$ สูง

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน กขคก

ให้ กข = ๒๖ คอก ขค = ๒๘ คอก เส้นทแยงมุม กค = ๓๐ คอก

$$\begin{aligned}
 \text{เนื้อที่ } \triangle ก ข ก &= \sqrt{บ(บ-ก)(บ-ข)(บ-ค)} \\
 &= \sqrt{๔๒ \times ๑๖ \times ๑๔ \times ๑๒} \\
 &= \sqrt{๒ \times ๒ \times ๒ \times ๒ \times ๓ \times ๓ \times ๒ \times ๒} = ๓๓๖ \text{ ตารางศอก}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม ก ข กง} &= ๓๓๖ \times ๒ = ๖๗๒ \text{ ตร. ศ.} \\
 &= \underline{๔๒ \text{ ตารางวา}}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๒ จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมค้านขนาน ก ข กง ซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว ๑๗ เมตร ๕๐ เซ็นติเมตร เส้นตั้งได้ฉากระหว่าง ข กับ ก ค ยาว ๖ เมตร ๘๔ เซ็นติเมตร

$$\text{เนื้อที่ } ก ข กง = ก ค \times ข ค$$

$$= ๑๗.๕ \times ๖.๘๔$$

$$= ๑๑๙.๗ \text{ ตารางเมตร}$$

$$= ๑.๑๙๗ \text{ ไร่}$$

$$17.5$$

$$\underline{6.84}$$

$$105.0$$

$$14.00$$

$$\underline{.700}$$

$$119.700$$

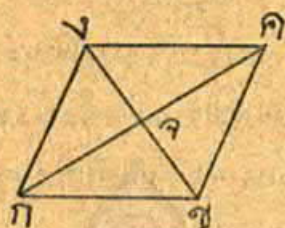
ตัวอย่างที่ ๓ ก ข กง เป็นรูปสี่เหลี่ยมค้านขนาน ค้าน ก ข ยาว = ๑๐๔ ฟุต ข ค = ๙๑ ฟุต ส่วนสูงระหว่าง ก ข กับ กง = ๗๗ ฟุต จงหาส่วนสูงระหว่าง ข ค กับ กง

$$\text{เนื้อที่ ก ข ค ง} = ๑๐๔ \times ๗๗ \text{ ตารางฟุต}$$

$$\therefore \text{ส่วนสูงยาว} = \frac{๑๐๔ \times ๗๗}{๘๘} \text{ ฟุต}$$

$$= ๘๘ \text{ ฟุต}$$

๒๘. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า ถ้าหนดจำนวนยาวของเส้นทแยงมุมทั้ง ๒ ให้



รูปที่ ๑๔

ให้ ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ก ค และ ข ง เป็นเส้นทแยงมุม ตัดกันที่ จ

ให้เส้นทแยงมุม ก ค = ๓ และ ข ง = ๖

ให้อธิบายมาแล้วว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า ตัดกันได้ฉาก

$$\therefore \text{เนื้อที่ ก ข ค ง} = ๒ \text{ เท่าของเนื้อที่รูปสามเหลี่ยม ก ข จ}$$

$$= ก ค \times ข จ$$

$$= ๒ | ๑ ก ค \times ข ง$$

$$= ๒ | ๑ ๓ \times ๖$$

∴ เนื้อรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนก้านเท่า

$$= \frac{1}{2} (\text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม})$$

ตัวอย่าง จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนก้านเท่า ซึ่ง
มีเส้นทแยงมุมยาว ๘ วา และ ๑๐ วา

เนื้อที่

$$= \frac{1}{2} ๗๐ \times ๘$$

$$= \frac{1}{2} \times ๘ \times ๑๐ \text{ ตารางวา}$$

$$= ๘ \times ๕ \quad "$$

$$= \underline{๔๐} \quad "$$

แบบฝึกหัดที่ ๙

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๑. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(ก) ก้านยาว ๑๓ ฟุต และ ๑๔ ฟุต เส้นทแยงมุม
ยาว ๑๕ ฟุต

(ข) ก้านยาว ๓ ฟุต ๙ นิ้ว และ ๓ ฟุต ๖ นิ้ว เส้น
ทแยงมุมยาว ๓ ฟุต ๓ นิ้ว

๒. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก ข ค ง

(ก) เส้นทแยงมุม ก ค ยาว ๒๑ วา ๒ ศอก เส้นตั้งได้
ฉากระหว่าง ข กับ ก ค ยาว ๙ วา

(ข) กค = ๒๐ วา ๓ ศอก เส้นตั้งได้ฉากระหว่าง ข กับ

ก ค ยาว ๑๒ วา

๓. ทุ่งนาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนาน

(ก) ด้านหนึ่งยาว ๒ ศอก ๓ นิ้ว เส้นสูงระหว่างด้านนี้
กับด้านตรงข้ามยาว ๒ ศอก

(ข) ด้านหนึ่งยาว ๔๖๐ วา เส้นสูงระหว่างด้านนี้กับด้าน
ตรงข้ามยาว ๖๐๕ วา (ตอบเป็นไร่)

๔. เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนานเป็น ๑๕.๕ เอเคอร์ ด้าน
ทุก ๆ ด้านยาวด้านละ ๔๖๒ หลา ทุ่งนาเส้นตั้งฉากระหว่างด้านคู่หนึ่ง
คู่ใด

๕. ทุ่งนาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนานแยกป็นด้านเท่า ซึ่งมีด้านยาว
๑๐ นิ้ว และเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว ๑๐ นิ้ว

๖. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนานแยกป็นด้านเท่ายาว ๔
เซ็นติเมตร ๘ มิลลิเมตร และ ๒ เซ็นติเมตร ๖ มิลลิเมตร ทุ่งนา
เนื้อที่

๗. ด้านตรงกันข้ามคู่หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนานยาวด้านละ
๒๓๑ เซ็นติเมตร และอีกคู่หนึ่งยาวด้านละ ๑๒๐ เซ็นติเมตร ส่วน
สูงระหว่างด้านตรงข้ามคู่ที่สั้นเป็น ๑๗ เซ็นติเมตร ทุ่งนาส่วนสูง
ระหว่างด้านตรงข้ามอีกคู่หนึ่งนั้น

๘. เส้นตั้งฉากระหว่างด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านขนาน
ยาว ๖๕ วา และ ๔๑ วา ถ้าด้านยาวยาว ๑๑๔ วา อีกด้านหนึ่ง
ยาวเท่าไร?

๒๙. นารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนก้านเท่า มีเส้นทแยงมุมยาว ๒๘๗๐ วา และ ๑๘๕๐ วา เจ้าของให้เขาเช่าคึกค้ำเช่าไว้ละ ๖ บาท ๒๕ สตางค์ จะไ้ค่าเช่าทั้งคืนเท่าไร ?

๑๐. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนานยาว ๓๔ วา และ ๒๔ วา ก้านหนึ่งยาว ๒๕ วา จงหาเนื้อที่

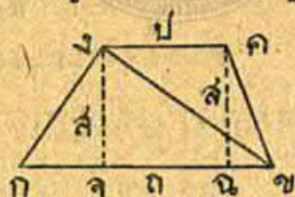
๑๑. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน ซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว ๒๑ เมตร ๘๐ เซ็นติเมตร และ ๑๗ เมตร ๔๐ เซ็นติเมตร ก้านหนึ่งยาว ๑๕ เมตร ๔๐ เซ็นติเมตร

หมวดที่ ๒

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

๒๙. จำกัข้อความ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู นัยหนึ่งเรียกว่า รูป 'ก้นเตี้ยปลายโต' คือ รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีก้านขนานกันอยู่คู่หนึ่ง

๓๐. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูต่อไปนี้



รูปที่ ๑๕

สมมุติให้ ก ข กง เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ก้าน ก ข กับ กง ขนานกัน ถ้าเส้นทแยงมุม ขง จากจุด ข และจุด กง ถ้าเส้น คค และ งง ให้ทั้งไ้ฉากกับก้าน ก ข

กข = ๑๒๓๔๕๖๗๘๙๐ กง = ๑๒๓๔๕๖๗๘๙๐ กฉ = ๑๒๓๔๕๖๗๘๙๐

แล้วเนื้อที่รูปคางหมู กข กง = $\triangle$ กข กง + $\triangle$ ข กง

$$= \frac{๑}{๒} กข \times กง + \frac{๑}{๒} กง \times กข$$

$$= \frac{๑}{๒} กข + \frac{๑}{๒} กข$$

$$= \frac{๑}{๒} ก (๑ + ๒)$$

เนื้อที่ของรูปคางหมู = $\frac{๑}{๒}$ ของส่วนสูง $\times$ ผลบวกของ
ด้านขนานกัน

๓๑. รูปคางหมวยบางรูปมีมุมเป็นมุมฉาก เช่น รูป กฉ กง (ใน
รูปที่ ๑๕) มุม ก ฉ และ ก ก เป็นมุมฉาก

เพราะฉะนั้น ก ฉ เป็นส่วนสูงของ ก ฉ กง ด้วย

เพราะฉะนั้นเนื้อที่ของ ก ฉ กง = $\frac{๑}{๒} ก ฉ \times (ก ฉ + กง)$

$$= \frac{๑}{๒} ก (๑ + ๒)$$

ตัวอย่างที่ ๑. ด้านที่ขนานกันของนาฬิกาเหลี่ยมคางหมวยยาว

๒๓๔๕ วา และ ๑๑๕๖ วา เส้นสูงระหว่างด้านคู่ขนานยาว ๖๘๐ วา
เนื้อที่เป็นเท่าไร?

ด้าน กข = ๒๓๔๕ กง = ๑๑๕๖ และ ก ฉ หรือ ก ก = ๖๘๐

เนื้อที่ = $\frac{๑}{๒} ก (๑ + ๒) = ๓๔๐ \times ๓๕๐๐$ ตารางวา

$$= ๑๑๙๐๐๐๐ = \underline{\underline{๒๙๗๕}} \text{ ไร่}$$

ตัวอย่างที่ ๒ บ้านขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากยาว

๓๔๖๐ เซ็นติเมตร และ ๒๒๖๔ เซ็นติเมตร บ้านทั้งฉากยาว ๑๔๐๐
เซ็นติเมตร จงหาเนื้อที่

บ้าน ก ฉ = ๓๔๖๐ ก ข = ๒๒๖๔ และ ก ฉ = ๑๔๐๐

$$\text{เนื้อที่} = \frac{๑}{๒} \times (ก ฉ + ข) =$$

$$= ๗ \times ๕๗๒๔๐๐ \text{ ตารางเซ็นติเมตร}$$

$$= ๔๐๐๖๘๐๐$$

$$= \underline{๔.๐๐๖๘} \text{ ไร่}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๐

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

๑. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

(ก) บ้านคู่ขนานกันยาว ๖ ฟุต ๒ นิ้ว และ ๗ ฟุต ๔ นิ้ว
สูง ๔ ฟุต

(ข) บ้านคู่ขนานกันยาว ๗ หลา ๕ นิ้ว และ ๔ หลา
๒ ฟุต ๗ นิ้ว สูง ๖ หลา

๒. ก ข กง เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูบ้าน ก ข และ ข ค ขนาน

กัน มุม ก ข ค เป็นมุมฉาก ข ค = ๒๘๘๓ เซ็นติเมตร กง =

๒๑๑๗ เซ็นติเมตร และ ก ข = ๑๖๒๔ เซ็นติเมตร จงหาเนื้อที่

๓. กช คง เป็นรูปสี่เหลี่ยมคี่ กช และ ขค ขนานกัน
มุม กชค เป็นมุมฉาก ถ้า ขค, กง และ กช ยาว ๓๒ เมตร
๑๑ เซ็นติเมตร ๒๔ เมตร ๑๔ เซ็นติเมตร และ ๒๔ เมตร ๕๐ เซ็นติ
เมตร ตามลำดับ จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีเนื้อที่เป็น $\frac{1}{16}$
ของรูปนี้

๔. เนื้อของนาตารางหมู่เป็น ๑๕๔ ตารางเมตร ก้านที่ขนาน
กันยาว ๘ เมตร ๒๕ เซ็นติเมตร และ ๕ เมตร ๗๕ เซ็นติเมตร ให้
หาส่วนสูงระหว่างก้านคู่

๕. มีนาอยู่แปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมคี่ขนานกันอยู่คู่หนึ่ง
ยาว ๑๖๖๔ วา และ ๘๕๐ วา สูงระหว่างก้านคู่เป็น ๓๕๐ วา
จะขายไร่ละ ๑๕๐ บาท ขายหมดจะได้เงินเท่าไร?

๖. นารูปสี่เหลี่ยมคี่แปลงหนึ่ง มีก้านขนานอยู่คู่หนึ่งยาว ๑๓๔๖ วา
และ ๑๑๕๔ วา สูงระหว่างก้านคู่เป็น ๖๒๐ วา ให้เขาเช่าทำ คึก
ค่าเช่าไร่ละ ๑๕ บาท ๑๕ สตางค์ จะไ้ค่าเช่าเท่าไร?

๗. นารูปสี่เหลี่ยมคี่ขนานกันอยู่คู่หนึ่งยาว ๑๗ เมตร ๓๗
เซ็นติเมตร และ ๑๕ เมตร ๑๓ เซ็นติเมตร เจ้าของเขาให้เช่า คึก
ค่าเช่าไร่ละ ๕๐ แฟรงก์ ไ้ค่าเช่าทั้งสิ้น ๑๑๑ แฟรงก์ ๑๑ ของคิม
ส่วนสูงระหว่างก้านคู่ยาวเท่าไร?

๘. ก้านคู่หนึ่งของรูปคี่ยาว ๕๘ หลา และ ๔๒ หลา
อีกคู่หนึ่งยาว ๑๗ หลาเท่ากัน จงหาเนื้อ

๙. ก้านคู่ที่ขนานกันของรูปกางหมุยาว ๑๓ เมตร ๖๐ เซ็นติเมตร และ ๖ เมตร ๔๐ เซ็นติเมตร ก้านอีกคู่หนึ่งยาว ๘ เมตร ๕๐ เซ็นติเมตรเท่ากัน ให้หาเนื้อที่

๑๐. ก ข ค ง เป็นรูปกางหมุ มุม ก และ ง เป็นมุมฉาก มุมที่ค กาง ๑๒๐° ถ้าก้าน ง ค = ๔๐ ฟุต ก ข = ๒๐ ฟุต จงหาเนื้อที่ (ตอบเป็นตารางฟุต ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

หมวดที่ ๓

รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

๓๒. จำกัข้อความ รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า คือ รูปเส้นตรงที่มีด้าน ๔ ด้านยาวไม่เท่ากัน และไม่มีคู่ใดขนานกัน

๓๓. ในรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าใด ๆ ถ้าลากเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งเส้นใด เส้นทะแยงมุมนั้นจะแบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป เมื่อต้องการระบุเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้นเช่นเท่าไร ก็คำนวณเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น แล้วบวกกันเป็นเนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมนั้น ๆ แต่โดยวิธีต้องบอกจำนวนยาวของด้านกับเส้นทะแยงมุม หรือบอกด้านกับมุม หรือบอกเส้นทะแยงมุม กับเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุม

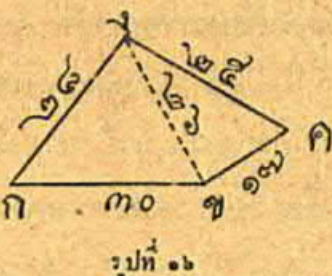
ลงมาถึงเส้นทแยงมุมให้ มีฉะนั้นหาเนื้อที่ไม่ได้ ระบุตัวอย่าง
ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ๑ ก ข คง เป็นรูป
สี่เหลี่ยมคางหมูไม่เท่า ก้าน ก ข = ๓๐ วา

ข ค = ๑๗ วา คง = ๒๕ วา

ง ค = ๒๘ วา เส้นทแยงมุม ข ง = ๒๖ วา ก

เนื้อที่เป็นเท่าไร ?



$$\text{เนื้อที่ ก ข คง} = \Delta \text{ ก ข ง} + \Delta \text{ ข คง}$$

$$\text{เนื้อที่ } \Delta = \sqrt{b(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$\therefore \Delta \text{ ก ข ง} = \sqrt{42 \times 12 \times 12 \times 12}$$

$$= \sqrt{672 \times 12} = 336 \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore \Delta \text{ ข คง} = \sqrt{34 \times 4 \times 4 \times 17}$$

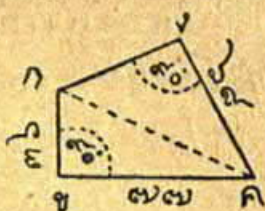
$$= \sqrt{1156 \times 4} = 204 \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่ ก ข คง} = 336 + 204 = 540 \text{ ตารางวา}$$

$$= \underline{\underline{๑ ไร่ ๑ งาน ๔๐ ตารางวา}}$$

ตัวอย่างที่ ๒ ก ข คง เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูไม่เท่า มุม ก ข ค
และ คง ค เป็นมุมฉาก ก้าน ก ข = ๓๖ วา ข ค = ๗๗ วา และ
คง = ๖๘ วา เนื้อที่เป็นเท่าไร ?

ลากเส้นทะแยงมุม กค ให้แบ่งรูป
สี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๒ รูป
คือ กขค และ กคง ในขั้นต้นต้องหาทั้ง
กข และ กคก่อน ค่อยไปจึงหาเนื้อที่ กคง ได้



รูปที่ ๓๗

$$\begin{aligned} \text{กค} &= \text{กข} + \text{ขค} = ๓๖ \times ๗๗ \\ &= ๗๒๒๕ \end{aligned}$$

$$\therefore \text{กค} = ๘๕ \text{ วา}$$

$$\begin{aligned} \text{และ กง} &= \text{กค} - \text{คง} = ๘๕ - ๖๘ \\ &= (๘๕ + ๖๘)(๘๕ - ๖๘) \\ &= ๑๗ \times ๓ \end{aligned}$$

$$\therefore \text{กง} = ๕๑ \text{ วา}$$

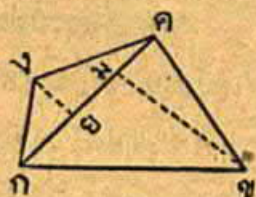
$$\therefore \text{เนื้อที่ } \triangle \text{ กขค} = \frac{๑}{๒} \times ๓๖ \times ๗๗ = ๑๓๖๘ \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่ } \triangle \text{ กคง} = \frac{๑}{๒} \times ๕๑ \times ๖๘ = ๑๗๓๔ \text{ ตารางวา}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{เนื้อที่ กขคก} &= ๑๓๖๘ + ๑๗๓๔ = ๓๑๐๒ \text{ ตารางวา} \\ &= ๗ \text{ ไร่ } ๓ \text{ งาน } ๒๐ \text{ ตารางวา} \end{aligned}$$

๓๘. บอกเส้นทะแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่ง กับบอกเส้นตั้งฉาก
ที่ลากจากมุมถึงเส้นทะแยงมุมให้ ให้หาเนื้อที่

ให้ ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยม ก ค เป็น
เส้นทแยงมุม ข ม ก บ ย เป็นเส้นตั้งฉาก



รูปที่ ๑๘

ให้ ก ค = ท ข ม = ป และ ง บ = ฟ

เนื้อที่ ก ข ค ง

$$= \triangle ก ข + \triangle ก ค ง$$

$$= \frac{1}{2} ก ค \times ข ม + \frac{1}{2} ก ค \times ง บ$$

$$= \frac{1}{2} ท ป + \frac{1}{2} ท ฟ$$

$$= \frac{1}{2} ท (ป + ฟ)$$

$$\therefore \text{เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยม} = \text{ครึ่งของเส้นทแยงมุม} \times \text{ผลบวกของเส้นตั้งฉาก}$$

ตัวอย่าง จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยม ก ข ค ง เส้นทแยงมุม
ก ค = ๘ วา ๒ ศอก เส้นตั้งฉากที่ลากจากมุม ข และมุม ง ถึงเส้น
ทแยงมุมยาว ๓ วา ๓ ศอก และ ๔ วา ๒ ศอก

$$ท = ๘.๕, ป = ๓.๗๕, ฟ = ๔.๕$$

$$\text{เนื้อที่} = \frac{1}{2} ท (ป + ฟ) = \frac{1}{2} \times ๘.๕ \times ๘.๒๕ \text{ ตารางวา}$$

$$= ๓๕.๐๖๒๕ = \underline{\underline{๓๕ \text{ ตารางวา } ๑ \text{ ตารางศอก}}}$$

๓๕. ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคี่ก้นได้มุมฉากแล้ว

ไม่ต้งลากเส้นตั้งฉากอีก เพราะเส้นทแยงมุมเป็นเส้นตั้งฉากอยู่แล้ว

ให้เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง = ก

และให้อีกเส้นหนึ่ง = ว

แล้วเนื้อที่ = $\frac{๑}{๒}$ กว

ตัวอย่าง เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมยาว ๘ วา และ ๑๐ วา

คี่ก้นได้มุมฉาก จงหาเนื้อที่

เนื้อที่ = $\frac{๑}{๒}$ กว = $\frac{๑}{๒} \times ๘ \times ๑๐$ ตารางวา

= ๔๐

ตารางวา

แบบฝึกหัดที่ ๑๑

รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

๑. ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยม เส้นทแยงมุม ก ค ยาว ๑๘ นิ้ว
เส้นตั้งฉากจากมุม ข และมุม ง ยาว ๑๑ นิ้ว และ ๘ นิ้ว จงหาเนื้อที่

๒. ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมเส้นทแยงมุม ก ค ยาว ๘๕ เมตร
เส้นตั้งฉากจากมุม ข และมุม ง ยาว ๕๑ เมตร ๓๒ เซนติเมตร และ
๔๘ เมตร ๘ เซนติเมตร จงหาเนื้อที่

๓. ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมเส้นทแยงมุม ก ค ยาว ๔.๒๕๐

เส้นทึบเมตร เส้นทั้งฉากที่ลากจากมุม ข และมุม ง ยาว ๑๗๖๓ เส้นทึบเมตร และ ๑๑๑๗ เส้นทึบเมตร จงหาเนื้อที่

๕. นารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนึ่งเส้นทึบเมตรแบ่งมุม ๑๕ เฮกโตเมตร เส้นทั้งฉากที่ลากจากมุมตรงข้ามถึงเส้นทึบเมตรแบ่งมุมยาว ๑๑ เฮกโตเมตร และ ๘ เฮกโตเมตร เจ้าของให้ผู้อื่นเช่าทำ คิคค่าเช่าตารางกิโลเมตร ละ ๔๘๐ แฟรงก์ ใ้ค่าเช่าที่ดินเป็นเงินเท่าไร?

๕. จงหาเนื้อที่ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ก ข ค ง บ้าน ก ข = ๑๓ คอก ข ค = ๒๐ คอก ค ง = ๑๗ คอก ก ง = ๑๐ คอก และ เส้นทึบเมตรแบ่งมุม ก ค = ๒๑ คอก

๖. ก ข ค ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า บ้าน ก ข = ๒๖ วา ข ค = ๑๗ วา ค ง = ๑๗ วา ก ง = ๑๒ วา ก ค = ๒๕ วา จงหาเนื้อที่

๗. เส้นทึบเมตรแบ่งมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ก ข ค ง ยาว ๕ หลา ๑ ฟุต และ ๒ ฟุต ๓ นิ้ว ทัดกันได้มุมฉาก จงหาเนื้อที่

๘. เส้นทึบเมตรแบ่งมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ก ข ค ง ยาว ๑๖๒๕ นิ้ว และ ๒๔๘๐ นิ้ว ทัดกันได้มุมฉาก จงหาเนื้อที่

๙. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ก ข ค ง มุม ก ข ค และมุม ค ง ก เป็นมุมฉาก บ้าน ก ข = ๑๕ คอก ข ค = ๒๐ คอก ค ง = ๗ คอก

๑๐. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ก ข ค ง บ้าน ก ข = ๓๕ ฟุต ข ค = ๑๒ ฟุต ค ง = ๒๐ ฟุต ง ก = ๕๑ ฟุต มุม ก ข ค เป็นมุมฉาก

๑๑. ก ข คง เป็นสนามรูปสี่เหลี่ยม ก ข = ๔๐ หลา ข ค = ๗๕ หลา ค ง = ๗๗ หลา มุม ก ข ค และมุม ก ง ค เป็นมุมฉาก จ้างเขาปลูกหญ้า เลี้ยค่าจ้าง ๑๒ ตารางหลาต่อ ๒ ชิลลิง เสียไปทั้งสิ้นเป็นเงินเท่าไร?

๑๒. รางนอกของรูปสี่เหลี่ยม ก ข คง มุม ก ข ค เป็นมุมฉาก ก้าน ก ข = ๗ เมตร ค ง = ๒๐ เซ็นติเมตร ข ค = ๒ เมตร ๑๐ เซ็นติเมตร ก ง = ๖ เมตร ง ค = ๔ เมตร ๕๐ เซ็นติเมตร

๑๓. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคี่มุมกันใดฉาก และยาวเป็นส่วนกัน ๓:๕ ถ้าเนื้อที่เป็น $\frac{3}{4}$ เฮกเตอร์ เส้นทแยงมุมยาวเส้นละเท่าไร?

