



แบบเรียนคณิตศาสตร์



พิปกนิต

สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕

ของ

กระทรวงศึกษาธิการ



กระทรวงศึกษาธิการ
แบบเรียนคณิตศาสตร์
พีชคณิต

สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕

นายกมล เกาพิจักร อ.บ., ป.ม.; Ph. D. (Columbia University)

เรียบเรียง

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๑๐,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๔๘๒

ปกกระดาษราคาเล่มละ ๔ บาท

(ห้ามขายเกินกว่าราคาที่กำหนดไว้)

พิมพ์ที่โรงพิมพ์คุรุสภา

สงวนลิขสิทธิ์

บัญชีเรื่อง

หน้า

บทที่ ๑ สมการชั้น

๑

- (1) วิธีลดสมการชั้นซึ่งมีจำนวนที่ต้องการทราบ ๒ จำนวน
โดย ก. การแทนค่า ข. การบวกหรือลบ
- (2) วิธีลดสมการชั้นซึ่งมีจำนวนที่ต้องการทราบมากกว่า ๒ จำนวน
- (3) วิธีทำโจทย์สมการชั้น

บทที่ ๒ วิธีแยกตัวประกอบ

๒๔

- (1) วิธีแยกตัวประกอบโดย
 - ก. เอาตัวประกอบร่วมออก
 - ข. รวมเทอมเพื่อให้เห็นว่ามีตัวประกอบร่วม
 - ค. แยกตัวประกอบของจำนวนพหุคูณคตกมีสามเทอมแบบ
 - ง. แยกตัวประกอบผลต่างของกำลังสองของสองจำนวน
 - จ. แยกตัวประกอบของผลบวกหรือผลต่าง ของกำลังสามของสองจำนวน
 - ฉ. แยกตัวประกอบโดยวิธีทำให้เป็นจำนวนกำลังสอง

(2) วิธีคูณโดยใช้ตัวประกอบ

(3) เอกลักษณะ

(4) วิธีลดสมการโดยแยกตัวประกอบ

บทที่ ๓ วิธีคูณและวิธีหารอย่างยาก

๔๘

(1) วิธีคูณจำนวนพหุคูณคตกมีมากเทอมเข้าด้วยกัน

(2) วิธีคูณโดยใช้แท่งตัวคูณควม

ก 03246 ๑๑

- (3) วิธีการคำนวณพืชผลที่มีมากเหมือนกัน
- (4) วิธีการโดยใช้แต่ตัวคูณควบ
- (5) ผลหารของจำนวนพืชผลโดยบางจำนวนที่สำคัญ

บทที่ ๔ ทฤษฎีบทเรื่องเศษ

๖๑

- (1) วิธีหาเศษในผลหารโดยไม่ต้องการกันจริง ๆ
- (2) วิธีหาว่าผลหารลงตัวพอดี โดยไม่ต้องการกันจริง ๆ
- (3) การแยกตัวประกอบโดยวิธีหาเศษ

บทที่ ๕ กำลังและราก

๗๐

- (1) วิธีหาค่าของจำนวนพืชผลที่มีมากเกิน เมื่อเพิ่มกำลังขึ้น
- (2) วิธีหาค่ากำลังสองและกำลังสามของจำนวนพืชผลที่มีมากเกิน
- (3) เครื่องหมายของราก
- (4) วิธีหารากที่สองโดยทำให้เป็นจำนวนกำลังสองโดยสมบูรณ์
- (5) วิธีหารากที่สองโดยการหาร
- (6) วิธีหารากที่สองและรากที่สามโดยวิธีลัด

บทที่ ๖ กราฟ

๘๐

- (1) วิธีทำโจทย์โดยกราฟ
- (2) วิธีลดสมการขึ้นโดยกราฟ
- (3) วิธีหาสมการจากกราฟ
- (4) วิธีเขียนกราฟเส้นโค้ง

บทที่ ๑

สมการข้อ

นักเรียนหาได้มีกิจกรรมทำแต่ละเพาะการคำนวณเท่านั้นไม่ แต่ยังคงต้องกระทำเกี่ยวเนื่องกับสมการซึ่งมีความสำคัญเป็นอันมาก สมการเป็นเครื่องแสดงความเท่าเทียมของสิ่งต่าง ๆ และผู้ที่ใช้สมการอยู่เสมอย่อมบังเกิดความรู้ความเข้าใจซึ่งจะช่วยในการศึกษาวิชาฟิสิกส์ เคมี เศรษฐศาสตร์ และการดำเนินชีวิตโดยเป็นสุข

—ชาลส์ จัด

93. $y + 2x = 7$

สมการนี้มีจำนวนที่ต้องการทราบอยู่สองจำนวนคือ x และ y ถ้าเราทราบค่าของจำนวนหนึ่ง ก็ย่อมหาค่าของอีกจำนวนหนึ่งได้

ถ้าสมการดังกล่าวแต่สองสมการขึ้นไปและมีจำนวนที่ต้องการทราบอยู่สองจำนวน เราก็อาจรวมสมการเหล่านั้นเข้าเป็นสมการเดียวกัน และถ้ารู้จำนวนที่ต้องการทราบจำนวนหนึ่งเสีย ก็จะสามารถหาค่าของจำนวนที่ต้องการทราบอีกจำนวนหนึ่งได้ ตัวอย่างเช่น ถ้าเราหาค่าของ x ได้ไปแทนในสมการที่กำหนดให้สมการใดสมการหนึ่ง ก็จะสามารถหาค่าของจำนวนที่ต้องการทราบที่เหลือได้

ทำนองเดียวกัน สมการดังกล่าวแต่สามสมการขึ้นไปและมีจำนวนที่ต้องการทราบอยู่สามจำนวน เราก็อาจหาค่าของจำนวนที่ต้องการทราบได้โดยวิธีเดียวกันดังจะได้กล่าวต่อไปในข้อ 97

สมการเชิงเส้นสองสมการขึ้นไป ซึ่งมีจำนวนเท่ากับการทราบทั้งแค่สองจำนวนขึ้นไป เรียกว่า สมการซ้อน (Simultaneous Equations) เช่น

$$3x - y = 1, \quad 5x - 2y = 20 \quad \text{หรือ} \quad 2x + 3y + z = 13,$$

$$3x - y + 5z = 10, \quad 5x + 2y - 3z = 5 \quad \text{เป็นต้น}$$

๑๑. การแก้ปัญหาค่าของสมการทราบ อาจทำได้ ๒ วิธี ดังนี้

วิธีที่ ๑ วิธีแทนค่า

วิธีนี้คือ เอาค่าของจำนวน

ที่ทราบมาแทนค่าในสมการหนึ่ง

ไปแทนลงในอีกสมการหนึ่ง

ตัวอย่าง พหุคูณสมการ

$$x - 4y = -3 \quad \text{---(1)}$$

$$3x + 5y = 25 \quad \text{---(2)}$$

จาก (1), $x = 4y - 3$

เอาค่าของ x ไปแทนลงใน (2)

$$\therefore 3(4y - 3) + 5y = 25$$

$$12y - 9 + 5y = 25$$

$$17y = 34$$

$$\therefore y = 2$$

เอาค่าของ y ไปแทนลงใน (1)

$$x - 8 = -3$$

$$x = 5$$

$$\text{ตอบ } x = 5, y = 2$$



Renè Descartes (เดการ์ต) ปราชญ์ชาวฝรั่งเศส

นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสผู้สถาปนาวิชาพีชคณิต

ตรวจสอบผลลัพธ์ ถ้า $x = 5, y = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ในสมการ (1), } 5-3 = -2 \\ \text{ในสมการ (2), } 15+10 = 25 \end{array} \right\} \text{ตรงกับโจทย์ เป็นลูก}$$

แบบฝึกหัดที่ 47

จงแก้สมการต่อไปนี้ และตรวจสอบผลลัพธ์ด้วย

1. $x-2y = 1$

2. $2a-8b = 4$

3. $x = 2y-1$

$2x+y = 12$

$5a-12b = 14$

$4x-y = 10$

4. $5 = 2r-s$

5. $4m+n = 9$

6. $3p = 3q+6$

$r+2s = 11$

$3m-5n = 1$

$4p-5q = 3$

7. $9d-8c = 15$

8. $7m-2n = 11$

9. $6a+2b = -3$

$5c+3d = 38$

$8n-2m = 8$

$6a+7b = -10$

10. $\frac{1}{2}x-3y = 0$

11. $4x = 4-2y$

12. $4y-3z = -1$

$4x-18 = 15y$

$5y = 3-8x$

$z+2 = 2y$

13. $3p-7q = 35$

14. $0.4x+0.4 = 0.5y$

15. $3m-4n+2 = 0$

$2p+5q = 4$

$0.5x-0.4y = 1.3$

$3n+m+1 = 0$

16. $3x+5y = 25$

17. $5c-d = 3$

18. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b+3 = 0$

$x-4y = -3$

$3d-8c = 5$

$\frac{1}{6}a-\frac{1}{5}b+\frac{1}{3} = 0$

95. วิธีที่ 2 วิธีบวกหรือลบ

ถ้าตัวคูณของสมการเพราะตัวเลขของจำนวนที่แก้ต้องการทราบจำนวนหนึ่งในสมการหนึ่ง

เท่ากับตัวคูณควมเพราะตัวเลขของจำนวนที่ต้องการทราบนั้นในอีกสมการหนึ่ง เรา
ก็กำจัดจำนวนที่ต้องการทราบนั้นได้ โดยเอาสมการทั้งสองบวกหรือลบกัน

แต่ถ้าตัวคูณควมไม่เท่ากัน เราต้องทำให้เท่ากันเสียก่อนโดยวิธีหา ค.ร.น.
ของตัวคูณควมเหล่านั้น แล้วจึงบวกหรือลบกัน

$$\text{ตัวอย่าง} \quad \text{วงกลมสมการ} \quad 6x + 5y = 17 \quad \text{---(1)}$$

$$9x + 4y = 22 \quad \text{---(2)}$$

ในการกำจัด y เราหา ค.ร.น. ของตัวคูณควมของ y ในสมการทั้งสองคือ
5 และ 4 ได้ 20 ต่อจากนั้นเอา 5 หาร 20 ได้ 4 และเอา 4 หาร 20 ได้ 5
ดังนั้นจึงควม (1) ด้วย 4 และ (2) ด้วย 5 เพื่อว่าตัวคูณควมของ y ในสมการ
ทั้งสองจะใกล้เคียงกัน

$$\text{คูณสมการ (1) ด้วย 4} \quad 24x + 20y = 68 \quad \text{---(3)}$$

$$\text{คูณสมการ (2) ด้วย 5} \quad 45x + 20y = 110 \quad \text{---(4)}$$

$$\text{เอาสมการ (3) ลบสมการ (4)} \quad 21x = 42$$

$$x = \frac{42}{21} = 2$$

จากนั้นหา y ได้โดยเอาค่าของ x ไปแทนในสมการใดสมการหนึ่งที่กำหนด
ไว้ และหาค่าที่ง่ายที่สุด เช่นแทนค่าของ x ในสมการ (1) ก็ได้

$$12 + 5y = 17$$

$$5y = 5$$

$$y = 1$$

$$\text{ตอบ} \quad x = 2, \quad y = 1$$

ตรวจสอบผลลัพธ์ แทนค่าของ x และ y ที่หาได้ลงในสมการที่กำหนดให้ จะ

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 12+5 = 17 \\ (2) \quad 18+4 = 22 \end{array} \right\} \text{ตรงกับโจทย์ เป็นถูก}$$

หมายเหตุ เราจะทำให้ x หรือ y หมดไปก็ได้ สุดแต่ว่าอย่างไหนจะง่าย และสะดวกกว่ากัน

แบบฝึกหัดที่ 48

จงลดสมการต่อไปนี้โดยวิธีที่ 2 และตรวจสอบผลลัพธ์ด้วย

1. $x+y = 11$

2. $x+3y = 8$

3. $2x-3y = 13$

$x-y = 5$

$x-2y = 3$

$2x-4y = 10$

4. $2x+y = 11$

5. $4x+3y = -4$

6. $x-3y = 0$

$3x-y = 9$

$6x+5y = -7$

$2x-y = 20$

7. $3m-6n = 5$

8. $r-3s = 4$

9. $6a-7b = 40$

$3m = 3n+7$

$5r+3s = -1$

$5b = 2a-8$

10. $4x+3y = 6$

11. $3a-b = 1$

12. $c-2d = 5$

$2x+y = 4$

$5a-2b = 20$

$2c+d = 1$

13. $3p-9q = 9$

14. $0.3x+0.7y = 5$

15. $4x+3y = 9$

$2p+q = -8$

$0.4x+0.3y = 3.5$

$3y = 8x$

16. $2x = 6y+1$ 17. $s = 3r-2$ 18. $2p+q = 10$
 $2y = 3-2x$ $r = 1-2s$ $3p-2q = 1$
 19. $6f-5m = 24$ 20. $x-2y = 27$ 21. $5a = 3b+26$
 $9f-4m = 22$ $7x+y = 9$ $2a = 5b-1$

แบบฝึกหัดที่ 49

จงลดสมการต่อไปนี้โดยวิธี 1 หรือวิธี 2 แล้วแก้สมการ

1. $4x-3y = 13$ 2. $7m-6n = 20$ 3. $2c-3d = 8$
 $x+6y = 18$ $3m+4n = 2$ $7c-5d = -5$
 4. $x+6 = 9y$ 5. $3p+4q+11 = 0$ 6. $\frac{1}{4}r = \frac{3}{4}s$
 $8x+3y = -23$ $5p+6q+7 = 0$ $\frac{3}{4}r = 2s+1$
 7. $10x+10y = 7$ 8. $13a+9.6b = -14$ 9. $5x-3y = 7x-6y=9$
 $3y-x = \frac{1}{10}$ $0.7a = 2.4b+7.6$

10. $3y-8 = y-2z-1 = 40$ 11. $f-m = m-f+2 = 3m$

จงลดสมการต่อไปนี้ หาค่าของ x และ y

12. $5x+2y = 11m$ 13. $x-2y = c+4d$ 14. $2ax+3by = 5$
 $8x-2y = 2m$ $2x+3y = 2c-3d$ $ax-by = -5$
 15. ถ้า $2x+3y = 9$ และ $3x+2y = 15$ จงหาว่า $3x-2y$ เท่ากับเท่าไร
 16. ถ้า $3a+4b = -119$ และ $5a-11b = 102$ จงพิสูจน์ว่า $a = b$
 17. ถ้า $y = ax+b$ เป็นจริงเมื่อ $x = 2, y = 3$ และเมื่อ $x = -4, y = 1$

จงหาค่าของ a และ b

18. จากสูตร $l = a + (n-1)d$ และ $s = \frac{1}{2}n(a+l)$ จงเขียนสูตรนัย

ใหม่โดยไม่ให้มี l อยู่น้อย

96. ข้อใดเป็นตัวอย่างของการบางอย่างที่น่าสังเกต

ตัวอย่างที่ 1 จงลดสมการ

$$(x+2y) - \frac{x+13y}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{---(1)}$$

$$2(4-y) = 4+x \quad \text{---(2)}$$

สมการทั้งสองนี้ยังไม่เป็นรูปสามัญ ต้องทำเป็นรูปสามัญเสียก่อน แล้วจึง

ลดสมการ

คูณสมการ (1) ด้วย 4,

$$4(x+2y) - (x+13y) = 1$$

$$4x+8y-x-13y = 1$$

$$\therefore 3x-5y = 1 \quad \text{---(3)}$$

จาก (2),

$$8-2y = 4+x$$

$$\therefore x+2y = 4 \quad \text{---(4)}$$

$$(4) \times 3, \quad 3x+6y = 12 \quad \text{---(5)}$$

$$(5)-(3), \quad 11y = 11$$

$$\therefore y = 1$$

จาก (3),

$$x = \frac{1+5}{3} = 2$$

ตอบ $x = 2, y = 1$

ตัวอย่างที่ ๒ เรขกสมการ

$$\frac{11}{x} + \frac{7}{y} = 9 \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{12}{x} - \frac{4}{y} = 4 \quad \text{----- (2)}$$

สมการทั้งสองมีจำนวนที่ตรงกันการทราบเป็นส่วน เราลดสมการก็ทำให้
เศษส่วนเท่ากันค่านั้น โดยไม่ต้องไปเปลี่ยนแปลงส่วนแต่อย่างใด

$$(1) \times 4, \quad \frac{44}{x} + \frac{28}{y} = 36 \quad \text{----- (3)}$$

$$(2) \times 7, \quad \frac{84}{x} - \frac{28}{y} = 28 \quad \text{----- (4)}$$

$$(3) + (4), \quad \frac{128}{x} = 64$$

$$\therefore x = \frac{128}{64} = 2$$

จาก (1) $\frac{7}{y} = 9 - \frac{11}{2} = \frac{7}{2}$

$$\therefore y = \frac{7}{\frac{7}{2}} = 2$$

ตอบ $x = 2, y = 2$

แบบฝึกหัดที่ ๕๐

เรขกสมการต่อไปนี้

1. $2(x-2y) = 3y$

2. $2(a+2) = 6(b+1)$

3. $\frac{7a-3b}{3} = 5$

$3y-2x = 1$

$2a-5b = 4$

$\frac{5a+6b}{9} = 3$

4. $\frac{x+5y}{5} = 4$

$\frac{1}{2}x-5y = \frac{1}{2}$

$$5. 4m - 6n - 3 = 7m + 2n - 4 = 3n - 2m + 24$$

$$6. y = 2(x+y-1) = -2(x+y+3)$$

$$7. 2(p-1) - 3(q-3) = 12$$

$$5(p-1) + 3(q-3) = 9$$

$$8. 3(7x-19) - 2(11y-21) = 4, 5(7x-19) - 3(11y-21) = 7$$

$$9. \frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 1, \frac{2x+1}{4} - \frac{3y+1}{4} = 5$$

$$10. \frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{5} = 1, \frac{x-y}{3} - \frac{x+y}{4} = 2$$

$$11. \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{4} = \frac{x-1}{y+2}$$

$$12. \frac{1}{8}(4y+5z-9) = 5y-5z, \frac{1}{3}(2y-z-1) = \frac{1}{2}-2z$$

$$13. \frac{x-2}{5} - \frac{y-3}{4} = 2\frac{3}{4}, \frac{3-x}{4} = \frac{y-1}{5}$$

$$14. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 8$$

$$15. \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 1$$

$$16. \frac{2}{x} + 3y = 15$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 20$$

$$\frac{5}{y} + \frac{2}{z} = 20$$

$$\frac{5}{x} - 4y = 3$$

$$17. \frac{2}{u} + \frac{1}{v} = 5, \frac{1}{u} + \frac{2}{v} = 7 \quad 18. \frac{4}{q} - \frac{3}{p} = 9, 2q - p = 4pq$$

$$19. 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1, \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 7$$

20. ถ้า $y = ax(x+1)+b$ และถ้า $y = 1$ เมื่อ $x = -2$ และ $y = 21$
เมื่อ $x = 3$ จงหาค่าของ y เมื่อ $x = 2$

97. การถอดสมการซึ่งมีจำนวนที่ตรงการทราบอยู่สามจำนวนก็ทำได้โดยวิธี
ไขว้กันหนึ่งในสองวิธีก็กล่าวมาแล้ว โดยปรกติถ้ามีจำนวนที่ตรงการทราบอยู่สาม
จำนวน เราก็ยังมีสมการอย่างน้อยสามสมการ การถอดสมการขึ้นเช่นนี้ ใช้วิธี

ถ้าแก้จำนวนที่ต้องการทราบจำนวนหนึ่ง โดยเอาสมการคู่หนึ่งมารวมกันเข้า แล้ว
 ถ้าแก้จำนวนที่ต้องการทราบจำนวนเดียวกันนั้นหมดก็ไปอีกโดยเอาสมการอีกคู่หนึ่งมารวม
 กันเข้า ทั้งนี้กระทำได้สองสมการ มีจำนวนที่ต้องการทราบอยู่สองจำนวน และลดอ
 สมการทั้งสองนี้ได้ตามวิธีดังกล่าวมาแล้ว เมื่อรู้ค่าจำนวนที่ต้องการทราบสองจำนวน
 แล้ว ก็เอาไปแทนในสมการที่กำหนดให้สมการใดสมการหนึ่ง ก็จะได้จำนวน
 ต้องการทราบที่เหลือได้

ตัวอย่าง หลดสมการ

$$x + 3y + 2z = 4 \quad \text{-----}(1)$$

$$3x - y - z = 8 \quad \text{-----}(2)$$

$$5x - 2y + 4z = 25 \quad \text{-----}(3)$$

สมมติว่า ต้องการจะแก้ที่ y ก่อน

แก้ที่ y ในสมการ (1) และ (2) ไขกัน

$$(2 \times 3), \quad 9x - 3y - 3z = 24 \quad \text{-----}(4)$$

$$(4) + (1), \quad \therefore 10x - z = 28 \quad \text{-----}(5)$$

แก้ที่ y ในสมการ (2) และ (3) ไขกัน

$$(2) \times 2, \quad 6x - 2y - 2z = 16 \quad \text{-----}(6)$$

$$(6) - (3), \quad \therefore x - 6z = -9 \quad \text{-----}(7)$$

$$(5) \times (6) \quad 60x - 6z = 168 \quad \text{-----}(8)$$

$$(8) - (7), \quad 59x = 177$$

$$x = 3$$

เอาค่าของ x แทนใน (7), $3 - 6z = -9$

$\therefore z = 2$
 เอาค่าของ x และ z แทนในสมการ (1), $3+3y+4 = 4$

$$\therefore y = -1$$

$$\text{ตอบ } x = 3 \quad y = -1, \quad z = 2$$

ตรวจผลลัพธ์ แทนค่าของ x, y, z ท้าได้ในสมการที่กำหนดให้ไว้

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 3-3+4 = 4 \\ (2) \quad 9+1-2 = 8 \\ (3) \quad 15+2+8 = 25 \end{array} \right\} \text{ตรงกับโจทย์เป็นลูก}$$

แบบฝึกหัดที่ 51

จงแก้สมการต่อไปนี้ และตรวจผลลัพธ์ด้วย

1. $x+y-z = 3$
 $x+y+z = 7$
 $3x-2y+z = 2$
2. $2a+b-3c = 1$
 $a-b+2c = -4$
 $a+3b-c = 8$
3. $p-q-r = 0$
 $2p+3q+2r = 7$
 $4p+3q-2r = -1$
4. $x+y+z = 5$
 $2x-y+z = 0$
 $4x+y+2z = 6$
5. $2r+3s+4t = 3$
 $5r+2s = 1$
 $s-5t = 8$
6. $6x+6y-z = 0$
 $3x = 2y$
 $4y+3z = 17$
7. $3a-b = 2(5-c)$
 $a+3b-c = 0$
 $2(a+b) = 7-3c$
8. $\frac{1}{4}u + \frac{1}{2}v + 2w = 4$
 $2v+3w = -3$
 $\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}v - w = -2\frac{1}{2}$
9. $0.5x+0.2y+z=2$
 $2x-0.8y+3z=4$
 $x-2y-0.6z=2.4$
10. $p+r-3q = q+r-p = \frac{1}{2}(p+q-2r) = 1$

$$11. \quad \frac{1}{2}r - s - 2t = 9$$

$$12. \quad \frac{1}{3}(f+9n-27) = \frac{1}{2}(f+4n-8)$$

$$3r - 4t = 0$$

$$= f + n - 1 = m$$

$$\frac{1}{4}(3r - 2t) = s + 6\frac{1}{2}$$

๑๘. โจทย์สมการข้อ

การถอดสมการข้อนี้ทั้งกล่าวมาแล้ว เห็นได้ว่าเมื่อมีจำนวนที่กองการทวายอยู่เท่าไร ก็ต้องมีจำนวนสมการอยู่เท่านั้น ทำนองเดียวกันในการทำโจทย์โดยวิธีถอดสมการ เมื่อมีจำนวนที่กองการทวายอยู่เท่าไร ก็จะมีสิ่งที่กำหนดให้เพื่อเข้าสมการได้จำนวนเท่านั้นเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 1 เลขสองจำนวนบวกกันได้ ๑๕ และลบกันได้ ๒๑ จงหาเลขสองจำนวนนั้น

สมมติให้จำนวนมากเป็น x และจำนวนน้อยเป็น y

ผลบวกของเลขสองจำนวนนี้เท่ากับ ๑๕

$$\therefore x + y = 15 \quad \text{-----(1)}$$

และผลต่างของเลขสองจำนวนนี้เท่ากับ ๒๑

$$\therefore x - y = 21 \quad \text{-----(2)}$$

$$(1) + (2) \quad 2x = 36$$

$$\therefore x = 18$$

$$\text{จาก (1)} \quad 18 + y = 15$$

$$\therefore y = -3$$

ตอบ เลขสองจำนวนนั้นคือ ๑๘ และ ๓

ตรวจผลลัพย์ แทนค่าของจำนวนเลขทั้งสองที่ได้ลงตามโจทย์

$$(1) 58+37 = 95$$

$$(2) 58-37 = 21$$

ตรงกับโจทย์เป็นล

ตัวอย่างที่ 2 หีบเสียง 3 เครื่อง และงานเสียง 5 แผ่นราคารวมกัน 75 บาท
ถ้าหีบเสียง 4 เครื่อง และงานเสียง 10 แผ่นราคารวมกัน 110 บาท จงหาราคา
ของหีบเสียงและงานเสียงแต่ละอย่าง

สมมติให้หีบเสียงราคาเครื่องละ x บาท

และงานเสียงราคาแผ่นละ y บาท

แต่หีบเสียง 3 เครื่องและงานเสียง 5 แผ่นราคารวมกัน 75 บาท

$$\therefore 3x+5y = 75 \quad \text{-----}(1)$$

และหีบเสียง 4 เครื่องกับงานเสียง 10 แผ่นราคารวมกัน 110 บาท

$$\therefore 4x+10y = 110 \quad \text{-----}(2)$$

$$(1) \times 2, \quad 6x+10y = 150 \quad \text{-----}(3)$$

$$(3)-(2), \quad 2x = 40$$

$$\therefore x = 20$$

แทนค่าของ x ใน (1), $60+5y = 75$

$$\therefore y = 3$$

ตอบ หีบเสียงราคาเครื่องละ 20 บาท งานเสียงราคาแผ่นละ 3 บาท

ตรวจผลลัพย์ แทนค่าราคาหีบเสียงและงานเสียงที่ได้ตามรูปโจทย์

$$(1) 60+15 = 75$$

$$(2) 80+30 = 110$$

ตรงกับโจทย์เป็นล

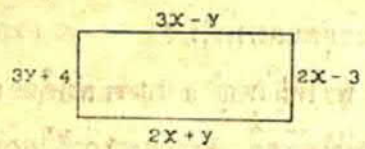
แบบฝึกหัดที่ 52

1. เลขสองจำนวนบวกกันได้ 112 ถ้าจำนวนมากกว่าสามเท่าของจำนวนน้อยอยู่ 4 จงหาเลขสองจำนวนนั้น
2. จงหาเลขสองจำนวนซึ่งบวกกันได้ 39 และลบกันได้ 11
3. เลขสองจำนวนบวกกันได้ 59 ถ้าสามเท่าของจำนวนน้อยมากกว่าจำนวนมากอยู่ 13 จงหาว่าเลขสองจำนวนนั้นคืออะไร
4. แบ่ง 137 ออกเป็นสองส่วน ให้ส่วนมากน้อยกว่าห้าเท่าของส่วนน้อยอยู่ 7
5. ถ้าสามเหลี่ยมต่อไปนี้เป็นสามเหลี่ยมก้านเท่า จงหาผลบวกของ ก้านทั้งสาม

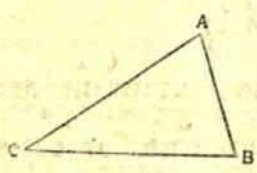


6. เศษหนึ่งส่วนสองของเลขจำนวนหนึ่งน้อยกว่าเศษหนึ่งส่วนสามของเลขอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 1 และเศษหนึ่งส่วนหกของจำนวนแรกบวกกับเศษหนึ่งส่วนห้าของจำนวนหลังเท่ากับครึ่งหนึ่งของจำนวนแรก จงหาเลขสองจำนวนนั้น
7. ชาวนาซื้อวัว 3 ตัวและม้า 5 ตัว ราคา 365 บาท และซื้อวัว 4 ตัวกับม้า 10 ตัว ราคา 570 บาท จงหาราคาของวัวและม้าอย่างละตัว
8. ชนุน 5 ผล และแตงโม 2 ผล ราคา 6 บาท 30 สตางค์ ถ้าชนุน 1 ผล และแตงโม 3 ผล ราคา 2 บาท 30 สตางค์ อยากทราบว่าชนุนและแตงโมราคาผลละเท่าไร

9. ใ้หาความยาวและความกว้างของสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปต่อไปนี้ หน่วยของความยาวคือเป็นนิ้ว



10. ร้านแห่งหนึ่งขายของลดราคาโดยคิดงาน ๑ ใบ กับซื้อ ๔ ชิ้น ราคา 1 บาท 50 สตางค์ และงาน ๑ ใบ กับซื้อ 6 ชิ้น ราคา 3 บาท 15 สตางค์ ถามว่างานและซื้อชิ้นราคาอย่างละเท่าไร
11. ชายคนหนึ่งว่าจ้างรถยนต์ 3 คัน และรถม้า 8 คัน เพื่อบรรทุกของหนัก 15 ตัน ถ้าของหนัก 21 ตัน เขาว่าจ้างรถยนต์ ๑ คัน และรถม้า 20 คัน ให้บรรทุกของนั้นได้ เขาทราบว่ารถแต่ละคันบรรทุกของได้หนักเท่าไร
12. ในรูปต่อไปนี้ $\angle BAC = 2\angle ACB$ และ $\angle ABC - \angle ACB = 36^\circ$ ใ้หามุมทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปนี้

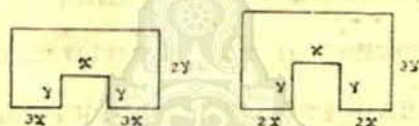


13. ตามรูปในข้อ 12 ถ้า $\angle BAC$ เท่ากับ $(2x - y)^\circ$ หรือ $(2y + x)^\circ$ ใ้หาว่ามุมทั้งสามของสามเหลี่ยมนี้เช่นเท่าไร ?
14. ฉันทักเลขสองจำนวนในใจ ถ้าเอา 11 ขวดยับจำนวนแรก จะได้เป็นสองเท่าของจำนวนหลัง แต่ถ้าเอา 20 ขวดยับจำนวนหลัง จะได้เป็นสองเท่าของจำนวนแรก ใ้หาเลขสองจำนวนนั้น

15. ถ้าสิริให้เกียรติ 86 สatang' เกียรติจะมีเงินเป็นสองเท่าของสิริ แต่ถ้าเกียรติให้สิริ 60 สatang' สิริจะมีเงินเป็นสองเท่าของเกียรติ ถามว่าสิริและเกียติมีเงินอยู่คนละเท่าไร ?