บทที่ ๒

ว่าด้วย

วงกลม

๓๑. วิชัคานวณพหุทวงกลมซึ่งใช้กันอยู่ทุกวันนี้ นักปราชญ์ผู้ชำนาญในทางคณิตศาสตร์ก็ยังไม่รับรองลงไปเป็นอันแน่นอนว่าจะไม่มีทศฉากเคลื่อนเลย เพราะวงกลมเป็นรูปที่มีขอบเขตคี่เป็นเส้นโค้ง แต่ถ้าจะมีทศฉากเคลื่อนบ้างก็เป็นแต่เพียงเศษเล็กน้อย เพราะฉะนั้นจึงถือกันว่าเป็นวิชาถูกต้องแล้ว

ในชั้นต้นผู้ศึกษาจะต้องรู้ สิ่งต่าง ๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับวงกลมเสียก่อน คือ

เครื่องหมาย มีเครื่องหมายอยู่หลายชนิด สำหรับใช้แทนชื่อสิ่งต่าง ๆ ของวงกลม คือ

⊙ = วงกลม (หมายถึงเนื้อที่)

ว = เส้นรอบวง

ร = รัศมี

π = พาย (เป็นอักษรกรีก ใช้แทนเรโชระหว่างเส้นรอบวง กับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม)

เกณฑ์ บรรดาวงกลมไม่ว่ามีขนาดใหญ่น้อยเท่าไร เส้นรอบวงเกือบจะเป็น $\frac{๓๕๕}{๑๓๓}$ ของเส้นผ่าศูนย์กลางของมันเสมอไป แต่วงกลมเป็น

รูปเส้นโค้ง เนื้อที่ที่คำนวณได้ย่อมจะคลาดเคลื่อนไ้มาก เพราะฉะนั้น
จึงได้เฉลี่ยให้เป็น $\frac{๒๒}{๗}$ เพื่อบ่งชี้การคลาดเคลื่อนให้มันน้อยลง

เกณฑ์หรือค่าของ π ซึ่งใช้กันอยู่มี ๓ ชนิด คือ

(ก) $\frac{๒๒}{๗}$

(ข) ๓.๑๔๑๖

(ค) ๓.๑๔๑๕๙๒๖

(ข) และ (ค) มาจาก $\frac{๓๓๕}{๑๓๓}$ นั่นเอง เป็นแต่ต้องการทศนิยม

มากน้อยตำแหน่งต่างกันเท่านั้น

ทั้ง ๓ ชนิดมีค่าผิดกันเล็กน้อย แต่ได้อธิบายแล้วว่าเศษเล็กน้อยไม่เป็นข้อสำคัญอันใด และในการคำนวณเนื้อที่วงกลม โจทย์
จะต้องบอกค่าของ π ให้ทุกคราวไป ถ้าไม่บอกเราจะเลือกใช้ชนิด
ไหนก็ได้ใน ๓ ชนิดนั้น

คำจำกัดความ

(๑) วงกลม คือรูปเส้นโค้งซึ่งมีเส้นเส้นหนึ่งล้อมรอบเป็น
อาณาเขตและทุกจุดหนึ่งอยู่ตรงกลาง ระยะทางระหว่างจุดหนึ่งกับเส้น
รอบวงเท่ากันโดยรอบตัว

(๒) รัศมีของวงกลม คือเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของ
วงกลมตรงไปถึงเส้นรอบวงไม่ว่ากี่ยุ่ เส้นยาวเท่ากันทั้งหมด

(๓) เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม คือเส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ที่สุดปลายทั้งสองข้างจรกที่เส้นรอบวง

หมวดที่ ๑

เส้นรอบวง, เนื้อ, รัศมี, รูปวงแหวน

เส้นรอบวงของวงกลม

๓๗. ไ้ก่กล่าวไว้ ในตอนที่ว่าด้วยเครื่องหมายแล้วว่า วิธีคำนวณเนื้อทวงกลมย่อมใช้เครื่องหมาย π แทนอัตราส่วนของเส้นรอบวงกับเส้นผ่านศูนย์กลาง

$$\therefore \frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{เส้นผ่านศูนย์กลาง}} = \pi$$

$$\therefore \text{เส้นรอบวง} = \pi \times \text{เส้นผ่านศูนย์กลาง}$$

$$\text{ให้เส้นรอบวง} = ๖$$

$$\text{ให้รัศมี} = r$$

$$\therefore \text{เส้นผ่านศูนย์กลาง} = ๒ r$$

$$\therefore \frac{๖}{๒ r} = \pi$$

$$\therefore ๖ = ๒ r \times \pi = ๒ \pi r$$

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาเส้นรอบวงกลมของวงกลมซึ่งมีรัศมียาว

๖ ศอก ๑๗ นิ้ว ($= \pi \frac{๒๒}{๘๗}$)

$$r = ๖ \text{ ศอก } n = ๑๖๑ \text{ น.}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } r &= ๒ \pi \quad r = ๒ \times \frac{๒๒}{๗} \times ๑๖๑ \text{ น.} \\ &= ๑๐๑๒ \text{ น.} \\ &= \underline{\underline{๑๐๑๒ \text{ ศอก } n.}} \end{aligned}$$

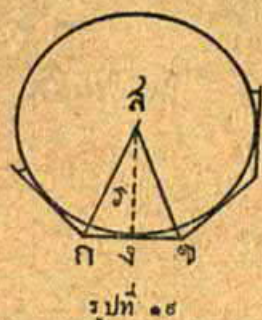
ตัวอย่างที่ ๒ เส้นผ่าศูนย์กลางของล้อรถไฟยาว ๓ ศอก ๓ นิ้ว
หมุน ๑๑๐ รอบทำได้นาฬิกา เกิรทางชั่วโมงละเท่าไร ($\pi = ๓.๑๔๑๖$)

	$r = \text{เส้นผ่าศูนย์กลาง} \times \pi \text{ ศอก}$	$n.$
	$= ๓.๑๒๕ \times ๓.๑๔๑๖$	,, ๑.๑๒๕
	$= ๙.๘๑๗๔$	,, ๙.๘๒๔๘
หนึ่งนาฬิกาไปไกล	$= ๙.๘๑๗๔ \times ๑๑๐$	,, ๑.๑๑๔๒
$\therefore$ หนึ่งชั่วโมงไปไกล	$= ๙.๘๑๗๔ \times ๑๑๐ \times ๖๐$	,, ๐.๖๒๔๘
	$= ๘๐๙.๘๓๕๕$	เส้น ๐.๑๕๖
	$= \underline{\underline{๘๐๙.๙๘๗๑๖}}$	๙.๘๑๗๔

๙.๘
เนือทวงกลม

๓๘. ให้ ก ข เป็นก้านของรูปหลายเหลี่ยมก้านเท่าซึ่งมีจำนวน
ก้าน ก ก้านล้อมวงกลมซึ่งมี ๘ เป็นรูปศูนย์กลาง และให้ ร เป็นรัศมี

(๑) ส เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ก็จะเป็นจุดศูนย์กลางของหลายเหลี่ยมก้านเท่า
ที่ล้อมด้วย



(๒) ระยะทางระหว่างมุมของรูปหลาย
เหลี่ยมก้านเท่า กับจุดศูนย์กลางย่อมเท่ากัน
ทั้งหมด

(๓) รูปสามเหลี่ยมทุก ๆ รูปเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีรัศมี
ของวงกลมเป็นส่วนสูง

(๔) รูปหลายเหลี่ยมมีก้านก้านรูปสามเหลี่ยมก็มีอยู่เท่านั้นด้วย
เนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยมก้านเท่า

$$= k \times \triangle ก ข ส \quad (k = \text{จำนวนก้าน})$$

$$= k \times \frac{1}{2} ก ข \times สง$$

$$= \frac{1}{2} ก ก ข \times r$$

$$\therefore \text{เนื้อที่รูปหลายเหลี่ยม} = \frac{1}{2} (\text{ผลบวกของก้าน}) \times r$$

ถ้าสังเกตรูปจะเห็นได้ว่ารูปหลายเหลี่ยมก้านเท่าที่ขึงวงกลมเกือบ
จะเป็นรูปเกือบก้นมีเนื้อที่ร่วมกัน ถ้าวงกลมยิ่งโตขึ้นจะเห็นว่าก้าน
ของรูปหลายเหลี่ยมก้านเท่ากับส่วนของเส้นรอบวงซึ่งเป็นฐานของรูป
สามเหลี่ยมเกือบจะเป็นเส้นตรงอันเกือบกัน

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{เนื้อที่ของรูปวงกลม} &= \frac{1}{2} \text{เส้นรอบวง} \times r \\
 &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \\
 &= \pi r^2
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ ถ้าผู้ศึกษาพิจารณาการพิสูจน์นี้ให้ถี่ถ้วนจะเห็นได้
ว่า ก้านตั้งกับส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่มีก้านของรูปหลายเหลี่ยม
เป็นฐานนั้นสั้นยาวกว่ากันเป็นรูปสามเหลี่ยมได้จริง แต่รูปสามเหลี่ยม
ที่มีส่วนของเส้นรอบวงเป็นฐานนั้น ก้านตั้งกับส่วนสูงยาวเท่ากัน
เพราะเป็นรัศมีของรูปวงกลมด้วยกัน หากเป็นรูปสามเหลี่ยมแท้ไม่
เพราะฉะนั้นความที่คล้ายคลึงกันก็จะมีได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาเนื้อที่ของรูปวงกลมที่มีรัศมี ๘ คอก ๑๘ นิ้ว
($\pi = \frac{22}{7}$)

$$r = 8 \text{ คอก } 18 \text{ นิ้ว} = \frac{3}{4} \text{ คอก}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เนื้อที่รูปวงกลม} &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \text{ ตารางคอก} \\
 &= 240 \frac{3}{8} = 240.375 \text{ ตารางคอก}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๒ จงหาเนื้อที่รูปวงกลมซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว
๔๒ วา ($\pi = 3.1416$)

$$\text{เส้นผ่าศูนย์กลาง} = 42 \text{ วา} \therefore r = 21 \text{ วา}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และเนื้อที่รูปวงกลม} &= \pi r^2 = 3.1416 \times (21)^2 \text{ ตรว.} \\
 &= \underline{1339.4436} \text{ ตารางวา}
 \end{aligned}$$

รัศมีรูปวงกลม

เมื่อเราทราบว่าเนื้อที่ของรูปวงกลมเป็นเท่าไร เราก็หารัศมีของรูปวงกลมนั้นได้ เพราะได้พิสูจน์แล้วว่า

$$\pi r^2 = \text{เนื้อที่}$$

$$\therefore r^2 = \frac{\text{เนื้อที่}}{\pi}$$

$$\therefore r = \sqrt{\frac{\text{เนื้อที่}}{\pi}}$$

ตัวอย่าง เนื้อที่ของรูปวงกลมเป็น $2 \frac{13}{22}$ ไร่ จงหาเส้นรอบวง
($\pi \frac{22}{7}$)

$$\pi r^2 = 2 \frac{13}{22} \text{ ไร่} = 2.5909 \text{ ตารางวา}$$

$$\therefore r^2 = 2.5909 \times \frac{7}{22}$$

$$= 82.5$$

$$\therefore r = \sqrt{82.5}$$

$$= 9.08$$

$$\therefore \text{เส้นรอบวง} = 9.08 \times 2 \times \frac{22}{7}$$

$$= 62.8$$

รูปวงแหวน

๔๐. จำกัดความ

- (๑) รูปวงแหวน คือรูปวงกลมที่มีศูนย์กลางร่วมกัน
 (๒) เนื้อของรูปวงแหวน คือพื้นที่ระหว่างวงเล็กกับวงใหญ่ หรือพื้นที่ที่วงกลมทั้ง ๒ นั้นต่างกัน

ตัวอย่างที่ ๑ รางน้ำเนื้อของทางกว้าง ๗ ศอก ทำรอบสระรูปวงกลม ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว ๕๔ วา ๒ ศอก ($\pi = \frac{๒๒}{๗}$)

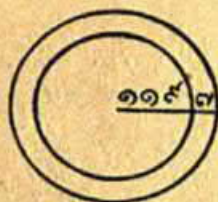
เส้นผ่ากลางสระ = ๕๔ ว ๒ ศ. = ๒๓๘ ศ.

$\therefore$ รัศมีของสระ = ๑๑๙ ศ.

และรัศมีรูปวงกลมใหญ่ = ๑๒๖ ศ.

เนื้อรูปวงกลมใหญ่ = $\pi (๑๒๖)^๒$ ตรศ.

และเนื้อรูปวงกลมเล็ก = $\pi (๑๑๙)^๒$,,



รูปที่ ๒๐

$\therefore$ เนื้อที่ของทาง = $\pi (๑๒๖)^๒ - \pi (๑๑๙)^๒$ ตารางศอก
 $= \pi (๑๒๖ + ๑๑๙)(๑๒๖ - ๑๑๙)$ ตรศ.
 $= \frac{๒๒}{๗} \times ๒๔๕ \times ๗$,,
 $= ๕๓๘๐ = \underline{\underline{๓๓๖.๘๗๕}}$ ตารางวา

ตัวอย่างที่ ๒ รัศมีภายในรูปวงแหวนขาว ๑๑๔ คอก เนื้อ
ของรูปวงแหวนเป็น ๗๔๘๐ ตารางคอก จงหาส่วนกว้างของรูปวงแหวน
($\pi = \frac{22}{7}$)

ให้ส่วนกว้างของรูปวงแหวนกว้าง n คอก

$\therefore$ รัศมีวงนอกเป็น $๑๑๔ + n$ คอก

เนื้อที่เป็น $\pi (๑๑๔ + n)^2$ ตารางคอก

เนื้อทวงในเป็น $\pi (๑๑๔)^2$,,

$\therefore \pi \{(๑๑๔ + n)^2 - (๑๑๔)^2\} =$ เนื้อรูปวงแหวน

$= ๗๔๘๐$ ตารางคอก

$\therefore (๑๑๔ + n)^2 - (๑๑๔)^2 = ๗๔๘๐ \times \frac{7}{22}$ ตารางคอก

$= ๒๓๘๐$,,

หรือ $(๑๑๔ + n)^2 = ๒๓๘๐ + ๒๒๙๖$,,

$= ๑๕๓๗๖$,,

หากเรณท์ให้ $๑๑๔ + n = ๑๒๔$,,

$\therefore n = \underline{๑๐}$,,

แบบฝึกหัดที่ ๑๒

เส้นรอบวง
(เบื้องต้น)

$$\text{ให้ } \pi = \frac{22}{7}$$

๑. จงหาเส้นรอบวงของรูปวงกลมซึ่งมีรัศมียาว

(ก) ๗ เซ็นติเมตร

(ข) $3\frac{1}{2}$ "

(ค) ๒ " ๑ มิลลิเมตร

(ง) ๑๖ เกชิเมตร ๘ เซ็นติเมตร

(จ) ๔ เมตร ๘ เกชิเมตร

(ฉ) ๓๗๘ เซ็นติเมตร

(ช) ๗ เมตร ๒ เกชิเมตร ๘ เซ็นติเมตร

(ซ) ๑๐.๕ มิลลิเมตร

๒. จงหารัศมีของรูปวงกลมซึ่งมีเส้นรอบวงยาว

(ก) ๑๑ ศอก

(ข) ๕๕ วา

(ค) ๔ เส้น ๘ วา

(ง) ๘ วา ๑ ศอก

๓. ลวกลิ้นหนึ่งซอกเป็นรูปวงกลมรัศมียาว ๓๕ นิ้ว ถ้าเอาลวกลิ้นนั้นซอกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก้านจะยาวเท่าไร ?

๔. ลวกลิ้นหนึ่งซอกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโก้นอก ๑๒๑ นิ้ว ตารางเหลี่ยม ถ้าเอามาซอกเป็นรูปวงกลม รัศมียาวเท่าไร ?

๕. ช่องน้ำพุรูปวงกลมรัศมียาว ๒๑ ศอก จะทำเหล็กประกบขอบ เสียค่าจ้างทำยาวศอกละ ๑ บาท ๖๐ สตางค์ จะเสียเงินทั้งสิ้นเท่าไร ?

๖. เส้นผ่าศูนย์กลางของล้อจักรยานยาว ๓๐ เซนติเมตร ขี่ไปหมุน ๖๓๐๐ รอบ เป็นทางไกลเท่าไร ?

๗. วิ่งแข่งกันในหนทางรูปวงกลมซึ่งมีรัศมียาว ๘๔ วา กิกเป็นทางไกล ๒๖๔ เส้น ถามว่าผู้ชนะจะต้องวิ่งกี่รอบ ?

๘. เส้นผ่าศูนย์กลางล้อจักรยานยาว ๓๖ นิ้ว ขี่ไปไกล ๑๖๕ เส้น ล้อจะหมุนกี่รอบ ?

๙. ล้อรถไฟกว้าง ๗ คืบ หมุน ๑๒๐ รอบต่อ ๑ นาที ในชั่วโมงหนึ่งจะเหิรทางไกลเท่าไร ?

๑๐. ล้อรถไฟกว้าง ๒ ศอกคืบ หมุน ๑๖๘ รอบต่อ ๑ นาที ชั่วโมงหนึ่งจะเหิรทางไกลเท่าไร ?

๔๑

(เนอท)

$$\pi = \frac{๒๒}{๗}$$

๑๑. งบหาเนอทของรูปวงกลมซึ่งมีรัศมียาว

(ก) ๗ ศอก

(ข) $๓\frac{๑}{๒}$ ศอก

(ค) ๒๑ นิ้ว

(ง) ๑๔ วา

๑๒. สนามรูปวงกลมเส้นผ่ากลางยาว ๔๒ เมตร จะโรยหิน
ให้ทั่วสนาม เสียค่าจ้างการวางเมตรละ ๕ บาท ๖๐ สตางค์ เสียเงิน
ทั้งสิ้นเท่าไร?

๑๓. เส้นผ่ากลางของนาฬิกาปลุกยาว ๗๗๐ วา เจ้าของจะขาย
ไว้ละ ๕ ๖ บาท ๑๖ สตางค์ จะไ้เงินทั้งสิ้นเท่าไร?

(รัศมี)

๑๔. งบหารัศมีของรูปวงกลมซึ่งมีเนอท

(ก) ๑๕๔ ตารางเมตร

(ข) ๓๘๕๐ ตารางเซนติเมตร

(ค) ๖๑๖ ตารางวา

(ง) ๑๘๖.๓๔ ไร่

๑๕. งานแขวนรูปกลมราคา ๓ บาท ๘๖ สตางค์ ผู้ขายคิด

ใต้การวางนิ้วละ ๓ นิ้ว สี่ทางก็ รัศมีของท่านโยนเป็นเท่าไร?

๑๖. นารูปวงกลมให้เขาเข้าทั้งสิ้น ๑๖๕๐ บาท โดยคิดไว้ละ ๒๑ บาท จงหารัศมีของนาแปลงนี้

๑๗. จงหารัศมีของนารูปวงกลมซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับวงกลมอีก ๒ วง รวมกันและวงทั้ง ๒ นั้น รัศมียาว ๑๒ วา และ ๓๕ วา

๑๘. จงหารัศมีรูปวงกลมที่มีเนื้อที่เท่ากับอีก ๓ วงรวมกัน และวงทั้ง ๓ นั้นรัศมียาว ๘ นิ้ว ๙ นิ้ว และ ๑๒ นิ้ว

๑๙. รัศมีของรูปวงกลมยาว ๕ นิ้ว จงหารัศมีของอีกวงหนึ่ง ซึ่งมีเนื้อที่ ๘ เท่าของวงนี้

๒๐. จงหารัศมีของรูปวงกลม ซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านแฉก ๑๑ ศอก รัง ๖ ศอก (ทศนิยม ๓ ตำแหน่ง)

(เนื้อที่และเส้นรอบวง)

๒๑. จงหาเนื้อที่ของรูปวงกลมซึ่งมีเส้นรอบวงยาว

(ก) ๒๒ นิ้ว

(ข) ๕๕ กิโลเมตร

๒๒. จงหาเส้นรอบวงของรูปวงกลมซึ่งมีเนื้อที่

(ก) ๑.๕๔ ไร่

(ข) ๘๖.๖๒๕ ไร่

(รูปวงแหวน)

๒๓. จงหาเนื้อที่ของพหุรูปวงแหวน ซึ่งมีรัศมีของวงภายนอก
และภายในยาว ๑๑ นิ้ว และ ๕ นิ้ว

๒๔. จงหาเนื้อที่ของรูปวงแหวนที่มีเส้นผ่ากลางของวงภายนอก
และภายในยาว ๔๔ นิ้ว และ ๓๐ นิ้ว

๒๕. สันามรูปกลมเส้นผ่ากลางยาว ๒๒๐ วา จะทำทางรอบ
นอกกว้าง ๓ วา จงหาเนื้อที่ของทาง

๒๖. ถังน้ำสังกะสีรูปกลมปากกว้าง ๑๓ นิ้ว จะเอาไม้หนา
๑ นิ้วทำขอบปากข้างนอก จงหาเนื้อที่ของขอบถึงเมื่อทำขอบแล้ว

(โฑย่รคน)

๒๗. แผ่นเหล็กรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว ๔ ศอก จะทำเป็น
รูปกลมหนึ่งรูป รัศมียาว ๓ $\frac{๑}{๒}$ ศอก เศษที่เหลือจะขายการวางศอกละ
๑.๕๔ บาท จะได้เงินเท่าไร?

๒๘. สวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากชนิดหนึ่ง แวง ๔๘ วา รุ่ง ๖๕ วา
จะแบ่งออกเป็นรูปกลม ๕ แปลง แปลงกลางกว้าง ๓๐ วา แปลง
อื่นๆ กว้าง ๒๐ วา เศษที่เหลือจะปลูกหญ้าเลี้ยงวัวพันธุ์ปลูก ๕
การวางวาท่อ ๗ $\frac{๑}{๒}$ ศอก จะเสียเงินไปทั้งสิ้นเท่าไร?

๒๙. จงหาเนื้อที่ของรูปวงกลม ซึ่งมีเส้นผ่ากลางยาว ๘ เมตร
๔ เกษิเมตร

๓๐. โรงงานน้ำหนักรองานแปรรูปกลม
(๑ ตารางนิ้ว หนัก ๗ ตำลึง)

ซึ่งกว้าง ๘ นิ้ว

แบบฝึกหัดที่ ๑๓

เส้นรอบวงกับเนื้อที่

(ปากขึ้น)

เส้นรอบวง

$$\pi = ๓.๑๔๑๖$$

๑. ถ้าเส้นศูนย์สูตรของโลกยาว ๗๔๒๕ ไมล์ โรงงาน
ที่ต่างกันของเส้นศูนย์สูตรระหว่าง (๑) $\pi = \frac{๒๒}{๗}$ (๒) $\pi =$
๓.๑๔๑๖

๒. โรงหาคีมของรูปวงกลม ซึ่งมีเส้นรอบวงยาวเท่าผลบวกของ
ด้านทั้ง ๔ แห่งสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเนื้อที่ ๓๐ ไร่ ๑ งาน

๓. ถังรถจักรยานกว้าง ๓๒ นิ้ว ชีไปไกล ๕๒ เส้น ๗ วา
๑๘ นิ้ว หมุน ๑๐๐๐ รอบ โรงหาค่าของ π (ทศนิยม ๓ ตำแหน่ง)

๔. สมมุติว่าทางเค็รของโลกเค็รเป็นรูปวงกลม รัศมียาว
๔๒๗,๐๐๐.๐๐๐ ไมล์ โลกเค็รวินาที่ละกี่ไมล์ (ปีหนึ่ง =
 $๓๖๕ \frac{๑}{๔}$ วัน)

๕. เส้นรอบล้อใหญ่และล้อเล็กของจักรยานเป็นอัตราส่วน

๔๕:๑๑ ถ้าซื้อไปไกล $\frac{9}{2}$ ไมล์ ถัสดึงหนักมากกว่าถัสดึงใหญ่ ๒๗๒ รอบ
จงหาเส้นรอบวงถัสดึงใหญ่และถัสดึงเล็ก

(เนื้อท)

$$\pi = \frac{22}{7}$$

๖. เสียค่าจ้างทำรั้วรอบนารูปวงกลม ๒๔๗.๕ บาท โดยคิด
เกคาเมตรละ ๒ บาท ๒๕ สตางค์ เนื้อที่ของนาแปลงนี้เป็นเท่าไร?

๗. จ้างเขาทำรั้วรอบนารูปกลมสิ้นเงิน ๒๖๔ บาท โดยคิด
เกคาเมตรละ ๕ บาท ๒๕ สตางค์ ถ้าจะขายนาแปลงนี้ถาวรวงเกคาเมตร
ละ ๑๐๑ บาท จะได้เงินเท่าไร?

๘. เชียนรูปวงกลมกว้าง ๑ นิ้ว ยนกระดานยาว ๒๖ นิ้ว กว้าง
๑๔ นิ้ว เชียนจนเต็ม จะเหลือที่ว่างอีกกี่ตารางนิ้ว?

$$\pi = 3.1416$$

๙. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับรูปวงกลม
และรัศมีของรูปวงกลมนยาว ๕ นิ้ว

๑๐. จงหาพื้นที่ของรูปวงกลม ซึ่งมีเนื้อที่เท่ากับเนื้อที่รูปสี่
เหลี่ยมจัตุรัส และด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว ๒๕๐ วา

(รูปวงแหวน)

$$\pi = \frac{22}{7}$$

๑๑. ช่องน้ำพุรูปวงกลมกว้าง ๓๑ เมตร จะทำทางโคจรรอบ

กว้าง ๔ เมตร เล็บกำโรยหินทรายเมตรละ ๑.๐๖ บาท จะเสียเงิน
เท่าไร?

๑๒. เข้ายิงขึ้นรูปวงกลมกว้าง ๑๖ นิ้ว ขึ้นนอกเข็มนาฬิกา
กว้าง ๕ นิ้ว ถัดเข้าไปเข็มนาฬิกา ๔ นิ้ว จงเปรียบเทียบ
เนื้อที่ต่างกับเนื้อที่กลม

๑๓. เนื้อที่ของรูปวงแหวนเป็น ๑๓๒๐ ตารางนิ้ว เส้นผ่า
กลางวงนอกยาว ๔๔ นิ้ว จงหารัศมีของรูปวงใน

๑๔. รัศมีวงนอกของรูปวงแหวนยาว ๑๒ นิ้ว เนื้อที่ของรูป
วงแหวนเป็น $๓๔\frac{๔}{๗}$ ตารางนิ้ว จงหาส่วนกว้างของรูปวงแหวน

๑๕. รัศมีภายในของรูปวงแหวนยาว ๒๐ นิ้ว และเนื้อที่ของ
รูปวงแหวนเป็น ๒๖๔ ตารางนิ้ว จงหาส่วนกว้างของรูปวงแหวน

๑๖. รัศมีวงนอกของรูปวงแหวนยาว ๑๖ นิ้ว เนื้อที่ของรูป
วงแหวนเป็น ๓๕๒ ตารางนิ้ว จงหาส่วนกว้างของรูปวงแหวน

๑๗. เส้นผ่ากลางวงนอกของรูปวงแหวนยาว ๓๐ นิ้ว เนื้อที่
รูปวงแหวนเป็น ๕๐๖ ตารางนิ้ว จงหาส่วนกว้างของรูปวงแหวน

(โจทย์ระคน)

๑๘. เหล็กแผ่นหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว ๑๕ นิ้ว
แบ่งเป็นรูปวงกลมเท่า ๆ กัน ๔ วง ยังเหลือเศษ ๗๑ ตารางนิ้ว
จงหารัศมีของรูปวงกลม

๑๙. กระดานยาว ๘๘ นิ้ว กว้าง ๑๖ นิ้ว ตัดเป็นรูปวงกลม กว้าง ๘ นิ้ว ยังเหลือเศษอีก ๓๕.๒ ตารางนิ้ว ถามว่าตัดเป็นรูปวงกลม กว้าง?

๒๐. รูปวงกลม ๒ วง มีศูนย์กลางร่วมกัน เนื้อที่รูปวงแหวน เท่ากับเนื้อที่รูปวงเล็ก จงเปรียบเทียบรัศมีของรูปวงทั้ง ๒ นี้ และถ้ารัศมี รูปวงนอกยาว ๑๐๐ นิ้ว รัศมีรูปวงในจะยาวเท่าไร?

๒๑. รูปวงกลม ๓ วง มีศูนย์กลางร่วมกัน รัศมีรูปวงใหญ่ และรูปวงเล็กยาว ๑๐ นิ้ว และ ๘ นิ้ว เนื้อที่รูปวงแหวนระหว่างรูป วงกลางกับรูปวงใหญ่ และรูปวงกลางกับรูปวงเล็กเท่ากัน จงหารัศมี รูปวงกลาง

หมวดที่ ๒

รูปวงกลมเกี่ยวข้องกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
และรูปสามเหลี่ยม

๔๑. กำหนดรูปวงกลมให้ ให้หาคำนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งบรรจุอยู่ภายใน

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาคำนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งบรรจุอยู่ภายใน รูปวงกลมที่มีเส้นรอบวงยาว ๑๓๒ นิ้ว ($\pi = \frac{22}{7}$)

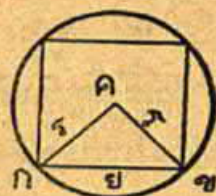
$$\text{๒ร } \pi = ๑๓๒ \text{ นิ้ว}$$

$$\therefore r = \frac{๑๓๒}{๒\pi} \text{ นิ้ว}$$

$$= ๑๓๒ \times \frac{๗}{๔๔} \text{ นิ้ว}$$

$$= ๒๑ \text{ นิ้ว}$$

ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มุม ก ค ข
เป็นมุมฉาก และเท่ากับครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสซึ่งมีด้าน ก ข เป็นเส้นทแยงมุม แต่ ก ข
เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่บรรจุไว้



รูปที่ ๒๑

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใด ๆ

$$= \text{ด้าน} \times \sqrt{๒}$$

$$\therefore \text{ก ข ทวิ} = r \sqrt{๒} = ๒๑ \times ๑.๔๑๔\dots\dots\dots$$

$$= ๒๙.๖๙๐ = ๓๐ \text{ นิ้ว}$$

ตัวอย่างที่ ๒ เนื้อรูปวงกลมและเนื้อรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ซึ่งบรรจุอยู่ในรูปวงกลมต่างกันเป็น ๕๐๔ ตารางศอก หนึ่งทวามี
ของรูปวงกลม ($\pi = \frac{๒๒}{๗}$)

$$\odot = \pi r^2$$

ด้านของรูปจัตุรัสบรรจุภายใน = $r \sqrt{๒}$ (ดูตัวอย่างที่ ๑)

$$\therefore \text{เนื้อรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = (r \sqrt{๒})^2 = ๒ r^2$$

$$\therefore \pi r^2 - 2r^2 = \text{เนื้อที่ต่างกัน}$$

$$= 504 \quad \text{ตารางศอก}$$

$$\text{หรือ } \left(\frac{22}{7} - 2\right)r^2 = 504 \quad ,$$

$$\therefore r^2 = 441 \quad ,$$

$$\therefore r = 21 \quad \text{ศอก}$$

ตัวอย่างที่ ๓ จงหารัศมีของรูปวงกลมที่บรรจุภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เนื้อที่ของรูปวงกลมกับเนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่างกัน ๑๖๘ ตารางวา ($\pi = \frac{22}{7}$)

ถ้าเขียนรูปดูจะเห็นได้ว่า ด้านหนึ่งๆ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น ๒ เท่าของรัศมีรูปวงกลมบรรจุอยู่ภายใน

$$\text{คือ} \quad = 2r$$

$$\therefore \text{เนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = 4r^2$$

$$\text{และ } \odot = \pi r^2$$

$$\therefore 4r^2 - \pi r^2 = \text{เนื้อที่ต่างกัน}$$

$$= 168 \quad \text{ตารางวา}$$

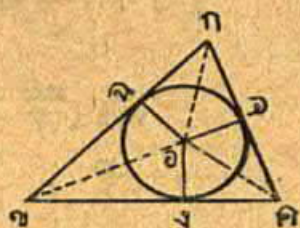
$$\text{หรือ } r^2 \left(4 - \frac{22}{7}\right) = 168 \quad ,$$

$$\therefore r^2 = 196 \quad ,$$

$$\therefore r = 14 \quad \text{วา}$$

๔๒. บอกจำนวนยาวของด้านทั้งรูปสามเหลี่ยมให้ ใต้หา
 รัศมีของรูปวงกลม ซึ่งบรรจุอยู่ภายในรูป
 สามเหลี่ยม

ให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ง ร น
 เป็นรูปที่เส้นรอบวงสัมผัสกับด้านของรูป



รูปที่ ๒๒

สามเหลี่ยม อ เป็นรูปศูนย์กลางของรูปวงกลม ให้ด้าน ก ข = ก,
 ข ค = ก และ ค ก = ข ยูนิต แล้ว อ ง = อ ร = อ น = ร

$$\triangle ก ข ค = \triangle อ ข ค + \triangle อ ค ก + \triangle อ ก ข$$

$$\triangle อ ข ค = \frac{1}{2} อ ง \times ข ค = \frac{1}{2} ร ก$$

$$\triangle อ ค ก = \frac{1}{2} อ ร \times ค ก = \frac{1}{2} ร ข$$

$$\triangle อ ก ข = \frac{1}{2} อ น \times ก ข = \frac{1}{2} ร ก$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ก ข ค &= \frac{1}{2} ร ก + \frac{1}{2} ร ข + \frac{1}{2} ร ค \\ &= \frac{1}{2} ร (ก + ข + ค) \end{aligned}$$

แก้ด้านของ $\triangle ก ข ค$ รวมกัน = ๒ บ [ตามกฎที่ทำมาแล้ว]

$$\therefore \triangle = \frac{1}{2} ร \times ๒ บ$$

$$= ร บ$$

$$\therefore ร = \frac{\triangle}{บ}$$

นักรัศมีรูปวงกลม = เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ทหารด้วยครึ่ง
หนึ่งของผลบวก ๓ ด้านของรูปสามเหลี่ยม

ตัวอย่าง จงหารัศมีของรูปวงกลม ซึ่งบรรจุอยู่ภายในรูปสาม
เหลี่ยมที่มีด้านยาว ๒๖ วา ๒๘ วา และ ๓๐ วา

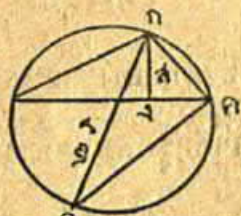
$$ก = ๒๖, ข = ๒๘, ค = ๓๐$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{ข(ข-ก)(ข-ค)(ข-ค)} \\ &= \sqrt{๔๒ \times ๑๖ \times ๑๔ \times ๑๒} \\ &= \sqrt{๒๒๒๒๔} = ๑๔๘ \text{ ตารางวา}\end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{ข} = \frac{๑๔๘}{๔๒} = ๓.๕๒ \text{ วา}$$

๔๓. กำหนดรูปสามเหลี่ยมใดๆ ให้ ให้หารัศมีของรูปวงกลม
ซึ่งล้อมรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ให้ ก ข ๓ เป็นรูปวงกลมล้อมรูปสาม
เหลี่ยม ก ข ค และ ก ง เป็นส่วนสูง ลากเส้น
ก ๓ ผ่านจุดศูนย์กลางรูปวงกลม และลากเส้น
๓ ค



รูปที่ ๒๓

เพราะว่ารูปสามเหลี่ยม ก ข ง และ ก ค ๓ เป็นรูปสามเหลี่ยม
คล้ายกัน (เรขาคณิตพิสัยที่ ๗๗)

$$\therefore \frac{กข}{กจ} = \frac{กก}{กค} \quad (\text{เรขาคณิตพีธากอรัสที่ ๖๒})$$

$$\text{หรือ } กจ \times กก = กค \times กข$$

ถ้าให้ด้านของรูปสามเหลี่ยม ก ข ค ยาว ก, ข, ค ๒๒

$$\text{และ } กจ \times กก = กค \times กข \quad \text{หรือ } ๒๒ \times ๒๒ = ๒๒ \times ๒๒$$

$$\therefore ๒ = \frac{๒ \times ๒}{๒๒} = \frac{๒ \times ๒ \times ๒}{๒๒ \times ๒} \quad (\text{คือ } ก \text{ คูณทั้งสองข้าง})$$

$$\text{แต่ } ๒ \times ๒ = ๒ \quad \text{เท่าเนื้อรูปสามเหลี่ยม ก ข ค}$$

$$\therefore ๒ \times ๒ = ๔ \dots\dots\dots ก ข ค$$

$$\therefore ๒ = \frac{๒ \times ๒ \times ๒}{๔ \triangle}$$

นี่คือวิธีของรูปวงกลมที่ล้อมรูปสามเหลี่ยม = ผลคูณของด้านทั้งสามแห่งรูปสามเหลี่ยมที่บรรจุภายในรูปวงกลม ทารด้วย ๔ เท่าของเนื้อรูปสามเหลี่ยม

ตัวอย่าง จงหาวิธีของรูปวงกลมซึ่งล้อมรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว ๕๒ วา ๕๖ วา และ ๖๐ วา

$$ก = ๕๒, ข = ๕๖, ก = ๖๐$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{ข(ข-ก)(ข-ข)(ข-ก)} \\ &= \sqrt{๕๕ \times ๓๒ \times ๒๕ \times ๓๕} \\ &= \sqrt{๒๒๕๐๐} = ๑๕๐ \text{ ตารางวา} \\ r &= \frac{ก \times ข \times ก}{๔ \Delta} = \frac{๕๒ \times ๕๖ \times ๖๐}{๔ \times ๑๕๐} \text{ วา} \\ &= ๓๒ \frac{๑}{๒} = ๓๒ \text{ วา } ๒ \text{ ศอก}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๔

รูปวงกลมกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส : รูปวงกลมกับรูปสามเหลี่ยม

$$\pi = \frac{๒๒}{๗}, \sqrt{๒} = ๑.๔๑๔๑$$

(รูปวงกลมกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

๑. จงหา (ตอบเป็นนิ้ว, ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง) เส้นรอบวงของรูปวงกลม (ก) บรรจุ (ข) ถัง รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว ๑๖ นิ้ว

๒. จงหา (ตอบเป็นตารางนิ้ว, ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง) เนื้อที่ของรูปวงกลม (ก) บรรจุ (ข) ถัง รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว ๑๒ นิ้ว

๓. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเนื้อที่ ๓๑ ไร่ ๑ งาน ให้หาเส้นรอบวงของรูปวงกลมที่บรรจุภายใน และหาเนื้อที่ของรูปวงกลมที่ล้อมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้วย

๔. จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (ก) บรรจุ (ข) ล้อมรูปวงกลมที่มีเนื้อที่ ๓๘๕๐ ตารางนิ้ว (ตอบเป็นนิ้ว)

๕. จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีเส้นรอบวงของรูปวงกลมที่บรรจุภายใน และที่ล้อมภายนอกต่างกัน ๔๔ นิ้ว

๖. เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กับเนื้อที่ของรูปวงกลมที่บรรจุภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้นต่างกัน ๑๐๕๐ ตารางนิ้ว จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(รูปวงกลมก็บรรจุตามเหลี่ยมด้านเท่า)

$$\sqrt{3} = ๑.๗๓๒๐๕$$

๗. จงหาเนื้อที่ของรูปวงกลม (ก) บรรจุ (ข) ล้อมรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาว ๔๒ นิ้ว

๘. จงหาค่าของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (ก) บรรจุ (ข) ล้อมรูปวงกลมที่มีเนื้อที่ ๔๖๒ ตารางนิ้ว

๙. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก็รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าตั้งอยู่บนฐานอันเดียวกัน เนื้อที่ของรูปวงกลมที่บรรจุในรูปสามเหลี่ยมกับรูปสี่เหลี่ยมต่างกันเป็น ๙๒๔ ตารางนิ้ว จงหาค่าที่รวมกันของรูปทั้ง ๒ นั้น

๑๐. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีผลบวก
ของด้านยาวเท่ากัน ให้หาอัตราเนื้อที่ของ (ก) รูปวงกลมที่บรรจุ
ต่อบรรจุ (ข) รูปวงกลมที่ล้อมต่อล้อม

(รูปวงกลมกับรูปสามเหลี่ยม)

๑๑. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก ให้หาพื้นที่
ของรูปวงกลมที่บรรจุและที่ล้อม กำหนดด้านให้ดังนี้

$$(๑) \text{ ด้าน ก } = ๑๕ \text{ นิ้ว } \text{ ด้าน ข } = ๘ \text{ นิ้ว}$$

$$(๒) \text{ ด้าน ก } = ๓๕ \text{ นิ้ว } \text{ ด้าน ข } = ๑๒ \text{ นิ้ว}$$

๑๒. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม จงหาพื้นที่รูปวงกลมที่บรรจุและ
หาพื้นที่รูปวงกลมที่ล้อม กำหนดด้านให้

$$(๑) \text{ ด้าน ก } = ๒๑ \text{ นิ้ว } \text{ ข } = ๒๐ \text{ นิ้ว } \text{ ค } = ๑๓ \text{ นิ้ว}$$

$$(๒) \text{ ด้าน ก } = ๕๑ \text{ นิ้ว } \text{ ข } = ๓๗ \text{ นิ้ว } \text{ ค } = ๒๐ \text{ นิ้ว}$$

๑๓. เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น ๘๔ ตารางนิ้ว รัศมี
ของรูปวงกลมที่ล้อมยาว ๑.๒๕ นิ้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

๑๔. เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็น ๘๔ ตารางนิ้ว รัศมีรูป
วงกลมที่ล้อมยาว ๘ นิ้ว รัศมีรูปวงกลมที่บรรจุยาว ๔ นิ้ว ถ้าด้าน
ก = ๑๕ นิ้ว จงหาพื้นที่ ก และด้าน ข ของรูปสามเหลี่ยม

๑๕. รูปสามเหลี่ยมมุมป้านที่มีด้านยาว ๒๖ วา ๒๕ วา และ ๑๗ วา และให้ a_1 a_2 a_3 เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมทั้งสามถึงด้านตรงข้าม จึงแสดงให้เห็นว่ารัศมีของรูปวงกลมที่บรรจุภายใน

$$= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3r$$



บทที่ ๗

ว่าด้วย

คอรุค และอารุคของรูปวงกลม

หมวดที่ ๑

คอรุคของรูปวงกลม

๔๔. จำกัดความ

(๑) เส้นตรงซึ่งลากต่อรุค ๒ รุคที่อยู่ในเส้นรอบวงกลมเรียกว่า
“คอรุค” ของรูปวงกลม

(๒) คอรุคของอารุคของรูปวงกลม คือเส้นตรงซึ่งลากต่อรุค
๒ รุค ที่อยู่ต่อกันปลายทั้ง ๒ ข้างของอารุคของรูปวงกลม

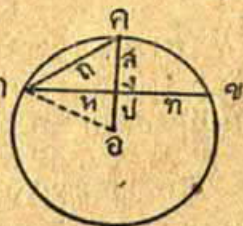
ให้ ก ข ค เป็นรูปวงกลม อ เป็นรุคศูนย์กลาง และเส้นตรง
ก ข เป็นคอรุคที่ต่อรุค ก และ ข

จากรุค อ ลากเส้น อ ง ให้ตั้งฉากกับ ก ข ที่รุค ง และลากเส้น
ไปถึงเส้นรอบวงที่รุค ค และลาก ก ค ซึ่งเป็นคอรุคของครึ่งอารุค
ก ข ค เราได้ความรู้ว่าเรขาคณิตบทที่ ๓๑ ว่า

(๑) ง เป็นรุคศูนย์กลางของคอรุค ก ข ค

(๒) ค เป็นรุคศูนย์กลางของอารุค ก ค ข

ให้คอรุค ก ข ยาว = ๒ ท ๒



รูปที่ ๒๔

เพราะฉะนั้น กง หรือ ขง เท่ากัน = ท ๒ และให้ ก ข ซึ่งเป็นส่วนสูงของ

อาร์ก = ส บุนิต และให้ ก ก ซึ่งเป็นคอรุกของครึ่งอาร์ก = ถ บุนิต
และรัศมี อ ก = ร บุนิต และให้เส้นตั้งฉาก อ ง = ป บุนิต

เมื่อรู้ยาวของคอรุกและส่วนสูงของอาร์กแล้ว ก็หาคอรุกของ
ครึ่งอาร์กได้ตามวิธีของเรขาคณิต บทพิสูจน์ที่ ๒๔

เพราะว่า ก ง ค + เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\text{เพราะฉะนั้น } \overset{๒}{\text{ถ}} = \overset{๒}{\text{ท}} \quad \overset{๒}{\text{ส}} \dots\dots\dots (๑)$$

โดยทำนองเดียวกัน ถ้าเรารู้ความยาวของคอรุกและส่วนสูง
ของอาร์กแล้ว เราก็หารัศมีของรูปวงกลมได้เหมือนกัน คือ :-

$$\begin{aligned} \overset{๒}{\text{ร}} &= \overset{๒}{\text{ท}} + \overset{๒}{\text{ป}} \\ \text{แต่ } \overset{๒}{\text{ป}} &= (\overset{๒}{\text{ร}} - \overset{๒}{\text{ส}}) \\ \therefore \overset{๒}{\text{ร}} &= \overset{๒}{\text{ท}} + (\overset{๒}{\text{ร}} - \overset{๒}{\text{ส}}) \\ &= \overset{๒}{\text{ท}} + \overset{๒}{\text{ร}} - \overset{๒}{๒} \overset{๒}{\text{ร}} \overset{๒}{\text{ส}} + \overset{๒}{\text{ส}} \\ \text{หรือ } \overset{๒}{๒} \overset{๒}{\text{ร}} \overset{๒}{\text{ส}} &= \overset{๒}{\text{ท}} + \overset{๒}{\text{ส}} \dots\dots\dots (๒) \end{aligned}$$

พิจารณา (๑) และ (๒) จะเห็นได้ว่า $\overset{๒}{\text{ถ}}$ ก็ $\overset{๒}{\text{ท}}$ $\overset{๒}{๒} \overset{๒}{\text{ร}} \overset{๒}{\text{ส}}$ ก็ $\overset{๒}{\text{ถ}}$
ต่างก็เท่ากับ $\overset{๒}{\text{ท}} + \overset{๒}{\text{ส}}$ ด้วยกันทั้ง ๒ ฝ่าย

$$\text{เพราะฉะนั้น } \overset{๒}{\text{ถ}} = \overset{๒}{๒} \overset{๒}{\text{ร}} \overset{๒}{\text{ส}} \dots\dots\dots (๓)$$

ตัวอย่างที่ ๑ หาคอรุกของอาร์กสูง ๓๒ นิ้ว รัศมีของรูป
วงกลมยาว ๖๕ นิ้ว

$$ช ก = ช ก = ๖๕ \text{ และ } ง ก = ๓๒$$

$$\therefore ช ง = ช ก - ง ก = ๖๕ - ๓๒ = ๓๓$$

$$\therefore ก ง = \frac{๒}{๒} = ช ก - ช ง = (ช ก + ช ง)(ช ก - ช ง)$$

$$= ๔๔ \times ๓๒$$

$$\therefore ก ง = \sqrt{๔๔ \times ๓๒}$$

$$= ๔๖ \text{ นิ้ว}$$

$$\therefore \text{คอรก ก ข} = ๔๖ \times ๒ = ๙๒ \text{ นิ้ว}$$

ตัวอย่างที่ ๒ คอรกของฮารุคยาว ๒๔ นิ้ว และสูง ๔ นิ้ว

จงหาเส้นผ่ากลางของรูปวงกลม

$$ร = \text{รัศมีของรูปวงกลม}$$

$$\text{และ } ก ง = ๑๒, \text{ ช ก} = ๖ \text{ ช ง} = ช ก - ง ก$$

$$= ๖ - ๔$$

$$\text{และ } \frac{๒}{๒} = \frac{๒}{๒} = ก ง + ช ง$$

$$\text{หรือ } \frac{๒}{๒} = (๑๒) + (๖ - ๔)$$

$$= ๑๔ + ๖ - ๑๖ + ๔$$

$$\therefore ๑๖ = ๒๐$$

$$\therefore ๖ = ๑๓ \text{ นิ้ว}$$

$$\text{เส้นผ่ากลางรูปวงกลม} = ๑๓ \times ๒ = ๒๖ \text{ นิ้ว}$$

ตัวอย่างที่ ๓ หารุคสูง ๒ นิ้ว และรัศมีของรูปวงกลมยาว ๔ นิ้ว
จงหาความยาวของครึ่งหารุค

$$\begin{aligned}\text{กอรุคของครึ่งหารุค} \quad \text{ก} &= ๒ \text{ รัส} \dots \dots \dots (๓) \\ &= ๒ \times ๔ \times ๒\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ก} = ๒ \times ๓ = ๖ \text{ นิ้ว}$$

หรือจะทำได้วิธีหนึ่งก็ได้ คงได้ผลเท่ากัน คือ

$$\text{อ ง} = \text{อ ก} - \text{ง ก} = ๔ - ๒ = ๒$$

$$\text{และ } \text{อ ก} = ๔$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ก ง} &= ๔ - ๒ = (๔ + ๒)(๔ - ๒) \\ &= ๑๖ \times ๒ = ๓๒\end{aligned}$$

$$\text{แต่ } \text{ก ก} = \text{ก ง} + \text{ง ก} = ๓๒ + ๔ = ๓๖$$

$$\therefore \text{ก ก} \text{ คือ กอรุคของครึ่งหารุค} = ๖ \text{ นิ้ว}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๕

กอรุคของรูปวงกลม

๑. รัศมีของรูปวงกลมยาว ๓๗ นิ้ว กอรุคยาว ๗๐ นิ้ว จงหา
ระยะทางที่กอรุคอยู่ห่างศูนย์กลางของรูปวงกลม

๒. รัศมีของรูปวงกลมยาว ๔๕ นิ้ว มีกอรุค ๒ กอรุคขนานกัน
ยาว ๗๒ นิ้ว และ ๑๐๒ นิ้ว จงหาระยะทางที่กอรุคทั้ง ๒ นี้อยู่ห่างกัน