16. ม้ายาว 18 ฟุต พอให้ผู้ใหญ่ 3 คน และเด็ก 8 คน หรือผู้ใหญ่ 6 คน และเด็ก 4 คนนั่งได้พอดี อยากทราบว่าผู้ใหญ่อ 10 คน และเด็ก 16 คน จะต้องใช้ม้านั่งยาวเท่าไร ?

17. ลวดยาว $\frac{1}{65}$ ฟุต จะบีบให้เป็นรอยอย่างใดก็ได้ (กรุป) โดยหน่วยของความยาวคือเซนติเมตร และทุกมุมที่ทอนเป็นมุมฉาก จงหา x และ y



18. พ่อค้าซอผ้ามามีสองพับเป็นเงิน 5 บาท 6 สatang' พับหนึ่งราคาเมตรละ 16 สatang' และอีกพับหนึ่งราคาเมตรละ 18 สatang' ถ้าเขาขายไปกี่กำไรเมตรละ 2 สatang' และเข็นกำไรทั้งหมด 60 สatang' อยากทราบว่าผ้ามี่พับยาวเท่าไร

99. ตัวอย่างที่ 3 เลขจำนวนหนึ่งมีอยู่สองหลักและมีค่าเท่ากับสี่เท่าของผลบวกของตัวเลขของหลักทั้งสอง ถ้าเขา 37 บวกเข้ากับเลขจำนวนนั้น ตัวเลขของหลักทั้งสองจะกลับกัน จงหาเลขจำนวนนั้น

สมมติให้ตัวเลขในหลักสิบเป็น x และตัวเลขในหลักหน่วยเป็น y ดังนั้นเลขจำนวนนั้นคือ $10x+y$ และเลขจำนวนเมื่อกลับหลักกันคือ $10y+x$ และผลบวกของตัวเลขของหลักทั้งสองเท่ากับ $x+y$

แต่เลขจำนวนหน้าเท่ากับสี่เท่าของผลบวกของตัวเลขของหลักทั้งสอง

$$\therefore 10x + y = 4(x + y) = (x + x) + (x + x)$$

$$(1) \quad 6x + 3y = 0 \quad 8 = x + x$$

$$2x - y = 0 \quad \text{---(1)}$$

เมื่อเอา 27 บวกกับเลขจำนวนนั้น ตัวเลขของหลักทั้งสองจะกลับกัน

$$(2) \quad \therefore 10x + y + 27 = 10y + x$$

$$9x - 9y = -27 \quad \text{---(2)}$$

$$x - y = 3 \quad \text{---(2)}$$

$$(1) - (2), \quad x = 3 \quad \text{---(1) or (2)}$$

$$\text{จาก (1),} \quad 6 - y = 0$$

$$y = 6$$

ตอบ เลขจำนวนนั้นคือ 36

ตรวจสอบผลลัพธ์ แทนค่าของจำนวนเลขที่หาได้ลงตามรูปโจทย์

$$(1) \quad 36 = 4(3+6)$$

$$(2) \quad 36 + 27 = 63$$

ตรงกับโจทย์เป็นถูก

ตัวอย่างที่ 4 เด็กสองคนพายเรือออกจากบ้านตามน้ำไปได้ 16 ไมล์ ใน

2 ชั่วโมง แต่หากกลับพายเรือทวนน้ำก็ต้องเสียเวลาลง 8 ชั่วโมง จงหาว่าเด็กสองคนนั้นพายเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละเท่าไร ? และกระแสน้ำไหลชั่วโมงละเท่าไร ?

สมมติให้เด็กทั้งสองพายเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ x ไมล์

และกระแสน้ำไหลชั่วโมงละ y ไมล์

ถ้าพายตามน้ำใน 1 ชั่วโมงจะไปได้ $x + y$ ไมล์

ถ้าพายทวนน้ำใน 1 ชั่วโมงจะไปได้ $x - y$ ไมล์

เขาพายคาน้ำ 2 ชั่วโมงไ้ทาง 16 ไมล์

$$\therefore 2(x+y) = 16$$

$$x+y = 8 \quad \text{-----}(1)$$

(1) -- และเขาพายทวนน้ำ 8 ชั่วโมงไ้ทาง 16 ไมล์

$$\text{นั่นคือ} \quad 8(x-y) = 16$$

$$x-y = 2 \quad \text{-----}(2)$$

$$(1)+(2), \quad 2x = 10$$

$$(2) \quad \therefore \quad x = 5$$

$$\text{จาก (1),} \quad 5+y = 8$$

$$y = 3$$

ตอบ เขาพายเรือในน้ำนิ่งไ้ชั่วโมงละ 5 ไมล์ และกระแสน้ำไหลชั่วโมงละ 3 ไมล์

$$\left. \begin{array}{l} \text{ตรวจผลลัพธ์ (1) } 2(5+3) = 16 \\ (2) \quad 8(5-3) = 16 \end{array} \right\} \text{ตรงกับโจทย์เป็นลูก}$$

แบบฝึกหัดที่ 58

1. เลขจำนวนหนึ่งมีสองหลัก ถ้าตัวเลขของหลักทั้งสองบวกกันไ้ 8 และตัวเลขในหลักหน่วยเป็นสองเท่าของตัวเลขในหลักสิบ รหาคาเลขจำนวนนั้น
2. ผลบวกของตัวเลขของหลักทั้งสองของเลขจำนวนหนึ่งเท่ากับ 14 ถ้าตัวเลขของจำนวนนั้นกลับหลักกัน จะมีค่าน้อยกว่าจำนวนเดิมอยู่ 36 ถามว่าเลขจำนวนนั้นคืออะไร

3. เลขจำนวนหนึ่งมีสองหลัก ตัวเลขในหลักสิบเป็นสี่เท่าของตัวเลขในหลักหน่วย ถ้าเอา 51 ไปลบจำนวนนั้น ตัวเลขของหลักทั้งสองจะกลับกัน

4. เลขจำนวนหนึ่งมีสองหลัก และมีค่าเท่ากับเศษสองส่วนเก้าของจำนวนนั้น เมื่อตัวเลขกลับหลักกัน ถ้าเอาผลบวกของตัวเลขของหลักทั้งสองบวกกับเลขจำนวนนั้นจะได้เท่ากับ 27 อยากทราบว่าเลขจำนวนนั้นเป็นเท่าไร

5. กระจกเงาส่วนจำนวนหนึ่ง ถ้าเศษและส่วนต่างเพิ่มขึ้นฝ่ายละ 1 แล้วผลลัพธ์จะเท่ากับ $\frac{2}{3}$ แต่ถ้าเศษและส่วนลดลงฝ่ายละ 2 ผลลัพธ์จะเท่ากับ $\frac{8}{5}$

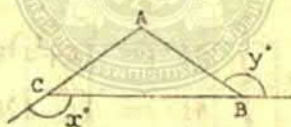
6. ในรูปต่อไปนี้ ผลบวกของด้านภายในนอกทั้งสี่เท่ากับ 20 นิ้ว ถ้าทุกเส้นของรูปรวมกันยาว 3 ฟุต ริงหาความยาวและความกว้างของด้านภายในรูปนี้



7. เรือลำหนึ่งแล่นทวนน้ำได้ชั่วโมงละ 10 ไมล์ และแล่นตามน้ำได้ชั่วโมงละ 18 ไมล์ อยากทราบว่าเรือแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละเท่าไร ? และกระแสน้ำไหลชั่วโมงละเท่าไร

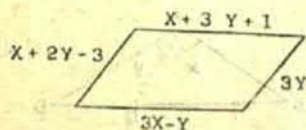
8. ชายคนหนึ่งออกเดินทางจากเมืองหนึ่งเวลา 8 น. ด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ $9\frac{1}{2}$ ไมล์ เพื่อไปพบเพื่อนของเขาที่ออกเดินทางเดียวกันจากอีกเมืองหนึ่งห่างกัน 56 ไมล์ ถ้าเพื่อนของเขาเดินทางได้ชั่วโมงละ 4 ไมล์ แต่ไปหยุดกลางทางเสียชั่วโมงหนึ่ง เขาจะพบกันเมื่อไรและที่ไหน

๑. เลขจำนวนหนึ่งมีสามหลัก ตัวเลขในหลักร้อยเป็นสี่เท่าของตัวเลขในหลักหน่วย และตัวเลขในหลักสิบบวกกว่าสามเท่าของตัวเลขในหลักหน่วย อยู่ 1 ถ้าตัวเลขในหลักทั้งสามรวมกันได้ 17 จงหาเลขจำนวนนั้น
๑๐. พ่อมีเงินอยู่ 7500 บาท และฝากส่วนหนึ่งไว้ในธนาคาร ได้ดอกเบี้ยร้อยละ $4\frac{1}{2}$ ต่อปี เงินที่เหลือนำไปลงทุนค้าขายได้กำไรร้อยละ 5 ต่อปี เมื่อสิ้นปีปรากฏว่าเขาได้ดอกเบี้ยมากกว่ากำไรในการค้าอยู่ 27 บาท อยากทราบว่าเงินที่ฝากธนาคารและลงทุนค้าขายเป็นอยู่แต่ละเท่าไร
๑๑. โรงภาพยนตร์แห่งหนึ่ง วันหนึ่งขายบัตรผ่านประตูได้ 465 ใบ เป็นเงิน 165 บาท ถ้าผู้ใหญ่เสียค่าผ่านประตูคนละ 40 สตางค์ และเด็กคนละ 25 สตางค์ ถามว่าคนที่เป็นผู้ใหญ่กี่คนและเด็กกี่คน
๑๒. ในรูปต่อไปนี้ $AB = AC$ และ $\angle BAC = \frac{1}{2}(2x - y)$ จงหา x และ y

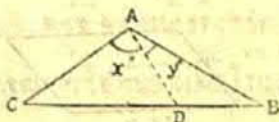


๑๓. เด็กนักเรียนมีสตางค์อยู่ 72 สตางค์ และต้องการจะซื้อสมุดสองเล่ม ถ้าเขาซื้อสมุดเล่มเล็ก 11 เล่ม และเล่มใหญ่ 13 เล่ม เงินจะยังขาด 2 สตางค์ แต่ถ้าซื้อสมุดเล่มเล็ก 13 เล่ม และเล่มใหญ่ 11 เล่ม เงินจะเหลือ 2 สตางค์ จงหาราคาสมุดทั้งสองเล่ม
๑๔. รถยนต์คันหนึ่งออกเดินทางด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ 30 ไมล์ เมื่อไปได้ 30 นาที แล้วรถยนต์อีกคันหนึ่งจึงออกเดินทางไปด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ 33 ไมล์ ถามว่าจะไปทันกันเมื่อไรและที่ไหน

15. ในกระเป๋าสตางค์มีสตางค์ห้า สตางค์สี่และเหรียญสลึงรวมกัน 14 อัน ถ้าสตางค์ห้าและสตางค์สี่รวมกันเป็น 80 สตางค์ และเงินในกระเป๋าทังหมคน้อย 1.50 บาท อยากทราบว่า มีสตางค์อยู่ในกระเป๋าสตางค์กี่อัน
16. แม่ค้าซื้อส้มราคา 3 ผล 2 สตางค์ และชมพู 12 ผล 5 สตางค์ สิ้นเงิน 1.82 บาท ถ้าเขาซื้อส้มเป็นห้าเท่าของเดิมและชมพูเพียงหนึ่งในสี่ของเดิม จะสิ้นเงิน 5.30 บาท ถามว่าเขาซื้อส้มและชมพูมาอย่างละเท่าไร
17. ชายสองคนได้รับเงินก้อนเป็นอัตราส่วน 5:3 และค่าใช้จ่ายเป็นอัตราส่วน 9:5 ถ้าทั้งสองคนเก็บเงินไว้เดือนละ 30 บาท งบประมาณเดือนของทั้งสอง
18. พ่อค้ากักจะเอาขนมสอง ชนิดรวมกันหนัก 5 ปอนด์ ได้หีบขายราคา 4.25 บาท ให้ได้กำไรร้อยละ 25 ถ้าขนมชนิดหนึ่งหนักหนึ่งซีกมาปอนด์ละ 60 สตางค์ และอีกชนิดหนึ่งปอนด์ละ 80 สตางค์ ถามว่าเขาจะต้องใช้ขนมปนกันชนิดละกี่ปอนด์
19. วันหนึ่งนักบินขับเครื่องบินตามลมไปได้ 165 ไมล์ใน 1 ชั่วโมง 30 นาที หากลมเปลี่ยนทิศและพัดด้วยความเร็วคงเดิม เขาก็ต้องใช้เวลา 2 ชั่วโมง 45 นาที ถึงที่ของตน งบประมาณเร็วของเครื่องบินและความเร็วของลม
20. ปรก๋อไปกำหนดความยาวเป็นนิ้วของด้านต่าง ๆ ของสี่เหลี่ยมคางหมูให้ งบประมาณผลบวกของด้านทั้งสอง



21. ช่างไม้ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 12 วัน เมื่อทำไปได้ 4 วันก็มีช่างไม้อีกคนหนึ่งมาช่วยและทำงานที่เหลือเสร็จใน $3\frac{1}{5}$ วัน อยากทราบว่าถ้าให้ช่างไม้คนหลังทำงานนั้นแต่ผู้เดียว จะแล้วในกี่วัน
22. เด็กออกเดินด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ 4 ไมล์ เพื่อจะไปยังเมืองซึ่งอยู่ห่างออกไป 20 ไมล์ เมื่อเดินไปได้พักหนึ่ง ก็มารถยนต์ตามมากับอัตราเร็วชั่วโมงละ 28 ไมล์ และรีบเกิดขึ้นไปยังเมือง ถ้าเด็กเสียเวลาทางต้นนับตั้งแต่ออกเดิน 2 ชั่วโมง ถามว่าเขาเดินไปได้เท่าไรแล้วก่อนรถยนต์มาพบ
23. นักเรียนเก่าของโรงเรียนแห่งหนึ่งนัดกันเลี้ยงประจําปี ถ้ามีคนมาประชุมมากขึ้น 10 คน คนหนึ่งๆ จะออกเงินน้อยลง 12 สตางค์ แต่ถ้าคนมาประชุมมีน้อยลง 5 คน คนหนึ่งๆ จะต้องออกเงินมากขึ้น 12 สตางค์ ถามว่ามีคนมาประชุมกี่คน และเสียค่าอาหารคนละเท่าไร
24. รถไฟแล่นจากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง ถ้าลดอัตราเร็วลงชั่วโมงละ 6 ไมล์ จะไปถึงช้าลง 3 ชั่วโมง แต่ถ้าเพิ่มอัตราเร็วขึ้นชั่วโมงละ 9 ไมล์ จะไปถึงเร็วขึ้น 3 ชั่วโมง จงหาระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง
25. มีเลขอยู่สองจำนวน ถ้าเอาจำนวนน้อยไปหารสองเท่าจำนวนมากจะได้ 6 มีเศษ 6 แต่ถ้าเอาจำนวนมากไปหารเจ็ดเท่าของจำนวนน้อยจะได้ 2 มีเศษ 3 จงหาผลของจำนวนนั้น
26. ในรูปต่อไปนี้ $AB = AC = CD$
และ $\angle CAD = \frac{3}{4} \angle CAB$ จงหา x และ y



๒๗. จะแบ่งเงินจำนวนหนึ่งให้แก่เด็กสามคน ให้คนที่สองได้มากกว่าครึ่งหนึ่งของคนที่หนึ่งกับคนที่สามรวมกัน ๖ สตางค์ และคนที่หนึ่งได้น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของคนที่สองกับคนที่สามรวมกัน ๔๘ สตางค์ ถ้าคนที่หนึ่งกับคนที่สองได้รวมกัน ๓ บาท ๙๖ สตางค์ ถามว่าเขาได้รับส่วนแบ่งคนละเท่าไร
๒๘. เงทามุมทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC ถ้ามุม A เล็กกว่ามุม B กับมุม C รวมกัน 108° และมุม C โตกว่ามุม A กับมุม B รวมกัน 24°



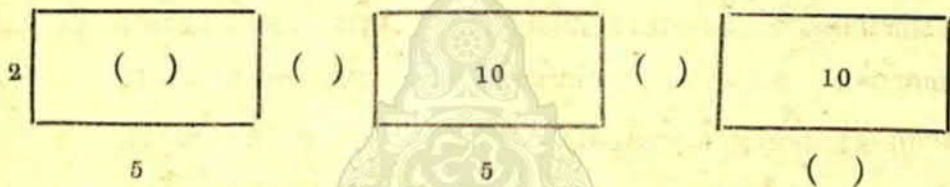
บทที่ ๒

วิธีแยกตัวประกอบ

ความสามารถคิดหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ เป็นสิ่งสำคัญยิ่งที่ช่วยให้คนเราพิจารณาได้โดยถูกต้องแน่นอน ความสามารถตั้งว่าจะหาได้โดยครบถ้วนบริบูรณ์ก็จากการเรียนคณิตศาสตร์เท่านั้น

—จอห์น ฟิสก์

100. ในรูปต่อไปนี้เป็นข้อให้หาความสัมพันธ์ระหว่างการคูณ การหาร และการแยกตัวประกอบ



ในการคูณนั้น กำหนดตัวประกอบและให้หาผลคูณ

ในการหาร กำหนดผลคูณและตัวประกอบตัวหนึ่ง ให้หาตัวประกอบอีกตัวหนึ่ง

ในการแยกตัวประกอบ กำหนดผลคูณ ให้หาตัวประกอบ

ทั้งนี้เห็นได้ว่าการแยกตัวประกอบเป็นวิธีกลับกันกับการคูณ วิธีแยกตัวประกอบ

ก็คือ วิธีหาจำนวนตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปซึ่งคูณกันได้เท่ากับจำนวนที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 หารแยกตัวประกอบ $7a^2 - 21ax + 14a$

ในที่นี้เห็นว่าทุกเทอมหารลงตัวด้วย 7, a หรือ 7a ซึ่งต่างก็เรียกว่าเป็นตัวประกอบร่วม แต่การทำนิยมแยกเอาตัวประกอบที่มากที่สุดออก

$$\therefore 7a^2 - 21ax + 14a = 7a(a - 3x + 2)$$

ตัวอย่างที่ 2 หารทำให้เป็นผลสำเร็จ $\frac{9a^4x - 12a^2x^2 + 3a^2x}{8a^2 - 4x + 1}$

$$\frac{9a^4x - 12a^2x^2 + 3a^2x}{8a^2 - 4x + 1} = \frac{3a^2x(3a^2 - 4x + 1)}{8a^2 - 4x + 1} = 3a^2x$$

แบบฝึกหัดที่ 54

ต่อไปนี้แฉกซ้ายกำหนดตัวประกอบให้ และแฉกขวาเป็นผลคูณ จงหากระพาส
 บั๊กแฉกขวาและหาผลคูณในแฉกซ้าย เสร็จแล้วหากระพาสบั๊กแฉกซ้ายและแยกตัว
 ประกอบในแฉกขวา

$$1. 3(m+n-2) = 3m+3n-6$$

$$2. 5(x+2y-3z) = 5x+10y-15z$$

$$3. n(a-b+4) = an-bn+4n$$

$$4. 2a(3a-5) = 6a^2-10a$$

$$5. 3d(3d^2-4d+1) = 9d^3-12d^2+3d$$

$$6. xy(3x+2y) = 3x^2y+2xy^2$$

$$7. 5a^2b(4-ab-3b^2) = 20a^2b-5a^3b^2-15a^2b^3$$

$$8. \frac{1}{9}x(x^2+2xy-y^2) = \frac{1}{9}x^3+\frac{2}{9}x^2y-\frac{1}{9}xy^2$$

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

$$9. ax+ay+az$$

$$10. a^3-3a^2-3a$$

$$11. 9r^2s+6rs^2-13s^3$$

$$12. -3ac^4+5bc^3-c^2$$

$$13. 21a^3b^2+28a^2b^2-7a^2b^3$$

$$14. -2hk^3-8h^2k^2-4h^3k$$

$$15. 34x^2y^3-51x^2y^2z+85xy^2z^2$$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$16. \frac{x^2-xy}{2x}$$

$$17. \frac{a^2-ab}{bc}$$

$$18. \frac{at^2+bt}{ar^2+br}$$

$$19. \frac{4s^2}{6s^2+4s}$$

$$20. \frac{x^2+xy}{y^2+xy}$$

$$21. \frac{p^2q-pq^2}{pqr}$$

$$22. \frac{6a^2+18a^2b}{8a^2b-24ab^2}$$

$$23. \frac{m^4n^3-2m^3n^2+8m^2n^2}{3m^3n^2-6m^2n+24mn}$$

101. ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบ

$$a(x+y)+b(x+y)$$

ในทอมตัวประกอบร่วมคือ $x+y$ ซึ่งเป็นเทอมพหุคูณ จึงแยกเอาออกเสีย

$$\therefore a(x+y)+b(x+y) = (x+y)(a+b)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบ $nx-ny-2x+2y$

ก่อนอื่นเรารวมเทอมที่มีตัวประกอบร่วมไว้ด้วยกันเสียก่อน ในทอมที่หนึ่ง และเทอมที่สองมี n เป็นตัวประกอบร่วม ส่วนที่สามและที่สี่มี 2 เป็นตัวประกอบร่วม จึงใส่วงเล็บใต้สองวงเล็บ ดังนี้

$$nx-ny-2x+2y = (nx-ny)-(2x-2y)$$

$$= n(x-y)-2(x-y)$$

$$= (x-y)(n-2)$$

ข้อสังเกต ก่อนใส่วงเล็บ ให้สังเกตกฎการใช้เครื่องหมายหน้าวงเล็บที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วให้

แบบฝึกหัดที่ 55

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $c(r+s)-d(r+s)$

2. $2(p+q)+a(p+q)^2$

3. $x(a+b+c)-y(a+b+c)$

4. $(a-b)^2-3(a-b)$

5. $5x^2(m^2+n)+4x(m^2+n)-(m^2+n)$

6. $7(c-d)-(c-d)(x-y)$

7. $ax-ay+bx-by$

8. $3ek-6ef-2df-dk$

9. $30-6p-pq+5q$

10. $4x^3+7x^2y-21y-12x$

11. $5m^2n+5pn-2m^2-2p$

12. $r^2-4r-rs+4s$

13. $py^2+qy^2+7p+7q$

14. $8a^2-4ax^2-2a+x^2$

15. $ax-2ay+2bx-by$ 16. $amn+bcnm-ap-bcp$
 17. $8cy^2+4eyz-3dyz-4dz^2$ 18. $2ax-3ay-2bx+8by+3cy-2cx$
 19. $3ax-6bx+9cx-4ay+8by-12cy$ 20. $n^2x+npz-nq-mpy-p^2y-pq$
 21. $n(a-b)-3(b-a)$

ข้อสังเกต $-3(b-a) = 3(a-b)$ (เพราะเหตุไร)

22. $4m(x-y)+5n(y-x)-6(x-y)$ 23. $17(m-n)-10a(m-n)+9b(n-m)$
 24. $\frac{4(a-b)}{6(b-a)}$

งอกลสมการต่อไปนี้เพื่อหาค่าของ x

25. $3ax-6a = 9a^2$ 26. $(m-n)x = am-an$
 27. $5cx+5cd = 25c^2$ 28. $ax+bx = ab+b^2$
 29. $2mx-3n^2x+15m^2n^2 = 10m^3$ 30. $3x-2rx = 5(3-2r)+(3-2r)(h-k)$

ถ้า $r-s = a$ หาค่าต่อไปนี้ ให้เขียนเทอมของ $a+x$

31. $1-r+s$ 32. $(r-s)-(s-r)$
 33. $3s-3r+4$ 34. $(r-s)(s-r)$
 35. $\frac{2}{r-s} + \frac{1}{s-r}$ 36. $\frac{1-r+s}{1-s+r} - \frac{r-s}{s-r}$

102. วิเคราะห์ประกอบจำนวนพีชคณิตสามเทอมแบบ ax^2+bx+c

นักเรียนได้เรียนมาแล้วว่า

$$\begin{aligned}(x+5)(x+4) &= x(x+4)+5(x+4) \\ &= x^2+4x+5x+20 \\ &= x^2+9x+20\end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบ ใช้วิธีย้อนหลังคล้ายกันกับการคูณ เช่น

จะแยกตัวประกอบของ $x^2+9x+20$

1. เทอมหน้าของตัวประกอบทั้งสองจะต้องคูณกันได้เท่ากับเทอมต้นของตัวตั้ง

$$2x^2 - 7x + 6 \quad \text{คือ } x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1) \quad 2x^2 - 7x + 6 = 2(x-6)(x-1)$$

2. เทอมหลังของตัวประกอบทั้งสองจะต้องคูณกันได้เท่ากับเทอมท้ายของตัวตั้ง

$$\text{คือ } 20$$

3. เมื่อเอาเทอมหน้าของตัวประกอบตัวแรกคูณกับเทอมหลังของตัวประกอบตัว

หลัง และเอา เทอม หลัง ของตัว ประกอบ ตัวแรก คูณ กับ เทอมหน้าของตัวประกอบตัวหลังได้เท่าไร

$$\text{บวกกันเข้าจะต้องได้เท่ากับเทอมกลางของตัวตั้ง คือ } 9x$$

ดังนั้น ตัวประกอบของ $x^2 + 9x + 20$ จึงหาได้ดังนี้

ตัวประกอบ

เทอมกลาง

$$(1) (x+10)(x+2)$$

$$2x + 10x = 12x$$

$$(2) (x+20)(x+1)$$

$$x + 20x = 21x$$

$$(3) (x+5)(x+4)$$

$$4x + 5x = 9x$$

ตัวประกอบอย่างใด (3) เท่านั้น ถูกต้องตามหลักที่กล่าวมาแล้วทั้ง 3 ข้อ

$$\therefore x^2 + 9x + 20 = (x+5)(x+4)$$

ตัวอย่างที่ 1 ให้อแยกตัวประกอบของ $x^2 - 6x + 5$

เทอมหน้าของตัวประกอบทั้งสองเท่ากับ x ส่วนเทอมหลังจะต้องคูณกันได้ -5 และบวกกันได้ -6 ดังนั้นเทอมหลังของตัวประกอบทั้งสองจะต้องเป็นลบและเห็นได้ว่าเท่ากับ -5 กับ -1

$$\therefore x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้อแยกตัวประกอบของ $2x^2 + 5x + 3$