๓. จงหาคอรูปของอาร์คที่สูง ๖ วา ๑ คอก รัศมีรูปวงกลมยาว ๒๔ วา ๑ คอก
๔. เห็นผ่าศูนย์กลางของรูปวงกลมยาว ๔.๘๒ นิ้ว คอรูปยาว ๔.๑๘ นิ้ว คอรูปที่สูงเท่าไร?
๕. คอรูปของอาร์คยาว ๔.๘ นิ้ว และอาร์คที่สูง ๑.๘ นิ้ว จงหารัศมีของรูปวงกลม
๖. คอรูปยาว ๑.๘๒ เซนติเมตร อาร์คที่สูง ๒.๔ เซนติเมตร จงหาเห็นผ่าศูนย์กลางของรูปวงกลม
๗. รัศมีรูปวงกลมยาว ๒๗ นิ้ว อาร์คที่สูง ๑ $\frac{๑}{๒}$ นิ้ว จงหาคอรูปของครึ่งอาร์ค
๘. เห็นผ่ากลางรูปวงกลมยาว ๕๐ นิ้ว อาร์คที่สูง ๔ $\frac{๑}{๒}$ นิ้ว จงหาคอรูปของครึ่งอาร์ค
๙. อาร์คที่สูง ๗ นิ้ว คอรูปของครึ่งอาร์คยาว ๓.๕ นิ้ว จงหาเห็นผ่าศูนย์กลางของรูปวงกลม
๑๐. คอรูปของอาร์คยาว ๔.๘ นิ้ว คอรูปของครึ่งอาร์คยาว ๒.๕ นิ้ว จงหารัศมีของรูปวงกลม (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)
๑๑. รัศมีรูปวงกลมยาว ๙ นิ้ว คอรูปของครึ่งอาร์คยาว ๑.๒ นิ้ว จงหาคอรูปของอาร์ค (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)
๑๒. เห็นผ่ากลางรูปวงกลมยาว ๑ คอก ๒๑ นิ้ว คอรูปของครึ่งอาร์ค ๑.๕ นิ้ว จงหาคอรูปของอาร์ค (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

หมวดที่ ๒

อารุคของรูปวงกลม

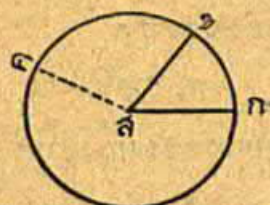
๔๕. จำกัดความ อารุคของรูปวงกลม คือส่วนหนึ่งส่วนใด
ของเส้นรอบวงของรูปวงกลม

ถ้า ก ข ค เป็นรูปวงกลม ส เป็นศูนย์กลาง แล้วมุม ก ส ข
เรียกว่ามุมที่ศูนย์กลางของอารุค ก ข

๔๖. เวลาคณិតยทพิสูจน์ที่ ๖๔ ได้พิสูจน์แล้วว่า อารุคของรูป
วงกลมใด ๆ ย่อมได้ส่วน (ปฏิกภาค) กับมุมที่ศูนย์กลางของมัน
แต่จะอธิบายพอเป็นเลา ๆ ให้เห็นในที่นี้

ให้ ก ข ค เป็นรูปวงกลม ส เป็น
ศูนย์กลาง ก ข เป็นอารุคที่ต้องการ

ถ้าแบ่งมุม ค ส ก ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ
กัน ก็ส่วน ๆ ก็ตาม แล้วลากเส้นที่แบ่งออก
ไปถึงอารุค จะเห็นได้ว่าเมื่อแบ่งมุมออกก็ส่วน
อารุคก็ถูกแบ่งออกเท่านั้นส่วน เท่า ๆ กันด้วย



รูปที่ ๒๕

$$\therefore \frac{\text{อารุค ก ข}}{\text{อารุค ก ค}} = \frac{\text{มุม ก ส ข}}{\text{มุม ค ส ก}}$$

หรือ อารุค ก ข : อารุค ก ค :: มุม ก ส ข : มุม ค ส ก

แต่มุมที่ศูนย์กลางของรูปวงกลมมี ๓๖๐° ถ้าลากรัศมีออกไปถึง
เส้นรอบวง เส้นรอบวงก็จะถูกแบ่งออกเท่ากับจำนวนองศาที่ศูนย์กลาง

ด้วยเหมือนกัน และถ้าให้ θ แทนจำนวนองศาของมุมที่ศูนย์กลางของ
 อารกที่ของการแล้ว

อารก กข : เส้นรอบวง :: θ : 360°

$$\text{หรือ } \frac{\text{อารก กข}}{\text{เส้นรอบวง}} = \frac{\theta}{360}$$

$$\therefore \text{อารกของรูปวงกลม} = \frac{\theta}{360} \times \text{เส้นรอบวง}$$

หมายเหตุ เครื่องหมายขอักัทรัมม คือ
 ๐ แทนคำว่า องศา
 ' หมายความว่า ลิปดา
 " หมายความว่า พิลิปดา

เช่นเขียน $3^\circ 4' 6''$ ก็อ่านว่า ๓ องศา ๔ ลิปดา ๖ พิลิปดา

ตัวอย่างที่ ๑ รัศมีของรูปวงกลมยาว 420 วา จงหาอารก
 ของรูปวงกลม ซึ่งทำมุมที่ศูนย์กลาง $24^\circ 51'$ ($\pi = \frac{22}{7}$)

$$\theta = 24^\circ 51' = 24.85 \text{ องศา}$$

$$\text{และ อารก} = \frac{\theta}{360} \times \text{เส้นรอบวง}$$

$$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{24.85}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 420 \text{ วา}$$

$$= 177.1 \text{ วา}$$

ตัวอย่างที่ ๒ รัศมีของรูปวงกลมยาว ๑๐๐ นิ้ว อารกยาว ๗๕ นิ้ว
 ทำมุมที่ศูนย์กลางเท่าไร ($\pi = ๓.๑๔๑๖$)

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{๓๖๐} &= \frac{\text{อารก}}{๒ \pi r} && \frac{๔๒,๘๕๗.๑๗}{๓.๑๔๑๖) ๑๓๕,๐๐๐} \\
 \therefore b &= \frac{\text{อารก}}{๒ \pi r} \times ๓๖๐ && \frac{๑๒๕๖๖๔}{๔๓๓๖๐} \\
 &= \frac{๗๕ \times ๓๖๐}{๒ \times ๓.๑๔๑๖ \times ๑๐๐} \text{ องศา} && \frac{๖๒๘๒๓}{๓๐๕๒๘} \\
 &= ๔๒,๘๕๗.๑๗ && \frac{๒๘๒๗๔}{๒๒๕๔} \\
 &= ๔๒^{\circ} ๕๘' ๑๘'' && \frac{๒๑๔๔}{๕๕} \\
 &&& \frac{๓๑}{๒๔} \\
 &&& \frac{๒๒}{}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๓ อารกยาว ๑๔๓ นิ้ว ทำมุมที่ศูนย์กลาง ๘๐°
 หารรัศมีของรูปวงกลม ($\pi = \frac{๒๒}{๗}$)

$$\theta = 90^\circ \quad \phi = 90.1 \text{ องศา}$$

$$\text{และ } \frac{2\pi r}{\text{การก}} = \frac{360}{\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{360 \times \text{การก}}{\theta \times 2\pi} = \frac{360 \times 1.4 \times 3 \times 7}{90.1 \times 2 \times 22} \\ &= 900 \text{ นิ้ว} \end{aligned}$$

๔๗. หาอัตราส่วนของรูปวงกลมที่ก่ออิฐฉันทนา แต่เป็นวิธีประมาณ
ซึ่งคลาดจากความเป็นจริงเล็กน้อย

ให้ก่ออิฐของอัตราส่วนของรูปวงกลมใดๆ ยาว = ๒ ท บูนิท

และให้ก่ออิฐของครึ่งการกยาว = ๑ บูนิท

$$\text{แล้ว } \text{การก} = \frac{48 - 24}{3}$$

หมายเหตุ ถ้าการกทำมุมที่ศูนย์กลาง 45° จะให้การกน้อยไป
กว่าความจริงเพียง ๐.๐๐๐๐๕ ถ้ามุมที่ศูนย์กลาง
เป็นมุมตรง จะให้การกน้อยไปกว่าความจริงเพียง
๐.๑ ของราคาแท้ของมัน

ตัวอย่าง รัศมีของรูปวงกลมยาว ๓๗ นิ้ว ก่ออิฐของการกเล็ก
ยาว ๒๔ นิ้ว การกจะยาวเท่าไร?

๑๑๖

$$ส ก = ส ก = ๓๗ นว$$

$$ก ง = ๑๓ นว = ก$$

$$แฉะ ส ง = ส ก - ก ง = ๓๗ - ๑๓ นว$$

$$\therefore ส ง = ๓๕ นว$$

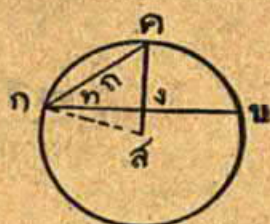
$$\therefore ง ค = ๓๗ - ๓๕ = ๒ นว$$

$$\therefore ก ค = \sqrt{๑๓^2 + ๒^2} = \sqrt{๑๘๕} นว$$

$$= ๑๓.๖๐๕ \dots\dots\dots นว = ก$$

$$ฮารุค = \frac{๔ ก - ๒ ก}{๓} = \frac{(๔ \times ๑๓.๖๐๕) - (๒ \times ๑๓)}{๓}$$

$$= ๒๔.๔๔ นว$$



รูปที่ ๒๖

แบบฝึกหัดที่ ๑๖

ฮารุคของรูปวงกลม

$$\pi = \frac{๒๒}{๗}$$

๑. รัศมีของรูปวงกลมยาว ๒๑ นว ฮารุคทำมุมที่ศูนย์กลาง ๖๐° ฮารุคยาวเท่าไร ?

๒. รัศมีรูปวงกลมยาว ๑๑๒ นว มุมที่ศูนย์กลาง ๑๑° ๑๕' ฮารุคยาวเท่าไร ?

๓. รัศมีรูปวงกลมยาว ๒๕ นิ้ว อารุคยาว ๓๓ นิ้ว มุมที่ศูนย์กลางเท่าไร?

๔. รัศมีรูปวงกลมยาว ๔๕ นิ้ว อารุคยาว ๓๙.๖ นิ้ว มุมที่ศูนย์กลางเท่าไร?

๕. อารุคยาว ๕๕ นิ้ว มุมที่ศูนย์กลาง ๓๐° รัศมียาวเท่าไร?

๖. อารุคยาว ๑๕๔ ศอก ทำมุมที่ศูนย์กลาง ๓๐.๕° ๓๗.๓๐" รัศมี

$$(\text{อารุค} = \frac{๘๖ - ๒๗}{๓})$$

๗. คอรุคของอารุคยาว ๔๘ นิ้ว คอรุคของเครื่องอารุคยาว ๒๗ นิ้ว อารุคนี้ยาวเท่าไร?

๘. คอรุคของอารุคยาว ๔๘ นิ้ว และสูง ๗ นิ้ว อารุคนี้ยาวเท่าไร?

๙. เส้นผ่าศูนย์กลางของรูปวงกลมยาว ๑๒๐ วา ๒ ศอก คอรุคยาว ๖๐ วา อารุคเล็กยาวเท่าไร?

๑๐. รัศมีรูปวงกลมยาว ๓๒ นิ้ว อารุคสูง ๘ นิ้ว อารุคยาวเท่าไร? (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

๑๑. เส้นผ่าศูนย์กลางของรูปวงกลมยาว ๗๒ นิ้ว อารุคสูง ๘ นิ้ว อารุคนี้ยาวเท่าไร?

บทที่ ๘

ว่าด้วย

เซกเตอร์และเซกเมนต์ของรูปวงกลม

หมวดที่ ๑

เซกเตอร์ของรูปวงกลม

๔๘. จำกัดความ

(๑) เซกเตอร์ของรูปวงกลม นัยหนึ่งเรียกว่ารูปวงโค้ง คือ รูปที่มีรัศมีของรูปวงกลม ๒ เส้น ปลายข้างหนึ่งเอนรอกันเป็นมุม ปลายอีกข้างหนึ่งนั้นมีส่วนของเส้นรอบวงโอบมาเป็นอาณาเขตต์

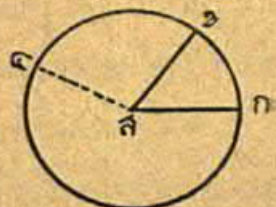
(๒) มุมของเซกเตอร์ คือรัศมีของรูปวงกลม ๒ เส้น เอนรอกันเป็นมุม

๔๙. ได้กล่าวมาครั้งหนึ่งแล้วว่า อนุภาคของรูปวงกลมกับมุม ในรูปวงกลมเป็นปฏิภาค (แปรผกผัน) กัน โดยทำนองเดียวกัน เอนอ์ทของเซกเตอร์ของรูปวงกลมอันเดียวกัน ก็เป็นปฏิภาคกัน เหมื่อนกัน คือ

$$\frac{\text{เซกเตอร์ ก ส ข}}{\text{เซกเตอร์ ก ส ค}} = \frac{\text{มุม ก ส ข}}{\text{มุม ก ส ค}}$$

หรือ เซกเตอร์ ก ส ข : เซกเตอร์ ก ส ค

∴ มุม ก ส ข : มุม ก ส ค



รูปที่ ๒๗

เปลี่ยนเซกเตอร์ ก ส ค เป็นเนื้อรูปวงกลมทั้งหมด และเปลี่ยน

มุม ก ส ค เป็น 360° และให้ θ แทนจำนวนองศาของมุม ก ส ข แล้ว

เซกเตอร์ ก ส ข : เนื้อรูปวงกลม :: $\theta : 360^\circ$

$$\text{หรือ } \frac{\text{เนื้อที่เซกเตอร์ ก ส ข}}{\text{เนื้อรูปวงกลม}} = \frac{\theta}{360}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่เซกเตอร์} = \frac{\theta}{360} \times \text{เนื้อรูปวงกลม} \dots\dots\dots (๑)$$

โดยทำนองเดียวกัน

เนื้อที่ของเซกเตอร์ : เนื้อรูปวงกลม :: ฐานของเซกเตอร์ :

เส้นรอบวง

$$\text{หรือ } \frac{\text{เนื้อที่เซกเตอร์}}{\pi r^2} = \frac{\text{ฐาน}}{2\pi r}$$

$$\therefore \text{เนื้อที่เซกเตอร์} = \frac{\theta}{360} \times \text{ฐาน} \times r \dots\dots\dots (๒)$$

ตัวอย่างที่ ๑ พหุนามของเซกเตอร์ของรูปวงกลมซึ่งมีรัศมี

ยาว ๘๔ ศอก มุมที่ศูนย์กลาง 12° ๗' $30''$ ($\pi = \frac{22}{7}$)

$$r = 84 \text{ ศอก}$$

$$\theta = 12^\circ 7' 30'' = 12.125 \text{ องศา}$$

๑๒๐

เนื้อที่เขตกเขตร

$$= \frac{r}{n \cdot 60} \times \text{เนื้อที่รูปวงกลม}$$

$$= \frac{r}{n \cdot 60} \times \pi r^2$$

$$= \frac{๑๒.๑๒๕}{๓๖๐} \times \frac{๒๒}{๗} \times ๔๔ \times ๔๔$$

$$= ๗๔๖.๗$$

ตารางศอก

$$= ๔๖.๖๔๑๒๕$$

ตารางวา

ตัวอย่างที่ ๒ มุมของเขตกเขตรทาง ๓° ๒' ๒๔" และ
เนื้อที่เป็น ๖๔.๒๕ ตารางวา จงหารัศมีรูปวงกลม ($\pi = ๓.๑๔๑๖$)

$$\text{เนื้อที่} = ๖๔.๒๕ \text{ ตารางวา}$$

$$\frac{๓๖๐๗๔.๐๖๓๗}{๖.๔๐๘๔๖๔}$$

$$๖.๔๐๘๔๖๔) ๓๓๑๓๐.๐๐๐๐$$

$$r = ๓^{\circ} ๒' ๒๔" = ๒.๐๔ \text{ องศา}$$

$$\text{และ } \frac{\text{เนื้อที่เขตกเขตร}}{\pi r^2} = \frac{r}{n \cdot 60}$$

$$\frac{๑๗๒๒๖๕๗๒}{๓๗๐๓๔๐๘๐}$$

$$\frac{๓๗๐๓๔๐๘๐}{๓๗๔๕๓๑๗๔}$$

$$\frac{๓๗๔๕๓๑๗๔}{๕๘๐๘๗๖}$$

$$\frac{๕๘๐๘๗๖}{๕๗๖๗๗๗}$$

$$\frac{๕๗๖๗๗๗}{๔๐๗๗๗}$$

$$\frac{๔๐๗๗๗}{๓๗๔๕}$$

$$\frac{๓๗๔๕}{๒๕๔}$$

$$\frac{๒๕๔}{๑๗๒}$$

$$\frac{๑๗๒}{๖๒}$$

$$\frac{๖๒}{๕๘}$$

$$\frac{๕๘}{๑๒}$$

$$\therefore r = \frac{\text{เขตกเขตร} \times ๓๖๐}{\pi \times r}$$

$$= \frac{๖๔.๒๕ \times ๓๖๐}{๓.๑๔๑๖ \times ๒.๐๔}$$

ตารางวา

$$= ๓๖๐๗๔.๐๖๓๗ \dots \dots \dots$$

$$\therefore r = ๖๐.๐๗ \dots \dots \dots \text{วา}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๗

เซกเตอร์ของรูปวงกลม

$$\pi = \frac{22}{7}$$

๑. ฐานนอกของนารูปวงผ้ง

(ก) รัศมียาว ๒๑ เส้น มุมกาง ๖๐°

(ข) รัศมียาว ๑๔ เส้น มุมกาง ๔๕°

๒. มุมของเซกเตอร์กาง ๑๑° ๑๕' รัศมียาว ๕๖ วา ฐานนอกของเซกเตอร์

๓. มุมของเซกเตอร์กาง ๒๘' ๓๐" รัศมียาว ๒.๘ นิ้ว ฐานภายในของรูปสี่เหลี่ยมมีรัศมีตั้งกับนอกเท่ากับเซกเตอร์นี้

๔. ฐานนอกของเซกเตอร์

(ก) ฐานยาว ๓๒ นิ้ว รัศมียาว ๑๗ นิ้ว

(ข) ฐานยาว ๑๐ วา รัศมียาว ๑๔ วา

๕. ฐานนอกของนารูปวงผ้งเป็น ๒ ไร่ ๑ งาน ๒๔ ตารางวา ฐานยาว ๒๒ วา หารรัศมีและมุม

๖. มุมของเซกเตอร์กาง ๓๐° ฐานนอกเป็น ๑.๑๕๕ ตารางวา หารรัศมีของรูปวงกลม

๗. มุมของเซกเตอร์กาง ๓๖° ฐานนอกเป็น ๓๘๕ ตารางวา หารฐาน

๘. อารกของเชกเตอร์ยาว ๑๒.๑ วา มุมทาง ๑๕° ๒๔'
 จงหาค่าของรูปวงกลมที่มีเนื้อที่เท่าเชกเตอร์นี้

$$\pi = ๓.๑๔๑๖$$

๙. จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเนื้อที่เท่ากับเนื้อที่ของ
 เชกเตอร์ที่มีรัศมียาว ๕๔ นิ้ว มุมทาง ๑๗° ๑๒' ๓๖" (ทศนิยม
 ๒ ตำแหน่ง)

๑๐. จงหาค่าของรูปวงกลมที่มีเนื้อที่เท่ากับเนื้อที่ของเชกเตอร์
 ที่มีอาร์กยาว ๑๐๐ นิ้ว รัศมียาว ๗๒ นิ้ว

๑๑. กระดาษแผ่นหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วตัดออก ๑
 ของรูปวงกลม ให้มุมและด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นมุมที่ศูนย์กลาง
 และรัศมี เมื่อตัดออกแล้วคงเหลือเนื้อที่ ๒๑.๕๖ ตารางนิ้ว
 จงหาค่าของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้

๑๒. เข็มบอกนาฬิกาของนาฬิกายาว ๖๐ นิ้ว เวลาที่นาฬิกา
 จะเดินทั่วพื้นที่ ๙๔๒.๔๘ ตารางนิ้ว

๑๓. จงหาเนื้อที่ของเชกเตอร์ ซึ่งเอาด้านของรูปสามเหลี่ยม
 ด้านเท่าเป็นรัศมี และเอามุมเป็นศูนย์กลาง ด้านของรูปสามเหลี่ยม
 ด้านเท่านี้ยาว ๑๐ นิ้ว

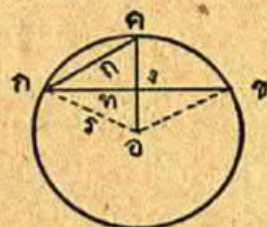
๑๔. จงหาเนื้อที่ของเชกเตอร์ ซึ่งมีรัศมียาว ๒๔.๑ นิ้ว กอรก
 ของอาร์กยาว ๒๔๐ นิ้ว

หมวดที่ ๒

เชกเมนต์ของรูปวงกลม

๕๐ จำกัดความ เชกเมนต์ของรูปวงกลม คือรูปซึ่งมีเส้นตรง
เส้นหนึ่ง กับมีส่วนของเส้นรอบวงโดยมากที่ปลายทั้ง ๒ ข้างเป็น
อาณาเขตต์

ให้ อ เป็นศูนย์กลางของรูปวงกลม
ก ข ค เป็นอาโรคของรูปวงกลม ให้ อ ก กับ
อ ข ตัดกันและกันออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน
และตั้งฉากกัน



รูปที่ ๒๔

เพราะฉะนั้น ค เป็นจุดศูนย์กลางของอาโรค ก ก ข ด้วย (เรขาคณิตพื้นฐานบทที่ ๓๑)

เพราะฉะนั้นเนื้อของเชกเมนต์ ก ก ข

$$= \text{เชกเตอร์ } อ ก ข - \triangle อ ก ข$$

ตัวอย่าง จงหาเนื้อของเชกเมนต์ของรูปวงกลม ซึ่งตัดออกจากรูปวงกลมที่มีรัศมียาว ๔๒ นิ้ว โดยลากทำมุมที่ศูนย์กลางทาง ๑๒๐°

$$\text{เนื้อเชกเตอร์} = \frac{๑๒๐}{๓๖๐} \times \text{เนื้อรูปวงกลม [ตามกฎ]}$$

$$= \frac{๑}{๓} \times \frac{๒๒}{๗} \times (๔๒)^๒ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$= ๑๘๔๘ \text{ ตารางนิ้ว}$$

และ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (เพราะมุมทางมุม 60°)

$$\therefore \triangle ก ข ง = \frac{1}{2} \text{ ของ } \triangle ก ข ค$$

$$\therefore \text{ของ} = ๒๑ \text{ นิ้ว}$$

(และส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าใดๆ ย่อมเท่ากับครึ่งของ
ด้านหนึ่ง คูณด้วย $\sqrt{3}$)

$$\therefore \text{ก ง} = ๒๑ \sqrt{3} \text{ นิ้ว}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ก ข ข} &= \frac{1}{2} \times ๒๑ \times ๔๒ \sqrt{3} \text{ ตารางนิ้ว} \\ &= ๙๖๓.๘ \dots \dots \dots \text{ตารางนิ้ว} \end{aligned}$$

$$\text{และเนื้อที่เชกเมนต์} = \text{เชกเตอร์} - \triangle$$

$$= ๑๘๔๘ - ๙๖๓.๘ \quad "$$

$$= \underline{\underline{๑๐๘๔.๒}} \quad "$$

๕๑. มีอัตราส่วนของเชกเมนต์ของรูปวงกลมใดก็อย่างหนึ่ง
แต่เป็นวิธีประมาณด้วยใช้กฎ

$$\text{อัตราส่วนของรูปวงกลม} = \frac{๘๖ - ๒๓}{๓} \text{ แต่จะต้องทราบสิ่งเหล่านี้}$$

ก่อนจึงจะหาได้ คือ

- (๑) ต้องรู้ความยาวของคอร์ดกับรัศมีของรูปวงกลม หรือ
- (๒) ต้องรู้ความยาวของคอร์ดกับส่วนสูงของอัตรา

ตัวอย่างที่ ๑ งานนอกของเชกเมนต์ของรูปวงกลมซึ่งหักออก
จากรูปวงกลมด้วยยาว ๑๔ นิ้ว และรัศมีของรูปวงกลมยาว
๒๕ นิ้ว

$$ง = \sqrt{๒๕ - ๗} = ๒๔ \text{ นิ้ว}$$

$$\therefore \triangle ก ข = \frac{๑}{๒} ก ข \times ง = \frac{๑}{๒} \times ๑๔ \times ๒๔ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$= ๑๖๘$$

$$\text{และ } ง ก = ก ก - ก ง = ๒๕ - ๒๔ = ๑ \text{ นิ้ว}$$

$$\text{และ } ก = ก ง + ก ก = ๗ + ๑$$

$$= ๘๐$$

ตารางนิ้ว

$$\therefore ก = \sqrt{๘๐} = ๘ \sqrt{๒}$$

นิ้ว

$$\text{และ } อาร ก = \frac{๘ ก - ๒ ก}{๓}$$

$$= \frac{(๘ \times ๘.๐๗๑๑) - (๒ \times ๗)}{๓}$$

$$= ๑๔.๑๘๔๖$$

นิ้ว

$$\text{นอกที่เชกเตอร์} = \frac{๑}{๒} \text{ อาร ก} \times \text{รัศมี}$$

$$= \frac{๑}{๒} \times ๑๔.๑๘๔๖ \times ๒๕$$

ตารางนิ้ว

$$= ๑๗๗.๓๗$$

"

$$\text{เนื้อที่เชกเมนต์} = \text{เชกเตอร์} - \triangle$$

$$= ๑๗๗.๓๗ - ๑๖๘ \quad \text{ตารางนิ้ว}$$

$$= \underline{๙.๓๗} \quad \text{ตารางนิ้ว}$$

หมายเหตุ ถ้าจะหาเนื้อที่ของเชกเมนต์ที่ใหญ่กว่าครึ่งรูปวงกลม
ให้หาเนื้อที่ของเชกเมนต์เล็กเสียก่อน แล้วเอาไป
ลบเนื้อที่ของรูปวงกลม เหลือเท่าไรเป็นเนื้อที่ของ
เชกเมนต์ใหญ่

ตัวอย่างที่ ๒ จงหาเนื้อที่ของเชกเมนต์ของรูปวงกลมที่มีกอร์ก
ยาว ๑๔ นิ้ว และสูง ๑ นิ้ว

ท้องทวารคี่มีของรูปวงกลมก่อน

$$\begin{array}{l} ๒ \\ \text{ก} \end{array} = \begin{array}{l} ๒ \quad ๒ \\ ๗ + ๑ \end{array} = ๕๐ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$\therefore \text{ก} = ๕ \sqrt{๒} \text{ นิ้ว}$$

$$\text{และ } \begin{array}{l} ๒ \\ \text{ก} \end{array} = ๒ \text{ นิ้ว}$$

$$\therefore ๒ \text{ นิ้ว} = (๕ \sqrt{๒})^๒ = ๕๐ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$\therefore \text{ก} = ๒๕$$

$$\text{แต่ } \text{ก} = ๑$$

$$\therefore \text{ว} = ๒๕ \text{ นิ้ว}$$

และ o เป็นส่วนสูงของ $\triangle กอข$

$$= ๒๕ - ๑ = ๒๔ \text{ นิ้ว}$$

$$\begin{aligned} \text{กอข} &= \frac{๑}{๒} \times ๑๕ \times ๒๔ \text{ ตารางนิ้ว} \\ &= ๑๖๘ \end{aligned}$$

”

ต่อไปนี้ทำอย่างเดียวกับตัวอย่างที่ ๑ ในที่สุดก็ได้ผลเท่ากัน คือ

๘.๓๗ ตารางนิ้ว

แบบฝึกหัดที่ ๑๘

เซกเมนต์ของรูปวงกลม

$$\pi = \frac{๒๒}{๗}$$

๑. จงหาเนื้อที่ของเซกเมนต์รูปวงกลมที่มีคอร์ดยาว ๗ นิ้ว มุมที่ศูนย์กลางเป็นมุมฉาก

๒. คอร์ดของเซกเมนต์ยาว $๑๐\frac{๑}{๒}$ นิ้ว มุมที่ศูนย์กลางกาง ๖๐° จงหาเนื้อที่ของเซกเมนต์นั้น

๓. จงหาเนื้อที่ของเซกเมนต์รูปวงกลมที่ตัดออกจากรูปวงกลมที่มีรัศมียาว ๓.๕ นิ้ว คอร์ดทำมุมที่ศูนย์กลางกาง ๑๒๐° (จงทำตามวิธีข้อ ๑๔)

๔. จงหาเนื้อที่ของเซกเมนต์ที่มีคอร์ดยาว ๑๕ นิ้ว รัศมีของรูปวงกลมยาว ๒๕ นิ้ว

๕. เชกเมนต์ที่ตัดออกจากรูปวงกลม ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว
๔๘๒ มม. มีกอร์ดยาว ๒๔๐ มม. ให้หาเนื้อทของเชกเมนต์นี้

๖๐. จงหาเนื้อทของเชกเมนต์รูปวงกลมที่มีกอร์ดยาว ๓๐ มม.
และสูง ๘ มม.

๗. จงหาเนื้อทของเชกเมนต์ของรูปวงกลมที่มีกอร์ดยาว ๒๔ มม.
และสูง ๕ มม.



บทที่ ๘

ว่าด้วย

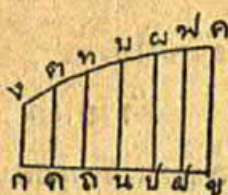
รูปเส้นคดโค้ง

๕๒. จำกัความ รูปเส้นคดโค้ง คือรูปซึ่งมีเส้นคดโค้งเป็น
อาณาเขตต์ตลอดรูป หรือเป็นแต่ส่วนหนึ่งส่วนใดก็เรียกว่ารูปเส้น
คดโค้ง

วิธีคำนวณเนอรูปขะนิกนั้น จะต้องรู้ว่รูปพรรณสัณฐานเป็น
อย่างไรก่อน เพราะรูปขะนิกนั้นมีรูปร่างต่าง ๆ กัน เมื่อรูปนั้นเป็น
อย่างนั้น รูปอื่นเป็นอย่างอื่นไปก็ไ้ วิธีคำนวณเนอก็ยากที่จะไม่
ให้ขาดๆ เกินๆ ไ้ แต่รูปวงกลมยังมีที่คลาดเคลื่อนไ้ บ้างเป็น
รูปขะนิกนก็ยังมีที่คลาดเคลื่อนไ้มากจน เพราะฉะนั้นจะต้องเห็นรูป
กัวยตา หรือ ต้องรู้ส่วนหนึ่งส่วนใด จึงจะคำนวณเนอไ้

ให้ ก ข คง เป็นรูปเส้นคดโค้ง เส้นตรง

ก ข เป็นอาณาเขตต์ด้านหนึ่ง และ คง กับ ข คง
เป็นด้านสะกัหัวท้าย และตั้งฉากกับ ก ข กัวย
คงเป็นส่วนไ้



รูปที่ ๕๐

แบ่ง ก ข ออก ๖ ส่วน (ก็ส่วนก็ไ้) เท่า ๆ กัน คือ ก ก, ก ด,
ด น,....., หากเราท้แบ่งทุกๆ รูปฉากเส้นตรง ก ก, ด ก,
น บ,....., ให้ตั้งฉากกับ ก ข และลากเลยขึ้นไปให้พบ
เส้นโค้งกัวย

เส้น กง, กข, กค,....., นี้เรียกว่าเส้นรุ้ง (กว้าง) เส้น กข เรียกว่าเส้นแวง (ยาว) และรุ้งทุกเส้นย่อมขนานกัน วิธีคำนวณ เนื้อที่จงทำตามกฎต่อไปนี้ คือ

(๑) ให้เอารุ้งคู่หัวท้ายบวกกัน แล้วตั้งลงไว้เป็นฐานหนึ่ง

(๒) รุ้งที่ยังเหลืออยู่ก็เส้นให้มัน (จากทางหนึ่งทางใดแต่ทางเดียว) เป็นคู่ แล้วเก็บเอาเส้นที่สองของคู่หนึ่งๆ มาบวกกัน คูณผลบวกนั้นด้วย ๒ แล้วตั้งลงไว้เป็นฐานหนึ่ง

(๓) ที่ยังเหลืออยู่ทั้งสี่ (เศษท้าย) เอามาบวกกัน คูณผลบวกนั้นด้วย ๔ แล้วตั้งไว้เป็นฐานหนึ่ง

(๔) เก็บฐานที่หนึ่งที่สองและที่สามและต่อๆ ไปมาบวกกัน คูณด้วยผลบวกนั้นด้วย $\frac{๑}{๓}$ ของเส้นแวง ทดลัพท์เป็นเนื้อที่ของรูป เส้นคกโค้งนั้นๆ

ตัวอย่างที่ ๑ จงคำนวณเนื้อที่ของรูปเส้นคกโค้ง ซึ่งมีรูปเป็น เติบหนึ่งของรูปตะโพน แบ่งออก ๗ รุ้ง ๑ แวง รุ้งยาว ๔.๒๑, ๔.๒๔, ๔.๓๖, ๔.๔๗, ๔.๕๘, ๔.๖๙ และ ๔.๘๐ เส้น ตามลำดับ แวงยาว ๑ เส้น

$$\text{รุ้งคู่หัวท้าย} = \text{กง} + \text{กข} = ๔.๑๒ + ๔.๘๐ = ๘.๙๒$$

$$\text{รุ้งคู่ที่ ๒} = \text{กค} + \text{กข} = ๔.๓๖ + ๔.๕๘ = ๘.๙๔$$

$$\text{คูณด้วย ๒} = ๑๗.๘๘$$

$$\text{รังทั้งสี่} = กท + นบ + ฝพ = ๔.๒๔ + ๔.๔๗ + ๔.๖๘$$

$$\text{และคูณด้วย ๔} = ๕๓.๖$$

$$\therefore \text{ฐานที่ ๑} + \text{ฐานที่ ๒} + \text{ฐานที่ ๓}$$

$$= ๘.๘๒ + ๑๗.๘๘ + ๕๓.๖$$

$$= ๘๐.๔$$

$$\therefore \text{เนื้อที่} = ๘๐.๔ \times \frac{๑}{๓} = \underline{๒๖.๘} \text{ ไร่}$$

ตัวอย่างที่ ๒ จงหาเนื้อที่ของนารูปตะโพนซึ่งแบ่งออก ๘ รัง
๑ แถว รังยาว ๒.๒๔, ๒.๒๘, ๒.๓๒, ๒.๓๖, ๒.๓๖, ๒.๓๒,
๒.๒๘, และ ๒.๒๔ วา แวงยาว ๔ วา

$$\text{รังหัวท้าย} = กท + รธ = ๒.๒๔ + ๒.๒๔ = ๔.๔๘$$

$$\text{รังคู่ที่ ๒} = นบ + ฝพ + มบ = ๒.๓๒ + ๒.๓๖ + ๒.๒.๒๘$$

$$\text{คูณด้วย ๒} = ๑๓.๘๒$$

$$\text{รังทั้งสี่} = กท + ฝพ + พธ$$

$$= ๒.๒๘ \times ๒.๓๖$$

$$+ ๒.๓๒$$

$$\text{และคูณด้วย ๔} = ๒๗.๘๔$$

$$\therefore \text{ฐานที่ ๑} + \text{ฐานที่ ๒} + \text{ฐานที่ ๓}$$

$$= ๔.๔๘ + ๑๓.๘๒ + ๒๗.๘๔$$

$$= ๔๖.๒๔$$

$$\therefore \text{เนื้อที่} = ๔๖.๒๔ \times ๔ \times \frac{๑}{๓} = \underline{๖๑.๖๕} \text{ ตารางวา}$$

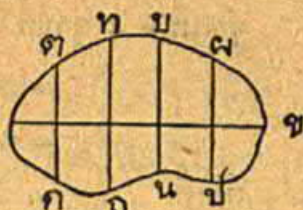


ตัวอย่างที่ ๓ วงแหวนที่ของรูปต่อไปนี้ แบ่งออก ๔ รัง ๑ แถว
 รังยาว ๒.๒๒, ๒.๒๖, ๒.๓๐, ๒.๒๕ คือ ๑ แถวยาว ๖ คือ ๑

วิธีทำเหมือนตัวอย่างที่ ๑ และที่ ๒

แปลกแต่ไม่ใช่กฎข้อหนึ่ง เพราะกัน ก

สะกัหัวท้ายไม่มี



รูปที่ ๓๑

$$\text{รังคู่ที่ ๒} = ก ข + ค ง = ๒.๒๖ + ๒.๒๕$$

$$\text{และคูณด้วย ๒} = ๙.๐๒$$

$$\text{รังที่เหลือ} = ก ค + ข ง = ๒.๒๒ + ๒.๓๐$$

$$\text{และคูณด้วย ๔} = ๑๘.๐๘$$

$$\text{ฐานที่ ๑} + \text{ฐานที่ ๒} = ๙.๐๒ + ๑๘.๐๘ = ๒๗.๑$$

$$\therefore \text{เนื้อที่} = ๒๗.๑ \times ๖ \times \frac{๑}{๓} = \underline{๕๔.๒} \text{ ตารางศอก}$$

หมายเหตุ ถ้าจะหาเนื้อที่รูปแปล (อีลิปส์) ก็ทำได้โดยทำนองนี้

แบบฝึกหัดที่ ๑๔

รูปเส้นคดโค้ง

๑. หหาเนื้อที่ของรูปเส้นคดโค้งต่อไปนี้ :-

ก. รังยาว ๓, ๔ ๑๕, ๒๔ ๓๕, ๔๘ ๖๓ คือ ๑ แถว ๑ คือ ๑

ข. รังยาว ๔, ๑๔, ๓๖, ๕๖, ๑๔๐ คือ ๑ แถว ๑ คือ ๑

စကဏ

ဂ. ဂုံယာ ၀, ၂၀, ၂၂, ၂၃, ၂၄, ၂၅, ၀ ဂိဇဂါ ဂျာ ၂ ဂိဇဂါ

၃. ဂုံယာ ၀, ၂.၂၃, ၃, ၂.၂၃, ၄, ၂.၂၃, ၀ ဂိဇဂါ

ဂျာ ၂ ဂိဇဂါ

၄. ဂုံယာ ၂.၀၃၂, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၃၀၂, ၂.၃၃, ၂.၃၃, ၂.၃၃, ၂.၃၃, ၂.၃၃, ၂.၃၃

၅. ဂုံယာ ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၆. ဂုံယာ ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၇. ဂုံယာ ၀, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၈. ဂုံယာ ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

ဂျာ ၂ ဂိဇဂါ

၉. ဂုံယာ ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃, ၂.၂၃

၈. ဂွံယာဝ, .၄၈၃၄, .၂, .၈၈၃၈, .၄, .၄၂၂ဝ,
 .၄၂၂၄, .၄၄၈၄, .၄၄၄၄, .၄၄၄ဝ ဝေဝေ န န န
 ယာဝ န န

၄. ဂွံယာ $\frac{၈၀}{၈၀}$, $\frac{၈၀}{၈၈}$, $\frac{၈၀}{၈၈}$, $\frac{၈၀}{၈၈}$, $\frac{၈၀}{၈၄}$, $\frac{၈၀}{၈၄}$, $\frac{၈၀}{၈၂}$, $\frac{၈၀}{၈၂}$,
 $\frac{၈၀}{၈၄}$, $\frac{၈၀}{၈၄}$, $\frac{၈၀}{၈၀}$ န န န န န န န န



บทที่ ๑๐

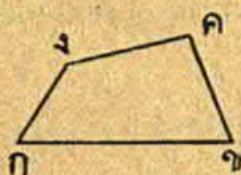
ว่าด้วย

รูปคล้ายกัน

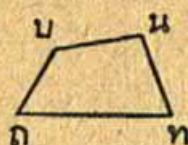
๕๓. จำกัความ รูปคล้ายกัน คือรูปซึ่งมีลักษณะและ
สัณฐานเป็นอย่างเดียวกัน แต่มีขนาดไม่เท่ากัน

บรรดารูปต่างๆ บ่อมระคล้ายกันได้ทั้งรูปเส้นตรง และรูปเส้น
โค้ง เช่นรูปวงกลมทุกๆ ขนาดก็เป็นรูปคล้ายกัน เซกเตอร์ของรูป
วงกลมซึ่งมีมุมที่ศูนย์กลางเท่ากันก็เป็นรูปคล้ายกัน แต่ถ้ามีส่วนที่
เหมือนกันอยู่ข้างบางส่วน เป็นต้นว่ามีก้านเท่ากันอยู่สองก้าน ๆ ต่อ
ก้าน หรือมุมเท่ากันอยู่สองมุม ๆ ต่อมุม แต่รูปต่างชนิดกันก็หาเป็น
รูปคล้ายกันไม่

๕๔. รูปเส้นตรงใดๆ มีรูปเป็นชนิดเดียวกัน มุมก็ค้องเท่ากัน
มุมต่อมุม และถ้ามุมเท่ากันแล้ว อัตราส่วนของก้านก็เท่ากันด้วย
เช่นรูป ก ข กง และรูป ถ ทน ข เป็นรูปคล้ายกัน



รูปที่ ๓๒



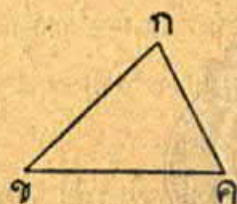
รูปที่ ๓๓

(๑) มุมที่ ก ที่ ข ที่ ค และที่ ง เท่ากับมุม ที่ ถ ที่ ข ที่ น และ
ที่ ท มุมต่อมุม ตามลำดับ

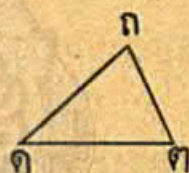
$$(๒) \text{ ถ้า } \frac{ก ข}{ค ท} = \frac{ข ค}{ท น} = \frac{ค ง}{น บ} = \frac{ง ก}{บ ด}$$

$$\text{หรือ } ก : ข :: ข : ค :: ค : ท :: ท : น :: น : บ :: บ : ง :: ง : ก$$

๕๕. ถ้ารูปที่คล้ายกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมีมุมหรืออัตราส่วนของ
ด้านอย่างหนึ่งอย่างใดเท่ากันอย่างหนึ่งแล้ว สิ่งที่เหลืออยู่ก็ต้องเท่ากัน
ด้วย คือถ้ารู้ว่ามุมเท่ากับมุมต่อมุมแล้ว อัตราส่วนของด้านก็ต้องเท่ากัน
หรือถ้ารู้ว่าอัตราส่วนของด้านเท่ากันแล้ว สิ่งที่เหลืออยู่คือมุมก็ต้อง
เท่ากันมุมต่อมุม



รูปที่ ๓๔



รูปที่ ๓๕

ให้ ก ข ค กับ ค ท จ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ถ้ามุมที่ ก
ที่ ข และที่ ค เท่ากับมุมที่ ด ที่ ก และที่ จ มุมต่อมุมแล้ว อัตราส่วน
ของด้านก็ต้องเท่ากัน คือ :

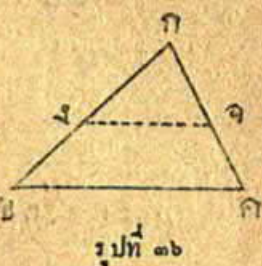
ก : ข :: ข : ค :: ค : ท (เรขาคณิตบทพิสูจน์ที่ ๖๒)
และถ้าอัตราส่วนของด้านเท่ากัน คือ :

ก : ข :: ข : ค :: ค : ท แล้วมุมที่ ก, ข, ค ก็เท่ากับ
มุมที่ ด, ก, ท มุมต่อมุม (เรขาคณิตบทพิสูจน์ที่ ๖๓)

๕๖. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าลากเส้นจากด้านหนึ่งถึงด้านใด
ตรงไปถึงด้านที่อยู่ตรงข้าม และให้ขนานกับฐาน คือด้านที่ ๓ แล้ว
จะเกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมชน ๒ รูป เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

ให้ ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ก ก เป็น
เส้นที่ลากขนานกับด้าน ข ค

แล้ว ก ข ค กับ ก ก ก ก็เป็นรูปสามเหลี่ยม
ที่คล้ายกัน มุมเท่ากับมุมต่อมุม (เรขาคณิต
บทพิสูจน์ที่ ๖๔)



เพราะฉะนั้นอัตราส่วนของด้าน ก ข : ก ก = ข ค : ก ก = ค ก : ก ก
(เรขาคณิตบทพิสูจน์ที่ ๖๒)

๕๗. ในข้อข้างบนนี้มีสิ่งซึ่งควรระวัง คือ เส้นตรงที่ลาก
ขนานกับด้านหนึ่งถึงด้านใด คือด้านที่ ๓ แล้วเส้นตรงนั้นจะแบ่งด้าน ๒
ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามออกเป็นอัตราส่วนเท่ากัน คือ :-

$$ก ก : ก ข = ก ก : ก ค$$

และ ก ข : ก ข = ก ค : ก ค (เรขาคณิตบทพิสูจน์ที่ ๖๐)

ในข้อนี้จะใกล้เคียงกันทุก ๆ ซึ่งแสดงไว้ในข้างต้นมาใช้ ระวัง
ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ๑. ในรูปของข้อ ๕๖ นั้นถ้าด้าน ก ข = ๕๑ นิ้ว
ข ค = ๒๐ นิ้ว ก ค = ๓๗ นิ้ว และ ก ก = ๓๔ นิ้ว ด้านอื่นๆ อีก
๒ ด้านของรูปสามเหลี่ยม ก ก ยาวด้านละเท่าไร ?

$$ง : ขค = กง : กข \quad [\text{กฎของข้อ ๕๖}]$$

$$\text{หรือ } \frac{ง ๑}{๒๐} = \frac{๓๔}{๕๑}$$

$$\therefore ง ๑ = \frac{๓๔}{๕๑} \times ๒๐ \text{ นิ้ว}$$

$$= ๑๓ \frac{๑}{๓} \text{ ,,}$$

$$\text{และ } ก ๑ : กค = กง : กข$$

$$\text{หรือ } \frac{ก ๑}{๓๗} = \frac{๓๔}{๕๑}$$

$$\therefore ก ๑ = \frac{๓๔}{๕๑} \times ๓๗ \text{ นิ้ว}$$

$$= ๒๔ \frac{๒}{๓} \text{ ,,}$$

ตัวอย่างที่ ๒ นายทหารกองสอกแนมผู้หนึ่งเห็นข้าศึกทั้งสอง
 คอยไว้ นายทหารผู้นั้นอยากทราบว่าหอคอยสูงเท่าไร แล้วเขา
 รั้งการดังนี้

เขิรดอยหลังตรงออกไปไกลจากหอคอย ๒๗ ศอก เขาไม้ยาว
 ๑๒ ศอกปักลงอันหนึ่ง แล้วดอยหลังตรงออกไปอีก ๓ ศอก เขาไม้
 ยาว ๒ ศอก ๑๖ นิ้วปักลงอีกอันหนึ่ง (ไม้ที่ปักสูงนี้มาจากพนักอันขึ้นไป)
 ทารับที่ปลายหลักนี้ เติงกับปลายหลักอันแรกก็บอกหอคอยได้แนวกั้น
 พนัก (ทั้ง ๓ หลัก) มีรูปดังนี้

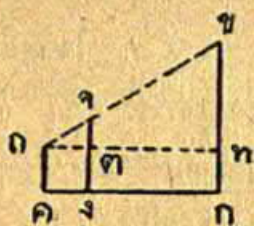
ก ข เป็นทอคอย

ง ๑ เป็นหลักที่ ๑ ค ๑ เป็นหลักที่ ๒

ด ค ท เป็นเส้นสายคาที่เล็งไปถึงฉากกับทอคอย

ด ๑ ข เป็นเส้นสายคาที่เล็งไว้แนวกบยอก

ทอคอย



รูปที่ ๓๗

ตามที่เขาทำนั้นเกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน ๒ รูป คือ ด ค ๑ กับ ด ค ข

$$\text{และ } ค ๑ = ง ค = ก ท = ๒ \text{ ศอก } ๑๖ \text{ นิ้ว} = ๒ \frac{๒}{๓} \text{ ศอก}$$

$$ค ๑ = ๓ \text{ ศอก และ } ค ท = ๒๗ \text{ ศอก}$$

$$\therefore ก ท = ค ๑ + ค ท = ๓๐ \text{ ,,}$$

$$\text{และ } ง ๑ = ๑๒ \text{ ศอก } ค ๑ = ๒ \frac{๒}{๓} \text{ ,,}$$

$$\therefore ค ๑ = ง ๑ - ค ๑ = ๑ \frac{๑}{๓} \text{ ,,}$$

$$\text{และ } ก ข : ก ท = ค ๑ : ค ๑$$

$$\text{หรือ } \frac{ก ข}{๓๐} = \frac{๑ \frac{๑}{๓}}{๓}$$

$$\therefore ก ข = \frac{๑ \frac{๑}{๓}}{๓} \times ๓๐ = \frac{๒๗ \times ๓๐}{๓ \times ๓} \text{ ศอก}$$

$$= ๑๓ \frac{๑}{๓} \text{ ศอก}$$

$$\therefore \text{ทอคอยสูง} = ก ข + ก ท = ๑๓ \frac{๑}{๓} + ๒ \frac{๒}{๓}$$

$$= \underline{\underline{๑๖ \text{ ศอก}}}$$

๕๔. ในข้อนี้จะให้อธิบายถึงเนอที คช อัตราส่วนของเนอที
ของรูปที่คล้ายกัน บ่อมเท่ากับอัตราส่วนของเนอทีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
บนด้านของมัน (เรขาคณิตบทพิสูจน์ที่ ๗๓) และอัตราส่วนของเนอที
ของรูปเส้นโค้งใดๆ บ่อมเท่ากับอัตราส่วนของเนอทีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน
เส้นที่ลากให้ส่วนกับภายในรูปนั้นด้วยเหมือนกัน

เช่น รูปวงกลม ๒ วง มีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว ๑๔ และ ๒๘ นิ้ว
เพราะฉะนั้นเนอทีเป็น ๑๕๔ และ ๖๑๖ ตารางนิ้ว

เพราะฉะนั้นอัตราส่วนของ ๑๕๔ : ๖๑๖ = $(๑๔)^๒ : (๒๘)^๒$

ทำนสำเร็จะให้ $\frac{๑}{๔}$ ทั้ง ๒ ฝ่าย แสดงว่าเท่ากันจริง

ตัวอย่างที่ ๑ นารูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๒๑ วา ๒๐ วา
และ ๑๓ วา จงหาเนอทีของนาอกแปลงหนึ่งซึ่งมีรูปคล้ายกัน และ
อัตราส่วนของด้านหนึ่งของแปลงที่ ๒ กับแปลงที่ ๑ เป็น ๒๕ : ๓

$$\text{เนอทีแปลงที่ ๑} = \sqrt{๒(๒-๓)(๒-๔)(๒-๕)}$$

$$= \sqrt{๒๗ \times ๖ \times ๗ \times ๑๔}$$

$$= ๔๒ \times ๒ \times ๗$$

ตารางวา

$$\therefore \text{เนอทีแปลงที่ ๒ : เนอทีแปลงที่ ๑} = (๒๕)^๒ : ๓^๒$$

$$\text{หรือ } \frac{\text{แปลงที่ ๒}}{\text{แปลงที่ ๑}} = \left(\frac{๒๕}{๓}\right)^๒$$

∴ เนื้อที่แปลงที่ ๒

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{25}{3}\right) \times \text{แปลงที่ ๑} \\
 &= \frac{25 \times 25}{3 \times 3} \times ๔ \times ๒ \times ๗ \text{ ไร่} \\
 &= ๘๗๕๐ \text{ ตารางวา} \\
 &= \underline{\underline{๒๑ ไร่ ๓ งาน ๕๐ ตารางวา}}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๒ กข คง เป็นเนื้อที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูไม่เท่า
เนื้อที่ ๑๔๔๐ ตารางวา ผู้ทำแผนที่ขอมาทราบแล้ว ได้เส้น
ทะแยงมุม กค ยาว ๖ นิ้ว และเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุม ข และ
มุม ง ลงมาถึงฉากกับเส้นทะแยงมุม กค ยาว ๑,๘ นิ้ว และ ๑,๘ นิ้ว
ถามว่าผู้ทำแผนที่ใช้มาทราบส่วนอย่างไร ?