เทอมหน้าของตัวประกอบเท่ากับ $2x$ และ x ส่วนเทอมหลังเท่ากับ 3 และ 1 แต่

ต้องทดลองดูว่าจะเข้าวงเล็บตัวประกอบอย่างไร เทอมกลางของผลคูณที่จะเท่ากับ $5x$ จากการทดลองปรากฏว่า

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

ตัวอย่างที่ 3 $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$

$$= (2x + 3y)^2$$

แบบฝึกหัดที่ 56

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------|--------------------------|
| 1. $x^2 + 5x + 6$ | 2. $49 + 42y + 9y^2$ | 3. $a^2 - 7a + 12$ |
| 4. $c^2 + 8c + 12$ | 5. $9 - 6m + m^2$ | 6. $c^2 + 10c + 9$ |
| 7. $t^2 - 10t + 16$ | 8. $r^2 - 22r + 96$ | 9. $4 + 12z + 9z^2$ |
| 10. $14 - 27x + 9x^2$ | 11. $n^2 + 16n + 63$ | 12. $p^2 + 11pq + 10q^2$ |
| 13. $x^2 - 11xy + 24y^2$ | 14. $b^4 + 18b^2 + 45$ | 15. $c^6 - 28c^3 + 132$ |
| 16. $8x^2 + 10x + 3$ | 17. $2x^2 - 11x + 12$ | 18. $3y^2 + 5y + 2$ |
| 19. $2p^2 - 11p + 12$ | 20. $4c^2 - 13c + 3$ | 21. $8 + q + 7q^2$ |
| 22. $r^2 - 18rs + 72s^2$ | 23. $60a^2 - 22ab + 2b^2$ | 24. $28 + 31p - 5p^2$ |
| 25. $4b^2 + 18bc + 3c^2$ | 26. $6x^2y^2 - 13xyz + 6z^2$ | 27. $1 + 5ab + 6a^2b^2$ |
| 28. $6s + 9s^2 + 1$ | 29. $4h^4 - 4h^2k + k^2$ | 30. $12w^3 + 9 + 4w^6$ |
| 31. $25x^4 + 40x^2y^2 + 16y^4$ | 32. $9r^4 + s^6 - 6r^2s^3$ | |

103. ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ

(1) $x^2 + 4x - 4$

(2) $x^2 - 8x - 4$

ในขั้นตอนสุดท้ายเป็นลบ การแยกตัวประกอบจึงทำตามวิธีข้างต้นมาแล้ว ต้อง
 หนักเมื่อแยกตัวประกอบของเทอมหลังจะได้เป็นบวกเทอมหนึ่งและลบเทอมหนึ่ง

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$$

$$\text{และ } x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$$

แบบฝึกหัดที่ 57

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

- | | | |
|---------------------------|-----------------------|---------------------|
| 1. x^2+x-30 | 2. $y^2-3y-10$ | 3. $a^2+8a-70$ |
| 4. $c^2+9c-90$ | 5. $t^2+6t-16$ | 6. $y^2-4yz-45z^2$ |
| 7. $12-ab-a^2b^2$ | 8. $2b^2+2b-12$ | 9. $24-5z-z^2$ |
| 10. $2y^2+6yz-20z^2$ | 11. $24r^2+2rs-s^2$ | 12. $m^2-8mn-84n^2$ |
| 13. $60k^2+25k-10$ | 14. $x^2+7xy-30y^2$ | 15. $9r^2-89r-30$ |
| 16. $12+11cd-c^2d^2$ | 17. $6m^2-11mn-10n^2$ | 18. $2y^2-16y-96$ |
| 19. $12a^4-a^2-35$ | 20. $27z^2+18z^3-24$ | 21. $7c-12+12c^2$ |
| 22. $24-14x-20x^2$ | 23. $24+50y-25y^2$ | 24. $2x^2+5xy+3y^2$ |
| 25. $12c^4-11c^4d^2-5d^4$ | 26. $42p^2-pq-30q^2$ | |

จงลดทอนการต่อไปนี้หาค่าของ x

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 27. $(a+b)x = a^2+2ab+b^2$ | 28. $(3n-2)x = 3n^2-14n+8$ |
| 29. $3ax-x = 9a^2-6a+1$ | 30. $4nx-5x = 20n^2-17n-10$ |
| 31. $7bx+6 = 2x+19b+7b^2$ | 32. $4x = 3c^2+10c^4-4-5c^2x$ |

104. การแยกตัวประกอบนั้น จะต้องทำอย่างไรจนกว่าจะไม่สามารถแยกตัว
 ประกอบอย่างใดต่อไปได้อีก

ตัวอย่างที่ 1 กระจายตัวประกอบของ $18x^4+30x^3-12x^2$
 ก่อนอื่นต้องแยกเอาตัวประกอบร่วมออกเสียก่อน

$$\begin{aligned} 18x^4+30x^3-12x^2 &= 6x^2(3x^2+5x-2) \\ &= 6x^2(3x-1)(x+2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{aligned} 48a^3b^2+24a^2b+3a &= 3a(16a^2b^2+8ab+1) \\ &= 3a(4ab+1)(4ab+1) \\ &= 3a(4ab+1)^2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 58

กระจายตัวประกอบต่อไปนี้

1. $8x^2-12x+12$

2. $4r^2-16rs+12s^2$

3. $3a^2b^2+18a^2b+12a^2$

4. $2c^2-12c^2d+18cd^2$

5. $8c^3-24c^2+16c$

6. $5ax-5ay+10bx-10by$

7. $m^3n-3m^3-2m^2n+6m^2$

8. $14r^3-35r^2+14r$

9. $5x^2y+10xy^2+5y^3$

10. $6p^2q^2-12pq^3-18q^4$

11. $4k^3-16k^2+12k^4$

12. $-18a^2b+24ab^2-8b^3$

13. $6c^2d^2-36c^2d^3+6c^2d$

14. $32c^3-16c^2+2c$

15. $\frac{1}{3}x^2y+\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{3}y^3$

16. $n^4+2n^2-n^3-2n$

17. $4m^2n-28mn^2+40n^3$

18. $2p^2h-4p^2k+8ph-16pk$

19. $x^2(a+b)-3x(a+b)-4(a+b)$

20. $4(r-s)-12r(r-s)+9r^2(r-s)$

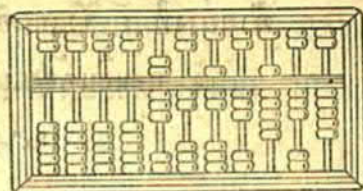
21. $3(m-n)^2+12(m-n)+9$

22. $9a(c-d)-24a(c-d)^2+16a(c-d)^3$

105. ผลต่างของกำลังสองของสองจำนวน

เมื่อเอา $a+b$ คูณกับ $a-b$ จะได้เป็น

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



ดังนั้นประกอบของ $a^2 - b^2$ ก็คือ $a+b$ และ $a-b$

$$\text{หรือ } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ลูกคิดจีน

ใช้ในการคำนวณทั่วไปในประเทศจีน มาตั้งแต่ต้นศตวรรษที่ ๑๒

จากนั้นเห็นได้ว่า ผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนเท่ากับผลคูณของผลบวกและผลต่างของสองจำนวนนั้น

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $a^2 - 9b^2$

$$\begin{aligned} a^2 - 9b^2 &= a^2 - (3b)^2 \\ &= (a+3b)(a-3b) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{aligned} (x-y)^2 - 16z^2 &= \{(x-y)+4z\} \{(x-y)-4z\} \\ &= (x-y+4z)(x-y-4z) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $9n^2 - 4a^2 - 4a - 1$

ในทันทีถ้าใส่วงเล็บสามเทอมหลังเสีย และให้เครื่องหมายหน้าวงเล็บเป็นลบ ก็จะทำให้เป็นจำนวนกำลังสองได้

$$\therefore 9n^2 - 4a^2 - 4a - 1 = 9n^2 - (4a^2 + 4a + 1)$$

$$= 9n^2 - (2a+1)^2$$

$$= \{3n+(2a+1)\} \{3n-(2a+1)\}$$

$$= (3n+2a+1)(3n-2a-1)$$

แบบฝึกหัดที่ 59

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $n^2 - 16$

2. $9 - x^2$

3. $y^2 - 1$

4. $1 - 4z^2$

5. $c^2 - 144$

6. $b^2 - 25c^2$

7. $4n^2 - 36$

8. $a^2b^2 - c^2$

9. $49 - 4y^4$

10. $64a^2 - 49b^2$

11. $625 - x^6y^4$

12. $x^4 - 4x^2y^2$

13. $121p^2q^2 - 16qr^2s^2$

14. $25x^{10} - 64y^8$

15. $1 - 225a^2b^4c^6$

จงหาคำต่อไปนี้ โดยวิธีแยกตัวประกอบ

16. $(19)^2 - (11)^2$

17. $(46)^2 - (44)^2$

18. $(351)^2 - (350)^2$

19. $(101)^2 - (99)^2$

20. $(275)^2 - (225)^2$

21. $(1281)^2 - (219)^2$

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้และทำให้เป็นผลต่ำเร

22. $(x+3)^2 - 4$

23. $25 - (y-4)^2$

24. $(b-c)^2 - 16$

25. $(x+2y)^2 - z^2$

26. $1 - (a-b)^2$

27. $x^2 - (y+z)^2$

28. $25x^2 - (2y-9)^2$

29. $4(m-n)^2 - 1$

30. $(a-b)^2 - (x+y)^2$

31. $9(c+d)^2 - 4(c-d)^2$

32. $25b^2 - (4b+1)^2$

33. $(2x+y-z)^2 - (x-y+z)^2$

34. $(3a-7b+c)^2 - (7b-c)^2$

35. $(4p+p-5)^2 - (5-4p)^2$

36. $a^2 - 2ab + b^2 - 16$

37. $4m^2 + 4mn + n^2 - 9r^2$

38. $x^2 - 6bx + 9b^2 - 25c^2$

39. $c^2 - 6cd - 16 + 9d^2$

40. $x^2 - r^2 - 2rs - s^2$

41. $4h^2 - 4k^2 + 4h + 1$

42. $12w - 9 - 4w^2 + 16r^2$

43. $9a^2 - c^2 + 8cx - 16x^2$

44. $m^2 - 2mn + n^2 - (p^2 + 2pq + q^2)$

45. $4a^2 - 4ab + b^2 - c^2 - 6cd - 9d^2$

46. $2bd - a^2 - c^2 + b^2 + d^2 + 2ac$

47. $x^2 - a^2 + y^2 - b^2 - 2xy + 2ab$ 48. $25x^2 + 60xy + 36y^2 + 14z - z^2 - 49$

49. $a^2 - 4b^2 + c^2 - 9d^2 - 2ac + 12bd$ 50. $p^4 + 25x^4 + 8p^2x^2 - 9 + 3x + 16x^4$

51. $x^4 - x^2 - 9 - 2x(a^2x - 3) + a^4$

52. กระจายและหารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อตัดมุมทั้งสี่เป็นรูปสี่เหลี่ยม
 จตุรัสเท่า ๆ กันดังแสดง แล้วพับกระดาษที่เหลือเป็นรูปหีบเขี่ย ความยาวของ
 ด้านต่าง ๆ ปรากฏดังรูป



(1) เขียนสูตรหาพื้นที่ภายในของหีบ (A)

(2) เขียนสูตรหาได้ใน (1) เป็นแบบมีตัวประกอบ

(3) หา A เมื่อ $s = 32$ นิ้ว และ $w = 4$ นิ้ว โดยใช้สูตร (1) และสูตร

(2) สูตรไหนใช้ได้สะดวกกว่ากัน?

106. ผลบวกและผลต่างของกำลังสามของสองจำนวน

ถ้าเอา $a+b$ ทหาร a^3+b^3 จะได้ a^2-ab+b^2

และถ้าเอา $a-b$ ทหาร a^3-b^3 จะได้ a^2+ab+b^2

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

ดังนั้นเห็นว่า

1. ผลบวกของกำลังสามของสองจำนวนแยกออกได้เป็นตัวประกอบสองตัว ตัว
 ประกอบตัวหนึ่งเท่ากับผลบวกของสองจำนวนนั้น ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งเท่ากับผลบวก

ของกำลังสองของสองจำนวนนั้น ไปด้วยผลคูณของสองจำนวนนั้น

2. ผลต่างของกำลังสามของสองจำนวนแยกออกได้เป็นตัวประกอบสองตัว ตัวประกอบตัวหนึ่งเท่ากับผลต่างของสองจำนวนนั้น ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของสองจำนวนนั้น บวกกับผลคูณของสองจำนวนนั้น

ตัวอย่างที่ 1

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27y^3 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x + 3y) \{ (2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2 \} \\ &= (2x + 3y) (4x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{aligned} (x+3)^3 - y^3 &= \{ (x+3) - y \} \{ (x+3)^2 + y(x+3) + y^2 \} \\ &= (x+3-y) (x^2 + 6x + 9 + xy + 3y + y^2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3

$$\begin{aligned} 192x^3 - 3x^3 &= 3x^3(64 - x^3) \\ &= 3x^3 \{ (4)^3 - (x)^3 \} \\ &= 3x^3(4 - x) (16 + 4x^2 + x^4) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 60

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

- | | | |
|--------------------|--------------------|------------------|
| 1. $x^3 + y^3$ | 2. $a^3 + 8$ | 3. $8m^3 - n^3$ |
| 4. $1 + r^3$ | 5. $27b^3 + 64c^3$ | 6. $1 - 343y^3$ |
| 7. $125 + x^3$ | 8. $216 - k^3$ | 9. $1000l^3 - 1$ |
| 10. $x^3y^3 + 343$ | 11. $r^3s^3 - 216$ | 12. $a^3 - b^3$ |
| 13. $a^3b^3 + c^3$ | 14. $8x^3 - 27y^3$ | 15. $x^3 + x$ |

16. $c^4d - cd^7$ 17. $3n^3 - 24$ 18. $54m^2 + 2m^3n^3$

19. $64x^4y^4 + 1$ 20. $512p^3q^3 - 729r^3$ 21. $482p^4 - 686q^{12}$

22. $a^4 - m^3b^9$ 23. $r^5s^2 - r^2s^5$ 24. $(m+n)^3 + 8p^3$

25. $(a+b)^3 - (a-b)^3$ 26. $1 - 27(c-d)^3$

27. $729(x-y)^3 + 125(x+y)^3$ 28. $250(a-b)^3 + 2$

29. $8(x+y)^3 - (2x-y)^3$ 30. $d^6 - 7d^3 - 8$

31. $125(a+b)^4 + (a+b)$ 32. $x^4 + x^3y + 27(x+y)$

33. $27a(3c+d) - a^4(3c+d)$ 34. $(x+y+z)^3 - (x-y-z)^3$

107. ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการแยกตัวประกอบที่ยากขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 1 แยกตัวประกอบของ $a^4 + a^2b^2 + b^4$

จำนวนที่กำหนดให้ เราอาจแยกตัวประกอบได้โดยทำให้เข้าแบบผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนเสีย

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) \\ &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

108. จากตัวอย่างที่ 1 เห็นได้ว่าจำนวนพีชคณิตที่มีสามเทอมแบบ $ax^2 + bx + c$ อาจทำให้เข้าแบบผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนได้

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

เห็นได้ว่า x^2 ซึ่งเป็นเทอม x กำลังสูงสุดมีตัวคูณควมเป็น 1 และการที่จำนวนพีชคณิตจะเป็นจำนวนกำลังสองได้ เทอมที่ไม่มี x จะต้องเท่ากับกำลังสองของครึ่งหนึ่งของตัวคูณควมของ x คือ $\frac{2a^2}{2} = a^2$ ดังนั้นถ้ากำหนดเทอมที่หนึ่งและที่สองคือ x^2

และ x ให้ เราทำให้เป็นจำนวนกำลังสองได้โดยเอากำลังสองของครึ่งหนึ่งของตัวคูณควมของ x บวกเข้า

เช่น x^2+4x ทำให้เป็นจำนวนกำลังสองได้โดยเอา $(\frac{4}{2})^2$ หรือ 4 บวกเข้าจะได้

$$x^2+4x+4 = (x+2)^2$$

ทำนองเดียวกัน x^2-9x ก็ทำให้เป็นจำนวนกำลังสองได้โดยเอา $(-\frac{9}{2})^2$ หรือ $\frac{81}{4}$ บวกเข้าจะได้ $x^2-9x+\frac{81}{4} = (x-\frac{9}{2})^2$

ตัวอย่างที่ 2 กระจายตัวประกอบของ $x^2-2x-63$

$$\begin{aligned} x^2-2x-63 &= (x^2-2x+1)-63-1 \\ &= (x-1)^2-64 \\ &= (x-1+8)(x-1-8) \\ &= (x+7)(x-9) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 กระจายตัวประกอบของ $3x^2-14x+15$

ก่อนอื่นต้องทำให้ตัวคูณควมของ x^2 เป็น 1 เสียก่อน

$$\begin{aligned} 3x^2-14x+15 &= 3(x^2-\frac{14}{3}x+5) \\ &= 3\left\{x^2-\frac{14}{3}x+\left(\frac{7}{3}\right)^2\right\}+5-\frac{49}{9} \\ &= 3\left\{\left(x-\frac{7}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right\} \\ &= 3\left\{\left(x-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\right)\right\} \\ &= 3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3) \\ &= (3x-5)(x-3) \end{aligned}$$

หมายเหตุ วิธีแยกตัวประกอบโดยการทำให้เข้าแบบผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนนั้น นับว่าสะดวกและได้ผลแน่นอน ก็ควรจะใช้นี้กับวิธีทศลงซึ่งบางครั้งวุ่นวายและเสียเวลามาก เช่นจะแยกตัวประกอบของ $30x^2+87xy-84y^2$ เป็นต้น

แบบฝึกหัดที่ 61

จงแยกตัวประกอบของ

1. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
2. $m^4 + 3m^2n^2 + 4n^4$
3. $a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4$
4. $x^4 + y^4 - 11x^2y^2$
5. $c^4 + 9c^2d^2 + 81d^4$
6. $r^4 + s^4 - 11r^2s^2$
7. $4p^4 - 5p^2q^2 + q^4$
8. $12x^2 + 5ax - 72a^2$
9. $x^2y^2 - 14xyz - 72z^2$
10. $y^4 + 25z^4 - 19y^2z^2$
11. $b^2 + 32b + 247$
12. $x^2 - 7x - 228$
13. $2a^2b^2 - 11ab + 144$
14. $24m^2 + 118m - 247$
15. $14x^2 - 13xy - 12y^2$
16. $28k^2 - 3kh - 18h^2$
17. $3 - 5t^2 - 12t^4$
18. $28b^2 - 8bc - 18c^2$
19. $105 - 17pq - 12p^2q^2$
20. $20y^4 - 54z^4 + 21y^2z^2$

109. ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $a^6 - b^6$

ในทฤษฎีการแยกตัวประกอบตามวิธีผลต่างของกำลังสองของสองจำนวน หรือผลต่างของกำลังสามของสองจำนวนก็ได้ แต่ควรใช้วิธีทางข้อผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนก่อนเสมอ และแยกตัวประกอบเรื่อยไปจนหมด

$$\begin{aligned}\therefore a^6 - b^6 &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ

$$(1) \quad 8x^3y^2 + 52x^2y^2 + 60xy^2$$

$$(2) \quad 9a^2 - 25b^2 + 3a - 5b$$

$$(3) \quad p(3+p^2) - q(3+q^2)$$

ถ้าจำนวนพหุนามมีตัวประกอบร่วม ต้องเอาตัวประกอบร่วมนั้นออกไว้หน้าวงเล็บเสียก่อนแล้วจึงแยกตัวประกอบต่อไป

$$(1) \quad 8x^3y^2 + 52x^2y^2 + 60xy^2 = 4xy^2(2x^2 + 13x + 15)$$

$$= 4xy^2(2x+3)(x+5)$$

$$(2) \quad 9a^2 - 25b^2a - 5b = (3a+5b)(3a-5b) + (3a-5b)$$

เอาตัวประกอบย่นร่วมกัน $(3a-5b)$ ออกร่วม $= (3a-5b)(3a+5b+1)$

(3) ถอดวงเล็บและรวมพจน์ใหม่เพื่อจะได้แยกตัวประกอบได้

$$p(3+p^2) - q(3+q^2) = 3p + p^3 - 3q - q^3$$

$$= 3(p-q) + (p^3 - q^3)$$

$$= 3(p-q) + (p-q)(p^2 + pq + q^2)$$

$$= (p-q)(3 + p^2 + pq + q^2)$$

แบบฝึกหัดที่ 6.2

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $12a^3b - 30a^2b + 12ab$

2. $75x + 240x^2 + 192x^3$

3. $21cd - 54c^2 + 20d^2$

4. $(a+b)^2 + 13(a+b) + 36$

5. $64 - r^6$

6. $m^3n^2 - m^2n^3$

7. $a^4 + a^3b + 27a + 27b$

8. $x^2 + (a+b)x + ab$

9. $36a^3 - a(2x-y)^2$

10. $2r^3 + r^2 - 8r - 4$

11. $4x^2 - y^2 - 9 + 6y$

12. $16a^2(1+4a^2) - 36b^2 + 1$

13. $2(s+4) + s(6s-28)$

14. $4k^4 - 4k^2(m+2n) + (m+2n)^2$

15. $ax + 4 - 2x - 2a$

16. $(2a+b)(c+d) + c+d$

17. $3(2p^2-1) - 7p$

18. $(a+b)^6 + 1$

19. $729y^7z - yz^7$

20. $p^4 - 3p^2q^2 - 54q^4$

21. $(x+y)^4 - (x-y)^4$ 22. $1 - (m-n)^3$
23. $c^3 + d^3 + c + d$ 24. $36b^2 + 27bc - 28c^2$
25. $(x+1)^2 - (x+1)(2x-3)$ 26. $x(x+4y) - 3y(3x-2y)$
27. $a(b^2 - c^2) + bc(1 - a^2)$ 28. $(19x-6y)(a-2b) + (4b-2a)(3x-2y)$
29. $p^4q - p^2q^3 - p^3q^2 + pq^4$ 30. $6x^2 - 4xy + 10yz - 15xz$
31. $2(a+b)^2 + 7(a+b)(x-y) + 6(x-y)^2$
32. $15625a^5(3c+d) - a^{11}(3c+d)$
33. $6(a+b)^2 - 7(a^2 - b^2) - 3(a-b)^2$ 34. $(ax+by)^2 - (ay+bx)^2$
35. $a(a-c) - b(b-c)$ 36. $(a+b)^3 + (a-b)^3$
37. $x^3r^2 - 8y^3r^2 - 4x^3s^2 + 32y^3s^2$ 38. $(5x^2 + 12x - 1)^2 - (x^2 + 2x + 5)^2$
39. จงหา $53^2 - 46^2$ ด้วย 14
40. จงหารากกำลังที่สองของ $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + x - 20)(x^2 + 8x - 10)$
41. จงทำให้สำเร็จ $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2) - (?)^2$ แล้วแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4y^4$
42. จงทำ $x^2 + 8x + 25$ ให้เข้าแบบ $(x+b)^2 + c^2$
43. จงแยก $x^9 - 64x^3 - x^6 + 64$ ออกเป็นตัวประกอบทุกตัว

119. ประโยชน์ของตัวประกอบ

วิธีแยกตัวประกอบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วย่อมใช้เป็นประโยชน์ในการคูณไขว้
มาก ทั้งเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้.

ตัวอย่างที่ 1 จงคูณ $a-b+c$ กับ $a-b-c$

จำนวนพจน์ทั้งสองข้างเขียนได้ก็อย่างหนึ่งคือ $(a-b)+c$ และ $3(a-b)-c$

ซึ่งเป็นผลบวกและผลต่างของ $a-b$ กับ c

$$\therefore \text{ผลคูณ} = \{(a-b)+c\} \{(a-b)-c\}$$

$$= (a-b)^2 - c^2 = a^2 - 2ab + b^2 - c^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ

$$x+3, x-3, x^2-3x+9, x^2+3x+9$$

เขาจำนวนพหุคูณที่ 1 คูณกับที่ 3 และที่ 2 คูณกับที่ 4

$$\text{ผลคูณ} = \{(x+3)(x^2-3x+9)\} \{(x-3)(x^2+3x+9)\}$$

$$= (x^3+27)(x^3-27)$$

$$= x^6 - 729$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงให้เห็นว่า $(x+3y-2)^2(2-3x-y)^2$

หารลงตัวด้วย $4(x+y)$

จำนวนพหุคูณที่กำหนดให้เข้าแบบ A^2-B^2

ซึ่งตัวประกอบตัวหนึ่งจะเท่ากับ $A-B$

$$\therefore \text{จำนวนพหุคูณตัวหนึ่งหารลงตัวด้วย } (x+3y+2)-(2-3x-y) \text{ หรือ } 4x+4y \\ = 4(x+y)$$

แบบฝึกหัดที่ 63

จงใช้ตัวประกอบหาผลคูณต่อไปนี้

1. $x+y-z, x+y+z$

2. $a+b-c, a-b+c$

3. $a-5b+z, a-5b-z$

4. $2x+3y+z, 2x+3y-z$

5. $3+p-p^2, 3-p-p^2$

6. $1-9m+4n, 1-9m-4n$

7. b^2+5b+6, b^2-5b-6

8. $a+b+c+d, a+b-c+d$

9. $p-q-r+s, p-q+r-s$ 10. $k+h, k-h, k^2+h^2$
 11. $x+y, x-y, x^2+x^2y^2+y^4$ 12. $(a-b)^2, (a+b)^2, (a^2+b^2)^2$
 13. $z+2, z-2, z^2+2z+4, z^2-2z+4$ 14. $y^2+2(y+1), y^2-2(y+1)$
 15. x^3-2y^2+3z, x^3+2y^2-3z
 16. จงแสดงให้เห็นว่า $(3x-3y+1)^3 - (1-3x+2y)^3$ ทหารลงตัวด้วย $5(x-y)$
 17. จงแสดงว่า $(7a^2+4a+9)^2 - (a^2-9a+13)^2$ ทหารลงตัวด้วย $(2a+5)(3a-1)$
 18. จงแสดงว่า $(3p+9q-r)^2 + (4p+12q+r)$ ทหารลงตัวด้วย $7(p+3q)$
 19. จงแสดงว่า $8x^2-5x+2$ หารผลคูณของ $3x^2+7x-6$ และ $2x^2-3x+1$

ไต่ลงตัว

20. จงแสดงว่า $(x-1)^2$

หาร $(x^3+x^2-5)^2 - (x^3+2x-6)^2$ ไต่ลงตัว

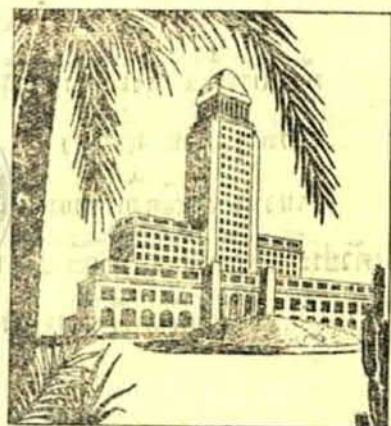
111. เอกลักษณ์ (Identity)

(1) $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

(2) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

จากตัวอย่างข้างบน

เห็นได้ว่าทั้งสองข้าง ของ สมการ เท่ากัน เสมอ



ไม่ว่าตัวอักษรจะมีค่าเป็นเท่าไร สมการเช่นนี้เรียกว่า สมการเอกลักษณ์ หรือเรียกย่อ ๆ ว่า เอกลักษณ์ และใช้เครื่องหมาย $\equiv$ แสดงให้ทราบว่า

การพิสูจน์ว่าเอกลักษณ์นั้นเป็นจริง ใช้วิธีเอาจำนวนพีชคณิตมาข้างหนึ่งและแทนหรือทอนจนปรากฏว่าเท่ากันกับจำนวนพีชคณิตอีกข้างหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$9(3x+2y)^2 - 4(6x+5y)(3x+2y) \equiv 9x^2 - 4y^2$

จำนวนพหุคูณตัวข้างซ้ายมี $3x+2y$ เป็นตัวประกอบร่วม

$$\begin{aligned}\therefore \text{จำนวนพหุคูณตัวข้างซ้าย} &= (3x+2y) \{9(3x+2y)-4(6x+5y)\} \\ &= (3x+2y) (27x+18y-24x-20y) \\ &= (3x+2y) (3x-2y) = 9x^2-4y^2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $a+b+c=0$ จงพิสูจน์ว่า $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

$$a+b+c=0, \therefore c=-(a+b)$$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3+c^3 &= a^3+b^3-(a+b)^3 \\ &= (a+b) \{a^2-ab+b^2-(a+b)^2\} \\ &= (a+b) (a^2-ab+b^2-a^2-2ab-b^2) \\ &= (-c) (-3ab) \\ &= 3abc\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 64

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้.

- $(x+y)^3-(x-y)^2(x+y) \equiv 4xy(x+y)$
- $p^3(p+q)-pq(p^2-q^2) \equiv p(p^2+q^2)$
- $m^4-n^4-(m-n)^2(m+n) \equiv 2mn(m^2-n^2)$
- $(c-d)(c+d)^3-c^4+d^4 \equiv 2cd(c^2-d^2)$
- $3ax(a-x)^2+(a-x)^4 \equiv (a-x)(a^3-x^3)$
- $(y+z)^4-3yz(y+z)^2 \equiv (y+z)(y^3+z^3)$
- $bc(b+c)+ca(c-a)+ab(a-b) \equiv -(b-c)(c-a)(a-b)$
- $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a) \equiv (a+b)(x+a)(x^2-ax+a^2)$
- $(x-y)^2+(x+y)^2+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y) \equiv 8x^2$
- $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2 \equiv (x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)$

ถ้า $2n=a+b+c$ จึงแสดงให้เห็นว่า

$$11. (n-a)^2 + (n-b)^2 + (n-c)^2 + n^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2$$

ถ้า $2s=a+b+c$ ให้พิสูจน์ว่า

$$12. (s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 + 3abc \equiv s^3$$

13. ถ้า $x+y+z=0$ จึงแสดงให้เห็นว่า $(2x-y)^3 + (2y-z)^3 + (2z-x)^3$
 $\equiv 3(2x-y)(2y-z)(2z-x)$

14. ถ้า $a+b+c=m$ ให้พิสูจน์ว่า $(m-3a)^3 + (m-3b)^3 + (m-3c)^3$
 $- 3(m-3a)(m-3b)(m-3c) = 0$

15. ถ้า $X=a+d$ $Y=b+d$ $Z=c+d$ ให้พิสูจน์ว่า
 $X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

16. ให้พิสูจน์ว่าสมการ $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1) = 0$
 เท่ากับสมการ $(ax+by-1)^2 + (bx-ay)^2 = 0$

112. การถอดสมการโดยวิธีแยกตัวประกอบ

ถ้าเรารู้เพียงว่า $A \times B = 0$ ดังนั้นเราจะหาค่าของตัวประกอบตัวใดหาได้หรือไม่
 นอกจากจะทราบค่าตัวประกอบตัวใดตัวหนึ่งเสียก่อน แต่ถ้า $A \times B = 0$ ดังนั้นเรารู้ว่า
 A ต้องเท่ากับ 0 หรือหรือไม่ B ก็ต้องเท่ากับ 0 เพราะจำนวนสองจำนวนที่คูณกัน
 ได้ศูนย์ อย่างน้อยจำนวนหนึ่งก็จะต้องเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าของ x ในสมการ (1) $x(x-7)=0$

(2) $3x^2 - 13x = 10$

(1) เนื่องจาก x และ $x-7$ คูณกันได้ศูนย์ ไม่ x ก็ $x-7$ จะต้องเท่ากับศูนย์

$x=0$ หรือ $x-7=0$

$x=0$ หรือ $x=7$

ตรวจผลลัพธ์

ถ้า $x=0$, $x(x-7)=0(-7)=0$

ถ้า $x=7$, $x(x-7)=7(0)=0$

} ตรงกับโจทย์เป็นดก

ข้อสังเกต ข้ายาคอบว่า $x=0$ และ $x=7$ เพราะ x จะเท่า 0 และ 7 ในเวลาเดียวกันไม่ได้

(2) ไขว้เทอมเสียใหม่ได้เป็น $3x^2-13x=0$

$$(3x+2)(x-5)=0$$

$$\therefore 3x+2=0 \text{ หรือ } x-5=0$$

$$\therefore x=-\frac{2}{3} \text{ หรือ } x=5$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ x ในสมการ

(1) $(x+1)(x-5)=-9$

(2) $5x(x-3)=x^2-9$

(1) ถอวงเล็บทำให้สมการเป็นรูปสามเหลี่ยมเพื่อให้ข้างหนึ่งเท่ากับศูนย์

$$\therefore x^2-4x-5 = -9$$

$$x^2-4x+4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2$$

ในท่น x มีสองค่า แต่ค่าสองนั้นเท่ากันคือเท่ากับ 2

(2) $5x(x-3)=x^2-9$

$$5x(x-3)-(x+3)(x-3)=0$$

$$(x-3)\{5x-(x+3)\}=0$$

$$(x-3)(4x-3)=0$$

$$\therefore x-3=0 \text{ หรือ } 4x-3=0$$

$$\therefore x=3 \text{ หรือ } x=\frac{3}{4}$$

113. วาดตัวอย่างดังกล่าวมาแล้ว เห็นได้ว่าในแต่ละสมการจำนวนที่ของ

การทนายมีเพียงจำนวนเดียวและมีกำลังอย่างสูงเป็นสอง เช่น $3x^2+10x-12=0$

สมการเช่นนี้เรียกว่า สมการควอดราติก (Quadratic Equation) หรือสมการกำลังที่สอง จำนวนที่ของสมการในสมการกำลังที่สองจะมีค่าใดเป็นสองอย่างเสมอ

ทำนองเดียวกันใน สมการกำลังที่สาม เช่น $x^3-x^2-4x+4=0$ จำนวนที่ของการทนายคือ x จะมีค่าใดเป็นสามอย่าง

แบบฝึกหัด 65

จงแก้สมการต่อไปนี้และตรวจสอบผลลัพธ์ด้วย

1. $(x-3)(x-7)=0$

2. $(y+4)(y-5)=0$

3. $(t+7)(t+2)=0$

4. $z(z-9)=0$

5. $(x-3)^2=0$

6. $(r+5)^2=0$

7. $n^2+4n=0$

8. $5x^2=0$

9. $5y(y-2)(y+8)=0$

10. $(n-2)(n-5)(n-8)=0$

11. $4x(x-4)^2=0$

12. $x^2=25$

13. $m^2-8m+7=0$

14. $p^2+7p+10=0$

15. $x^2-6x-16=0$

16. $2k^2+5k-3=0$

17. $d^2-16=0$

18. $a^2+6a+9=0$

19. $x^2-3x=10$

20. $y^2+21=10y$

21. $z(6z-7)=3$

22. $4n^2-25=0$

23. $9x^2=5(6x-5)$

24. $2x^2=6x$

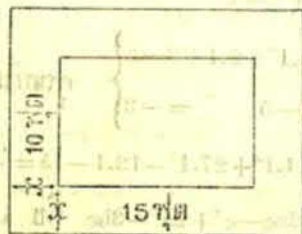
25. $4x^2+1=4x$

26. $6x^2=11x+7$

27. $4y^2=81y$

28. $3x(x+3)=x+3$

29. $15 - 11q = 8q(1 + q)$ 30. $(x+3)(x-5) = 20$
 31. $(x-3)(x+2) = 14$ 32. $(2x-1)(x-2) = 5$
 33. $(3x+1)(2x+3) = 3$ 34. $(y-3)^2 = 25$
 35. $(z-1)^2 + (z+3)^2 = 26$ 36. $(x+8)(x-3) = 60$
 37. $(2n+3)(n+1) = 4n^2 - 22$ 38. $p^2 - p = 6(p-1)$
 39. $(x+1)(x+2)(x+3) = 15(x+2)$ 40. $c^3 + 3c^2 = c + 3$
 41. $a(a+2) - 18 = a + 2$ 42. $(2x-7)(x-4) = 3(x-4)$
 43. $3(u^2-1) = u-1$ 44. $(n-2)^2 - 6(n-2) + 9 = 0$
 45. $(5x+7)^2 + 2x(5x+7) = 0$ 46. $k(k^2-9) = 4(k^2-9)$
47. ก้านยาวของสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งยาวกว่าก้านกว้างอยู่ 6 นิ้ว และพื้นที่เท่ากับ 160 ตารางนิ้ว จงหาว่าสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นยาวและกว้างเท่าไร
48. ส่วนสูงของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งสั้นกว่าความยาวของฐานอยู่ 3 ฟุต และพื้นที่เท่ากับ 44 ตารางฟุต จงหาความยาวของฐานและส่วนสูงของสามเหลี่ยม
49. ในวชิชาใหม่ นักเรียนในชั้นหนึ่งต่างส่งบัตรความสขให้แก่เพื่อนร่วมชั้นของตน ถ้าบัตรที่ใช้ทั้งหมดมี 156 บัตร ถามว่านักเรียนในชั้นนั้นมีกี่คน
50. ส่วนดอกไม้วีปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว 15 ฟุต กว้าง 10 ฟุต ถ้าจะขายสวนดอกไม้นี้ใหม่ เนอทเพิ่มเติม เป็นสองเท่าโดย ขาย ส่วน ยาว และ ส่วน กว้าง ออกไปค่านละเท่า ๆ กัน อยากระทราบบว่าต้องจะขายส่วนยาวและส่วนกว้างออกไปค่านละเท่าใด



บทที่ ๓

วิธีคูณและวิธีหารอย่างยาก

คณิตศาสตร์เป็นต้นทางและเป็นชนวนนำไปสู่วิทยาศาสตร์นานาประเภท
หากละเลยคณิตศาสตร์เสียก็จะทำให้เกิดผลร้ายแก่วิทยาการทั้งมวล

— โรเจอร์ เบคอน

114. วิธีคูณและวิธีหารอย่างง่ายได้อธิบายมาแล้วในบทที่ 5, 6 ของพีชคณิต
เล่ม 1 ต่อไปนี้จะได้อธิบายวิธีคูณและวิธีหารที่ยากขึ้น

ตัวอย่างที่ 1 หารหาผลคูณของ $2x^2+2x^3+3-4x^2$ และ $-x+3x^2-5$

ก่อนอื่นควรวเรียงกำลังของอักษรในตัว
ตั้งและตัวคูณให้เหมือนกันเสียก่อน

$$2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$$

$$3x^2 - x - 5$$

$$6x^5 - 12x^4 + 6x^3 + 9x^2$$

$$-2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$-10x^3 + 20x^2 - 10x - 15$$

$$6x^5 - 14x^4 + 27x^3 - 13x^2 - 15x$$

ตรวจสอบผลคูณ สมมติให้ $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ตัวตั้ง} = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 3 \\ \text{ตัวคูณ} = 3 \cdot 1^2 - 1 - 5 = -3 \\ \text{ผลคูณ} = 6 \cdot 1^5 - 14 \cdot 1^4 + 27 \cdot 1^3 - 13 \cdot 1^2 - 15 = -9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{คูณกันได้ } -9 \\ \text{ตรงกันเป็นผลคูณ} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 หารคูณ $ab+2ac-c^2+2a^2-3bc$ กับ $a-b+2c$



$$2a^2 + ab + 2ac - 3bc - c^2$$

$$\frac{a-b+2c}{}$$

$$2a^3 + a^2b^2 + 2a^2c - 3abc - ac^2$$

$$-2a^2b \quad -2abc \quad -ab^2 + 3b^2c + bc^2$$

$$\frac{+4a^2c + 2abc + 4ac^2 \quad -6bc^2 - 2c^3}{}$$

$$2a^3 - a^2b + 6a^2c - 3abc + 3ac^2 - ab^2 + 3b^2c - 5bc^2 - 2a^3$$

การตรวจสอบผลคูณทำอย่างเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1 โดยสมมติค่าแทน a, b, c แต่
ต้องระวังว่าเมื่อสมมติแล้ว อย่าให้ตัวตั้งหรือตัวคูณเป็นศูนย์ใด

แบบฝึกหัดที่ 66

จงคูณเข้าด้วยกันและตรวจสอบผลคูณด้วย

1. $x^2 + 3x - 1, x - 4$
2. $3x^2 - x + 4, 2x - 1$
3. $x^2 + 2xy + y^2, x - y$
4. $a^2 + ab + b^2, a - b$
5. $x^2 + x + 1, x^2 - x + 1$
6. $1 - 8e^2 + 25e^3, 1 + 2e - 3e^2$
7. $2y^2 - y + 3, 2y^2 + y - 1$
8. $3a^2 - a - 2, a^2 + 2a + 3$
9. $3p + 2p^2 - 1, -3p + 2p^2 - 1$
10. $e^2 + d^2 + 2ed, e^2 + d^2 - 2ed$
11. $y^4 - y^2z^2 + z^4, y^2 + z^2$
12. $q^2 + 1 - 4q, q^2 + 1 - 4q$
13. $x - 2y + 3z, x + 2y - 3z$
14. $3mn - 5m^2 + 4n^2, 2m^2 + 4n^2 - 3mn$
15. $a + b + c, a - b + c$
16. $z - 3 + 2z^2, z^3 - 6z + 5$
17. $p - q - r + s, p - q + r - s$
18. $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx, x + y + z$
19. $e^2 - d^2 + 3e^2 - 3e^2d, e^2 + 3ed^2 + 3e^2d + d^3$
20. $2xyz^2 - z^3 + 2x^3y^3 - 3x^2y^2z, x^2y^2 - x^2yz - xz^2$

$$21. \quad x^3 + xy^3 - 2x^2y + 3xy^2, x^3 - 3xy^2 + 2x^2y - y^3$$

จงลดทอนการคูณต่อไปนี้

$$22. \quad 21 - (2y + 3)(2y - 3) = 2y(5 - 2y)$$

$$23. \quad 6x^2 - (2x - 1)^2 = (2x + 7)(x + 8)$$

$$24. \quad (3x^2 + 2x - 1)^2 - (3x^2 + 2x + 1)^2 + 16 = 8x$$

25. สี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งยาว $7h + 2m$ กว้าง $7h - 2m$ นว ถ้าด้านหนึ่งยาว $3n$ นว พื้นที่ระเพิ่มขึ้นเท่าไร ถ้าด้านหนึ่งสั้นลง $2n$ นว พื้นที่ลดลงเท่าไร

26. วิตุตกลงมาจากที่สูงด้วยอัตราเร็ววินาทีละ $xy + x + y$ ฟุต จงหาว่าวิตุนั้นอยู่สูงเท่าไร ถ้าตกลงมาถึงพื้นใน $xy + x - y$ วินาที

115. วิธีคูณโดยใช้แต่ตัวคูณควม

ถ้าตัวตั้งและตัวคูณมีอักษรเหมือนกัน เราอาจคูณได้เร็วขึ้นโดยใช้แต่ตัวคูณควมของเทอมมีค่าๆ คูณกันเท่านั้นแล้วจึงใส่ตัวอักษรและกำลังลงในตอนท้าย ข้อสำคัญจะต้องเรียงกำลังของตัวตั้งและตัวคูณให้เหมือนกันเสียก่อน

ตัวอย่างที่ 1. จงคูณ $3a^2 + 4a^2 - 2$ ด้วย $2a^2 - 4a + 5$

$$3 + 4 + 0 - 2$$

$$2 - 4 + 5$$

$$6 + 8 + 0 - 4$$

$$-12 - 16 - 0 + 8$$

$$15 + 20 + 0 - 10$$

$$6 - 4 - 1 + 16 + 8 - 10$$

ในทศนิยมไม่มีเทอม 0 เราจึงใส่ 0 แทนตัวคูณควมของเทอม

ในผลคูณ เทอมที่มีกำลังสูงสุดคือ $6x^5$ เทอมอื่น ๆ ที่มีกำลังเรียงหล่นลงมา

เป็นลำดับ

$$\therefore \text{ผลคูณคือ } 6x^5 - 4x^4 - x^3 + 16x^2 + 8x - 10$$

ตัวอย่างที่ 2 หารคูณ $2x^4 + 4x^3y - 3xy^3 + 4y^4$ ด้วย $x^2 - 2y^2$

ในทศนิยม และตัวคูณมีหลายตัว และจะใช้วิธีคูณโดยใช้น้ำหนักตัวคูณคูณไป

เช่นเกี่ยวกับตัวอย่างที่ 1

$$2+1+0-3+1$$

$$1+0-2$$

$$2+1+0-3+1$$

$$-1-3-0+6-8$$

$$2+1-1-11+1+6-8$$

ตัวคูณและตัวคูณมี x เรียงกำลังลงและ y เรียงกำลังขึ้น แต่เทอม x^2y^2

ในทศนิยมและเทอม xy ในตัวคูณหายไปจึงได้ 0 แทนตัวคูณควมของเทอมทั้งสอง

จากตัวคูณควมของเทอมต่าง ๆ ในผลคูณที่ได้แล้วเราก็นำไปคูณ x^2 และ y

เรียงลำดับตามกำลังได้

$$\therefore \text{ผลคูณคือ } 2x^7 + 4x^6y - 4x^4y^2 - 11x^3y^3 + 4x^2y^4 + 6xy^5 - 8y^6$$

ตัวอย่างที่ 3 หารผลคูณของ $(2-y+3y^2-y^4)(1-2y^2+y^3+2y^4)$ ที่

การเพียงแต่เทอม x^2

$$2-1+0+3$$

$$1+0-2+1$$

$$2-1+0+3$$

$$-1+2$$

$$2$$

$$2-1-4+7$$

ในทันใดที่เราคิดเพียงแค่ว่า x^2 ที่สูงไปกว่านั้นไม่ต้องคิดถึง

$$\therefore \text{ผลคูณคือ } 2-y-4y^2+7y^3$$

แบบฝึกหัดที่ 67

จงหาผลคูณต่อไปนี้ด้วยวิธีคูณโดยใช้แค่ตัวคูณควม

1. $(2x^2-3x^2+2x)(2x^2+3x+2)$
2. $(y^3-7y+5)(y^2-2y+3)$
3. $(2p^4+4p^2+1)(2p^2-4p^2-1)$
4. $(5n^2-n^2+3)(n^2-4)$
5. $(1+3q+3q^2+q^3)(1-2q+q^2)$
6. $(-a^3+a^4b-a^2b^2)(-a-b)$
7. $(3a^2-ab+b^2)(a^2+2ab-b^2)$
8. $(z-3+2z^2)(2-z^2-5z)$
9. $(c^3+2c^2d+2cd^2)(c^2-2cd+2d^2)$
10. $(k^5+k^4+k^2+2k+1)(k^3+k-2)$
11. $(x^4+1-4x^3-4x+6x^2)(1+x^2-2x)$
12. $(r^4+2r^3s+3r^2s^2+4rs^3+5s^4)(r^2-2rs+s^2)$
13. $(1-y+2y^2+y^3)(1+y-2y^2+y^4)$ $\checkmark$ ต้องการเพียงแค่เทอม y^2
14. $(2+y^2+y^3-y^4)(3-2y-y^3+y^4)$ $\checkmark$ ต้องการเพียงแค่เทอม y^4
15. $(x-3x^2+x^3)(x+2x^3-x^5)$ $\checkmark$ ต้องการเพียงแค่เทอม x^6
16. $(2-a+3a^2-2a^4)(1-2a+a^3)(1+3a+a^2)$ $\checkmark$ ต้องการเพียงแค่เทอม a^3
17. $(15a^2b-8a^2b^2+4ab^3)(5a^2b^2+ab^3-3b^4-3b)$ $\checkmark$ ต้องการเพียงแค่เทอม a^2b^5

18. จงหาผลทอมรวมของ

$$(1) (1-3a+4a^2+a^3)^2 \quad (2) (2+x+x^2+x^3+x^4)^2$$

116. วิจัยหา ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างวิจัยหาว่าทักเรียนได้เคยเรียน
มาแล้ว

ตัวอย่างที่ 1 จงหา a^4+4b^4 ทั่ว $a^2+2ab+2b^2$

$$(a^2+2ab+2b^2)(a^4+4b^4) \quad (a^2-2ab+2b^2)$$

$$\frac{a^4+2a^3b+2a^2b^2}{-2a^3b-2a^2b^2}$$

$$-2a^3b-2a^2b^2$$

$$\frac{-2a^3b-4a^2b^2-4ab^3}{2a^2b^2+4ab^3+4b^4}$$

$$2a^2b^2+4ab^3+4b^4$$

$$\frac{2a^2b^2+4ab^3+4b^4}{a^2-2ab+2b^2}$$

$$\therefore \text{ผลพิพจน์} \quad a^2-2ab+2b^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $7x^3-20-2x^4-5x^2+8x^5-3x$ ทั่ว $2x^2+3-x$

ก่อนอื่นเรียงกำลังลำดับของ x ในตัวตั้งและตัวหารจากมากไปหาน้อย

$$(2x^2-x+5) \quad 8x^5-2x^4+7x^3-5x^2-3x-20 \quad (4x^3+x^2-6x-9)$$

$$\frac{8x^5-4x^4+20x^3}{2x^4-18x^3-5x^2}$$

$$2x^4-18x^3-5x^2$$

$$\frac{2x^4-x^2+5x^2}{-12x^3-10x^2-3x}$$

$$-12x^3-10x^2-3x$$

$$\frac{-12x^3+6x^2-80x}{-16x^2+27x-20}$$

$$-16x^2+27x-20$$

$$\frac{-16x^2+8x-40}{19x+20}$$

$$19x+20$$

เมื่อหารถึงเศษนั้นแล้วจะหารต่อไปอีกได้แต่จะได้ผลพลอยเป็นเศษส่วน จึงคง
 ยุติการหารไว้เพียงนี้ และได้ผลพล $4x^3 + x^2 - 6x - 8$ กับเศษ $19x + 20$

การหารวิธีนี้ จะต้องยุติการหารไว้เพียงเท่านี้ให้สังเกตดูว่าถึงของตัวอักษรใน
 ตัวตั้งและตัวหาร ถ้ากำลังสูงสุดของตัวตั้งน้อยกว่าของตัวหารก็เป็นอันยุติการหาร
 ไว้เพียงนั้น

117. วิธีหารโดยใช้น้ำแต่ตัวคูณควบ

ท่านจะเกี่ยวกับการคูณโดยใช้น้ำแต่ตัวคูณควบ การหารก็ย่อมกระทำได้โดยใช้น้ำ
 แต่ตัวคูณควบของเทอมข้าง ๆ หารกันเท่านั้น

ตัวอย่าง หาร $2x^3 + 6x^2 + 9x^2 - 17x + 7$ ด้วย $2x^3 + 4x - 3$

ในเทอมตัวตั้งไม่มีเทอม x^3 และตัวหารไม่มีเทอม x^2 เราจึงใส่ 0 แทนตัวคูณ
 ควบของเทอมทั้งสอง

$$2+0+1-3) 2+6+0+9-17+6(1+3-2$$

$$\underline{2+0+1-3}$$

$$6-1+12-17$$

$$\underline{6+0+12-2}$$

$$-4+0-8+6$$

$$\underline{-4+0-8+6}$$

ในผลหารเติม x ที่กำลังสูงสุดคือ x^2

$$\therefore \text{ผลพล คือ } x^2 + 3x - 2$$

แบบฝึกหัดที่ 68

หารผลหารต่อไปนี้ หารโดยใช้น้ำแต่ตัวคูณควบข้างก็ได้

1. $x^2 - x^2 - 9x + 12$ ทวรวทววย $x^2 + 3x + 3$
2. $6y^3 - y^2 - 14y + 3$ ทวรวทววย $3y^3 + 4y - 1$
3. $21p^3 - 5p^2 - 3p + 2$ ทวรวทววย $7p^2 + 3p + 1$
4. $5c^3 - 7c^2d + 17cd^2 - 6d^3$ ทวรวทววย $c^2 - cd + 3d^2$
5. $12b^3 - 19b^2 - 2b + 8$ ทวรวทววย $4b^2 - b - 2$
6. $6m^3 - 13m^4 + 4m^3 + 3m^2$ ทวรวทววย $3m^3 - 2m^2 - m$
7. $10x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 13x - 6$ ทวรวทววย $2x^3 + 3x + 2$
8. $6z^4 + z^3 - 16z^2 + 8$ ทวรวทววย $3z^3 + 2z - 4$
9. $6a^4 + 15a^3 - 17a^2 - 20a + 12$ ทวรวทววย $2a^2 + 5a - 3$
10. $10m^3 - 19m^2n + 9mn^2 - n^3$ ทวรวทววย $5m^2 - 7mn + n^2$
11. $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 7x + 1$ ทวรวทววย $x^2 - x + 3$
12. $a^5 - 5a^4 + 9a^3 - 6a^2 - a + 2$ ทวรวทววย $a^2 - 3a + 2$
13. $3b^5 + 3b^4 + 2b^3 + 1$ ทวรวทววย $3b^3 - b + 1$
14. $30x^4 + 11x^3 - 8x^2 - 5x + 3$ ทวรวทววย $2x - 4 + 3x^2$
15. $6q^5 - 15q^4 + 7q^3 + 2 - 7q + 4q^2$ ทวรวทววย $1 + 3q^3 - q$
16. $4r^5 + 19r^3s^2 + 2r^2s^3 - 5rs^4 + 10s^5$ ทวรวทววย $r^2 + 5s^2$
17. $15 + 2k^4 - 31k + 9k^2 + 4k^3 + k^5$ ทวรวทววย $3 - 2k - k^2$
18. $30d + d^4 - 9 - 25d^2$ ทวรวทววย $3 - 5d + d^2$
19. $19x^2 + x^5 - 4x^3 - 2x^4$ ทวรวทววย $x^3 + 5 - 7x$
20. $192 - y^4 + 128y + 4y^2 - 8y^3$ ทวรวทววย $16 - y^2$
21. $18a^7 + 21a^4 - 24a^3 + 21a^2 + 6a - 7$ ทวรวทววย $3a^4 + 3a^2 - 1$

22. $14p^4 + 45p^3q + 78p^2q^2 + 45pq^3 + 24q^4$ ทวรวทว $2p^2 + 5pq + 7p^2$
23. $a^2 - a^2b + a^2b^2 - a^2 + a^2 - b^2$ ทวรวทว $a^2 - a - b^2$
24. $x^2 + x^2y - x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 + y^2$ ทวรวทว $x^2 + xy - y^2$
25. $b^2 - 2b^2 - 4b^2 + 19b^2$ ทวรวทว $b^2 - 7b + 5$
26. $3k^2 - 5k^2 + 2$ ทวรวทว $k^2 - 2k + 1$
27. $27a^6 + b^6$ ทวรวทว $b^2 + 3a^2$
28. $b^4 + 64$ ทวรวทว $b^4 - 4b^2 + 8$
29. $81m^4 - 1$ ทวรวทว $3m - 1$
30. $30n + 9 + 28n^4 - 35n^2 - 71n^4$ ทวรวทว $4n^2 - 13n + 6$
31. $c^{12} - d^{12}$ ทวรวทว $c^2 - d^2$
32. $6y^4 - 29y + 4y^2 - 7y^3 - 36 + 8y^2$ ทวรวทว $y^3 + 3y - 2y^2 - 4$
33. $8x^2 + 8xy + 4y^2 + 10xz + 8yz + 3z^2$ ทวรวทว $3x + 2y + z$
34. $8y^4 + y$ ทวรวทว $4y^2 - 2y + 1$
35. $25z^6 - 44z^4 - 9 + 4z^2$ ทวรวทว $5z^3 - 4z - 2z^2 - 3$