เนื้อที่ของแปลง กข คง

$$\begin{aligned}
 &= \frac{๑}{๒} กค \times (\text{ผลบวกของเส้นตั้งฉาก}) \\
 &= \frac{๑}{๒} \times ๖ \times ๒.๗ \text{ ตารางนิ้ว} \\
 &= ๘.๑
 \end{aligned}$$

”

∴ ๘.๑ ตารางนิ้ว = ๑๔๔๐ ตารางวา

∴ ๑ ” = $\frac{๑๔๔๐}{๘.๑} = \frac{๑๖๐๐}{๘}$ ตารางวา

∴ ๑ นิ้ว = $\sqrt{\frac{๑๖๐๐}{๘}} = \frac{๔๐}{๓}$ วา

คือใช้มาทราบส่วน = ๓ นิ้วต่อ ๔๐ วา หรือ ๒ เส้น

แบบฝึกหัดที่ ๒๐

รูปคล้ายกัน

(ด้านและเส้นตรง)

๑. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก ป เป็นรูป
อยู่ภายในด้านตรงมุมฉาก ลาก ป ม ให้ขนานกับ ข ค และให้พบด้าน
ตรงข้ามที่ ร ก ม

(ก) ถ้า $กป = ๒๑$ นิ้ว, $ปข = ๓\frac{๑}{๒}$ นิ้ว, และ $มก = ๑๘$ นิ้ว

จงหา มค

(ข) ถ้า $กค = ๑.๒๕$ นิ้ว, $กป = ๒.๑๒๕$ นิ้ว และ $มค = ๑๐$ นิ้ว จงหา ปข

(ค) ถ้า $กค = ๘.๗๕$ นิ้ว, $ปข = ๒.๒๕$ นิ้ว และ $มค = ๑.๗๕$ นิ้ว จงหา กป

(ง) ถ้า $กข = ๑๗.๖$ นิ้ว, $กค = ๑๔.๔$ นิ้ว และ $มค = ๕.๔$ นิ้ว จงหา กป

(จ) ถ้า $ขค = ๑๒\frac{๑}{๒}$ นิ้ว, $กค = ๓๐$ นิ้ว และ $ปม = ๕$ นิ้ว
จงหา กม และ กป

(ฉ) ถ้า $ขค = ๑๒$ นิ้ว, $มค = ๒๔$ นิ้ว และ $ปม = ๒.๔$ นิ้ว
จงหา กม และ กข

(๒) ถ้า $ขค = ๗$ นิ้ว, $ปช = ๒๐$ นิ้ว และ $ปม = ๑.๕$ นิ้ว
จงหา $กป$ และ $กค$

(๓) ถ้า $ขค = ๑๒$ นิ้ว, $กม = ๗$ นิ้ว และ $มค = ๒๘$ นิ้ว
จงหา $ปช$

(๔) ถ้า $กป = ๕$ ศอก ๑๖ นิ้ว, $ปช = ๑๑$ ศอก ๑๘ นิ้ว
และ $ปม = ๒$ ศอก ๑๖ นิ้ว จงหา $มค$

๒. มีหลักสองก้านยาว ๓ ศอก และ ๕ ศอก บัดอยู่ริมคลอง
อยู่ตรงกันข้ามคนละฟากคลอง ถ้าขึ้นอยู่ที่คันดินแล้วเกี่ยวลอบหลัง
ตรงออกไปห่างหลัก ๖๐ ศอก กับลงมือชักกับกันจะเห็นปลายหลัก
ทั้งสองนี้ไ้แนวกันพอดี ถามว่าคลองกว้างเท่าไร?

๓. ชายผู้หนึ่งหากระความสูงของหอคอบหอหนึ่ง เขาเขาไม้
ปักลงสูงพื้นดิน ๑๑ ฟุต ไกลจากหอ ๘๐ ฟุต แล้วเกี่ยวลอบหลังตรง
ออกไปห่างหลัก ๑๐ ฟุต เห็นปลายหลักกับยอดหอคอบไ้แนวกัน
พอดี ถ้าเขาสูง $๕ \frac{๑}{๒}$ ฟุต หอคอบสูงเท่าไร?

๔. ชายผู้หนึ่งสูง ๖ ฟุต ขึ้นอยู่ห่างเสาโคม ๓๒ ฟุต แสงไฟ
ฉายเงา ถ้าเขาสูง ๘ ฟุต โคมอยู่สูงจากพื้นดินเท่าไร? และในเวลา
เดียวกันนั้นคนอื่นคนหนึ่งสูง ๕ ฟุต ขึ้นอยู่ไกลเสาโคม ๒๐ ฟุต แสง
ไฟฉายคน ๆ นั้นให้เงาสูงเท่าไร?

๕. ชายผู้หนึ่งสูง ๖ ฟุต ขึ้นอยู่ไกลเสาโคม ๑๕ ฟุต แสงไฟ

ต้องทัวเขาเงาสูง ๕ ฟุต ถ้าเขาเคียวเข้ามาใกล้เสาอีก ๘ ฟุต เงาของเขาจะสูงเท่าไร?

๖. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก แล้วลากเส้น ค ป ให้ตั้งฉากกับ ก ข และลาก ป ส ให้ตั้งฉากกับ ก ค = ๕ นิ้ว และ ข ค = $๖\frac{๒}{๓}$ นิ้ว ให้หา ค ป และ ป ส

๗. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ก ข = ๘ นิ้ว ข ค = ๘ นิ้ว และ ค ก ๗ นิ้ว ป เป็นจุดอยู่ในด้าน ก ข ห่างจาก ก ๒ นิ้ว และ ป ม เป็นเส้นตั้งฉากกับ ข ค จงหา ป ม และ ม ค

๘. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ก ง เป็นเส้นที่ลากจาก ก ให้ตั้งฉากกับ ข ค และ ส เป็นจุดอยู่ใน ก ง ลากเส้นให้ขนานกับ ข ค ให้พบด้านสองด้านที่จุด ป และ ม ถ้า ข ค = ๘ นิ้ว ก ง = ๘ นิ้ว และ ง ส = ๓ นิ้ว จงหา ป ม

(เนอที)

๙. เนอทีของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ตั้งอยู่บนฐานยาว ๑๐ นิ้ว เป็น ๔๓.๓ ตารางนิ้ว จงหาเนอทีของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ตั้งอยู่บนฐานยาว ๒ นิ้ว

๑๐. เนอทีของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า ซึ่งมีด้านยาว ๑๒ นิ้ว เป็น ๓๗๔.๑๒ ตารางนิ้ว จงหาเนอทีของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าที่ตั้งอยู่บนฐานยาว ๒ นิ้ว

๑๑. รูปสามเหลี่ยมมีด้านยาว ๒๕ ศอก ๑๗ ศอก และ
 ๑๒ ศอก จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมมีกรุปหนึ่ง ซึ่งมีด้านยาว
 ด้านละ $\frac{๑}{๓}$ ของรูปแรกตามลำดับ

๑๒. ก ข ค กั ย ถ ทน เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน เนื้อที่
 เป็น ๒๔๕ ตารางนิ้ว และ ๕ ตารางนิ้วตามลำดับ ถ้า ก ข = ๒๑ นิ้ว
 จงหา ถ ท

๑๓. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก จากจุด ส
 ซึ่งอยู่ใน ก ข ลากเส้น ส ย ให้ขนานกับ ข ค ถ้า ก ข = ๑๗ นิ้ว
 ข ค = ๑๕ นิ้ว และ ก ย = ๒ นิ้ว จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม
 ก ส ย

๑๔. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมที่ ค เป็นมุมฉาก จากจุด ส
 ซึ่งอยู่ใน ก ข ลากเส้น ส ย ให้ขนานกับ ข ค ถ้า ก ค = ๗ นิ้ว
 ข ค = ๒๔ นิ้ว และ ก ส = ๕ นิ้ว จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม
 ก ส ย

๑๕. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยม ก ข = ๒๘ นิ้ว ข ค =
 ๓๖ นิ้ว ค ก = ๒๕ นิ้ว จากจุด ส ซึ่งอยู่ใน ก ข ลากเส้น ส ย ให้
 ขนานกับ ข ค ถ้า ก ส = ๕.๘ นิ้ว จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม
 ก ส ย

๑๖. ก ข ค เป็นรูปสามเหลี่ยมมุม ก ข = ๒๑ เส้น ข ค = ๑๗ เส้น และ ก ค = ๑๐ เส้น จากจุด ส ซึ่งอยู่ใน ก ข ลากเส้น ส ข ให้ขนานกับ ข ค และให้พยส่วนต่อของ ก ค ที่จุด ข ถ้า ก ส = ๑๐.๕ เส้น จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมมุม ส ข

(แปลนและมาตราส่วน)

๑๗. ทำแปลนพื้นที่ปลูกเรือน ใช้มาตราส่วน ๑ นิ้วต่อ ๑๕ ฟุต และพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อทำแล้วได้กว้างและยาวเป็น ๖ นิ้ว และ ๘ นิ้ว ถามว่าพื้นที่แปลนนี้เป็นเท่าไร?

๑๘. นาแปลนหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อย่อมาตราส่วนแล้วได้กว้างยาวด้านละ ๐.๗๕ นิ้ว ใช้มาตราส่วน ๖ นิ้วต่อไมล์ เนื้อที่ของนาแปลนนี้เป็นเท่าไร?

๑๙. ทำแปลนนารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อทำแล้วเนื้อที่เป็น ๖.๒๕ ตารางนิ้ว ใช้มาตราส่วน ๒๕ นิ้วต่อไมล์ ก้านโคยรอบของนาคือเป็นเท่าไร?

๒๐. ก ข ค เป็นนารูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เมื่อทำแปลนแล้วได้เส้นทแยงมุม ก ค ยาว ๑๑ นิ้ว และเส้นตั้งฉากที่ลากจาก ข และ ง ลงมาถึงฉากกับ ก ค ยาว ๖ นิ้ว และ ๕ นิ้ว ใช้มาตราส่วน ๒๒ นิ้วต่อไมล์ เจ้าของให้เขาเช่าคึกค่าเช่าเชเคอร์ละ ๒ เปนนก ๑๐ ซิลลิงจะไ้ค่าเช่าทั้งสี่เป็นเท่าไร?

๒๑. นารูปสามเหลี่ยมมีเนื้อที่ ๔ เฮกเตอร์ เมื่อย่อมาตราส่วน แล้วได้ด้านยาว ๒๕, ๑๗ และ ๑๒ นิ้ว ถามว่าเมื่อทำแปลนใช้มาตรา อย่างไร?

๒๒. กขค เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า เมื่อทำแปลน แล้ว $กค = ๒๐$ นิ้ว เส้นทั้งฉากที่ลากจาก ข และ ง ลงมาทั้งฉาก กับ กค ยาว ๒๔ นิ้ว และ ๒๖ นิ้ว ถ้าส่วนเหล่านี้มีเนื้อที่ ๕๑๒ เฮกเตอร์ ผู้ทำแปลนใช้มาตราส่วนอย่างไร? (ตอบนิ้วต่อไมล์)

(ทั้งสองสร้างรูปให้เป็นจริง)

๒๓. กขค เป็นรูปสามเหลี่ยม แบ่งออก ๒ ส่วนเท่าๆ กัน ด้วยเส้น สข และให้ สข ขนานกับฐาน ขค ถ้า $กข = ๑๐๐$ นิ้ว จงหา กส

๒๔. กขค เป็นรูปสามเหลี่ยม แบ่งออกสามส่วนเท่าๆ กัน ด้วยเส้นทรง ๒ เส้น คือ สส และ ขข และให้ ๒ เส้นนี้ขนานกับ ฐาน ขค ถ้า $กข = ๑๐๐$ นิ้ว จงหา กส และ กข

๒๕. ในรูปสามเหลี่ยม กขค ถ้า $กข = ๑๓$ นิ้ว $ขค = ๑๔$ นิ้ว $กค = ๑๕$ นิ้ว ปม เป็นเส้นที่ลากขนานกับ ขค ที่อีก ๒ ด้านที่รูป และม ถ้าเส้นทั้งฉากระหว่าง ปม และ ขค ยาว ๓ นิ้ว จงหา เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม กปม

๒๖. ในรูปสามเหลี่ยม ก ข ค บ้าน ก ข = ๒๕ ศอก ข ค = ๒๔ ศอก ก ค = ๓๖ ศอก ส บ เป็นเส้นที่ลากขนานกับ ก ค ตัดอีกสองด้านที่ ก ข และ ข ค ถ้าเส้นทั้งฉากระหว่าง ส บ และ ก ค ยาว ๔ ศอก จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม ข ส บ

๒๗. กำหนดด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้ยาว ๑๖ นิ้ว แล้วบรรจุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยลากเส้นต่อจากศูนย์กลางของด้านทั้ง ๔ แล้วบรรจุลงในของรูปที่บรรจุอีกรูปหนึ่ง โดยทำนองเดียวกัน จงหาเนื้อที่ของรูปที่บรรจุนี้เป็นรูปอะไร?

๒๘. รูปวงกลมรัศมียาว ๑๖ นิ้ว บรรจุรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่าลงใน แล้วบรรจุรูปวงกลมลงในรูปหกเหลี่ยม ทำดังนี้ต่อไป จนถึงรูปวงที่ห้า จงหาเนื้อที่ของรูปที่ห้าและหาเนื้อที่ของรูปหกเหลี่ยมที่สุดท้าย

บทที่ ๑๑

ว่าด้วย

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า

๖๐. จำกัดความ

- (๑) รูปหลายเหลี่ยม คือ รูปเส้นตรงที่มีด้านมากกว่า ๔ ด้าน
- (๒) รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน แต่มุมจะเท่ากันก็ได้ หรือไม่เท่ากันก็ได้
- (๓) รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า คือ รูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน และมุมเท่ากันทุกมุม

๖๑. เวกาคณิทยบทซึ่งต้องทำที่ ๓๑ ได้แสดงแล้วว่า

- (๑) เส้นผ่านมุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า พยกันที่จุดหนึ่งจุดใดจุดเดียวเท่านั้น
- (๒) เส้นที่ลากจากจุดที่เส้นผ่านมุมพยกันให้ตั้งฉากกับด้านทุกด้าน เส้นเหล่านี้ยาวเท่า ๆ กันทุก ๆ เส้น และเส้นผ่านมุมทุก ๆ เส้นยาวเท่ากันด้วย

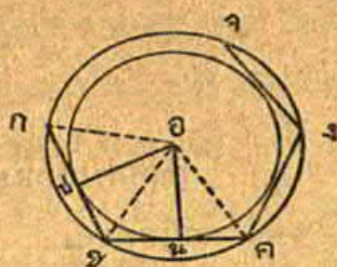
- (๓) จุดที่เส้นผ่านมุมพยกัน เป็นจุดศูนย์กลางของรูปวงกลมที่บรรจุภายในและที่ล้อมภายนอกรูปหลายเหลี่ยมนี้ด้วย

ให้ ก ข, ข ค, ค ง, ง จ, , เป็นด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า ซึ่งสมมุติว่ามีจำนวนด้านเท่ากับ n ด้าน และ

ให้ด้านหนึ่งยาว ขยูนิต ร ร เป็นรัศมี
ของรูปวงกลมที่บรรจุภายใน ร ถ เป็น
รัศมีของรูปวงกลมที่ล้อมภายนอก แล้ว

(๑) เส้นผ่านศูนย์กลาง ก ข ค.....,

ต้องพบกันที่ ร ก อ



รูปที่ ๓๗

(๒) อ ก = อ ข = อ ค = ร ถ

(๓) อ ง = อ น = ร ร

(๔) รูปสามเหลี่ยม ก อ ข, ข อ ค เท่ากัน

(๕) มุมทุก ๆ มุม คือ ก อ ข, ข อ ค, = ม ส่วน

(เพราะสมมุติว่ามี ม ด้าน มุมศูนย์กลางจึงมีส่วนเท่ากัน หรือส่วนหนึ่ง
= $\frac{360^\circ}{ม}$)

๖๒. หาคำนวณเนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า
ซึ่งมีด้าน ม. ด้าน กำหนดจำนวนยาวของด้านหนึ่ง ๆ ให้ กับกำหนด
จำนวนยาวของเส้นที่ลากจาก ร ก อ ลงมาตั้งได้ฉากกับด้านให้ด้วย

เนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า

$$= ม \times \text{เนื้อที่ } \triangle ข อ ค$$

$$= ม \times \frac{๑}{๒} \times ข ค \times อ น$$

$$= \frac{ม}{๒} \times \text{ด้าน} \times \text{เส้นตั้งฉาก}$$

นคอเนอทของรูปหลายเหลี่ยมก้านและมุมเท่า

= ครึ่งหนึ่งของผลบวกของก้านคูณด้วยก้าน กับคูณด้วย
เส้นตั้งฉาก

ตามทฤษฎีบทนี้เป็นวิธีคำนวณเนอทหลายเหลี่ยมก้านและมุม
เท่าได้ทุก ๆ ชนิด คือคงแต่ทำให้เหลี่ยมขึ้นไปจนไม่มีเขตต์กำหนดว่า
ก้าน

๖๓. ในข้อนี้จะอธิบายถึงวิธีคำนวณเนอทหลายเหลี่ยมก้านเท่า
และมุมเท่า ด้วยเกณฑ์ซึ่งผู้ชำนาญได้คำนวณไว้สำเร็จแล้ว แต่เป็น
เกณฑ์สำหรับรูป ๕ เหลี่ยมขึ้นไปถึง ๑๒ เหลี่ยมเท่านั้น (เกินกว่านั้น
ไปให้ทำตามวิธีของข้อ ๖๒) อันที่จริงเพียงเท่านั้นก็พอแก่ความต้องการ
แล้ว แต่ก่อนที่จะใช้เกณฑ์จะต้องรู้ส่วนหนึ่งส่วนใดก็จะต้องไปก่อนจึง
จะทำให้ คือ

(๑) รู้จำนวนยาว (๒) ของก้าน

หรือ (๒) รู้รัศมี (ร ๑) รูปวงกลมที่บรรจุภายใน

หรือ (๓) รู้รัศมี (ร ๒) รูปวงกลมล้อมรอบนอก

ถ้ารู้ก้าน คือ (๒) ให้คูณ (๒)^๒ ด้วยเกณฑ์ข้อที่ ๑

ถ้ารู้รัศมี (ร ๑) ให้คูณ (ร ๑)^๒ ด้วยเกณฑ์ข้อที่ ๒

ถ้ารู้รัศมี (ร ๒) ให้คูณ (ร ๒)^๒ ด้วยเกณฑ์ข้อที่ ๓

หรือ (๒)^๒ ให้คูณด้วยข้อ (๑)

(ร ๑)^๒ „ „ (๒)

(ร ๒)^๒ „ „ (๓)

๔ ชื่อ	จำนวน คัน	ชื่อที่ ๑	ชื่อที่ ๒	ชื่อที่ ๓
		คุณ(ข) ^๒ ก้วย	คุณ(ว) ^๒ ก้วย	คุณ(ง) ^๒ ก้วย
หาเหล็กม	๕	๑.๗๗๐๔๘	๓.๖๓๒๗๑	๒.๓๗๗๖๔
เหล็กม	๖	๒.๕๙๘๐๘	๓.๕๖๔๑๐	๒.๕๙๘๐๘
เหล็กม	๗	๓.๖๓๓๙๑	๓.๓๗๑๐๐	๒.๗๓๖๔๑
แปดเหล็กม	๘	๔.๘๒๘๔๓	๓.๓๑๓๗๑	๒.๘๒๘๔๓
เก้าเหล็กม	๙	๖.๑๘๑๘๒	๓.๒๗๕๗๓	๒.๘๙๒๕๔
สิบเหล็กม	๑๐	๗.๖๙๔๒๑	๓.๒๔๙๒๐	๒.๙๖๘๙๓
สิบเอ็ดเหล็กม	๑๑	๙.๓๖๕๖๔	๓.๒๒๙๙๔	๒.๙๙๗๓๕
สิบสองเหล็กม	๑๒	๑๑.๑๙๖๑๕	๓.๒๑๕๓๙	๓.๐๐๐๐๐

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาเนอทีของรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า
ที่มีด้านยาว ๑๐ นิ้ว

ควรดูในการวางเกณฑ์ ตรงกับข้อที่ ๑ (รูปด้าน) เกณฑ์
เป็น ๔.๘๒๘๔๓

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้นเนอที} &= (๑๐)^๒ \times ๔.๘๒๘๔๓ \\ &= \underline{๔๘๒.๘๔๓} \text{ ตารางนิ้ว}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๒ จงหาเนอทีของรูปเรขาคณิตเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า
ที่มีรัศมีรูปวงกลมบรรจุภายใน ๒๐ นิ้ว

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้นเนอที} &= (๒๐)^๒ \times ๓.๓๗๑๐๐ \\ &= \underline{๑๓๔๘.๔} \text{ ตารางนิ้ว}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๓ จงหาเนอทีของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าที่มีรัศมีรูป
วงกลมล้อมรอบภายนอกยาว ๒๕ นิ้ว

ควรดูในการวางเกณฑ์ ตรงกับข้อที่ ๓ รัศมี วงกลม เกณฑ์เป็น
๒.๓๗๗๖๔

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้นเนอที} &= (๒๕)^๒ \times ๒.๓๗๗๖๔ \\ &= \underline{๑๔๘๖.๐๒๕} \text{ ตารางนิ้ว}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ ๔ เนอทีของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า
เป็น ๑๒๘๖.๑๕๖ ตารางนิ้ว รัศมีของรูปวงกลมที่บรรจุภายในยาว
เท่าไร?

ถ้ารัศมีของรูปวงกลมภายในแล้วเนื้อที่

$$= (r_1)^2 \times \pi \times ๓.๑๔๑๖๔๘ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$\therefore (r_1)^2 \times \pi \times ๓.๑๔๑๖๔๘ = ๑๒๘๖.๑๕๖ \quad "$$

$$\text{หรือ } (r_1)^2 = \frac{๑๒๘๖.๑๕๖}{\pi \times ๓.๑๔๑๖๔๘} = ๔๐๐ \quad "$$

$$\therefore r_1 = \sqrt{๔๐๐} = \underline{๒๐} \quad \text{นิ้ว}$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๑

๑. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคี่เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่าที่มีด้านยาว ๕ นิ้ว (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

๒. จงหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคี่เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า ด้านยาว ๘ นิ้ว (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)

๓. จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมคี่เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุภายในรูปวงกลม ซึ่งมีรัศมียาว ๖ นิ้ว

๔. จงหาราคาของแผ่นเหล็ก ซึ่งมีรูปเป็นรูปหกเหลี่ยมคี่เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า ด้านยาว ๔ ฟุต ราคาตารางหลาละ ๑๒ ชิลลิงถึง ๓ เพนซ์

๕. ทำรั้วรอบสวนรูปแปดเหลี่ยมคี่เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า ดินเงิน ๑๖ เปาน์ ๑๓ ชิลลิง ๔ เพนซ์ ถัดหลาละ ๑๒ ชิลลิงถึง ๖ เพนซ์ ถ้าเราจ้างเขาพันก่เสี้ยค่าจ้างตารางฟุตละ ๓ ชิลลิงถึง ๔ เพนซ์ พันรอบจะเสียเงินเท่าไร?