118. ทวรวทว ๑ ทวรว $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ทวรว $x + y + z$

$$(x + y + z)(x^2 - 3xyz + y^2 + z^2)(x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2)$$

$$\underline{x^3 + x^2y + x^2z}$$

$$-x^2y - x^2z - 3xyz$$

$$\underline{-x^2y - xy^2 - xyz}$$

$$\underline{-x^2z + xy^2 - 2xyz}$$

$$\underline{-x^2z - xyz - xz^2}$$

$$xy^2 - xyz + xz^2 + y^3$$

$$\frac{xy^2}{-xyz + xz^2 - y^3z} + y^3 + y^2z$$

$$-xyz + xz^2 - y^3z$$

$$\frac{-xyz}{xz^2 + yz^2 + z^3} - y^2z - yz^2$$

$$xz^2 + yz^2 + z^3$$

$$\frac{xz^2 + yz^2 + z^3}{xz^2 + yz^2 + z^3}$$

ในทศเรียงกำลังของ x จากมากไปหาน้อย และจัดลักษณะเรียงกันตามลำดับ
เช่นในเศษที่เหลือจากการหารครั้งแรก จะเห็นว่า x^2y มาหน้า x^2z และ x^2z
มาหน้า $8xyz$ ดังนั้นเป็นดังนี้

แบบฝึกหัดที่ 69

จงหาร

1. $x^3 - y^3$ ทั่ว $x^2 + xy + y^2$

2. $a^3 - b^3$ ทั่ว $a^2 + a^2b + ab^2 + b^3$

3. $m^{12} + 2m^6n^6 + n^{12}$

ทั่ว $m^4 + 3m^2n^2 + n^4$

4. $1 - b^3 + 3b^4 + b^5$

ทั่ว $1 - b + b^2$

5. $1 - a^2 - 8x^3 - 6ax$

ทั่ว $1 - a - 2x$

6. $p^3 + 3pq + q^3 - 1$

ทั่ว $p + q - 1$

7. $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$

ทั่ว $x - y - z$

8. $c^{10} + d^{10}$

ทั่ว $c^3 - c^6d^2 + c^4d^4 - c^2d^6 + d^3$

9. $x^3 + y^3 + 8z^3 - 6xyz$

ทั่ว $x + y + 2z$

10. $a^4 + 8c^4 - 27b^3 - 18abc$

ทั่ว $a - 3b + 2c$

11. $r^3s^3 - 30r^4s^4 + 125 + 8r^3s^3$

ทั่ว $5 + 2rs + r^2s^2$

12. $27m^3 + 8 + 18mn - n^3$ ทีวี $m-2-3n$
 13. $h^6 - g^6 + 14g^3h^3$ ทีวี $-g^2 + h^2 + 2gh$
 14. $8a^3 - b^2 + c^3 + 6abc$ ทีวี $b-c-2a$
 15. $(2x^2 - 19xy + 35y^2)(2x^2 - 13xy + 15y^2)$ ทีวี $4x^2 - 16xy + 15y^2$

119. ผลหารที่แสดงไว้ให้ต่อไปนี้ นับว่าสำคัญมาก ควรสังเกตพิจารณา
 ให้ดี

$$I \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y \\ \frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+xy+y^2 \\ \frac{x^4-y^4}{x-y} = x^3+x^2y+xy^2+y^3 \end{cases}$$

จากนั้นเห็นว่าเครื่องหมายที่เติมทั้งสองใน ตัวตั้งและตัวหาร เป็นลบเหมือนกัน และเครื่องหมายของเทอมต่าง ๆ ในผลหารเป็นบวกหมด

$$II \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2-xy+y^2 \\ \frac{x^5+y^5}{x+y} = x^4-xy^2+x^2y^2-xy^4+y^4 \end{cases}$$

จากนั้นเห็นว่าเครื่องหมายที่เติมทั้งสองใน ตัวตั้งและตัวหารเป็น บวกเหมือนกัน และเครื่องหมายของเทอมต่าง ๆ ในผลหารเป็นบวกและลบสลับกัน

$$III \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y \\ \frac{x^4-y^4}{x+y} = x^3-x^2y+xy^2-y^3 \\ \frac{x^6-y^6}{x+y} = x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5 \end{cases}$$

จากนั้นเห็นว่าเครื่องหมายที่เติมทั้งสองใน ตัวตั้งเป็นลบ แต่ในตัวหารเป็นบวก และเครื่องหมายของเทอมต่าง ๆ ในผลหารเป็นบวกและลบสลับกัน

ข้อสังเกต $x^2+y^2, x^4+y^4, x^6+y^6, \dots$

ซึ่งเทอมทั้งสองมีกำลังเป็นคี่และคั่นด้วยเครื่องหมายบวก จะหารด้วย $x+y$

ไม่ลงตัว

และ $x^2-y^2, x^3-y^3, x^4-y^4, \dots$

ซึ่งเทอมทั้งสองมีกำลังเป็นคี่ และคั่นด้วยเครื่องหมายลบ จะหารด้วย $x+y$

ไม่ลงตัว

สรุปแล้วได้ดังนี้

1. $x+y$ หาร x^n+y^n ลงตัว เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และได้ผลหารบวก และลบสลับกัน
2. $x+y$ หาร x^n+y^n ไม่ลงตัว เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
3. $x+y$ หาร x^n-y^n ลงตัว เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และได้ผลหารบวก และลบสลับกัน
4. $x+y$ หาร x^n-y^n ไม่ลงตัว เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
5. $x-y$ หาร x^n-y^n ลงตัวเสมอ ไม่ว่า n เป็นจำนวนคี่หรือจำนวนคู่ และได้ผลหารเป็นบวกโดยตลอด
6. $x-y$ หาร x^n-y^n ไม่ลงตัว ไม่ว่า n เป็นจำนวนคี่หรือจำนวนคู่

แบบฝึกหัดที่ 70

จงหาผลหารต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1. $\frac{a^2-b^2}{a+b}$ | 2. $\frac{x^3+y^3}{x+y}$ | 3. $\frac{p^3-27}{p-3}$ |
| 4. $\frac{c^4-d^4}{c-d}$ | 5. $\frac{m^4-n^4}{m+n}$ | 6. $\frac{64+r^3}{4+r}$ |
| 7. $\frac{16-k^4}{2+k}$ | 8. $\frac{b^3+1}{b+1}$ | 9. $\frac{p^3-q^3}{p-q}$ |
| 10. $\frac{x^6-y^6}{x-y}$ | 11. $\frac{y^6-z^6}{y+z}$ | 12. $\frac{243+d^3}{3+d}$ |
| 13. $\frac{g^4-h^4}{g^2-h^2}$ | 14. $\frac{a^6-1}{a-1}$ | 15. $\frac{8x^6+1}{2x^2+1}$ |

จงหาผลคูณต่อไปนี้โดยไม่ต้องนำตัว

16. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

17. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

18. $(1-y)(1+y+y^2+y^3)$

19. $(c+1)(c^3-c^2+c-1)$

20. $(3p+2q)(9p^2-6pq+4q^2)$

21. $(m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$

22. $(r+1)(r^4-r^3+r^2-r+1)$

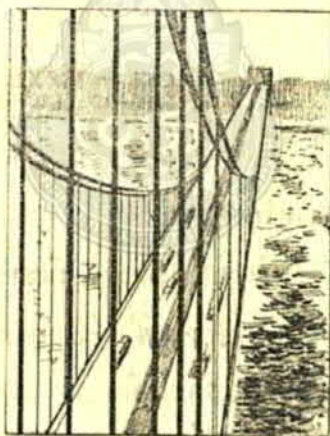
23. $(a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$

24. $(x+2)(x^5-2x^4+4x^3-9x^2+16x-32)$

25. $(z^2+6)(z^4-6z^2+36)$

26. $(y^3-z^2)(y^9+y^6z^2+y^3z^4+z^6)$

27. $(p^2+q^3)(p^{12}-p^{10}q^3+p^8q^6-p^6q^9+p^4q^{12}-p^2q^{15}+q^{18})$



สะพานแขวนชิงกัน
ในนครนิวออค สหรัฐอเมริกา

บทที่ ๔

ทฤษฎีบทเรื่องเศษ

พืชคณิตเป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้เข้าใจเรื่องปริมาณต่างๆ โลกเรามีส่วนเกี่ยวข้องกับปริมาณอยู่ทั่วไปทุกหนทุกแห่ง เมื่อจะพูดให้เข้าใจกันได้ก็ต้องพูดเป็นปริมาณ เช่น เมื่อพูดว่าประเทศหนึ่งใหญ่ ก็จะต้องพูดให้ว่า ใหญ่แค่ไหน หรือจะพูดว่าแร่ธาตุมีน้อย ก็จะต้องพูดให้ชัดว่า น้อยเพียงไร นั่นคือเราจะหลีกเลี่ยงปริมาณไปไม่พ้น แม้เวลาอ่านคำประพันธ์หรือฟังดนตรี ก็ยังพบเห็นและใช้ตัวเลขและปริมาณอยู่เสมอในจังหวะที่นับและในหน้าหนังสืออยู่นั่นเอง

— เอ. เอ็ม. ไวทูลเสด

120. นักเรียนได้เรียนมาแล้วว่า จำนวนพืชคณิตที่มี x ปันอยู่ด้วย เรียกว่า พงกชนของ x และใช้เขียนว่า $f(x)$ หรือ $F(x)$ ก็ได้ เช่น

$$f(x) = x^2 - 5x + 3$$

ถ้า $x = 2, -1, 101$ เราก็แทนค่าเหล่านั้นในฟังก์ชัน และเขียนได้ว่า

$$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 3 = -3$$

$$f(-1) = 1 + 5 + 3 = 9$$

$$f(a) = a^2 - 5a + 3$$

121. ถ้าไปนชอให้การหารคงน

$$x-a) \quad px^3+qx^2+rx+s \quad (px^2+(p+q)x+pa^2+qa+r$$

$$px^2-px^2$$

$$(p+q)x^2+rx$$

$$(p+q)x^2-(p^2+qa)x$$

$$(p^2+qa+r)x+s$$

$$(p^2+qa+r)x-(p^2+qa+ra)$$

$$p^2+qa+ra+s$$

ในที่นี้ ทั้งตัวตั้งและตัวหารเป็นพหุคูณของ x และเรียงกำลังจากมากไปหาน้อยเหมือนกัน เมื่อหารไปจนเหลือเศษไม่มี x ติดอยู่ด้วยแล้ว จะเห็นได้ว่าเศษนั้นก็คือตัวตั้งนั่นเองเมื่อแทนค่า x ด้วย a

จากนั้นก็ย่อดังนี้ได้ว่า เมื่อเอา $x-a$ หาร $f(x)$ นั้นเศษไม่มี x ติดอยู่ด้วยแล้ว เศษนี้จะเท่ากับ $f(a)$

ถ้าเศษนี้เท่ากับ 0 ก็หมายความว่า ตัวหาร $x-a$ หารลงตัวพอดี นั่นก็หมายความว่า $f(a) = 0$, $x-a$ ก็เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $f(x)$ ทำนองเดียวกัน ถ้า $f(-a) = 0$ $x+a$ ก็เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $f(x)$

ขอให้ตัวตัวอย่างเพิ่มเติมต่อไป

$$x-3) 2x^2-5x+7 (2x+1$$

$$\underline{2x^2-6x}$$

$$x+7.$$

$$\underline{x-3}$$

$$10$$

ดังนั้น เห็นได้ว่า $x-3$ หาร $2x^2-5x+7$ เหลือเศษ 10 เศษนี้ก็จะเท่ากับ

เอา 3 (หรือเขาเทอมที่มี x ในตัวหาร มาเปลี่ยนเครื่องหมาย) ไปแทนค่า x ในตัวตั้งนั่นเอง

$$\text{นั่นคือ } f(3) = 2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 7 = 10 = \text{เศษ}$$

ถ้าตัวหารหารตัวตั้งลงตัว เศษจะเป็นศูนย์

$$\text{เช่น } x-2 \quad \text{หาร } 4x^3 - 8x^2 + 5x - 15 \quad \text{จะได้}$$

$$f(2) = 4 \times 2^3 - 8 \times 2^2 + 5 \times 2 - 15 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1 ใจหาเศษเมื่อ $2x^4 + x^3 - x - 50$ หารด้วย

$$(I) \quad x-2 \qquad (II) \quad x+3$$

$$(I) \quad f(x) = 2x^4 + x^3 + x - 50$$

$$\therefore f(2) = 2 \times 2^4 + 2^3 - 2 - 50 = -12$$

นั่นคือเศษเท่ากับ 12

$$(II) \quad f(-3) = 2 \times (-3)^4 + (-3)^3 - (-3) - 50 = 88$$

นั่นคือเศษเท่ากับ 88

ตัวอย่างที่ 2 c จะต้องมีค่าเป็นเท่าไร $x+2$ ใจหาร $x^2+cx+16$ ลงตัว

$$f(x) = x^2 + cx + 16$$

$$\therefore f(-2) = (-2)^2 + c(-2) + 16 = 20 - 2c$$

แต่โจทย์บอกว่าตัวหารหารตัวตั้งลงตัว ดังนั้นเศษต้องเป็นศูนย์

$$\therefore 20 - 2c = 0$$

$$\text{นั่นคือ } c = 10$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้อ่านว่า x^2+2x-3 ทหาร $x^2-7x^2+12x+18$ ลงตัว

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

$$f(x) = x^2-7x^2-12x+18$$

$$\therefore f(1) = 1-7-12+18 = 0$$

$$\therefore f(-3) = -243+189+36+18 = 0$$

ดังนั้น $x-1$ และ $x+3$ ต่างก็หาร $f(x)$ ลงตัว

นั่นคือ x^2+2x-3 ทหาร $x^2-7x^2-12x+18$ ลงตัว

แบบฝึกหัดที่ 7.1

1. ถ้า $f(x) = 2x^2-3x+4$ ให้อ่านค่าของ $f(1), f(-1), f(4)$

2. ให้อ่านค่าของ $f(3), f(2), f(-2)$ เมื่อ $f(x) = x^3-3x^2-4x+12$

ทำเนียบเข้าใจความหมายของผลลัพธ์น้อยอย่างไรบ้าง

3. ถ้า $f(n) = n^2+n$ ให้อ่านค่าของ $f(n+1)-f(n)$

จงหาเศษต่อไป้

4. x^4-3x^2-2x-5 ทหารด้วย $x-2$

5. $5x^3+3x^2+x^2+2x+1$ ทหารด้วย $x+1$

6. $x^3-7x^2+25x-9$ ทหารด้วย $x-7$

7. $x^3+12x^2+19x+11$ ทหารด้วย $x+5$

8. $x^3+7x^2a+8xa^2+15a^3$ ทหารด้วย $x+2a$

9. $x^4-2x^3+x-132$ ทหารด้วย $x+3$

10. $7x^4+3x^2-15$ ทหารักว้ย x^2-4

11. $8x^3-4x^2+2x^2-17$ ทหารักว้ย $2x^2+5$

12. $9x^{12}+3x^3-6x^4-21$ ทหารักว้ย $3x^4-1$

โดยไม่ต้องใช้วิธีหาร จึงแสดงให้เห็นว่า

13. $x-3$ ทหารักว้ย x^3-2x^2-9 ลงตัว

14. $x-2$ ทหารักว้ย x^3-6x+4 ลงตัว

15. $x-y$ ทหารักว้ย $x^3+xy^2-2y^3$ ลงตัว

16. $x+2b$ ทหารักว้ย $x^3+7bx^2+11b^2x+2b^3$ ลงตัว

17. $x-y$ ทหารักว้ย x^3-y^3 ลงตัว

18. $x+1$ ทหารักว้ย $x^{17}-15x-14$ ลงตัว

19. x^2-4 ทหารักว้ย $3x^4+5x^3-13x^2-20x+4$ ลงตัว

20. x^2-x-6 ทหารักว้ย $x^4+4x^3-5x^2-36x-36$ ลงตัว

21. จงหาค่าของ b ถ้า $x+3$ ทหารักว้ย $x^2+bx+15$ ลงตัว

22. จงหาค่าของ a ถ้า $x-2$ ทหารักว้ย $x^2+ax-10$ ลงตัว

23. จงหาค่าของ c ถ้า $x+5$ ทหารักว้ย x^2-7x+c ลงตัว

24. d จะต้องมีค่าเท่าไร x^2-4 จึงจะหาร $4x^6-7x^4-5x^2-31d$ ลงตัว

121. วิธีหาเศษคงกล่าวมาแล้วย่อมนำไปใช้เป็นประโยชน์ในการ แยกตัว

ประกอบได้ โดยจะเพาะจำนวนพิชคณิตที่จะแยกตัวประกอบโดยวิธีอื่นได้ยาก

ตัวอย่างที่ 1 โดยไม่ต้องใช้วิธีหาร จึงแสดงให้เห็นว่า $x+4$ เป็นตัวประกอบ

ตัวหนึ่งของ $x^3+x^2-10x+8$ และจงหาตัวประกอบอื่น ๆ ด้วย

$$f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

$$f(-4) = (-4)^3 + (-4)^2 - (10)(-4) + 8 = -64 + 16 + 40 + 8 = 0$$

เมื่อเศษเป็นศูนย์ก็ $x+4$ ก็เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^3 + x^2 - 10x + 8$

เมื่อเอา $x+4$ ไปหารตัวตั้ง เห็นได้ว่าเทอมท้ายของผลหารเท่ากับ 2 ซึ่ง

แยกเป็นตัวประกอบได้ 1×2 หรือ -1×-2

ดังนั้นตัวประกอบที่เหลืออาจเป็น $x+1, x+2$ หรือ $x-1, x-2$ ก็ได้ จึง

ต้องทดลองดู

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (10)(-1) + 8 = -1 + 1 + 10 + 8 = 18$$

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (10)(-2) + 8 = -8 + 4 + 20 + 8 = 24$$

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - (10)(1) + 8 = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - (10)(2) + 8 = 8 + 4 - 20 + 8 = 0$$

$\therefore$ ตัวประกอบที่เหลือคือ $x-1$ และ $x-2$

$$\text{และ } x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x+4)(x-1)(x-2)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 2x + 2$

เทอมท้ายของตัวตั้งแยกเป็นตัวประกอบได้ 1×3 หรือ -1×-3

ดังนั้นตัวประกอบอาจเป็น $x+1, x+3, x-1$ หรือ $x-3$ ก็ได้ ต้องทดลองดู

$$f(x) = x^3 + 2x + 2$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 2 = -1 - 2 + 2 = -1$$

$$\therefore x+1 \text{ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่ง}$$

ส่วน $f(-3), f(1), f(3)$ ไม่เท่ากับ 0

$$\therefore x+1 \text{ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่ง}$$

เมื่อเอา $x+1$ ไปหารตัวตั้ง ก็ได้ตัวประกอบที่เหลือคือ x^2-x+3

$$x^2+2x+3 = (x+1)(x^2-x+3)$$

ตัวอย่างที่ 3 p และ q จะต้องมีค่าเป็นเท่าไร

$(x-2)(x+3)$ หาร $x^3+2px^2-10x+q$ ลงตัว

$$f(x) = x^3+2px^2-10x+q$$

$$f(2) = 8+8p-20+q = 8p+q-12$$

$$f(-3) = -27+18p+30+q = 18p+q+3$$

ถ้า $(x-2)$ และ $(x+3)$ หารตัวตั้งลงตัว $f(2)$ และ $f(-3)$ ก็ต้องเท่า

กับ 0

$$8p+q-12 = 0 \text{-----(1)}$$

$$18p+q+3 = 0 \text{-----(2)}$$

$$(2)-(1), 10p+15 = 0$$

$$p = -\frac{3}{2}$$

$$\text{และ } q = 24$$

แบบฝึกหัดที่ 72

จงแสดงให้เห็นว่า

1. $x+1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $2x^3-7x^2+x+10$ และหาตัวประกอบที่เหลือ

2. $x+7$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^3-39x+70$ และหาตัวประกอบที่เหลือ

3. $x+3$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^2+29x+6$ และหาตัวประกอบที่เหลือ
4. $x-a$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^2-4ax^2+4a^2x-a^3$ และหาตัวประกอบที่เหลือ
5. $x+2y$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ x^2+8xy^2 และหาตัวประกอบที่เหลือ
6. x^2+2x-3 หาว $x^3-7x^2-12x+18$ ลงตัว และหาตัวประกอบที่เหลือ
7. a จะต้องมามีค่าเป็นเท่าไร $x+5$ จึงจะหาร $x^2-2ax+15$ ลงตัว
8. ถ้า $x-5$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^2-14x+c$ จงหาค่าของ c และตัวประกอบที่เหลือ
9. ถ้า $x+4$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ x^2-x+c จงหาค่าของ c และตัวประกอบที่เหลือ
10. ถ้า $x-4$ หาว $x^2+bx-28$ ลงตัว จงหาค่าของ b และตัวประกอบที่เหลือ
11. a และ b จะต้องมามีค่าเป็นเท่าไร $(x-3)(x-2)$ จึงจะหาร $2x^3+ax^2-13x+b$ ลงตัว
12. จงหาค่าของ m และ n ถ้า $x^2+2x-15$ หาว $mx^3+nx^2-58x-15$ ลงตัว
13. จงใช้ทฤษฎีบทเรอซองเศษ แสดงให้เห็นว่าตัวประกอบของ $x^3-8x^2-21x+108$ คือ $x-3, x+4, x-9$
14. ถ้าเอา $x+2$ หาว x^3+x^2+9 และ x^3+2x^2+8x+d แล้ว เหลือเศษเท่ากัน จงหาค่าของ d
15. จะต้องเอาอะไรมาบวกเข้ากับ x^3+2x^2 จึงจะหารด้วย $x+4$ ลงตัว

จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

16. $x^3 - 7x + 6$

17. $x^4 - 2x^3 - 6x - 9$

18. $x^3 - 37x - 84$

19. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

20. $2x^3 - 5x^2 - x - 6$

21. $x^3 - 1024y^3$

22. $x^3 - 7a^2x - 6a^3$

23. $x^3 - 4x^2 - x^2 + 16x - 12$

24. $2x^3 + 7x^2y + 4xy^2 + 3y^3$

25. $a^3 - 8a^2b + 17ab^2 - 10b^3$



บทที่ ๕

กำลังและราก

มหาวิทยาลัยใดบ้างที่ประเสริฐกว่า ดีกว่า มีประโยชน์มากกว่า และอธิบายให้เข้าใจแจ่มแจ้งได้ดียิ่งไปกว่าคณิตศาสตร์

—เบนจามิน แฟรงกลิน

123. สมมติว่าเราต้องการหาค่ากำลังสามของ a^2

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

ทำนองเดียวกัน $(a^2)^4 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2+2} = a^{2 \cdot 4} = a^8$

$$(-a^2)^4 = (-a^2)(-a^2)(-a^2)(-a^2) = a^{2+2+2+2} = a^{2 \cdot 4} = a^8$$

$$(a^3)^5 = a^{3 \cdot 5} = a^{15}$$

$$(-a^3)^5 = -a^{3 \cdot 5} = -a^{15}$$

$$(2a^4)^2 = (2)^2(a^4)^2 = 4a^{4 \cdot 2} = 4a^8$$

จากนั้นเห็นได้ว่าเมื่อจะเพิ่ม กำลังของจำนวนใด ๆ เราเอากำลังของตัวอักษร ในจำนวนนั้นคูณกับกำลังที่เพิ่มขึ้น ถ้ามีตัวคูณควบอยู่ด้วยก็เพิ่มกำลังขึ้นตามทิศของการ และคูณแตกออกไป แล้วใส่เครื่องหมายข้างหน้าให้ถูกต้อง

การใส่เครื่องหมาย ควรนึกถึงกฎต่อไปนี้คือ

1. กำลังค่าของจำนวนใด ๆ จะได้ผลลัพธ์เป็นบวกเสมอ
2. กำลังค่าของ จำนวน ใด ๆ จะได้ เครื่องหมายในผลลัพธ์เหมือนกับ จำนวนเดิม

ตัวอย่าง $(-3x^2)^3 = (-3)^3 x^{2 \cdot 3} = -243x^6$

$(-2xy^3)^6 = (-2)^6 x^6 y^{3 \cdot 6} = 64x^6 y^{18}$

$\left(\frac{3a^2b}{2pq^3}\right)^4 = \frac{81a^8b^4}{16p^4q^{12}}$

แบบฝึกหัดที่ 73

จงหาค่ากำลังสองของจำนวนต่อไปนี้

1. $3a^2$ 2. $2ab^3$ 3. a^3c^2

4. $7xy^2$ 5. $11p^2q^3$ 6. $5x^2y^3$

7. $4a^4b^5x^2$ 8. $-2abc^2$ 9. $-3c^3x^4$

10. $6xyz^3$ 11. $-7m^3n^2p^6q^4$ 12. $\frac{2x^2}{3y^3}$

13. $-\frac{2}{3}c^2d^3e$ 14. $-\frac{4}{3y^2z}$ 15. $-\frac{11}{2xy^3}$

16. $-\frac{9}{10c^4d^7}$ 17. $\frac{1}{12b^3d^6}$ 18. $\frac{3a^2b^3}{4c^2x^4}$

19. $-\frac{13c^5x^3b^2}{9}$ 20. $-\frac{1}{8x^4y^3z^2}$

จงหาค่ากำลังสามของจำนวนต่อไปนี้

21. $3x^3$ 22. $2ab^3$ 23. $4x^4$

24. $-3a^3b$ 25. $-6ab^2$ 26. $-b^3c^2x$

27. $-5x^6y$ 28. $-2c^2d^7$ 29. $\frac{1}{4p^3q^2}$

30. $-\frac{3a^5x^2}{5p^3q}$ 31. $-\frac{7x^3y^4}{8}$ 32. $-\frac{9}{11m^2n^7}$

จงหาคำของ

33. $(a^2b^3)^2$ 34. $(3x^2y)^4$ 35. $(x^4y^3)^3$

36. $(-2a^2)^4$ 37. $-(p^2q^3)^2$ 38. $(-5a^2b)^3$
 39. $(a^2b^2c^2)^4$ 40. $(-\frac{2ab}{3xy^2})^5$ 41. $(-\frac{1}{x^2y^2z^3})^4$
 42. $(\frac{m^2n^6p}{a^2b^5c^3})^2$ 43. $\frac{(x^2)^3(y^2)^2}{(2xy)^4}$ 44. $\frac{(4x^2y^2)^3}{(-5x^3y^2)^2}$
 45. $(p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{4}})^x$ 46. $[(-x)^2]^n$
 47. ถ้า $2^5 = 32,768$ จงหาค่าของ 2^6 โดยวิธีใดจึงจะสะดวก
 48. ถ้า $5^4 = 625$ จงหาค่าของ 5^1 และ 2^6 โดยวิธีใดจึงจะสะดวก
 49. ถ้า $3x^2 = 11$ จงหาค่าของ $9x^4$, $27x^6$, $81x^8$, $729x^{12}$
 50. ถ้า $a^2b^4c^3 = 7d^5$ จงหาค่าของ $a^6b^8c^6$

124. นักเรียนที่เคยเรียนมาแล้วว่า

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

นั่นคือ กำลังสองของผลบวกของสองจำนวน เท่ากับผลบวกกำลังสองของสองจำนวนนั้น บวกด้วยสองเท่าของสองจำนวนนั้น

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

นั่นคือ กำลังสองของผลต่างของสองจำนวน เท่ากับผลบวกของกำลังสองของสองจำนวนนั้น ลบด้วยสองเท่าของผลคูณของสองจำนวนนั้น

กฎนี้ย่อมนำไปใช้หาคำกำลังสองของจำนวนพีชคณิตที่มีมากกว่าสองเทอมก็ได้ โดยแบ่งเป็นสองพวกเสียก่อน เช่น

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

๓-๔- ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

125. จากตัวอย่างข้างบนนี้ สังเกตได้ว่ากำลังสองของจำนวนพีชคณิตที่มีหลายเทอมจะเท่ากับ

1. ผลบวกของกำลังสองของทุกเทอมในจำนวนพีชคณิตนั้น

2. บวกกับสองเท่าของผลคูณของแต่ละเทอมกับเทอมที่อยู่ถัดไปเป็นคู่ ๆ และ
ระวังใส่เครื่องหมาย + หรือ - ให้ถูกต้องด้วย