๖. จงหารัศมีของรูปวงกลมที่มีเนื้อที่เท่ากับเนื้อที่รูปหกเหลี่ยมคี่เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า ซึ่งมีด้านยาว ๑๑ นิ้ว ($\pi \frac{๒๒}{๗}$)

๗. จงหาเส้นตั้งฉากระหว่างด้านตรงข้ามของรูปหกเหลี่ยมบ้าน
เท่าและมุมเท่าที่มีด้านยาว ๑๖ นิ้ว

๘. จงหาค้นของรูปแปดเหลี่ยมบ้านเท่าและมุมเท่า ที่เกิดขึ้น
ด้วยทักมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสี่เหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสี่เหลี่ยม
ยาว ๘ นิ้ว

๙. จงหาค้นของรูปสิบสองเหลี่ยมบ้านเท่าและมุมเท่า ซึ่ง
บรรจุภายในรูปวงกลมที่มีรัศมียาว ๑๒ นิ้ว

๑๐. จงหาเนื้อที่ของรูปวงกลมที่ล้อมรูปแปดเหลี่ยมบ้านเท่าและ
มุมเท่า ด้านยาว ๗ นิ้ว ($\pi = \frac{22}{7}$)

๑๑. เนื้อที่ของรูปสิบสองเหลี่ยมบ้านเท่าและมุมเท่าเป็น ๓๐๐
ตารางนิ้ว จงหารัศมีของรูปวงกลมที่ล้อม

๑๒. จงหาเนื้อที่ของรูปวงแหวนของรูปวงกลมที่บรรจุ และที่
ล้อมรูปหกเหลี่ยมบ้านเท่าและมุมเท่าซึ่งมีด้านยาว ๒๐ นิ้ว ($\pi =$
๓.๑๔๑๖)

๑๓. บรรจุรูปแปดเหลี่ยมบ้านเท่าลงในรูปวงกลมที่มีรัศมี
ยาว ๗ นิ้ว แล้วบรรจุรูปวงกลมลงในรูปแปดเหลี่ยม อีกวงหนึ่ง
จงหาเนื้อที่ของรูปวงกลมภายในรูปแปดเหลี่ยมนี้ (ทศนิยม๒ตำแหน่ง)

๑๔. เนื้อที่ของรูปหกเหลี่ยมบ้านเท่าและมุมเท่า และ ๑๒
เหลี่ยมบ้านเท่าและมุมเท่า ซึ่งตั้งอยู่บนฐานอันเดียวกัน ต่างกันเป็น
๑๑๓.๔ ตารางนิ้ว จงหาฐานที่ร่วมกัน [$\sqrt{3} = ๑.๗๓๒$]

๑๕. เนื้อที่ของรูปแปดเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่ากับสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งบรรจุอยู่ในรูปวงกลมอันเดียวกัน ทำกันเป็น ๘๒.๘ ตารางนิ้ว เหนือครึ่งของรูปวงกลม [$\pi = ๓.๑๔$]

๑๖. เหนือครึ่งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่เกิดขึ้นด้วยลากเส้นระหว่างจุดศูนย์กลางของด้านของรูปแปดเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่าที่มีด้านยาว ๘ นิ้ว

๑๗. ทำทางรอบสนาม (ภายนอก) รูปหกเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่าที่มีด้านยาว ๑๔ ฟุต ทางกว้างที่มุม ๓ ฟุต เหนือครึ่งของทาง

๑๘. เหนือครึ่งของรูปหกเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่าที่เกิดขึ้นด้วยลากเส้น ต่อจุดศูนย์กลางของหกเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่าที่มีด้านยาว ๒๔ วา

๑๙. เนื้อที่ของรูปเจ็ดเหลี่ยมค้านเท่าเป็น ๑๐๙๔.๕๖๔ ตารางนิ้ว เหนือครึ่งของรูปวงกลมที่ล้อม

๒๐. เหนือครึ่งของรูปวงกลมที่บรรจุภายในรูปเก้าเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่าที่มีด้านเท่ากันหกเหลี่ยมค้านเท่าและมุมเท่า ซึ่งมีด้านยาว ๒๕ นิ้ว

บทที่ ๑๒

ว่าด้วย

รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

และวิธีแสพินที่

หมวดที่ ๑

รูปหลายเหลี่ยมด้านไม่เท่า

๖๔. จำกัดความ รูปหลายเหลี่ยมด้านไม่เท่า คือ รูปเส้นตรง
ที่มีด้านมากกว่า ๔ ด้าน และด้านยาวไม่เท่ากัน

วิธีคำนวณเนื้อที่รูปหลายเหลี่ยมด้านไม่เท่าใด ๆ ในขั้นต้นให้ลาก
เส้นทแยงมุมลงก่อน เส้นทแยงมุมจะไ้แบ่งเนื้อที่ออกเป็นรูปสาม
เหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม แต่จะต้องรู้เสียก่อนว่าควรลากทางไหน
และจะต้องลากสักกี่เส้นจึงจะสะดวกแก่การหาคำนวณ เมื่อหาเนื้อที่
ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นภายในรูปหลายเหลี่ยมนั้น ๆ
ไว้แล้วเก็บมาบวกกันเป็นเนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่ต้องการ ระวังตัว
อย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาเนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยมด้านไม่เท่า ก ข ค ง
ซึ่งมีมุมที่ ข และ ง เป็นมุมฉาก ด้าน ก ข = ๑๒ นิ้ว ข ค = ๕ นิ้ว
ค ง = ๑๒ นิ้ว ง จ = ๙ นิ้ว และ จ ก = ๑๔ นิ้ว

ต้องการเส้นทแยงมุม กค และ กข เดี่ยวก่อน

$$กค = \sqrt{(๑๒)^2 + (๕)^2} = ๑๓ \text{ นิ้ว}$$

$$กข = \sqrt{(๒)^2 + (๑๔)^2} = ๑๕ \text{ นิ้ว}$$

$$\text{และ } กขคก = \triangle กขค + \triangle กขง$$

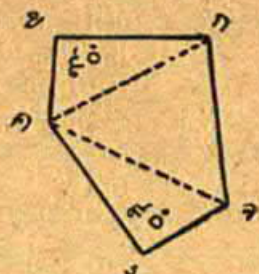
$$+ \triangle กคก$$

$$\triangle กขค = \frac{๑}{๒} \cdot ๑๒ \times ๕ = ๓๐ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$\triangle กขง = \frac{๑}{๒} \cdot ๑๒ \times ๑๔ = ๘๔ \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$\begin{aligned} \triangle กคก &= \sqrt{๒(๒-๑)(๒-๕)(๒-๑)} \\ &= \sqrt{๒ \times ๑ \times ๑ \times ๑} = ๑ \text{ ตารางนิ้ว} \end{aligned}$$

$$\therefore กขคก = ๓๐ + ๘๔ + ๑ = ๑๑๕$$



รูปที่ ๓๖

๖๕. ถ้ารูปหลายเหลี่ยมมีด้านหลายด้าน ต้องการหาพื้นที่หนึ่ง คือ ต้องการหาเส้นทแยงมุมระหว่างมุมคู่ใดคู่หนึ่งลงก่อน (ควรลากเส้นที่ยาวที่สุด) และเส้นนี้เรียกว่าเส้นฐาน แล้วลากเส้นจากมุมที่เหลืออยู่ลงมาให้ถึงเส้นลากกับเส้นทแยงมุมที่ลากไว้แล้วนั้น เมื่อลากเสร็จแล้วก็จะได้แบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหลาย ๆ รูป แล้วจึงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเหล่านี้รวมกัน จะได้พื้นที่ทั้งหมดที่ต้องการหา

ตัวอย่าง งานนอกของนาต่อไปนี้

$$ก ง = ๑๖๗๕ \quad \text{คอก}$$

$$ก ป = ๔๐๐ \quad ,,$$

$$ก ม = ๑๐๔๐ \quad ,,$$

$$ก ร = ๑๒๐๐ \quad ,,$$

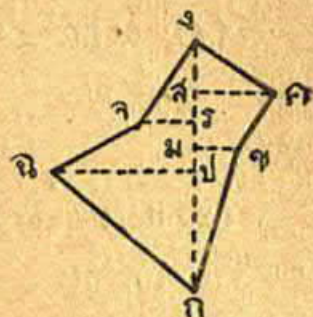
$$ก ส = ๑๓๘๐ \quad ,,$$

$$ป ฉ = ๘๕๐ \quad ,,$$

$$ม ข = ๒๐๐ \quad ,,$$

$$ร ร = ๒๕๐ \quad ,,$$

$$ส ก = ๕๐๐ \quad ,,$$



รูปที่ ๔๐

วิธีทำ ต้องการหาเนื้อที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๔ รูป คือ ก ป ฉ, ก ม ข, ง ร ร และ ง ส ก ก็ยี่สิบเหลี่ยมคางหมู ๒ รูป คือ ป ร ร ฉ และ ม ส ค ข ครึ่งแรกหาเนื้อที่ของรูปเหล่านี้เป็น ๒ เท่าก่อน เมื่อรวมกันแล้วจึงแบ่งด้วย ๒

$$\begin{aligned} (๑) \text{ สองเท่าของ } ก ป ฉ &= ก ป \times ป ฉ = ๔๐๐ \times ๘๕๐ \text{ ตร.ค.} \\ &= ๓๔๐,๐๐๐ \quad ,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (๒) \text{ สองเท่าของ } ก ม ข &= ก ม \times ม ข = ๑๐๔๐ \times ๒๐๐ \quad ,, \\ &= ๒๐๘,๐๐๐ \quad ,, \end{aligned}$$

$$ง ร = ก ง - ก ร = ๔๗๕ \quad ,,$$

$$(๓) \text{ สองเท้าของ ง ร ร } = \text{ง ร} \times \text{ร ร} = ๔๗๕ \times ๒๕๐ \text{ ทวี } \text{ก.} \\ = ๑๑๘๗๕๐ \quad \text{,,}$$

$$\text{ก ง} - \text{ก ต} = ๒๔๕ \quad \text{ทศก}$$

$$(๔) \text{ สองเท้าของ ง ต ก} = \text{ง ต} \times \text{ต ก} = ๒๔๕ \times ๕๐๐ \quad \text{,,} \\ = ๑๒๒๕๐๐ \quad \text{,,}$$

$$\text{ป ร} = \text{ก ร} - \text{ก ป} = ๓๐๐ \quad \text{ทศก}$$

$$(๕) \text{ สองเท้าของ ป ร ร น} = \text{ป ร} (\text{ป ร} + \text{ร ร}) = ๓๐๐ \times ๑๑๐๐ \quad \text{,,} \\ = ๓๓๐๐๐๐ \quad \text{,,}$$

$$\text{ม ต} = \text{ก ต} - \text{ก ม} = ๓๕๐ \quad \text{ทศก}$$

$$(๖) \text{ สองเท้าของ ม ต ก ข} = \text{ม ต} (\text{ม ข} + \text{ต ก}) = ๓๕๐ \times ๗๐๐ \quad \text{,,} \\ = ๒๔๕๐๐๐ \quad \text{,,}$$

$$\therefore \text{ สองเท้าของ ก ข ก ง ร น} = ๗๖๕๐๐๐ + ๒๐๘๐๐๐ \\ + ๑๑๘๗๕๐ + ๑๒๒๕๐๐ \\ + ๓๓๐๐๐๐ + ๒๔๕๐๐๐ \\ = ๑๘๐๗๒๕๐ \quad \text{การวางศอก}$$

$$\therefore \text{ ก ข ก ง ร น} = \underline{๔๐๓๖๒๕} = ๒๔ \text{ ไร่ } ๗๗ \text{ ทวี } ๖$$

๖๖. พื้นที่บางแปดท้องลากฐานหลายเส้น เช่นรูป ก ข ก ง ร น
ในโทษัตถ์อย่างข้างล่างนี้เป็นต้น ท้องลากถึงสามเส้น บางเส้นอยู่
ภายใน เมื่อฐานอยู่ภายนอก เส้นทั้งลากก็ท้องอยู่ภายนอกด้วย

ตัวอย่าง ก ข คง ร น เป็นนาแปลงหนึ่ง เมื่อตาก ร ก, ค ก และ ก ร แล้ว ก ร เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นมุมฉาก หนึ่งด้านของนาแปลงนี้

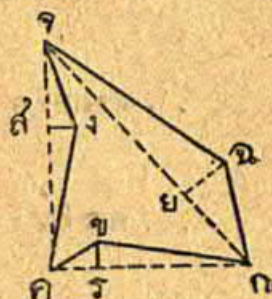
$$ก ก = ๖๕๐ \text{ ศอก}$$

$$ก ร = ๗๒๐ \text{ ,,}$$

$$ข ร = ๔๐ \text{ ,,}$$

$$ง ค = ๕๐ \text{ ,,}$$

$$น บ = ๑๒๐ \text{ ,,}$$



เนื้อที่ ก ข คง ร น

$$= ก ก ร น - (\triangle ก ข ร + \triangle ก ร ข)$$

ก ร ค เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$ก ร = \sqrt{ก ก^2 + ก ข^2} = \sqrt{(๖๕๐)^2 + (๗๒๐)^2}$$

$$= ๙๗๐ \text{ ศอก}$$

$$(๑) \text{ สองเท่า ก ก ร} = ก ก \times ก ร = ๖๕๐ \times ๙๗๐ \text{ ตารางศอก}$$

$$= ๔๖๔๐๐๐ \text{ ,,}$$

$$(๒) \text{ สองเท่า ก ข ค} = ก ข \times ข ร = ๖๕๐ \times ๔๐$$

$$= ๔๔๕๐๐ \text{ ,,}$$

$$(๓) \text{ สองเท่า ก ร ค} = ก ร \times ง ค = ๙๗๐ \times ๕๐$$

$$= ๓๖๐๐๐ \text{ ,,}$$

$$(๔) \text{ สองเท่า ร น} = ร ก \times น บ = ๙๗๐ \times ๑๒๐$$

$$= ๑๑๖๔๐๐ \text{ ,,}$$

สองเท่าของ ก ข ๑ น = ๔๖๘๐๐ + ๑๑๖๔๐๐ ตารางซอก

$$= ๕๘๔๔๐๐ \quad "$$

และสองเท่า $\triangle$ ๑ ง ก + $\triangle$ ก ข ๒ = ๕๘๕๐๐ + ๓๖๐๐๐ "

$$= ๙๔๕๐๐ \quad "$$

$\therefore$ สองเท่า ก ข ก ง ๑ น = ๕๘๔๔๐๐ - ๙๔๕๐๐ "

$$= ๔๘๙๙๐๐ \quad "$$

$\therefore$ ก ข ก ง ๑ น = ๒๔๔๙๕๐ "

$$= \underline{\underline{๓๘ \text{ ไร่ } ๑๗๒ \text{ ตารางวา.}}}$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๒

รูปหลายเหลี่ยมด้านไม่เท่า

(๑) วงก้านวณเนอกของนารูปหกเหลี่ยมด้านไม่เท่า ก ข ก ง ๑ น
มุมที่ ข ง และที่ น เป็นมุมฉาก และ

$$ก ข = ๓๕ \text{ วา}$$

$$ข ก = ๑๒ \text{ วา}$$

$$ก ง = ๑๒ \text{ วา}$$

$$ง ๑ = ๑๖ \text{ วา}$$

$$๑ น = ๒๔ \text{ วา}$$

$$น ก = ๔๕ \text{ วา}$$

(๒) รังคำนวณเนกขของนา กข คง ๑

กข = ๑๒ นิ้ว มุมกขก เป็นมุมฉาก

ขก = ๕ นิ้ว

กก = ๑๕ นิ้ว

กก ๑ = เป็นมุมฉาก

ง ๑ = ๘ นิ้ว

(๓) รังคำนวณเนกขของรูป กข คง ๑

กข = ๑๓ ฟุต

ขก = ๕๑ ฟุต

กก = ๓๗ ฟุต

ง ๑ = ๑๐ ฟุต

๑ ก = ๑๗ ฟุต

กก = ๒๑ ฟุต

ร ง = ๒๐ ฟุต

(๔) รังหาเนกขของรูป กข คง ๑

กข = ๒๕๐ ไร่

ขก = ๓๐๐ ไร่

กก = ๒๕๐ ไร่

ง ๑ = ๑๗๐ ไร่

๑ ก = ๓๖๐ ไร่

ข ๑ = ๒๕๐ ไร่

ข ง = ๒๖๐ ไร่

(๕) จงหาเนื้ของรูป ก ข กง ๑ ค, ค ร, ข ข, ข ๑, และ
 ส ง เป็นเส้นทั้งไ้ฉากกับ ก ก

$$ก ก = ๑๘๐ \text{ เมตร}$$

$$ก ร = ๕๐ \text{ ,,}$$

$$ร ข = ๗๐ \text{ ,,}$$

$$ข ส = ๓๐ \text{ ,,}$$

$$ส ก = ๓๐ \text{ ,,}$$

$$ร ค = ๖๐ \text{ ,,}$$

$$ข ๑ = ๔๐ \text{ ,,}$$

$$ข ข = ๕๐ \text{ ,,}$$

$$ส ง = ๘๐ \text{ ,,}$$

(๖) จงหาเนื้ของรูป ก ข กง ๑

$$ก ข = ๑๓ \text{ เส้น}$$

$$ข ง = ๑๔ \text{ ,,}$$

$$ง ก = ๑๕ \text{ ,,}$$

$$ก ร = ๒ \text{ ,,}$$

$$ร ข = ๒ \text{ ,,}$$

(๗) จงหาเนื้ของนาแปลงนี้

$$ก ก = ๒๕๐๐ \text{ เมตร}$$

$$ก ๑ = ๒๕๐๐ \text{ ,,}$$

ร ก = ๓๖๐๐ เมตร

ข ร = ๔๐๐ "

ง ย = ๔๐๐ "

ค ต = ๔๕๐ "

(๘) ภูเขา^๑ที่ ก ข ค ง, ร ค ข ร, มุม ก ข ร และ ก ข ร
เป็นมุมฉาก

ก ข = ๗ เซกโตเมตร

ข ร = ๒๔ "

ร ข = ๒๐ "

ค ก = ๑๕ "

ป และ ฟ เป็นจุดศูนย์กลางของ ข ร และ ร ข

ค ร = ง ย และ ค ต = ข ว

หมวดที่ ๒

รูปชั้นบันได

๖๗. จำกัดความ รูปชั้นบันไดหรือรูปชั้นลดก็เรียก คือรูป
หลายเหลี่ยมข้างหนึ่งลดเป็นชั้น ๆ

ถ้ารูปขั้นบันไดที่เราเห็นว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เนื้อที่
 เว้าแหว่งหายไป แต่ถึงกระนั้นถ้าเราหั่นเอาเว้าแหว่งลงมาเป็น
 ชิ้น ๆ ทำให้ส่วนที่เหลืออยู่มีฐานคล้ายกับบันไดที่ก่อด้วยอิฐก้อน ๆ หรือ
 รูปสี่เหลี่ยมที่ก้าวขึ้นลงประตู จึงเรียกกันว่ารูปขั้นบันได

๖๘. ถ้าส่วนลึกของรูปขั้นบันไดลดเท่า ๆ กัน คือส่วนลึกหรือ
 สูงเท่ากัน และส่วนกว้างเท่ากัน และมุมทางส่วนที่ไม่ถูกลดเป็น
 มุมฉาก แล้วถ้าหาหาเนื้อที่ คงทำได้ดังนี้

ให้ ก ข คง ข เป็นรูปขั้นบันไดที่มีส่วน
 ลึกกว้างเท่ากัน ลึกเท่าลึก และมีชั้นลด ๓ ชั้น

๒ เท่าเนื้อที่ของรูป ก ข คง ข

= เนื้อที่รูป ก ข ค ก

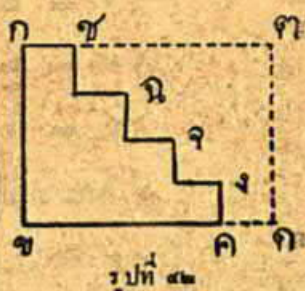
= ก ข (ข ค + ก ข)

∴ ก ข คง ข = $\frac{๑}{๒}$ ก ข (ข ค + ก ข)

∴ เนื้อที่รูปขั้นบันไดที่มีส่วนลึกเล็กและกว้างเท่ากัน

= $\frac{๑}{๒}$ สูง (ฐาน + ชั้นบน)

ตัวอย่าง จงหาเนื้อที่ของรูปขั้นบันไดที่มีชั้นลด ๓ ชั้นเท่ากัน คือ
 ลึกเท่าลึก กว้างเท่ากว้าง ฐานยาว ๑๖ วา สูง ๑๒ วา ส่วนลึก
 กว้าง ๔ วา



$$กข = ๑๒ วา ขค = ๑๖ วา กข = ๔ วา$$

$$ขค = (ขก + กข) = ๑๖ + ๔ = ๒๐ วา$$

$$\text{เนื้อที่} = \frac{๑}{๒} \text{ สูง (ฐาน + ขั้วบน)}$$

$$= \frac{๑}{๒} \cdot ๑๒ \cdot ๒๐ = ๑๒๐ \text{ ตารางวา}$$

$$= \underline{\underline{\text{งาน } ๒๐ \text{ ตารางวา}}}$$

หมายเหตุ ขั้วบนจะยาวหรือสั้นกว่าส่วนกว้างของชั้นรอง ๆ ลง
ไปก็หาเนื้อที่ได้ในทำนองเดียวกันกับวิธีข้างบนนี้

๖๔. ถ้าส่วนลดกว้างยาวไม่เท่ากัน ก็ลดทีละลดไม่เท่ากัน
กว้างต่อกว้างไม่เท่ากัน หรือเท่ากันบ้างไม่เท่ากันบ้าง ก็ทำตาม
วิธีที่อธิบายมาแล้วในข้อข้างบนไม่ได้ ต้องทำอีกวิธีหนึ่ง ง่ายกว่าอย่าง
ต่อไปนี้

$$กข = ๔ วา$$

$$ขค = ๖ วา$$

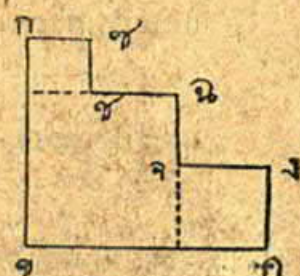
$$กง = ๘ วา$$

$$ขช = ๔ วา$$

$$คจ = ๔ วา$$

$$งค = ๕ วา$$

วิธีทำมีหลายทาง คือ



รูปที่ ๔๓

(๑) ทำตรงออกไปถึงเส้นไข่วางในรูปที่ ๔๓

หรือ (๒) ราก $\sqrt{ก}$ ๑ ดากเส้นตรงลงมาถึงเส้น $\sqrt{ข}$ ค และราก
 $\sqrt{กข}$ ดากเส้นตรงออกมาถึง $\sqrt{ค}$ ข ทั้งที่ลากแล้วก็ได้

หรือ (๓) ราก $\sqrt{กข}$ ดากเส้นตรงลงมาถึง $\sqrt{ข}$ ค และราก $\sqrt{ก}$ ๑
 ดากตรงลงมาถึง $\sqrt{ค}$ ข ทั้งที่ลากแล้วก็ได้

วิธีหนึ่งวิธีใดใน ๓ วิธีนี้ มุมที่ขึ้นดกทั้งเป็นมุมฉากด้วย เมื่อ
 ดากแล้วจะแบ่งเนื้อของรูปชั้นบันไดออกเป็นแปลง ๆ แปลงหนึ่ง ๆ
 เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทวนเนื้อของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ทั้งสิ้นแล้ว
 บวกกันเป็นเนื้อของรูปชั้นบันได คือ

$$\text{เนื้อที่รูปชั้นบันได} = \text{รูปสี่เหลี่ยม กข} + \text{รูปสี่เหลี่ยม ขค} \\ + \text{รูปสี่เหลี่ยม กค}$$

$$\text{และรูปสี่เหลี่ยม กข} = กข \times ขข = ๔ \times ๔ \text{ ตารางวา} \\ = ๑๖$$

$$\text{และรูปสี่เหลี่ยม ขค} = (คข + กข)(ค + ข) = ๑๐ \times ๘ \text{ ตารางวา} \\ = ๘๐$$

$$\text{และรูปสี่เหลี่ยม กค} = กค \times กค = ๘ \times ๘ \\ = ๔๐$$

$$\therefore \text{เนื้อที่รูปชั้นบันได} = ๑๖ + ๘๐ + ๔๐ \\ = ๑๓๖ \\ = \underline{\underline{๑ งาน ๓๖ ตารางวา}}$$

๗๐. มีโทษบางโทษซึ่งเกี่ยวข้องกับชั้นบันได แต่จะทำ
กัณฑ์วิธีที่อธิบายมาแล้วทั้งสองวิธีไม่ได้ ต้องทำกัณฑ์วิธีพิเศษอีก ๑ ก
ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง นาชั้นบันไดแปลงหนึ่งมีเนื้อที่ ๑๒๐ ตารางวา ฐาน
ยาว ๑๖ วา ชั้นบนกว้าง $\frac{๑}{๓}$ ของส่วนสูง ชั้นรองๆ ลงมากว้างเท่ากัน
และลึกเท่ากันทุกชั้น ถามว่าส่วนสูงเป็นเท่าไร?

$$\text{ให้ } s = \text{ส่วนสูง}$$

$$\therefore \frac{s}{๓} = \text{ส่วนกว้างของชั้นบน}$$

$$\text{และเนื้อที่} = \frac{๑}{๒} s (๑๖ + \frac{s}{๓})$$

$$\therefore \frac{๑}{๒} s (๑๖ + \frac{s}{๓}) = ๑๒๐$$

$$\text{หรือ } ๘ s + \frac{s^2}{๖} = ๑๒๐$$

$$\text{หรือ } s + ๔ s = ๗๒๐$$

ทำต่อไปจนแล้วจะได้คำตอบ

$$s = \underline{๑๒ \text{ วา}}$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๓

๑. จงหาเนื้อทของรูปชั้นบันได

(ก) สูงและฐานเป็น ๑๖ วาเท่ากัน มีชั้นตึก ๔ ชั้น กว้างและลึกเท่ากัน

(ข) มีชั้นตึก ๖ ชั้น ๆ ละ ๗ วา ๓ ศอก ทั้งสูงและกว้างเท่ากัน

(ค) มี ๖ ชั้น ส่วนลึกเป็นชั้นละ ๓ วาตลอก ส่วนกว้างเป็น ๓, ๔, ๕, ๖, ๗ และ ๘ วาตามลำดับลงมา

๒. จงหาเนื้อทของนาชั้นบันไดกว้าง ๒๔ สูง ๑๕ วา มี ๑๐ ชั้น ชั้นบนยาว ๖ วา รอง ๆ ลงไปยาวเท่า ๆ กัน ลึกเท่ากันทุกชั้น

๓. จงหาเนื้อทนารูปชั้นบันไดสูง ๒๔ เมตร กว้าง ๔๕๐ เมตร มี ๘ ชั้น กว้างชั้นละเท่า ๆ กัน ลึกเท่า ๆ กัน

๔. นารูปชั้นบันไดมี ๔ ชั้น ชั้นบนกว้าง ๓ ศอก ลึก ๓ ศอก ชั้น ๒ กว้าง ๒ วา ๑ ศอก ลึก ๑ วา ชั้น ๓ กว้าง ๒ ศอก ลึก ๑ วา ๒ ศอก ชั้น ๔ กว้าง ๓ วา ลึก ๗ ศอกคืบ นาแปลงนี้มีเนื้อที่เท่าไร?

๕. สูงและกว้างของนารูปชั้นบันไดเป็น ๒๔ วาเท่ากัน ชั้นตึกกว้าง ๖ วาทุกชั้น เนื้อที่เป็นเท่าไร?

๖. เนื้อทของนารูปชั้นบันไดเป็น ๖๐ ตารางวา สูงเป็น $\frac{๒}{๓}$ ของกว้างชั้นบนยาว ๓ วา รอง ๆ ลงมายาวเท่ากัน ลึกเท่า ๆ กัน สูงและกว้างเป็นเท่าไร?

๗. เนื้อท่อนารูปชั้นบันไคเป็น ๔๕๐ ตารางวา ชั้นตกลว้าง ๕ วา เท่ากันทุกชั้น ลึกเท่ากันทุกชั้น แต่สูงมากกว่ากว้าง ๕ วา สูง และกว้างเป็นเท่าไร ?

๘. แม่ไก่ตัวหนึ่งไข่ทุกๆ วัน วันที่ ๑ หนึ่งฟอง ที่ ๒ สองฟอง ไข่ขึ้นไปก้นตามลำดับจนครบ ๒๐ วัน จะเป็นไข่กี่ฟอง ?

๙. เลขจำนวนเรียงกันตั้งแต่หนึ่งถึงร้อย รวมเป็นเท่าไร ?

๑๐. แม่ไก่ตัวหนึ่งไข่ทุกวัน วันที่ ๑ หนึ่งฟอง ที่ ๒ สองฟอง ไข่ขึ้นไปทุกวันตามลำดับ จนรวมไข่ได้ ๓๒๔๐ ฟอง ถามว่าไข่อยู่ กี่วัน ?



หมวดที่ ๓

วิธีแสดงพื้นที่

๗๑. วิธีแสดงพื้นที่เป็นวิธีค่อนข้างยาก ผู้แรกออกฝึกหัดจะรู้สึก ลำบากหาหน่อยไม่ ถึงแม้ว่าจะมีความรู้ในทางศึกษาคำนวณก็ แต่ยังไม่เคยออกทำการรังวัดเลย ก็อาทลงมัยวนเวียนกว่าจะสำเร็จแต่ละรายก็เสียเวลานานๆ เพราะฉะนั้นจะแนะนำวิธีข้อไว้ให้เป็นหลักยัง คงต่อไปนี้ :-

(๑) ครั้งแรกจะต้องพิจารณาพื้นที่แห่งนั้นๆ ให้ชัดเจนก่อนว่า

มีพื้นฐานเป็นอย่างไร กันปลายอยู่ที่ไหน กันสะกิดกว้างยาวเท่ากันหรือไม่?

(๒) เมื่อพิจารณาแน่นอนแล้ว จึงใคร่ควรดูว่าจะควรวัดทางไหนก่อน จึงจะสะดวกแก่การวัดคำนวณ แล้วจึงลงมือรววัด

(๓) ให้กำหนดจุดหนึ่งจุดใดไว้เป็นหลัก แล้วลากเส้นตรงไปจนถึงที่สุดอีกข้างหนึ่ง (พื้นที่โดยมากมักเป็นรูปหลายเหลี่ยมก้านไม่เท่า มีมุมหลายมุม ระยะทางที่จะลากเส้นเส้นนั้นนั้นต้องเป็นระยะยาวมากกว่าส่วนอื่น ๆ) เพียงเส้นเดียวก่อน เส้นนี้เรียกว่าเส้นฐาน หรือเส้นแนว

(๔) เมื่อลากเส้นฐานแล้ว จึงเกี่ยวอันกลบมาตามแนวเส้นฐาน มองมุมที่อยู่ตรงข้ามทั้งซ้ายและขวาของเส้นฐาน เมื่อเห็นแล้วจึงลากเส้นให้ตั้งฉากกับฐานตรงขึ้นไปถึงมุมบนทุก ๆ มุม หรือจะลากจากมุมลงมาให้ตั้งฉากกับฐานก็ได้ ถ้าไม่มีมุมควรจะลากขึ้นไปถึงตรงไหนก็ได้ลากขึ้นไป

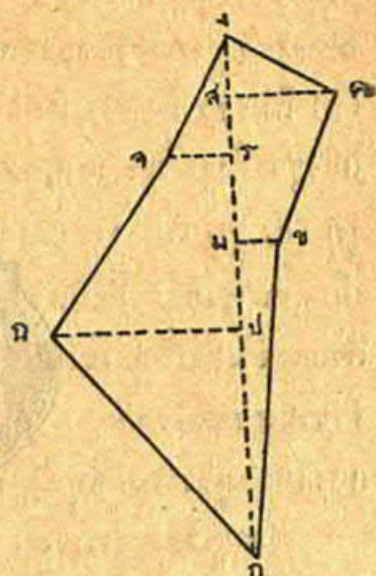
(๕) เครื่องมือที่ใช้ทำการรววัดต้องมีเส้น (ขี้สับวา) เส้นหนึ่ง กับต้องมีสมุดเขียนเป็นตารางเส้นขึ้นสองเส้น (ลากเส้นสะกิดหัวท้ายก่อนเมื่อสำรวจเสร็จแล้ว) สมุดนี้ภาษาต่างประเทศเรียก ฟัลด์บุค หมายความว่าสมุดสำหรับทำการรววัดพื้นที่ ในที่นี้จะเรียกว่าสมุดรววัด เมื่อวัดได้ยาวเท่าใดก็จดลงในช่องตารางในสมุด

ตัวอย่างที่ ๑ รงเขียนแปลนและคำนวณเนื้อที่ของนาต่อไป

ตารางรังวัด

คอก

	ถึง	
	๑๖๗๕	
	๑๓๘๐	๕๐๐ ถึง ค
ถึง ๑ ๒๕๐	๑๒๐๐	
	๑๐๔๐	๒๐๐ ถึง ข
ถึง ค ๘๕๐	๘๐๐	
ตั้งแต่	ก	ทรงไปเห็น



(๖) จำนวนเลขในตารางรังวัด ช่องกลางเป็นระยะทางตอน
หนึ่ง ๆ ของเส้นฐาน ที่อยู่ทางซ้ายเป็นระยะทางของเส้นที่ลากลงมา

จากมุม ทั้งฉากกับเส้นฐานทางซ้าย ที่อยู่ทางขวาเป็นเส้นทั้งฉากทาง
ขวาของฐาน

(๗) วิธีหาคำนวณเลขลงในตารางรังวัด คำว่า ทั้งแต่และตรง
ไปเห็นอนันต์หมายความว่าตั้งแต่ (ก) ตรงไปถึง (ณ) ถึง (ข) ถึง (ง)
ถึง (ค) และถึง (ง) จาก (ก) ถึง (ง) เป็นจำนวนของฐาน (ยาว
๑๖๗๕) รกตลงในช่องกลางใต้คำว่าถึง (ง) แต่ที่ว่าตั้งแต่ (ก) ถึง
(ณ) ถึง (ข) ถึง (ง) ถึง (ค) นั้น เป็นระยะทางตั้งแต่ (ก) ไปตาม
แนวฐานถึงรูกซึ่งจะลากเส้นลงมาจากมุมให้ทั้งใต้ฉากกับฐาน ใต้แก่
รูก (ป) รูก (ม) รูก (ร) รูก (ส) ยาวเท่าใดก็รกลงในช่องกลาง
เป็นตอน ๆ เป็นลำดับขึ้นไปจนถึงเชิง ส่วนจำนวนเลขซึ่งอยู่ภายนอก
ทั้งสองข้างนั้นเป็นจำนวนยาวของเส้นทั้งฉาก ต้องรกลงให้ตรงกับ
จำนวนเลขช่องกลาง คือเส้นไหนตรงกับรูกใดตรงเขียนไว้ให้ตรงกัน
และไหนอยู่ขวาไหนอยู่ซ้ายต้องระวังให้ถูกต้องด้วย

(๘) วิธีเขียนแปลน เมื่อสำรวจมาแล้วด้วยปากจะทราบว่าพื้นที่
นั้น ๆ มีลักษณะอย่างไร ให้ย่อจำนวนเลขในตารางรังวัดเป็นมาตรา
ส่วนวงทุก ๆ จำนวน ใช้เกณฑ์ส่วนอย่างเดียวกัน จะใช้เท่าใด
ต่อเท่าใดก็ได้ ข้อสำคัญอยู่ที่ให้จำนวนเลขน้อยแปลนระไกรไม่ใหญ่
โตเกินไป เมื่อย่อแล้ววงลากเส้นหนึ่งเส้นจากพื้นเบื้องบนของกระดาษ
ตรงลงมาหาตัวเรขาวงเท่าที่ย่อไว้ เส้นนั้นคือฐาน แล้วแบ่งออกเป็น

ส่วน ๆ ตามส่วนซึ่งระลากเส้นทั้งลาก เมื่อแบ่งแล้วจงลากเส้นทั้งลาก
 ทรงออกไป แต่ต้องระวังว่าเส้นไหนอยู่ตรงไหน อยู่ทางขวาหรือ
 ทางซ้าย สันขาวเท่าใดให้ถูกต้อง ทำอะไรเหล่านี้เสร็จแล้ว ลาก
 ก้านรอบนอกก็ระปรากฎเป็นแปลนของพื้นที่แห่งนั้น ๆ

(๗๔) วิธีคำนวณเนื้อที่ คำนวณได้ทำนองเดียวกับข้อ (๖๘)

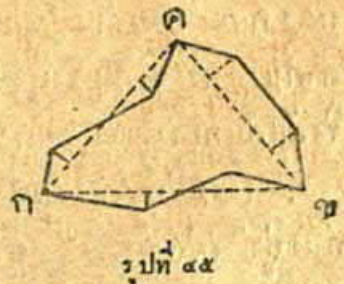
(๗๕) พื้นที่บางแห่งลากเส้นฐานเพียงเส้นเดียวย่อมไม่สะดวกแก่วิธีคิด
 คำนวณ ถ้าเป็นเช่นกล่าวนั้นก็ลากให้หลายเส้นจนพอแก่ความต้องการ
 และถ้ามีฐานหลายเส้น ก็ต้องมีเส้นทั้งลากหลายเส้นด้วย ระวัง
 ทั่วอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ๒ จงทำแปลนและคำนวณพื้นที่ของนาต่อไปนี้

ตารางวัด

คอก

	ถึง ก	
	๒๕๐๐	
	๑๘๐๐	๒๕๐
๐	๑๔๕๐	
๓๐๐	๑๑๐๐	
ตั้งแต่	ก	ทรงมาหา ก



ทั้งแท่ง	ถึง ก	
	๒๔๐๐	
	๒๔๕๐	๔๕๐
	๔๐	๔๕๐
	ข	ไปทางซ้ายถึง ก
๒๔๐	ถึง ข	
	๓๖๐๐	
	๒๖๕๐	
	๒๒๒๐	๐
ทั้งแท่ง	๑๗๒๐	๓๒๐
	ก	ทรงไปตะวันออก

(๑) ในตัวอย่างข้างบนนี้ต้องลากฐานถึง ๓ ส่วน คือ กข, ข ค, และ คก ยาวเส้นละ ๓๖๐๐ วา ๒๔๐๐ วา และ ๒๕๐๐ วาตามลำดับ บรรจบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม มีเส้นทั้งฉากกัวยกันทุกๆ ฐานจึงกันสมุทรวัดเป็น ๓ ตอนๆ ละฐาน

(๒) วิธีลากเส้นทั้งฉากก็ทำนองเดียวกับอธิบายมาแล้ว มีที่ผิดกันอยู่บ้างเล็กน้อย ที่ไม่ได้วางอักษรกำกับไว้ข้างหน้าหรือข้างหลังจำนวนเลขซึ่งเป็นระยะทางของเส้นทั้งฉาก แต่คงจะเข้าใจได้ว่านั่นก็เป็นเส้นทั้งฉากเหมือนกัน กับข้างแ่งก็มีแต่ศูนย์วางไว้ ตามี

ตัวเลขไม่ (มีอยู่แต่ในช่องกลาง) จะเข้าใจว่านั่นเป็น รุกที่เส้นฐาน
 ถัดจากของรูปที่ติดกันที่ตรงนั้น

(๓) วิธีคำนวณเนื้อที่ คำนวณทำนองเดียวกันกับข้อ (๒๔)

แบบฝึกหัดที่ ๒๔
 แปลนและเนื้อที่

๑. จะทำแปลนและหาเนื้อที่ ของ

วา

	ถึง ข	
	๕๒๐	
ถึง ๑๘๐	๔๔๐	
	๒๒๐	๑๑๐ ถึง ก
ถึง ง ๑๒๐	๑๕๐	
ตั้งแต่	ก	ตรงไปเหนือ

๒. จงทำแผนและหาเนื้อที่ ของ

เมตร

	๕ ถึง ๖	
	๕๕๐	
	๕๐๐	๘๐ ถึง ๙
	๓๑๐	๑๖๐ ถึง ๓
๕ ถึง ๙ ๒๐๐	๑๘๐	
ทั้งนี้	ก	ไปตะวันออกเฉียงเหนือ

๓. จงทำแผนและหาเนื้อที่ของ

เขื่อนกั้นแม่น้ำ

	๕ ถึง ๖	
	๑๒๐๐	
	๑๐๐๐	๒๐๐
๘๐	๘๒๕	
๐	๖๐๐	
๔๐	๓๕๐	๒๒๐
ทั้งนี้	ก	ไปตะวันตกเฉียงเหนือ ๓๐ ถึง ๖

๑๗๔

๔. งบทำแปดและทานเอนท์ ของ

คอก

ถึง ๑ ๓๐ ๐	A ถึง ง	
	๗๓๐	
	๖๕๐	๔๐๐ ถึง ก
	๖๒๕	
	๔๓๐	๒๐ ถึง จ
ตั้งแต่	๒๕๐	๔๒๕ ถึง ข
	๐	๐
	ก	ไปตะวันตกเฉียงเหนือ

๕. งบทำแปดและทานเอนท์ของนาซงวังวัดเป็นรูปตามเหลี่ยมกชก

๖

	A ถึง ก	
	๓๗๐	
	๓๐๐	๔๐
	๑๒๐	๓๕
	ก	ตรงมาถึง ก

๑๘๐

๕ ทั้งแท้ ๕ ทั้งแท้	A ถึง ค ๒๐๐ ๑๒๘ ๗	๔๕ ทรงไปทางซ้าย
ทั้งแท้	A ถึง ข ๕๑๐ ๓๖๑ ๒๕๐ ๑๕๗ ก	๒๒ ๐ ๒๔ ไปตะวันออกเฉียงเหนือ

บทที่ ๑๓

ว่าด้วย

การรวบรวมกฎเกณฑ์

หลักหรือกฎเกณฑ์ซึ่งได้อธิบายมาแล้ว จะได้เอามารวบรวมไว้ในที่นี้ ดังต่อไปนี้

รูปพื้นราบ

๑. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (บทที่ ๒ หน้า ๕)

$$(ก) \text{ (ด้านตรงมุมฉากข้าม)}^2 = (\text{ฐาน})^2 + (\text{ด้านตั้ง})^2$$

$$(ข) \text{ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = \text{ด้าน} \times \sqrt{2}$$

๒. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (บทที่ ๓ หน้า ๑๔)

$$(ก) \text{ เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก} = \text{กว้าง} \times \text{ยาว}$$

$$(ข) \text{ เนื้อของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = (\text{ด้าน})^2$$

๓. รูปสามเหลี่ยม (บทที่ ๔ หน้า ๔๓)

$$(ก) \text{ เนื้อของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ บ (บ-ก) (บ-ข) (บ-ค)}$$

$$(ข) \text{ เนื้อของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ฐาน} \times \text{ด้านตั้ง (สูง)}$$

$$(ค) \text{ เนื้อของรูปสามเหลี่ยมก้านเท่า}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (เมื่อก้าน} = ๒ \text{ ว)}$$

๔. รูปสี่เหลี่ยม (บทที่ ๕ หน้า ๖๑)

(ก) เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน

$$= \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

(ข) เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนก้านเท่า

$$= \frac{๑}{๒} (\text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม})$$

(ค) เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

$$= \frac{๑}{๒} \text{สูง} (\text{ผลบวกของก้านที่ขนานกัน})$$

(ง) เนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมก้านไม่เท่า

$$= \frac{๑}{๒} (\text{เส้นทแยงมุม}) \times (\text{ผลบวกของเส้นที่ลากตั้งฉากกับเส้นทแยงมุม})$$

๕. รูปวงกลม (บทที่ ๖ หน้า ๘๐)

(ก) เส้นรอบวงวงกลม $= ๒ \pi r$

(ข) เนื้อที่ของรูปวงกลม

$$= \pi r^2$$

(ค) รัศมีของรูปวงกลมที่บรรจุภายในรูปสามเหลี่ยมใดๆ

$$= \frac{\Delta}{๒} \left[\Delta = \text{เนื้อที่} \text{ } \triangle = \text{ครึ่งผลบวกของก้าน } \triangle \right]$$

(ง) รัศมีของรูปวงกลมที่ล้อมรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

$$= \frac{ก ข ค}{๔ \Delta} [ก ข ค = \text{ผลคูณของด้าน} \\ \text{แห่ง } \Delta]$$

๖. ส่วนโค้งของรูปวงกลม (บทที่ ๗ หน้า ๑๐๗)

ส่วนโค้งของรูปวงกลม

$$= \frac{\theta}{๓๖๐} \times \text{เส้นรอบวง}$$

๗. เซกเตอร์ของรูปวงกลม (บทที่ ๘ หน้า ๑๑๘)

เนื้อที่ของเซกเตอร์ของรูปวงกลม

$$= \frac{\theta}{๓๖๐} \times \text{รัศมี}$$

$$= \frac{\theta}{๓๖๐} \times \text{เนื้อที่ของรูปวงกลม}$$

๘. เซกเมนต์ของรูปวงกลม (บทที่ ๘ หน้า ๑๑๘)

เนื้อที่ของเซกเมนต์ของรูปวงกลม

$$= \text{เซกเตอร์} - \text{รูปสามเหลี่ยม}$$

๙. รูปหลายเหลี่ยมก้านเท่าและมุมเท่า (บทที่ ๑๑ หน้า ๑๔๙)

เนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมก้านเท่าและมุมเท่า

$$= \frac{๑}{๒} \times \text{ของผลบวกของด้าน} \times \text{เส้นตั้ง}$$

ฉากที่ลากจากจุดศูนย์กลาง



(續)

15:15-16:15

[illegible]

ด้วยความรู้ว่ากฎ กติกาและระเบียบของโรงเรียนและวิทยาลัยฯ อันเป็นของคณะ
ครู จึงเป็นการรักษาข้อ ที่เรียกว่าวินัย และระเบียบของโรงเรียนไว้ให้คงอยู่เช่นเดิม
ไว้สืบทอดกันต่อไปได้ บัดนี้เราเห็นว่าชายฉกรรจ์จำนวนมากไม่เรียน ละทิ้งโรงเรียน อันเป็นที่ชวน
ให้สวามิภักดิ์ กลับไปทำผิดกฎหมายและอาชญากรรม เป็นอันมากก็เพราะไม่ได้อ่านหนังสือ
และหาความรู้ที่จะหาทราบพระมหากษัตริย์ไทยแล้ว
เพื่อเป็นการป้องกันไว้แต่เนิ่นๆต่อไป

๘. เครือข่ายของสถาบันวิจัยชาวมลายูในทวีปเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ มีภารกิจหลักดังนี้
เป็นต้น หรือการดูใจดูแล เป็นของนิคมสหกิจชาวมลายู และเป็นผู้ให้ทุนให้ศึกษาต่อของพวก
พวกมลายู ในสมัยก่อนบรรพบุรุษชาวมลายูไม่เกิด แต่ความรู้ทางวิทยาศาสตร์มีไม่เจริญรุ่งเรือง มลายู
โดยมากมีรู้จักพิจารณาเฉพาะจุด ด้วยความรู้ของตนมาใช้ในการผลิต เป็นเหตุให้มลายู
เชื่องช้าความก้าวหน้าของพวกตน

๒. บรรพบุรุษที่สังคมเป็นอาชวาท์หรือผู้รุกราน มีการแบ่งวรรณะชัดเจนหรือมีความเหลื่อมล้ำกันมากเป็นต้น มีการศึกษาต่อแบบกึ่งนิยม แบบบังคับหรือแบบเลือกเป็นจึงเกิดคณาและชาวนา ใ้ความเชื่อที่คนเชื่อว่าคนเกิดมาต่างวรรณะ หรือให้รู้ไว้แต่เกิดว่าคนไหนอยู่ในวรรณะใดแล้วคนนั้นจะประพฤติตนอย่างไรได้ดังที่ควรจะเป็นได้ทั้งกับตัวเองและของผู้อื่น มีผลทำให้ผู้ถูกกดขี่สามารถมีได้ ศักยภาพที่เพิ่มขึ้นแท้จริง ผลดีของการถือวรรณะเขา บุคคลเหล่านี้แต่เพียงอย่างเดียว มักแสดงตนไม่ดี ๆ ใดๆ แต่หาใช่อาชวาท์หรือผู้รุกรานอย่างใดไม่

เมื่อพระพุทธศาสนาอุบัติขึ้น ก็สอนให้พระภิกษุสงฆ์ให้ละเว้นความชั่ว ประพฤติ
แต่ความดี และดำรงใจให้บริสุทธิ์ ทำดีให้ถึงขั้น นิพพาน เมื่อทำดีถึงขั้นนี้แล้วจิตจะเห็นว่า
ทุกข์หรือข้ออื่นเกิดแก่บุคคลนั้น ย่อมมีมาแต่ปัจจัยที่กรรมอันดีด้วย เป็นการปฏิเสธข้ออื่น
โดยเด็ดขาด แม้ในสมัยที่วิทยาศาสตร์เจริญรุ่งเรืองขึ้น ก็ย่อมเป็นไปในทางที่สนับสนุนเหตุผล
เช่นเดียวกับพระพุทธศาสนา

เพราะฉะนั้นขอให้เด็กเรียนหนังสือไปด้วย ได้ด้วย เป็นสิ่งที่การศึกษา จะพยายามให้ความรู้ให้
 ให้ครบถ้วน อย่างนี้ก็จะเชื่อถือว่าดีไปจากเหตุผลเหล่านี้ แต่ถ้าไม่ถนัดเรียนก็อย่าไปเรียน
 บังคับอะไรจนทำให้ไปต่างประเทศแล้ว และเขาก็มีอาชีพที่ว่าเป็นคนใจดีเขาพอใจเลย ไม่ยอมไปเรียน
 เหตุผล ถ้าเป็นคนที่ขี้เกียจเรียนเพราะสาเหตุและการศึกษานั้นเป็นความจำเป็น และเขาก็ไม่เห็นหน้าที่
 ของโรงเรียนเลยจนกระทั่งถามว่าทำไมเขาจึงเรียนด้วย บ่นว่ามีความจำเป็น เขาเรียนเพราะ
 คนอื่นเขาเรียนก็เรียนไปด้วย

วันที่ ๒๒ กันยายน พุทธศักราช ๒๕๐๕

(๓๓๓) เจ้าพระยาบวรราชนิภาณ

4387473279