ตัวอย่าง

$$(x-y-2z)^2 = x^2+y^2+4z^2-2xy-2x \cdot 2z+2y \cdot 2z$$

$$= x^2+y^2+4z^2-2xy-4xz+4yz$$

$$(1-2b+3b^2)^2 = 1+4b^2+9b^4-2 \cdot 1 \cdot 2b+2 \cdot 1 \cdot 3b^2-2 \cdot 2b \cdot 3b^2$$

$$= 1+4b^2+9b^4-4b+6b^2-12b^3$$

$$= 1-4b+10b^2-12b^3+9b^4$$

แบบฝึกหัดที่ 74

จงหาค่ากำลังสองของจำนวนพีชคณิตต่อไปนี้

1. $a+3b$

2. $3a-b$

3. $x-4y$

4. $2x+3y$

5. $3x-y$

6. $4p+7q$

7. $5-b$

8. $ab+$

9. $9m-2n$

10. $5cd-e$

11. $pq-r$

12. $x-ay, c$

13. $ax+6by$ 14. r^2-3r 15. $x+y-z$ 16. $x-y-z$

17. $a+2b+c$ 18. $a-b+2c$ 19. $2m-3n+4r$

20. y^2+y-1 21. $x^2-y^2-z^2$ 22. $ab+bc+ca$

23. $3x-2y-4z$ 24. $2n^2-3n-1$ 25. $x-y+a-b$

26. $2x+3y+a-2b$ 27. $m-n-p-q$ 28. $\frac{1}{2}x-2y+\frac{2}{4}$

29. $\frac{a}{3}-3b-\frac{3}{2}$ 30. $\frac{3}{5}x^2-x+\frac{5}{3}$

126. โดยวิธีคูณรวมกัน เราได้

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

จากนั้นเห็นได้ว่ากำลังสองของจำนวนพีชคณิตที่มีสองเทอมจะเท่ากับ

1. เทอมหน้ากำลังสามบวกกับเทอมหลังกำลังสาม

2. บวกด้วยสามเท่าของ ผลคูณของ เทอมหน้ากำลังสองกับ เทอมหลัง และสาม

เท่าของผลคูณของเทอมหน้ากับเทอมหลังกำลังสอง

ตัวอย่าง

$$(2a-b)^3 = (2a)^3+3(2a)^2(-b)+3(2a)(-b)^2+(-b)^3$$

$$= 8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$$

$$+(3x+2y^2)^3 = (3x)^3+3(3x)^2(2y^2)+3(3x)(2y^2)^2+(2y^2)^3$$

$$= 27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$$

แบบฝึกหัดที่ 75

หาคำกำลังสามของจำนวนพีชคณิตต่อไปนี้

1. $z+b$
2. $z-b$
3. $m-2n$
4. $2x+y$
5. $3c-5d$
6. $5x-z$
7. $1-6y$
8. $2xy-3z$
9. $5a-bc$
10. x^2+4y^2
11. $4x^2-5y^2$
12. $3a^2-2b^2$
13. $5z^3-4$
14. $6x^6-5y^3$
15. $m-\frac{2n}{3}$
16. $\frac{b}{3}+2$
17. $\frac{k^2}{4}-4k$
18. $\frac{p}{q}+3q$

127. หาก เมื่อเอาเลขจำนวนหนึ่งคูณตัวของมันเองครบตามและได้ผลลัพธ์เป็นเลขจำนวนใหม่ เลขจำนวนเดิมเรียกว่าเป็นรากของเลขจำนวนใหม่ และจะเป็นรากกำลังเท่าไรสุดแล้วแต่จำนวนที่คูณ เช่น

$$3^2 = 9, \quad \therefore 3 \text{ เป็นรากกำลังที่สองของ } 9$$

$$(x^2)^3 = x^6, \quad \therefore x^2 \text{ เป็นรากกำลังสามของ } x^6$$

$$(-x^2)^3 = -x^6, \quad \therefore -x^2 \text{ เป็นรากกำลังสามของ } -x^6$$

รากกำลังที่สองของจำนวนบวกใดๆ ย่อมมีค่าเป็นสองอย่าง คือค่าบวกหรือค่าลบเหมือนกัน แต่เครื่องหมายต่างกัน

$$\text{เช่น } \sqrt{16} = +4 \text{ หรือ } -4$$

$$\text{ตัวอย่างที่ 1 } \sqrt{4x^2y^4} = +2xy^2 \text{ หรือ } -2xy^2$$

ทั้งสองนิยมเขียนว่า $\pm 2xy^2$ ซึ่งหมายความว่าเครื่องหมายอาจเป็นบวกหรือลบก็ได้

ตัวอย่างที่ ๒ $\sqrt{144a^2b^2} = \pm 12a^1b^1$

รากกฎของเครื่องหมายเห็นได้ว่า

1. รากกำลังคู่ของจำนวนบวกใด ๆ จะได้เครื่องหมายเป็นสองอย่าง
2. จำนวนลบใด ๆ จะหารากกำลังคู่ไม่ได้
3. รากกำลังคี่ของจำนวนใด ๆ จะได้เครื่องหมายเหมือนจำนวนเดิม

ตัวอย่าง $\sqrt[3]{625a^{12}b^3} = \pm 5a^4b^1$

$$\sqrt{-x^{15}} = -x^7$$

$$\sqrt[n]{n^{20}} = n^4$$

$\sqrt{-16}$ ไม่มีความหมายอย่างใด เพราะเขาเครื่องหมายรากออกไม่ได้ และหาค่าไม่ได้

หมายเหตุ ในที่นี้รากกำลังคู่ของจำนวนใด ๆ จะใช้แค่เครื่องหมายบวกเท่านั้น

128. จากตัวอย่างข้างบน เมื่อต้องการหารากของจำนวนพีชคณิตที่มีเทอมเดียว เราเอาเลขที่ของรากไปหารกำลังของอักษรรากตัวในจำนวนพีชคณิต ถ้าจำนวนพีชคณิตนั้นมีตัวคูณควบห้อยด้วย ก็หารากของตัวคูณควบนั้นโดยวิธีเลข และระวังใส่เครื่องหมายให้ถูกต้อง

ตัวอย่าง $\sqrt{-27a^9} = -3a^{\frac{9}{2}} = -3a^4$

$$\sqrt[3]{x^{24}y^3} = x^{\frac{24}{3}}y^{\frac{3}{3}} = x^8y^1$$

$$\sqrt{\frac{81m^2}{49p^4q^2}} = \frac{9m^{\frac{2}{2}}}{7p^{\frac{4}{2}}q^{\frac{2}{2}}} = \frac{9m^1}{7p^2q^1}$$

แบบฝึกหัดที่ 76

จงหารากกำลังที่สองของจำนวนพีชคณิตต่อไปนี้

1. a^2b^4 2. $9a^2b^2$ 3. $25p^4q^6$

4. $16b^4c^2a^6$ 5. $49c^6d^8$ 6. $100r^{16}$

7. $x^{20}y^{16}z^4$ 8. $121x^8y^2z^{12}$ 9. $\frac{1}{169r^{12}}$

10. $\frac{36}{a^{36}}$ 11. $\frac{m^{16}n^4}{16}$ 12. $\frac{289z^4}{25}$

13. $\frac{824x^{12}}{169y^6}$ 14. $\frac{81c^{28}}{36b^{12}}$ 15. $\frac{256m^2n^4}{289x^{16}}$

16. $\frac{400a^{16}b^{20}}{81x^{16}y^{20}}$

จงหารากกำลังสามของจำนวนพีชคณิตต่อไปนี้

17. $8a^6b^9$ 18. $-27x^{12}y^9$ 19. $64a^6b^3c^{12}$

20. $-948x^{18}y^{30}$ 21. $-\frac{c^{12}d^9}{125}$ 22. $\frac{8y^9}{729x^{18}}$

23. $-\frac{125a^3b^6}{64p^6q^9}$ 24. $-\frac{1}{216x^2y^6}$

จงหาค่าต่อไปนี้

25. $\sqrt[4]{a^4x^{22}}$ 26. $\sqrt[5]{82x^2y^{10}}$ 27. $\sqrt[6]{729p^{18}q^6}$

28. $\sqrt[7]{x^{14}y^{21}}$ 29. $\sqrt[8]{256c^3d^{64}e^{40}}$ 30. $\sqrt[5]{-32x^{20}y^{15}}$

31. $\sqrt[7]{\frac{128}{m^6n^{20}}}$ 32. $\sqrt[10]{\frac{b^{30}c^{70}}{d^{100}}}$ 33. $\sqrt[9]{\frac{k^{18}}{l^{42}m^{63}}}$

34. ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ จงหาค่าของ c เมื่อ $a = \frac{x^2y^6z}{8}$ และ $b = \frac{-x^2yz}{4}$

35. รูปทรงกลมรัศมี r มีปริมาตร (v) เท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($\pi = \frac{22}{7}$) ถ้ารูปทรงกลมมีปริมาตร $\frac{11x^{15}}{21y^2z^6}$ ลูกบาศก์เซ็นต์ติเมตร รัศมียาวเท่าไร?

129. จากข้อ 124 นักเรียนย่อมสามารถเขียนค่าของกำลังสอง ของจำนวน พหุนามใด ๆ ที่มีอยู่สองเทอมได้ เช่น

$$(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2$$

ถ้าสังเกตผลลัพธ์ให้ถี่แล้ว ก็อาจจัดเข้ารูปเป็นกำลังสอง และเขียนรากกำลังสองได้ทันที

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากกำลังที่สองของ $4x^2 - 44xy + 121y^2$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 44xy + 121y^2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (11y) + (11y)^2 \\ &= (2x)^2 - 2(2x)(11y) + (11y)^2 \\ &= (2x - 11y)^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ รากกำลังที่สองที่ของการ = $2x - 11y$

ตัวอย่างที่ 2 จงหารากกำลังที่สองของ $\frac{9a^2}{16b^4} + \frac{3a}{2b^2} + 1$

$$\begin{aligned} \frac{9a^2}{16b^4} + \frac{3a}{2b^2} + 1 &= \left(\frac{3a}{4b^2}\right)^2 + 2\left(\frac{3a}{4b^2}\right) + 1 \\ &= \left(\frac{3a}{4b^2}\right)^2 + 2\left(\frac{3a}{4b^2}\right)(1) + 1 \\ &= \left(\frac{3a}{4b^2} + 1\right)^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ รากกำลังที่สองที่ของการ = $\frac{3a}{4b^2} + 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงหารากกำลังที่สองของ $9p^2 + q^2 + r^2 + 6pq - 6pr - 2qr$

ในทันทีต้องเรียงลำดับกำลังของตัวอักษรเสียก่อน

$$\begin{aligned} \text{จำนวนที่กำหนดให้} &= 9p^2 + 6pq - 6pr + q^2 - 2qr + r^2 \\ &= 9p^2 + 6p(q-r) + (q-r)^2 \end{aligned}$$

$$= (3p)^2 + 2 \cdot 3p(q-r) + (q-r)^2$$

$$= \{3p + (q-r)\}^2$$

$$\therefore \text{รากกำลังที่สองของการ} = 3p + q - r$$

หรือจะทำอีกวิธีหนึ่งก็ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จำนวนที่กำหนดให้} &= (3p)^2 + q^2 + r^2 + 2 \cdot (3p)q - 2 \cdot (3p)r - 2 \cdot q \cdot r \\ &= (3p + q - r)^2 \quad \text{กลับกันกับข้อ 124} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{รากกำลังที่สองของการ} = 3p + q - r$$

แบบฝึกหัดที่ 77

จงหารากกำลังที่สองของจำนวนพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 + 8x + 16$

2. $y^2 - 22y + 121$

3. $169 - 26a^2 + a^4$

4. $16b^2 + 56b + 49$

5. $25 - 10p^3 + p^6$

6. $25y^2 - 40yz + 16z^2$

7. $4c^4 - 4c^2d^2 + d^4$

8. $p^6 - 28p^3q^2r + 196q^4r^2$

9. $36x^6y^2 - 96x^3yz^4 + 64z^8$

10. $a^{10}b^{10} + 30a^5b^5c^5 + 225c^6$

11. $1 - 2m^3n^2 + m^6n^4$

12. $\frac{1}{4}x^2 - 3xy + 9y^2$

13. $\frac{b^4}{25} + \frac{2}{5}b^2c^2 + c^4$

14. $9 - \frac{6p}{q} + \frac{p^2}{q^2}$

15. $\frac{x^3}{y^3} + \frac{10x^4}{y^4} + 25$

16. $\frac{x^2}{16y^4} - \frac{xz^2}{y^2} + 4z^6$

17. $\frac{x^2}{y^2} - \frac{2ax}{by} + \frac{a^2}{b^2}$

18. $\frac{64x^{10}}{9y^{10}} + \frac{32x^5}{3y^5} + 4$

19. $\frac{9a^2}{25b^2} - 2 + \frac{25b^2}{9a^2}$

20. $(n+1)^2 + 6m^2 + 9m(n+1)$

๖. ผลผลิตพืชไร่ใหม่ของคุณท้าวพรทงห่มกแลวนำไปขายที่ตลาด ถ้าคงตั้งยังไม่
ห่มกก็ต้องชักลงมาและทำตามวิธีดังกล่าวมาแล้วตั้งแต่ข้อ ๕ จนถึงข้อ ๖ เรื่อย
ไปจนกว่าจะห่มกทั่วทั้ง และผลผลิตก็คือรากกำลังที่สองที่ห่อการ

ตัวอย่างที่ ๒ รงหารรากกำลังที่สองของ $16a^2 - 40ab + 25b^2$

$$\begin{array}{r} 4a \quad | \quad 16a^2 - 40ab + 25b^2 \quad (4a - 5b) \\ \underline{16a^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8a - 5b \quad | \quad -40ab + 25b^2 \\ \underline{-40ab + 25b^2} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ ๓ รงหารรากกำลังที่สองของ $28x^3a^2 - 12x^2a + 9x^4 + 16a^4 - 16xa^3$

ก่อนอันดับเรียงลำดับกำลังของตัวอักษรเสียก่อน ในที่นี้เราเรียง

กำลังรากมากไปหาน้อย

$$\begin{array}{r} 3x^2 \quad | \quad 9x^4 - 12x^3a + 28x^2a^2 - 16xa^3 + 16a^4 \quad (3x^2 - 2xa + 4a^2) \\ \underline{9x^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 2xa \quad | \quad -12x^3a + 28x^2a^2 \\ \underline{-12x^3a + 4x^2a^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 4xa + 4a^2 \quad | \quad 24x^2a^2 - 16xa^3 + 16a^4 \\ \underline{24x^2a^2 - 16xa^3 + 16a^4} \end{array}$$

ในที่นี้เห็นได้ว่าเมื่อเราได้ผลผลิตสองเทอมแล้วคือ $3x^2 - 2xa$ ตัวที่ยังเหลืออยู่

$$24x^2a^2 - 16xa^3 + 16a^4$$

เขา 2 คุณผลพิทักษ์ได้แล้ว ไข่เป็น $6x^2 - 4xa$ ก็ใส่ไว้ในตัวหาร ทิ้งเขา
เทอมแรกในตัวหารคือ $6x^2$ ไปหารเทอมแรกในตัวตั้งคือ $24x^2a^2$ ได้ $+4a^2$ ก็เขาไป
ใส่เพิ่มในผลลัพธ์และตัวหาร

เขา $4a^2$ ลงในตัวหารทั้งหมด และนำไปลบตัวตั้ง ปรากฏว่าลงกันหมดพอที่
ทำงานรอกำลึงที่สองของการคือ $3x^2 - 2xa + 4a^2$

แบบฝึกหัดที่ 78

หารากกำลังที่สองของจำนวนพหุนามต่อไปนี้

- $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
- $y^4 + 2y^3 + 5y^2 + 4y + 4$
- $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1$
- $4a^4 - 12a^3 + 29a^2 - 30a + 25$
- $9b^4 - 12b^3 - 2b^2 + 4b + 1$
- $4m^4 + 4m^3 - 7m^2 - 4m + 4$
- $1 - 10p + 27p^2 - 10p^3 + p^4$
- $8c^3 + 4c^2 + 1 - 4c$
- $13x^2 + 4 + x^4 - 6x^3 - 12x$
- $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1$
- $4p^2 + 9q^2 + 25r^2 + 12pq - 30qr - 20pr$
- $16y^6 + 16y^5 - 4y^4 - 4y^3 + y^2$
- $a^4 + 5a^3b^2 - 2a^2b + 4b^4 - 4ab^3$
- $12b^3c + 6bc^3 + 4b^4 + 13b^2c^2 + c^4$
- $m^6 + 34m^5 - 22m^4 - 121m^3 - 374m^2 + 289$
- $25e^4 - 30e^3d + 49e^2d^2 - 24ed^3 + 16d^4$

$$17. 16n^7 + n^{10} - 4n^7 + 16n^6 - 4n^7$$

$$18. 10y^4 + y^6 + 16 - 20y^2 + 25y^2 - 24y - 4y^3$$

$$19. 4a^4 + 4a^2b^2 - 12a^2c^2 + b^4 - 6b^2c^2 + 9c^4$$

$$20. x^2y^2 + 4x^2z^2 + 6xy^2z - 4x^2yz + 9y^2z^2 - 12xyz^2$$

$$21. 9r^4 + q^4 - 6q^2r^2 - 12p^2r^2 + 4p^2q^2 + 4p^4$$

$$22. 4y^4 + 9z^4 + 13y^2z^2 - 6yz^3 - 4y^3z$$

$$23. 10x^2 - 4x - 20x^3 + 25x^4 - 24x^5 + 16x^6 + 1$$

$$24. m^6 - 7m^2n^4 + 4n^6 + 10m^4n^2 - 12mn^5 + 21m^3n^3 - 8m^2n$$

$$25. 4b^2x^4 + a^2x^{10} + 6acx^5 + 9c^2 - 12bex^2 - 4abx$$

131. จากข้อ 124 เห็นได้ว่าจำนวนพหุคูณที่มีอยู่ 8 เทอม กำลังสองของจำนวนพหุคูณนั้นจะมีอย่างมากไม่เกิน 6 เทอม เหตุนี้การหารากกำลังที่สองจึงทำได้โดยรวดเร็วความวิจิตรในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 หารากกำลังที่สองของ $x^4 - 10x^3 - 27x^2 - 10x - 1$

ในที่นี้เห็นได้ว่ารากกำลังที่สองของจำนวนพหุคูณที่กำหนดให้มีอยู่ 3 เทอม เทอมแรกคือ x^2 และเทอมหลังคือ $+1$ หรือ -1 ส่วนเทอมกลางนั้นหาแยกเดี่ยวยกทีละส่วนมาแล้วในข้อ 129 ได้เป็น $-10x^3 \div (27x^2) = -5x$

ดังนั้นรากกำลังที่สองจะเป็น $x^2 - 5x + 1$ หรือ $x^2 - 5x - 1$

ถ้าเราอ่านในหลัก ให้เอาสองเท่าของเทอมกลางและเทอมหลังในรากกำลังที่สองคูณกัน ถ้าคูณในหลักกันได้เท่ากับเทอมที่ย่อนหน้าก็เทอมท้ายในจำนวนพหุคูณที่กำหนดให้ไปคือ $-10x$ ก็เป็นอันว่าคูณถูกต้อง

ในทันที (๒) $(-5x) (+1)$ คูณกันได้ $-10x$

∴ รากกำลังที่สองที่ตรงกลาง คือ $x^2 - 5x + 1$

ตัวอย่างที่ ๒ จงหารากกำลังที่สองของ $5 + 4x^2 + \frac{6}{x} - 12x + \frac{1}{x^2}$

ในทันที x มีทั้งที่เป็นจำนวนเต็มและเป็นส่วน และมีจำนวน รวมเป็นอยู่ด้วย

จึงควรสังเกตการลำดับกำลังของ x เสียใหม่จากมากไปหาน้อยดังนี้

$$4x^2 - 12x + 5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$$

ต่อไปก็ทำดังตัวอย่างที่ ๑ คือ รากกำลังที่สองของจำนวนพหุคูณต้นมีเทอมแรกเป็น $2x$ และเทอมหลังเป็น $+\frac{1}{x}$ หรือ $-\frac{1}{x}$ ส่วนเทอมกลางเท่ากับ $-12x \div (2 \times 2x) = -3$

ดังนั้น รากกำลังที่สองอาจเป็น $2x - 3 + \frac{1}{x}$ หรือ $2x - 3 - \frac{1}{x}$

แต่ $2(-3)(-\frac{1}{x})$ เท่ากับ $\frac{6}{x}$ ซึ่งเป็นเทอมที่ อยู่หน้าถัดเทอมท้ายในจำนวนพหุคูณที่กำหนดให้

∴ รากกำลังที่สองที่ตรงกลางคือ $2x - 3 - \frac{1}{x}$

ตัวอย่างที่ ๓ จงหารากกำลังที่สองของ $\frac{x}{a} - 1 + \frac{4a^2}{x^2} + \frac{x^2}{4a^2} - \frac{4a}{x}$

ก่อนอื่นก็ลำดับกำลังของ x จากมากไปหาน้อย

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{x}{a} - 1 - \frac{4a}{x} + \frac{4a^2}{x^2}$$

ต่อมาเราก็ทำอย่างเดียวกับตัวอย่างทั้งสองข้างต้น ได้รากกำลังที่สองเท่ากับ

$$\frac{x}{2a} + 1 - \frac{2a}{x}$$

หมายเหตุ การหารากกำลังที่สองนี้ เมื่อเรียงกำลังลงหรือเรียงกำลังขึ้น ก็ได้ผลพหุคูณอย่างเดียวกัน ต่างกันก็แต่เครื่องหมาย

เช่นในตัวอย่างที่ 3 ถ้าเวียงกำลังของ x รากน้อยไปหามาก จะได้

$$\frac{4a^2}{x^2} - \frac{4a}{x} - 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{4a^2}$$

และรากกำลังที่สองเท่ากับ $\frac{2a}{x} - 1 - \frac{x}{2a}$ หรือ $-(\frac{x}{2a} + 1 - \frac{2a}{x})$

แบบฝึกหัดที่ 79

จงหารากกำลังที่สองของจำนวนพีชคณิตต่อไปนี้

1. $a^4 - 4a^2 + 10a^2 - 12a + 9$

2. $4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4$

3. $9b^4 - 70b + 67b^2 + 49 - 30b^3$

4. $16e^7 + e^{10} - 4e^9 + 16e^6 - 4e^8$

5. $67y^2 + 49 + 9y^4 - 70y - 30y^3$

9. $z^4 + 2z^3 - z + \frac{1}{4}$

7. $1 + 2n - n^3 + \frac{n^4}{4}$

8. $\frac{p^4}{64} + \frac{p^3}{8} - p + 1$

9. $1 - 12a + \frac{27a^3}{2} + \frac{81a^4}{16}$

10. $2b - 3b^3 + b^4 + \frac{11b^2}{12} + \frac{1}{9}$

11. $x^4 - 5x + \frac{25}{9} - 3x^3 + \frac{67}{12}x^2$

12. $4q^3 + \frac{7q^4}{3} - 4q^5 + \frac{q^2}{9} - \frac{2q^3}{3}$

13. $c^4 - 6c^3 + \frac{29}{3}c^2 + \frac{1}{9} - 2c$

14. $y^4 - 2y^2 + 3 - \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^4}$

15. $4m^4 - 12m + \frac{25}{m^2} - \frac{24}{m^3} + \frac{16}{m^4}$

16. $a^4 - 2a^3 + \frac{3a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{16}$

17. $\frac{p^3}{z} + \frac{p^4}{4} - pz + pz + \frac{p^2}{z^2} + \frac{z^2}{p} - 2$

18. $\frac{y}{b} - 1 + \frac{4b^2}{y^2} + \frac{y^4}{4b^2} - \frac{4b}{y}$

19. $3 - \frac{6x}{a} - \frac{2a}{3x} + \frac{a^2}{9x^2} + \frac{9x^2}{a^2}$

20. $\frac{9x^2}{y^2} + 7 + \frac{y^2}{4x^2} - \frac{12x}{y} - \frac{2y}{x}$

21. $3 - \frac{6z}{r} - \frac{2r}{3z} + \frac{r^2}{9z^2} + \frac{9z^2}{r^2}$

22. $\frac{101}{25} + \frac{9c^2}{x^2} - \frac{6c}{5x} + \frac{4x^2}{9c} - \frac{4x}{15c}$

23. $\frac{y^4}{4} + \frac{by^2}{3} + 4y^2 - 2y^3 + \frac{b^2}{9} - \frac{4by}{3}$

24. $\frac{64}{n^4} + \frac{128}{n^2} + 96 + 4u^4 + 32u^2$

25. $16p^4 + \frac{16}{3}p^2q + 8p^2 + \frac{4}{9}q^2 + \frac{4}{3}q + 1$

รากกำลังที่สาม ความข้อ 126 $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3ab^2 + b^3$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

หากันเห็นได้ว่าถ้าจำนวนพีชคณิตใดมีสองเทอม กำลังสามของจำนวนพีชคณิตนั้นจะมีอย่างมากที่สุดไม่เกิน 4 เทอม เหตุนี้การหารากกำลังที่สามของจำนวนพีชคณิตที่มีอยู่ 4 เทอม จึงทำได้ทันทีโดยฉลกรากกำลังที่สามของเทอมต้นและเทอมท้ายในจำนวนพีชคณิตนั้น (เมื่อเรียงกำลังแล้ว)

ตัวอย่างที่ 1 หารากกำลังที่สามของ $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

$$\text{รากกำลังที่สามที่ควรหา} \sqrt[3]{8x^3} + \sqrt[3]{y^3} = 2x + y$$

ตัวอย่างที่ 2 หารากกำลังที่สามของ $27a^3 - 135a^2b + 225a^2b^2 - 125b^3$

$$\text{รากกำลังที่สามที่ควรหา} = \sqrt[3]{27a^3} + \sqrt[3]{-125b^3} = 3a^2 - 5b$$

$$\begin{aligned} 133. \quad (a+b+c)^3 &= \{a+(b+c)\}^3 \\ &= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6ab^2c + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c \\ &\quad + 3bc^2 + c^3 \end{aligned}$$

หากันเห็นได้ว่าถ้าจำนวนพีชคณิตใดมีอยู่ 3 เทอม กำลังสามของจำนวนพีชคณิตนั้นจะมีอย่างมากที่สุดไม่เกิน 10 เทอม และการหารากกำลังที่สามของจำนวนพีชคณิตที่มีอยู่ไม่เกิน 10 เทอมและไม่น้อยกว่า 5 เทอมก็ทำได้โดยฉลกรากกำลังที่สามของเทอมต้นและเทอมท้ายในจำนวนพีชคณิตนั้น (เมื่อเรียงกำลังแล้ว) ส่วนเทอมกลางในรากที่สามหาได้โดยเอาสามเท่าของกำลังสองของเทอมต้นในรากกำลังที่สาม ไปหารเทอมที่สองในจำนวนพีชคณิตที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 3 รวบรวมกำลังสามของ $27x^6 - 27x^3 - 18x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

$$\text{เทอมต้นของรากกำลังสามที่สามของการคือ } \sqrt[3]{27x^6} = 3x^2$$

$$\text{เทอมท้ายของรากกำลังสามที่สามของการคือ } \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\text{เทอมกลางของรากกำลังสามที่สามของการคือ } -27x^3 + 3(3x^2)' = -x$$

$$\therefore \text{รากกำลังสามที่สามของการคือ } 3x^2 - x - 1$$

แบบฝึกหัดที่ 80

รวบรวมกำลังสามของจำนวนพีชคณิตต่อไปนี้

- $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$
- $125b^6 - 300b^4 + 240b^2 - 64$
- $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$
- $27p^3 + 54p^2q + 36pq^2 + 8q^3$
- $y^3 + 12y^4z^2 + 48y^2z^2 + 64z^6$
- $64a^3x^3 - 144a^2x^2y^2 + 108axy^4 - 27y^6$
- $m^3 - 2m^2n + \frac{4}{3}mn^2 - \frac{8}{27}n^3$
- $\frac{c^3}{216} + \frac{c^2d}{6} + 2cd^2 + 8d^3$
- $1 + 3r + 6r^2 + 7r^3 + 6r^4 + 3r^5 + r^6$
- $x^3 + 6x^2y - 3x^2z + 12xy^2 - 12xyz + 3xz^2 + 8y^3 - 12y^2z + 6yz^2 - z^3$
- $8y^6 + 12y^5 - 30y^4 - 35y^3 + 45y^2 + 27y - 27$
- $27a^2 - 54a^3b + 117a^4b^2 - 116a^3b^3 + 117a^2b^4 - 54ab^5 + 27b^6$
- $x^3 + 3x^2y - 3x^2z + 3xy^2 - 6xyz + 3xz^2 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$
- $96p^3q^4 - 56p^3q^3 + 24p^4q^2 + p^6 - 6p^2q - 96pq^5 + 64q^6$
- $66x^4 + 33x^2 - 36x^5 - 9x + 8x^6 - 63x^3 + 1$
- $\frac{a^6}{b^3} - 6a^4 + 12a^2a^2 - 8b^6$

$$17. \frac{x^3}{y} - \frac{3x^2}{y^2} + \frac{6x}{y} - 7 + \frac{6y}{x} - \frac{3y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}$$

$$18. \frac{y^3}{b} - \frac{12y^2}{b^2} + \frac{60y}{b} - 160 + \frac{240b}{y} - \frac{192b^2}{y^2} + \frac{64b^3}{y^3}$$

$$19. \frac{6n}{m} + \frac{6m}{n} - \frac{3m^2}{n^2} + \frac{m^3}{n^3} + \frac{n^3}{m^3} - \frac{3n}{m} - 7$$

$$20. \frac{8p^6}{q^6} - 27 + \frac{108p}{q} + \frac{48p^2}{q^2} - \frac{80p^3}{q^3} - \frac{90p^4}{q^4} + \frac{60p^5}{q^5}$$

แบบฝึกหัดที่ 81

จงหาคำถึงสองของ

$$1. x-y \quad 2. 3a+2b \quad 3. p+q+r \quad 4. x^2-2y-z$$

$$5. \text{ จงหาคำถึงสามของ } (1) \quad 5x+3y \quad (2) \quad \frac{a^2}{3}-3a$$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$6. 2(a+b)^2 + (a-b+c)^2 - (a+b-c)^2$$

$$7. (m-n)^3 + 3(m-n)^2n + 3(m-n)n^2 + n^3$$

8. จงแยกตัวประกอบของจำนวนพหุนามต่อไปนี้ แล้วหารากกำลังที่สอง

$$(p^2+9p+8)(p^2+11p+24)(p^2+4p+3)$$

$$9. \text{ จงหารากกำลังที่สองของ } (x^2+x-12)(x^2-9)(x^2+7x+12)$$

$$10. \text{ จงหารากกำลังที่สองของ } (c-d)^2 + 2(c^2-d^2) + (c+d)^2$$

$$11. \text{ จงแสดงให้เห็นว่า } r(r+1)(r+2)(r+3)+1 \text{ เป็นจำนวนกำลังสองแล้วหา}$$

รากกำลังที่สอง

12. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$(a+b)^3 + 3(a+b)^2(a-b) + 3(a+b)(a-b)^2 + (a-b)^3$$

13. ถ้า $c = a+b$ จงพิสูจน์ว่า $c^3 - a^3 - b^3 = 3abc$

14. จงพิสูจน์ว่า $(x+y)^3 + (x-y)^3 + 3(x+y)^2(x-y) + 3(x-y)^2(x+y) = 8x^3$

15. จงหารากกำลังที่สองของ $4a^4 + 4a^3 + 5a^2 + 2a + 1$ แล้วหารากกำลังที่สองของ 44521

16. จงหารากกำลังที่สองของ $24 + \frac{16n^2}{m^2} - \frac{8m}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{32n}{m}$

จงหารากกำลังสามของ

17. $171x^4 + 342x^3 + 216 - 109x^2 + 27x^5 - 27x^3 - 108x$

18. $\frac{54y}{b} - 112 - \frac{12y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3} - \frac{48b^2}{y^2} + \frac{108b}{y} + \frac{8b^3}{y^3}$

จงหาคำของ

19. $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2(x-y)(y-z) + 2(y-z)(z-x) + 2(z-x)(x-y)$

20. $(2a-3b)^3 + 3(2a-3b)^2(3b-a) + 3(2a-3b)(3b-a)^2 + (3b-a)^3$

บทที่ ๖

กราฟ

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือประเสริฐสุดที่คนเราก็ค้นพบสำหรับค้นคว้าหาความจริง — เลขันท์

การทำโจทย์ด้วยวิธีกราฟ

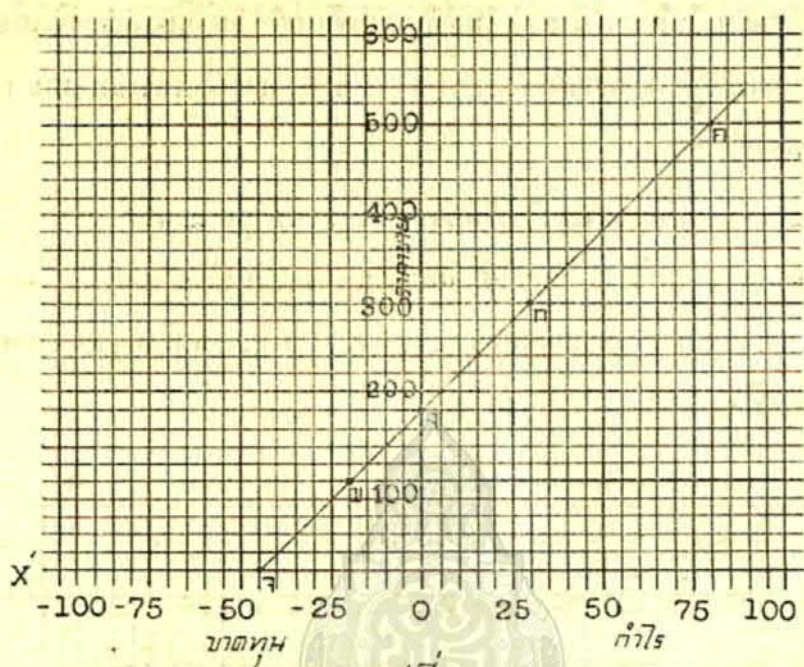
๑๑. นักเขียนไก่เขียนมาแล้วในพิชคณิตเล่ม ๑ ว่ากราฟมีประโยชน์อยู่หลายอย่าง เช่นในการเทียบมาตรา คณิตศาสตร์ปัญหาใดใครบางคน เป็นตารางแสดงค่าของสิ่งต่าง ๆ โดยชักเงาเวลา โดยละเอียดเพราะการทำโจทย์บางชนิดหากทำโดยวิธีกราฟแล้วจะง่ายกว่าการหาคำตอบโดยวิธีเลขคณิตหรือพิชคณิตธรรมดา

ตัวอย่างที่ ๑ พ่อค้าหิกลำหนดค่าไก่ขายและรายได้ในวันหักกันแล้วปรากฏว่า ถ้าขายของไก่เดือนละ 300 บาท จะมีกำไร 30 บาท ถ้าขายไก่เดือนละ 100 บาท จะขาดทุน 20 บาท สมารถทราบว่าถ้าเขาขายไก่เดือนละ 500 บาท จะมีกำไรเท่าไร? เขาจะต้องขายของไก่เดือนละเท่าไรจึงจะไม่ขาดทุน? และถ้าเขาขายของไม่ไก่เลย จะขาดทุนเดือนละเท่าไร?

โจทย์นี้ทำด้วยวิธีกราฟได้ง่ายมาก โดยสมมติให้ระยะทางขาของรูปเก็มนบนแกนแนวนอนเป็นกำไร ระยะทางซ้ายของรูปเก็มนบนแกนแนวนอนเป็นขาดทุน และแกนขึ้นเป็นเงินที่ขายไก่

ใช้มาตราส่วน ๑ ช่องเท่ากับ 5 บาทบนแกนแนวนอน และ 1 ช่องเท่ากับ 20 บาทบนแกนขึ้น

เมื่อขายไก่ 300 บาท กำไร 30 บาทอยู่ที่จุด ก. และเมื่อขายไก่ 100 บาทขาดทุน 20 บาทอยู่ที่จุด ข.



ลากเส้นตรงโยงจุด ก. กับจุด ข. และต่อเส้นออกไปทั้งสองข้างด้วย
จากกราฟเห็นได้ว่า (ก) เมื่อขายได้ 500 บาท ขายได้ 80 บาท

(ข) เมื่อขายไม่ขาดทุนหรือได้กำไร ระยะจนเป็น 0 ขาย
ได้ 180 บาท

(ค) เมื่อขายไม่ได้เลย ระยะจนเป็น 0 ขายได้ 45 บาท
ซึ่งเป็นค่าใช้จ่ายภายในวัน

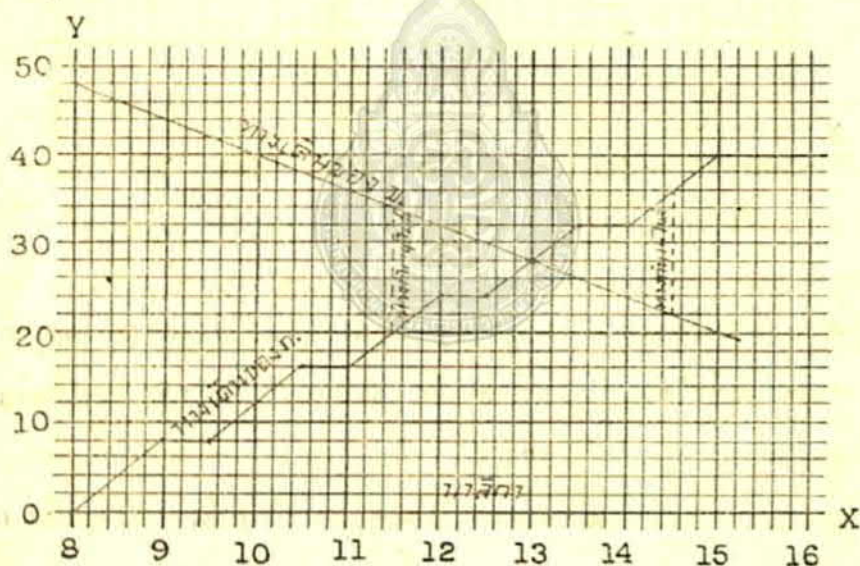
ตัวอย่างที่ 2 ก. ขั้วรถยนต์และขั้วรถเดินพร้อมกัน 8 น. จากเมืองสองเมือง
ซึ่งอยู่ห่างกัน 48 ไมล์ ถ้า ก. ไปได้ชั่วโมงละ 8 ไมล์แต่หยุดพักเสีย 30 นาทีทุก

ชั่วโมง ส่วน ข. ไปใช้ชั่วโมงละ 4 ไมล์ ไม่หยุดพักเลย ทั้งนี้เขาจะพบกันเมื่อไรและที่ไหน? เขาจะอยู่ห่างจากกันเท่าไรเมื่อเวลา 11 น.? และเมื่อเขาอยู่ห่างกัน 14 ไมล์นานเป็นเวลากี่ชั่วโมง?

ให้ถนัดนอนเป็นเวลาและใช้มาตราส่วน 1 ช่องเท่ากับ 12 นาที

ให้ถนัดขึ้นเป็นระยะทางและใช้มาตราส่วน 1 ช่องเท่ากับ 2 ไมล์

เวลาเขียนกราฟ เมื่อหยุดพักก็เขียนเส้นตรงไปตามนอนเท่ากับเวลาที่หยุดพักถึงปรากฏในรูปที่ 2



รูปที่ 2

จากกราฟเห็นได้ว่า (ก) เขาพบกันเวลา 13 น. ห่างจากเมืองที่ ก. ชัยภักดิ์มา 28 ไมล์
(ข) เมื่อเวลา 11 น. เขาอยู่ห่างกัน 20 ไมล์

(ก) เวลาที่เขาอยู่ข้างกัน 11 ไมล์นั้น มีอยู่สอง ตอนคือ

เวลา 11.30 น. และ 14.30 น.

แบบฝึกหัดที่ 82

1. ทอรวมกรทำงานวันละ 8 ชั่วโมงได้ค่าจ้างวันละ 1 บาท 25 สตางค์ จงเขียนกราฟแสดงค่าจ้างของเขาถ้าเขาทำงานวันละ $2\frac{1}{2}$ และ $5\frac{1}{2}$ ชั่วโมง ถ้าจะให้ค่าจ้าง 80 สตางค์ จะต้องทำงานวันละกี่ชั่วโมง
2. ชาวนา 12 คน ช่วยกันเกี่ยวข้าวในวันหนึ่งได้ 18 ไร่ จงหาโดยวิธีกราฟว่าชาย 3, 15, 27 คน จะเกี่ยวข้าวในวันหนึ่งได้เท่าไร
3. พืชผลของดินเป็นข้าวสาคูการมีรายได้นั้นได้ 960 บาท จงเขียนกราฟแสดงรายได้ของเขาในเวลา 7, 18 และ 50 วัน และหาว่าเขาจะต้องทำงานนานเท่าไรจึงจะมีรายได้ 120 บาท
4. พืชค่างราคาขายของไว้ให้ได้กำไรร้อยละ 20 จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของราคาขายกับราคาทุน และหาว่าราคาทุนถ้าราคาขายเป็น 21, 42, 90 สตางค์ ถ้าราคาทุนเป็น 21, 36, 58 สตางค์ ราคาขายจะเป็นเท่าไร
5. กระดาษรวมในการสอยได้ครึ่งหนึ่งเป็น 430 กระดาษ แต่โรงเรียนจะต้องยกกระดาษรวมขึ้นเป็น 500 กระดาษ ถ้าเด็กนักเรียนสอยได้ 235, 171 กระดาษ จงหาโดยวิธีกราฟว่ากระดาษนั้นเมื่อยกขึ้นแล้วจะเป็นเท่าไร
6. ร้านขายของแห่งหนึ่งถ้าขายได้เดือนละ 500 บาท จะมีกำไร 25 บาท และถ้าขายได้เดือนละ 600 บาทจะมีกำไร 40 บาท ถ้าขายได้เดือนละ 800 บาทจะมีกำไรเท่าไร? ร้านนี้จะต้องขายได้เดือนละเท่าไรจึงจะไม่

จากทุน? ถ้าขายไม่ไ้โดยจะจากทุนเกินและเท่าไร? ถ้าไ้กำไร 35 บาท
จะขายไ้เท่าไรในเกินนั้น?

7. เวลา 6.00 น. ชันต์ออกเดินทางชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร พอเวลา 7.30 น.
เชนก็ขี่จักรยานตามไปชั่วโมงละ 8 กิโลเมตร อยากทราบว่าเชนจะไป
ทันชนันต์เมื่อไร? เมื่อชนันต์อยู่หน้าเชน 5 กิโลเมตรเป็นเวลาอะไร?
เมื่อไรชนันต์จึงจะอยู่หลังเชน 3 กิโลเมตร?

8. เวลา 9.00 น. ก. ชมาด้วยความเร็วชั่วโมงละ 8 ไมล์ อีก 1.30 ชั่วโมง
ต่อมา ข. ชมาตามด้วยความเร็วชั่วโมงละ 12 ไมล์ ดังนั้น ข. จะไปทัน ก.
เมื่อไร? และหากเวลาเมื่อ ก. และ ข. อยู่ห่างกัน 4 ไมล์

9. ชายสองคนขี่จักรยานออกจากเมืองสองเมืองซึ่งอยู่ห่างกัน 57 ไมล์ ถ้าเขา
ออกเดินทางพร้อมกันเวลา 14.15 น. คนหนึ่งไปไ้ชั่วโมงละ 9 ไมล์
อีกคนหนึ่งไปไ้ชั่วโมงละ 10 ไมล์ อยากทราบว่าเมื่อไรเขาจึงจะอยู่ห่างกัน
 $9\frac{1}{2}$ ไมล์ และเมื่อเขาพบกันนั้นเป็นเวลาอะไร

10. หญิงคนหนึ่งเวลาเที่ยงนั่งรถสามล้อไปไ้ชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร สละชั่ว-
โมงต่อมาลูกของเขาก็ขี่จักรยานตามไปชั่วโมงละ 12 กิโลเมตร แต่หยุด
พักเสีย 30 นาทีทุก ๆ ชั่วโมง ดังนั้นลูกจะไปทันแม่เมื่อไรและที่ไหน? ลูก
จะอยู่หน้าหรือหลังแม่เท่าไร เวลา 15.00 น.?

11. พและน้องขี่จักรยานจากเมือง ก. และ ข. ซึ่งอยู่ห่างกัน 60 กิโลเมตร พ
ออกเดินทางเวลา 11.00 น. และน้องออกทีหลัง 36 นาที ถ้าเขาพบ
กันเวลา 14.00 น. และพไปถึงเมือง ข. เวลา 16.00 น. ถามว่าน้องจะไป

ถึงเมือง ก. เวลาเท่าไร? เมื่อไรเขาทั้งสองอยู่ห่างกัน 22 กิโลเมตร? เมื่อไปใกล้ครั้งทางระหว่างเมือง ก. และ ข. แล้วทั้งสองอยู่ที่ไหน?

12. หนังสือเล่มหนึ่งของเสี่ยค่าเรียงพิมพ์ 200 บาท และค่าพิมพ์อีกเล่มละ 20 สตางค์ ถ้าพิมพ์หนังสือ x เล่มจะสิ้นเงินเท่าไร? เรขนิพนธ์กราฟแสดงราคาของหนังสือเรื่อยไปจนถึง 10,000 เล่ม แล้วหาราคาของหนังสือ 5,000 เล่ม และหนังสืออีกเล่มราคา 1,050 บาท?

การถอดสมการข้อด้วยวิธีกราฟ

135. นักเรียนไทยเรียนมาแล้วว่ากราฟของสมการเส้นตรงที่มี x และ y เกี่ยวเนื่องกันนั้นเป็นเส้นตรง เราหาสมมติค่าของ x และ y ได้ไม่จำกัดและเขียนกราฟได้ทันที แต่ถ้า x และ y อยู่ในสมการเรขนิพนธ์ของแต่ละสมการที่มากกว่ากราฟทั้งสองเส้นนั้นตัดกันที่ใดใด ระยะเวลาและระยะของทุกนัยกับค่าของ x และ y ที่เป็นจริงอยู่ในสมการทั้งสอง

ตัวอย่างที่ 1 เรขนิพนธ์ข้อต่อไปนี้ด้วยวิธีกราฟ

(1) $2x - y = 1$ (2) $x + y = 0$

ในสมการ (1) หาทุกที่เส้นกราฟตัดกับแกน x โดยเมื่อ $x=0, y=-1$ และเมื่อ $y=0, x=\frac{1}{2}$

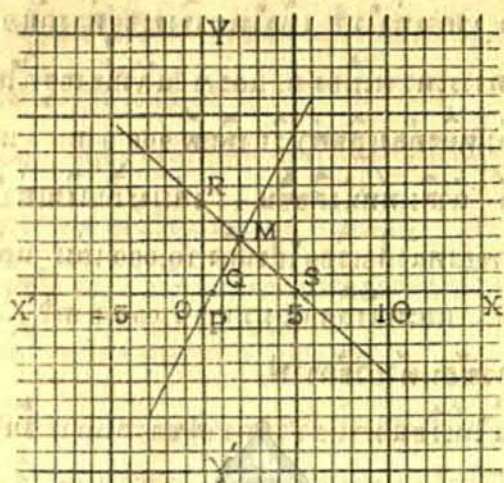
เขียนกราฟ x โดยลากเส้นผ่านจุด $P(0, -1)$ และจุด $Q(\frac{1}{2}, 0)$

ในสมการ (2) เมื่อ $x=0, y=0$ และเมื่อ $y=0, x=0$

เขียนกราฟ x โดยลากเส้นตรงผ่านจุด $P(0, 0)$ และจุด $S(0, 0)$

จากรูปเห็นได้ว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด M ซึ่งมีระยะแกนเท่ากับ 2 และระยะอื่นเท่ากับ 3

$\therefore x=2, y=3$



รูปที่ 3

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าเลขจำนวนหนึ่งเป็นสองเท่าของอีกจำนวนหนึ่ง และเลขสองจำนวนนั้นบวกกันได้ 9 รหสเลขสองจำนวนนั้น

วิธีทำ สมมติให้ x เป็นเลขจำนวนน้อย และ y เป็นเลขจำนวนมาก และตั้งสมการขึ้นได้ตามรูปต่อไปนี้

$$(1) \quad x + y = 9$$

$$(2) \quad y = 2x$$

เราเขียนกราฟทั้งสองในรูปที่ 4

กราฟทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด P ซึ่งมีระยะขนานแก่อakse และระยะขนานแก่อakse

$$(3, 6) \quad \therefore x = 3, y = 6$$

ข้อสังเกต

1. สมการที่มี x และ y กำลังหนึ่งอยู่เพียงสมการเดียว เราเขียนสมมติค่าของ x และ y เป็นคู่ ๆ ได้ไม่มีกำหนดและทำให้สมการนั้นเป็นจริงด้วย

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

20. หาจุดตัดของเส้นตรง $x+y=5$ และ $x-y=3$ โดยใช้วิธีกำจัดตัวแปร

$x+y=5$ (1)

$x-y=3$ (2)

$1=x-y$ (3)

$2x=y+3$ (4)

$y=2x-3$ (5)

$2x=y+3$ (6)

$2x=2x-3+3$ (7)

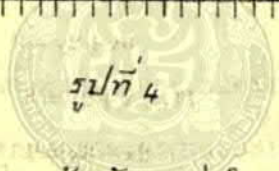
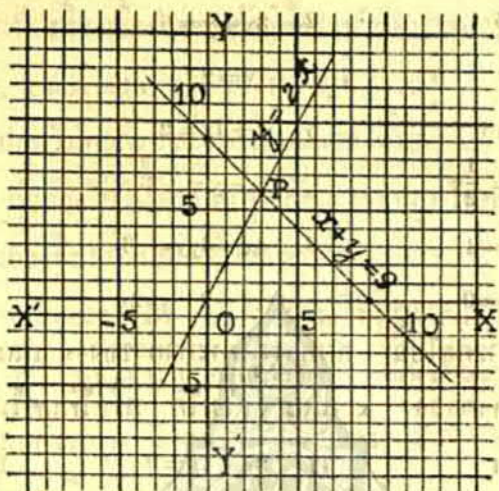
$0=0$ (8)

$0=0$ (9)

$0=0$ (10)

$0=0$ (11)

$0=0$ (12)



รูปที่ 4

2. สมการข้อที่ค่าไม่สอดคล้องกัน เช่นในสมการหนึ่ง $x+y=5$ แต่ในอีกสมการหนึ่ง $x+y=3$ ก็จะเขียนกราฟได้เป็นเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และหาคำของ x และ y ที่สอดคล้องทั้งสองสมการไม่ได้

3. สมการข้อที่ค่าอย่างเดียวกันแต่เขียนต่างกันไปเช่น

$x+2y=1, 2x+4y=2$

เห็นได้ว่าเมื่อเอา 2 คูณสมการที่หนึ่งจะได้เท่ากับสมการที่สอง หรือเอา 2 หารสมการที่สองก็ได้เท่ากับสมการที่หนึ่ง ดังนั้นสมการทั้งสองก็คือนัยเดียวกัน เขียนกราฟได้เป็นเส้นตรงสองเส้นทับกันและค่าของ x และ y ก็ไม่มีกำหนด

แบบฝึกหัดที่ 83

จงหาคำสมการต่อไปนี้โดยวิธีกราฟ

1. $x + y = 5$

2. $3x + y = 6$

3. $3x - y = 6$

$x - 1 = 1$

$y = 2$

$3y + 5x = 38$

4. $x + 2y = 8$

5. $x + 4y = 2$

6. $y - x = 1$

$y = \frac{1}{2}x$

$x - y = -3$

$3y = 2x$

7. $3x + 4y = 2$

8. $4x - 3y = -1$

9. $4x + 3y = 9$

$x - 2y = 9$

$y + 2 = 2x$

$3y = 8x$

ในสมการต่อไปนี้ สมการใดจะหาค่าของ x และ y ได้ และสมการ
คู่ใดจะหาค่าของ x และ y ไม่ได้ หรือได้แต่ไม่มีกำหนด

10. $x + y = 4$

11. $3x + 4y = 9$

12. $5x - 3y = 2$

$x + y = 3$

$3x + 2y = 9$

$10x - 6y = 4$

13. $9x - 6y = 15$

14. $x + 2y = 8$

15. $0.8x + 3.6y = 14$

$3x - 2y = 5$

$2x - 3y = 4$

$0.2x + 0.9y = 15$

16. $\frac{3x}{4} - \frac{2y}{3} = 10$

$\frac{x}{24} - \frac{y}{27} = 1.5$

17. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ แล้วแสดงให้เห็นว่ากราฟเหล่านี้พบกันที่จุดหนึ่ง
แล้วหาหระยแนอนและหระยแนอนของจุดนั้น

ก. $x + 3y = 10$, $2x + y = 0$, $3x = 2y - 14$

ข. $x - 0.5y = 0.45$, $3.4y = 17 - 5x$, $y - x = 0.8$

18. เลขสองจำนวนบวกกันได้ 8 และจำนวนหนึ่งเป็นสามเท่าของอีกจำนวนหนึ่ง จง
จงหาเลขจำนวนสองนั้น

19. เลขจำนวนหนึ่งเป็นห้าเท่าของอีกจำนวนหนึ่ง และลบกันได้ 4 ถามว่าเลข

สองจำนวนนั้นคืออะไร

20. รังหาเลขเต็มหน่วยสองจำนวนที่อยู่เรียงกันและบวกกันได้ 11

21. รังสร้างสามเหลี่ยมซึ่งกำหนดค่าทั้งสามให้คามสมการต่อไปนี้คือ

$$x+3y=13, 7x+y=11, 3x-y=9$$

22. รังสร้างทึปลกไม้คอกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีความยาวเป็นสี่เท่าของความกว้าง ถ้าทึองใช้ไม้ยาว 20 ฟุต ล้อมรอบทึปลกไม้คอกนั้น ชยาคทราบว่ความยาวของทึปลกไม้คอกนั้นเป็นเท่าไร

136. เมื่อกำหนดสมการให้ เราย่อมจะเขียนกราฟไคณิก หากกำหนดกราฟผ่านทุกค่า ๆ ให้ ก็ย่อมจะหาสมการของกราฟนั้นไคณิกนั้น

ตัวอย่าง รังแสดงว่ทุก $(-3,8), (2,4), (12,-4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน แล้วหาสมการของเส้นตรงนี้

(1) วิธัแสดงว่สามทุกที่กำหนดให้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ทำไคโดยเขียนทุกที่กำหนดให่ทั้งสามทุกลากเส้นโยงเพือสองทุกก่อน แล้วทึอเส้นตรงนัออกไคก็จะเห็นว่าเส้นตรงนั้นผ่านทุกทั้งสามทุก

(2) วิธัหาสมการของกราฟเส้นตรงทำไคโดยสมมติสมการเป็น $y=ax+b$ สมการแขนจะเขียนไคเป็นกราฟเส้นตรงเสมอ เพราะ x และ y มีค่าเป็นทึง

เมือเส้นตรงนั้นผ่านทุกสองทุกที่กำหนดให่ ระยะเวลาและระยะเวลาของทุกทั้งสองย่อมจะทึให้สมการเป็นวิธั

แทนค่า $x=-3, y=8$ ไค้สมการเป็น $8=-3a+b$ ----- (1)

แทนค่า $x=2, y=4$ ไค้สมการเป็น $4=2a+b$ ----- (2)

$$(2)-(1), 5a = -4 \text{ หรือ } a = -\frac{4}{5}$$

แทนค่าของ a ใน (1), $b = 8 - \frac{12}{5} = \frac{28}{5}$

แทนค่าของ a และ b ในสมการ $y = ax + b$ จะได้

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{28}{5} \text{ หรือ } 4x + 5y = 28$$

นั่นคือสมการ $4x + 5y = 28$ เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(-3, 8), (2, 4)$ เมื่อทดสอบสมมติให้ $x = 12, y = -4$ ปรากฏว่าทำให้สมการเป็นจริงเช่นกัน ดังนั้นเส้นตรงนี้ก็ผ่านจุด $(12, -4)$ ด้วย

แบบฝึกหัดที่ 8.1

1. ถ้ากราฟของ $y = ax + b$ ผ่านจุด $(1, -2), (3, 1)$ งบาค่าของ a และ b
2. งบแสดงว่าจุด $(-3, -1), (2, 4), (11, 11)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และหาสมการของเส้นตรงนี้
3. งบพิสูจน์ว่าจุด $(3, -4), (12, 8), (15, 12)$ อยู่บนเส้นตรงที่ตัดแกนบนห่างจากจุดเดิม 6 หน่วย
4. งบหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 2.2), (-3, 3.4)$
5. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(0.3, -0.15), (-1.2, -2.4)$ มีสมการเป็นอย่างไร?
6. ถ้าเส้นตรง $y = ax + b$ ผ่านจุดตัดกันของเส้นตรง $3y = 4x + 16$ และ $5y = 5x + 24$ และผ่านจุด $(-2, 2)$ ด้วยแล้ว งบาค่าของ a และ b

137. ในบางกราวค่าของ x และ y ที่กำหนดให้เป็นคู่กันนั้นไม่แน่นอนลงไปเป็นแต่เพียงประมาณใกล้เคียง เมื่อเขียนจุดต่าง ๆ แล้วจุดเหล่านั้นอาจไม่อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน การเขียนเส้นตรงจึงควรเขียนให้ผ่านจุดต่าง ๆ มากที่สุด เส้นตรงนี้จะแสดงให้ทราบค่าของ x และ y ที่เป็นคู่กัน

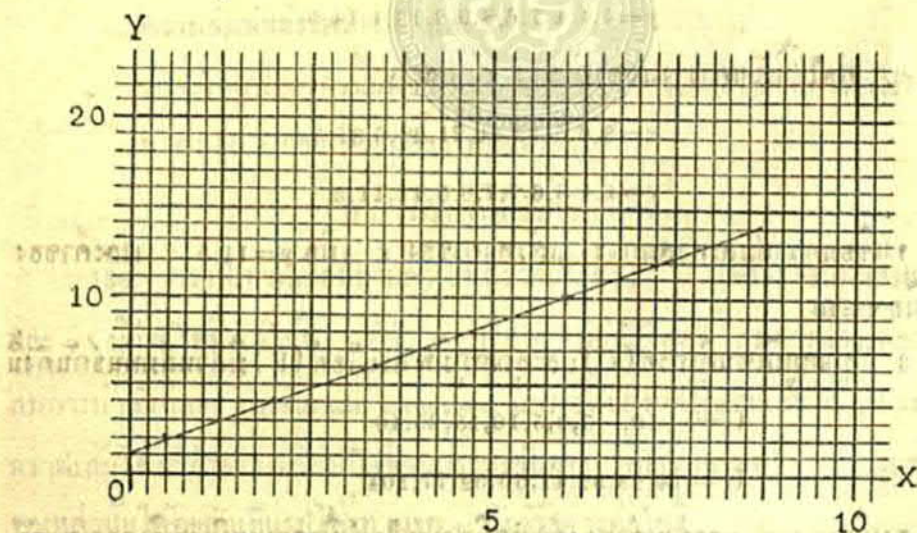
ถ้าเราทราบค่าของ x หรือ y อย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ค่านี้มากเกินไปจะลากกราฟได้ไม่สะดวก ก็ควรหาสมการของเส้นกราฟตามวิธีดังกล่าวมาแล้ว และใช้สมการนี้หาค่าของจำนวนที่ต้องการทราบที่เหลือได้

ตัวอย่าง ค่อยไปเป็นตารางแสดงค่าของ x และ y ข้างค่าเป็นเพียงประมาณใกล้เคียง ings เขียนกราฟและหาสมการ แล้วหาค่าของ x เมื่อ $y=61$

x	0.5	2	3.4	4	4.8	6	7.2
y	2	4	6.1	6.5	7.7	10	12.4

ใช้มาตราส่วน 1 ซองเท่ากับ .25 หน่วยบนแกนอนและ 1 ซองเท่ากับ 1 หน่วยบนแกน

เขียนกราฟให้ผ่านจุด $(2,4)$, $(3.4,6.1)$, $(6,10)$ และจุดอื่นที่เหลือก็อยู่ใกล้เคียงกับเส้นตรงนึ่งในรูปที่ 5



ค่าของ y ที่กำหนดให้เมื่อกำหนดค่าของ x ที่เปลี่ยนไปเรื่อยๆ
กราฟได้ไม่สะดวก จึงสมมติให้สมการของกราฟเส้นตรงเป็น $y = ax + b$

เมื่อ $y = 2, y = 4, 4 = 2a + b$

และเมื่อ $x = 6, y = 10, 10 = 6a + b$

ถอดสมการทั้งสองจะได้ $a = 1.5, b = 1$

สมการของเส้นกราฟเป็น $y = 1.5x + 1$

ดังนั้นเมื่อ $y = 61, x = 40$

แบบฝึกหัดที่ 85

1. เรียงกราฟจากค่าของ x และ y ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ แล้วหา
สมการด้วย

$$x = 6, 10, 22, 26, 31, 46, 56$$

$$y = 4, 4, 4, 7, 6, 8, 9, 2, 12, 4, 14, 5$$

2. ต่อไปนี้เป็นตารางแสดงค่าของ x และ y

$$x = 3, 6, 5, 12, 14, 21, 28, 6, 31, 5$$

$$y = 4, 4, 8, 6, 7, 7, 8, 5, 11, 11, 5$$

เรียงกราฟและหาสมการ แล้วหาค่าของ x เมื่อ $y = 11.5$ และค่าของ
 y เมื่อ $x = 10$

3. อุณหภูมิเซนติเกรด (C) และอุณหภูมิฟาเรนไฮต์ (F) มีส่วนสัมพันธ์กันดังนี้

$$C = -10, -5, 0, 5, 10, 15, 25, 40$$

$$F = 14, 23, 32, 41, 50, 59, 77, 104$$

เรียงกราฟ และอ่านค่าของอุณหภูมิฟาเรนไฮต์เมื่ออุณหภูมิเซนติเกรดเท่ากับ
19.5 และ 31 แล้วหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง F กับ C

4. โรงแรมแห่งหนึ่ง ถ้ามีคนพัก M คนจะได้กำไรวันละ N บาท ต่อไปนี้เป็นรายการเฉลี่ยของจำนวนคนพักและกำไรในวันหนึ่งๆ ingsเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง M กับ N

$$M = 21, 27, 29, 32, 35$$

$$N = -0.9, 4, 6.4, 9, 13.2$$

ถ้าวันใดโรงแรมนี้ไม่มีกำไรเลย จะต้องมีคนพักเท่าไร?

5. เครื่องจักรอย่างหนึ่งจะต้องใช้กำลัง F ปอนด์ เพื่อยกของหนัก W ปอนด์ ต่อไปนี้เป็นตารางแสดงค่าของ F และ W ที่สัมพันธ์กัน

$$F = 1.54, 1.95, 3.4, 4.4, 4.6, 5.5, 6.65$$

$$W = 10.5, 18.12, 33.1, 43.75, 51.87, 60, 76.25$$

ingsเขียนกราฟและอ่านค่าของ F เมื่อ $W = 35$ แล้วเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง F และ W

ถ้าจะใช้เครื่องจักรยกของหนัก 155 ปอนด์ จะต้องใช้กำลังเท่าไร? และกำลัง 90.3 ปอนด์จะยกของได้หนักเท่าไร?

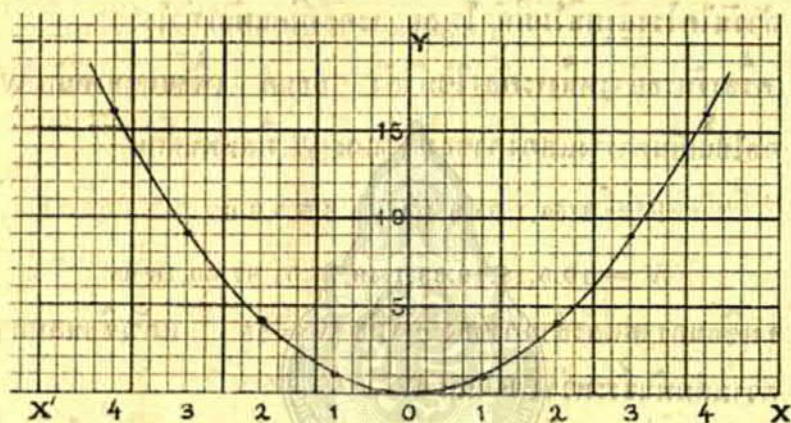
กราฟเส้นโค้ง

138. กราฟเท่าที่เรียนมาแล้วเป็นกราฟเส้นตรง เพราะใช้แทนสมการ x และ y มีกำลังหนึ่งเท่านั้น แต่ถ้า x หรือ y มีกำลังสอง สมการนั้นก็กลายเป็นสมการกำลังที่สอง (Quadratic Equation) และเขียนกราฟได้เป็นเส้นโค้ง การเขียนกราฟเส้นโค้งก็ทำอย่างเดียวกับเขียนกราฟเส้นตรง คือเขียนจุดต่าง ๆ ก่อนแล้วโยงทุกเหล่านั้นให้ต่อกันเป็นรูปโค้งตามเรขาคณิต ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ingsเขียนกราฟของ $y = x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

ใช้มาตราส่วน 4 ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนแนวนอนและ 1 ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนตั้ง เขียนจุดทุกจุดแล้วลากเส้นโค้งโยงจุดเหล่านั้นให้ต่อกันก็จะได้กราฟเส้นโค้งดังในรูปที่ 6



รูปที่ 6

จากตัวอย่างข้างบนจะเห็นได้ว่า

(1) ส่วนกราฟในควอดรนต์ที่ 1 และในควอดรนต์ที่ 2 เป็นแบบเดียวกันเพราะจากสมการที่กำหนดให้เราได้ $x = \pm \sqrt{y}$ ดังนั้นทุก ๆ ค่าของ y เราจะได้ค่าของ x เป็นสองอย่างซึ่งมีค่าส่วนเท่ากัน แต่ต่างกันที่เครื่องหมาย

(2) เนื่องจาก $y = x^2$ และ x^2 จะมีค่าเป็นบวกเสมอไม่ว่า x จะมีค่าเป็นอย่างไรก็ตาม ทดลองเขียนเส้นกราฟพ่วงอยู่เหนือแกน x ถ้าเปลี่ยนสมการเป็น $y = -x^2$ ก็จะได้อีกกราฟทำนองเดียวกันแต่อยู่ใต้แกน x

(3) เราอาจสมมติค่าของ x ให้น้อยและ มากยิ่งไปกว่านี้ก็ได้ โดยไม่มีกำหนด และเส้นกราฟก็จะขยายกว้างออกไปทั้งสองข้าง

ตัวอย่างที่ ๒ เราจะเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ตามค่าที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

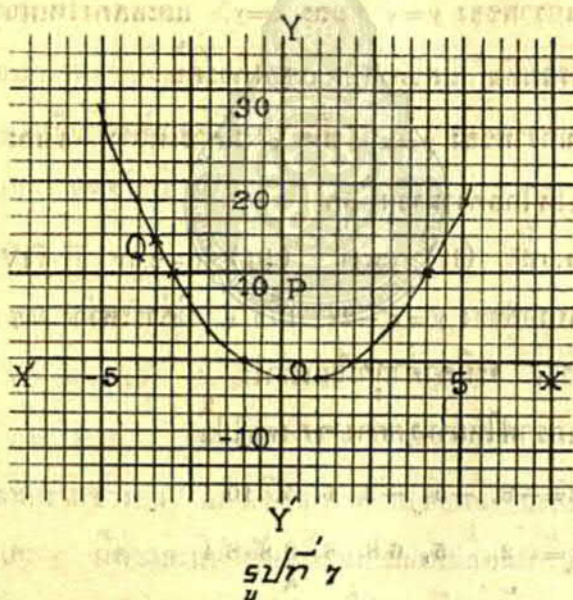
$$x = -5, -4, -1, 0, 1, 3, 5$$

$$y = 23, 18, 0, -2, -2, 4, 18$$

แล้วอ่านค่าของ x เมื่อ $y=10$ และค่าของ y เมื่อ $x=-3.5$

ใช้มาตราส่วน ๒ ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนแนวนอนและ $\frac{1}{2}$ ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบน

แกนตั้ง เขียนกราฟเส้นโค้งได้ดังในรูปที่ ๗



เมื่อ $y=10$ อยู่ที่ P ซึ่งมี $x=4$ หรือ -3

เมื่อ $x=-3.5$ อยู่ที่ Q ซึ่งมี $y=18.75$

1. จงเขียนกราฟของ $y=x^2$ โดยใช้มาตราส่วน 10 ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนทั้งสอง และใช้ค่าของ x ดังต่อไปนี้

$-0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

2. จงเขียนกราฟต่อไปนี้โดยใช้มาตราส่วน 10 ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนบน และ 1 ช่องเท่ากับ 1 หน่วยบนแกนอื่น

(I) $y=6x^2$

(II) $y=-6x^2$

(III) $y=12x^2$

3. จงเขียนกราฟของ $y=x^2$ และ $x=y^2$ และแสดงให้เห็นว่ากราฟทั้งสองนี้มีสมมาตรร่วมกัน แล้วหาสมการของสมมาตร

4. ให้เขียนกราฟของ $y=x^2$ เมื่อ x มีค่าระหว่าง -5 และ $+5$ แล้วอ่านค่าต่อไปนี้ให้ใกล้เคียงความจริงที่สุด

(I) $(1.9)^2$

(II) $(3.4)^2$

(III) $(-2.6)^2$

(IV) $(-3.7)^2$

5. จงเขียนกราฟของ $y=x^2-2x$ เมื่อ x มีค่าระหว่าง -5 และ 4 และดูจากกราฟว่า y จะมีค่าต่ำสุดเป็นเท่าไร

6. จงเขียนกราฟให้ผ่านจุดต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$x=-8, -5, -2, 1, 5, 10$

$y=2, 5, 6.8, 8, 8.8, 8.4$

แล้วอ่านค่าของ y เมื่อ $x=3$ และ $x=-3$

7. จงเขียนกราฟให้ผ่านจุดต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$y=10, 4, 0, -2, -2, 0, 4$

แล้วหาค่าของ x เมื่อ $y=7.4$

และค่าของ y เมื่อ $x=1.5$

8. $x = -1, 0, 2, 2.5, 4, 5.5$

$y = 15.5, 12.5, 6.5, 5, 0.5, -4$

จากค่าของ x และ y ที่สัมพันธ์กันข้างบน จงเขียนกราฟแล้วหาคะ
นอนและระยะย่นของรูปที่เส้นกราฟตัดแกนนอน

9. $x = 2, 4, 6, 8, 10, 12$

$y = 0.5, 2, 4.5, 8, 12.5, 18$

จงเขียนกราฟจากค่าของ x และ y ที่กำหนดให้ข้างบนนี้ แล้วหาค่า
ของ y เป็นเลขเต็มหน่วยเมื่อ $x=11$

10. จงเขียนกราฟต่อไปนี้

$x = \frac{1}{12}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{12}, -2$

$y = 12, 5, 0, 3, 4, 3, 0, -5$

11. $x = 25, 10, 5, 3.3, 2.5, 1.6, 1$

$y = 1, 2.5, 5, 7.5, 10, 15, 25$

จงเขียนกราฟข้างบน แล้วเขียนกราฟอีกเส้นหนึ่งบนเส้นแกนเดียวกัน ให้
 x และ y มีค่าและมีกำลังเหมือนกันแต่เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นลบหมด

12. จงทำตารางแสดงค่าของ x^2-3x เมื่อ x มีค่าเท่ากับ $-2, -1, 0, 1, 2, 3$

แล้วเขียนกราฟแสดงการแปรค่าของ x^2-3x เมื่อค่าของ x แปรไประ-

หว่าง -2 กับ 3 ในสมการต่อไปนี้ จงหาจำนวนที่แปรได้จำนวนหนึ่งแล้วหาค่าของ

จำนวนที่แปรได้อีกจำนวนหนึ่ง ทำตารางแสดงต่อไปแล้วเขียนกราฟให้
ผ่านจุดเหล่านั้น

13. $5y = x^2$

14. $12x = y^2$

15. $y = -9x^2$

16. $y = x^2 + 3$

17. $y = x(x-1)$

18. $y = 6x - x^2$

19. $x = (y+1)^2$

20. $y = x^2 + 7x - 5$

21. $y+2 = (x-3)^2$

22. $y = 2x + \frac{x^2}{4}$

23. $y = 6 - 5x - 6x^2$

24. $2x(2-x) = y-5$

โจทย์ระคน

1. จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

(I) $x^2 - 12x + 36$

(II) $3(a-b)^2 - 11(a-b) + 8$

(III) $(m+n)^2 - 4(m+n)(p-q) + 4(p-q)^2$

(IV) $6x^2(a-b) + 8x(a-b)^2$

2. จงคูณ $2a + a^4 - 3a^2 + 1$ ด้วย $a^2 - 2 - 2a$

3. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$3(c^2 + d^2) - \{ (c^2 + 2cd + d^2) - (2cd - c^2 - d^2) \} =$$

4. ถ้า $x=3$ จงหาว่า $-6x^2$ มีค่าเท่ากับ $(-6x)^2$ อยู่เท่าไร

5. x จะต้องมีค่าเป็นเท่าไร $5x+9$ จึงจะเท่ากับ $3x-5$

6. ชายคนหนึ่งมีเงินอยู่ 12,000 บาท เขาเอาเงินจำนวนหนึ่งไปทำการค้ากำไร
กำไรร้อยละ 7 ต่อปี และเอาเงินที่เหลือไปซื้อพันธบัตรที่ออกโดย
ร้อยละ 4 ต่อปี เมื่อสิ้นปีปรากฏว่าเขามีเงินได้คิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ 5 ของ
เงินทั้งหมด อยากทราบว่าเงินแต่ละจำนวนเป็นเท่าไร

7. รถยนต์คันหนึ่ง ออกเดินทางไป แล้ว 30 นาที ด้วยอัตราเร็ว ชั่วโมงละ 30 ไมล์
รถยนต์อีกคันหนึ่งจึงแล่นตามไปด้วยอัตราเร็ว ชั่วโมงละ 33 ไมล์ ถามว่า
รถยนต์คันหลังจะไปถึงคันแรกเมื่อไร

8. จงเขียนกราฟ $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$, $y = x + \frac{1}{2}$
และอ่านค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง

II

9. จงหาค่าของ x ในสมการต่อไปนี้

$$(I) (a-b)x = a^2 - 2ab + b^2 \quad (II) 3cx + x = 9c^2 + 6c + 1$$

$$(III) 7bx + 6 = 2x + 19b + 7b^2 \quad (IV) \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 7$$

10. จงหาผลคูณของ $p^3 - 2p^2q + 2pq^2 - q^3$, $p^3 + 2p^2q + 2pq^2 + q^3$

11. จงหาร $1 - 3n^4 - n + 5n^2$ ด้วย $3n^2 + 1 - 2n$

12. จงหารากกำลังที่สองของ $16x^2 - 8x + x^4 + 8x^6 - 2x^8 + 1$

13. จงแยกตัวประกอบของ

$$(I) m^2y^2 - 2my - 15 \quad (II) 4x^2 + 7x^2y - 21y - 12x$$

$$(III) 17(m-n) - 10a(m-n) + 9b(n-m) \quad (IV) 1 - 64p^6$$

14. ก. มีเงินเป็นสามเท่าของ ข. เมื่อ ก. ใช้หนี้ให้ ข. แล้ว 65 บาท จึงมีเงิน
เป็นสองเท่าของ ข. ถามว่ามีเงินคนละเท่าไร

15. ในกระเป๋าสตางค์ของฉันมีสตางค์สิบ สตางค์ห้า และสตางค์แปดปนกันอยู่
22 อัน ถ้าสตางค์สิบและสตางค์แปดรวมกันเป็น 96 สตางค์ และเงินใน
กระเป๋าทงหมดมี 1.81 บาท ขยลกทราบว่า มีสตางค์อยู่ชนิดละกี่อัน

16. ชายคนหนึ่งจะต้องขับรถยานไปไกล 75 ไมล์ ตอนแรกเขาไปด้วยอัตราเร็ว
ชั่วโมงละ 9 ไมล์ แล้วจึงเปลี่ยนอัตราเร็วเป็นชั่วโมงละ 15 ไมล์ และไป

จนถึงที่หมายในเวลา 7 ชั่วโมง จงหาโดยวิธีกราฟว่าเขาเปลี่ยนอัตราเร็ว
เมื่อไร

III

17. จงลดทอนการต่อไปนี้

$$(I) \quad 2mx - 3n^2x + 15mn^2 = 10m^2$$

$$(II) \quad 3x - 2rx = 5(3 - 2r) + (3 - 2r)(h - k)$$

$$(III) \quad \frac{5x}{7} - \frac{4}{5}(x - \frac{3}{4}) - \frac{2}{21}(x + \frac{7}{2}) + 1 = 0$$

$$(IV) \quad 2(\frac{5x}{3} - 1) + \frac{11}{5}(1 + \frac{1+x}{98}) = \frac{2x+7}{5} - 7$$

18. จงหาว่า $r^2 + \frac{9}{4}r^3 + \frac{21}{8}r^2 + \frac{33}{16}r + \frac{5}{16}$ ทั่วๆ $r^2 + \frac{3r}{2} + \frac{1}{4}$ โดยวิธีหารรวมกันและ
วิธีใช้แค่ตัวคูณควม

19. จงหาเศษเมื่อ $x-2$ หาร $3x^4 - 2x^3 + 3x - 15$

และเมื่อ $x+1$ หารผลคูณของ $x+3, x+4, x-7$

20. จงหาค่าของ (I) $\{9(x-y) - 11z^2\} \{9(x-y) + 11z^2\}$

$$(II) \quad (3x+2)^2 - (3x-1)^2 - 9x + 15$$

21. จงหารากกำลังสามของ $8x^3 - 88x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ และ $27 + 108y$
 $+ 90y^2 - 80y^3 - 60y^4 + 48y^5 - 8y^6$

22. เลขจำนวนหนึ่งมีสามหลัก ตัวเลขในหลักร้อยเป็นสี่เท่าของตัวเลขในหลัก
หน่วย และตัวเลขในหลักสิบมากกว่าสามเท่าของตัวเลขในหลักหน่วย
อยู่ 1 ถ้าตัวเลขในหลักทั้งสามรวมกันเท่ากับ 17 จงหาเลขจำนวนนั้น

23. รถไฟไปได้ m กิโลเมตรใน n ชั่วโมงและไปเร็วเป็น p เท่าของรถม้า
ถ้ารถม้าต้องเสียเวลา a ชั่วโมงเมื่อวิ่ง จากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง
ถามว่าเมืองทั้งสองนั้นอยู่ห่างกันเท่าไร

24. ในการสอบไล่ครั้งหนึ่ง คะแนนที่เด็กทำได้สูงสุด 207 คะแนน และคะแนนที่เด็กทำได้ต่ำสุด 132 คะแนน แต่โรงเรียนจะต้องลดคะแนนสูงสุดลงมาเป็น 200 คะแนน และให้คะแนนสูงสุดกับคะแนนต่ำสุดต่างกัน 150 คะแนน ถ้าเด็กสอบได้ 163, 200, 262, คะแนน จะหาโดยวิธีกราฟว่าเมื่อปรับคะแนนใหม่แล้วจะเป็นเท่าไร แล้วหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x (คะแนนที่เด็กสอบได้) และ y (คะแนนที่ปรับใหม่แล้ว)

IV

25. จงแยกตัวประกอบของ
 (I) $x^2 - 36(y-z)^2$ (II) $a-b-4(a-b)^2$
 (III) $c^2 - 25d^2 + c - 5d$ (IV) $p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$
26. โดยวิธีหาเศษ จงแสดงว่า (I) $x-y$ หาร $x^2 + xy^2 - 2y^3$ ลงตัว
 (II) ถ้า $x+3$ หาร $4x^2 + x - 11a$ ลงตัว a จะมีค่าเป็นเท่าไร?
27. จงหาวากกำลังที่สองของ (I) $(2x^2 + 11x - 21)(2x^2 - x - 3)(x^2 + 8x + 7)$
 (II) $(2x^2 - 11xy + 15y^2)(4x^2 - 25y^2)(2x^2 - xy - 15y^2)$
28. จงหากำลังสองของ $m^2 + 7m - 11$ และกำลังสามของ $2p^2 - 3q^2$
29. ถ้า $x = 6, y = 7, z = 8$ จงหาค่าของ
 (I) $x - (y-z) - 2 \left[x+z-3 \left\{ -2(y-1) \right\} \right] + 4 \left[\frac{2}{x} \left(3 - \frac{9}{2}y \right) \right]$
 (II) $x \left\{ y \left(z - \frac{1}{z} \right) \right\} - \frac{y}{z} \left\{ y - 3 \left(\frac{x}{3} - xz^2 \right) \right\} - 2xz \left\{ -y \left(1 + \frac{y}{2xz} \right) \right\}$
30. แม่ค้ามีเงินอยู่ 27 บาทเป็นธนบัตรใบละห้าบาทและใบละหนึ่งบาทปนกัน ถ้าเธอมีธนบัตรใบละห้าบาทเพิ่มจนอีกครึ่งหนึ่ง และมีธนบัตรใบละหนึ่งบาทเป็นสี่เท่าของเดิม เธอจะมีเงินมากกว่าเดิม 31 บาท อยากทราบว่าเธอมีธนบัตรอยู่ชนิดละกี่ใบ

31. เวลานั้นยังมีชายเป็นเศษสองส่วนห้าของพ่อ แต่เมื่อแยกกันก่อนนั้นมิชาย
เป็นเพียงเศษสองส่วนเก้าของพ่อ ปรากฏอายุของคนที่สองในเวลานั้น
32. ชาวนาซื้อไก่ 30 ตัว และหมู 20 ตัว ราคารวมกัน 355 บาท ถ้าเขาซื้อไก่
มากกว่าซื้อหมูหนึ่งโหล ราคาถูกลงตัวละ 50 สตางค์ และซื้อหมูน้อยลง
5 ตัว ราคาถูกลงเป็นร้อยละ 80 ของราคาเดิม เขาจะจ่ายเงินน้อยลง
(กี่บาท) ถ้ารู้ว่าเขาซื้อไก่และหมูมาตัวละเท่าไร

V

33. หาคำถึงห้าของ $-\frac{5a^2b}{7x^2y}$ และหาค่าของ $81x^2y^2z^4$ ถ้า $3x^2y^2z = 13$
34. หาค่าของ $(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 + (y+z-x)^2$
35. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่?
(I) กำลังสามของผลต่างของเลขสองจำนวนเท่ากับผลต่างของ กำลังสาม
ของเลขสองจำนวนนั้น
(II) ถ้าด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเป็นสองเท่า พื้นที่ของสี่เหลี่ยม
จัตุรัสนั้นจะเพิ่มเป็นสองเท่าด้วย
36. หงแยกตัวประกอบของ
(I) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (II) $1 - (a^2 + b^2) - 2ab$
(III) $cd(x^2 + 1) - x(c^2 + d^2)$ (IV) $y^2a^3 - d^3 + y^2 - 1$
37. หงลดสมการต่อไปนี้
(I) $5x + 9y = 75$ (II) $57a + 52b = 181$
 $4x - 7y = -1$ $76a - 39b = 458$
38. ถ้าส้ม 25 ผลกับมังคุด 60 ผล ราคา 6.80 บาท และส้ม 6 ผลราคาเท่ากับ
มังคุด 40 ผล ถ้ารู้ว่าส้มราคาผลละเท่าไร? และมังคุดราคาตัวละเท่าไร?

39. เลขจำนวนหนึ่งมีสามหลัก ตัวเลขในหลักจากซ้ายไปขวาเรียงจากมากไปน้อยตามลำดับ ถ้าเอาผลบวกของตัวเลขในหลักทั้งสามหารเลขจำนวนนั้นจะได้ 48 และถ้าเอา 198 หักออกจากเลขจำนวนนั้น จะได้เลขเหมือนกับจำนวนเดิมแต่กลับหลักกัน อยากทราบว่าเลขจำนวนนั้นคืออะไร
40. จงเขียนกราฟของ $y = x^2 + x - 12$ และ $y - x = 4$ บนแกนคู่เดียวกัน และอ่านจุดที่เส้นกราฟทั้งสองตัดกัน

VI

41. จงลดทอสมการ (I) $\frac{x+5y}{5} = 4$ (II) $\frac{3}{m} + 5n - 21 = 0$
 $\frac{1}{2}x - 5y = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{m} - 3n - 1 = 0$
 (III) $2x - y + 3z = 3$
 $x - 7y - z = -23$
 $x + 2y + 4z = 14$
 (IV) $2x + 3y - 4z = 5y - 3z - 6 = 2y - 3x + z + 1 = 0$
42. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ $(x-y)^2 - (y-z)(y+z-8x) - (x-z)^2$
43. จงหาร $6x^3 + 57x^2y + 128xy^2 - 60x^2y^3 - 130xy^4 + 63y^5$ ทั่วๆ $3x^3 + 15x^2y + 7xy^2 - 9y^3$ ใต้เท่าไรคูณทั่วๆ $2x^4y^3 - 4x^3y^2 + 3x^2y - xy^2 - 7$
44. จงแสดงว่า $n(n-1)(n-2)(n-3) = (n^2 - 3n + 1)^2 - 1$
45. จงแยกตัวประกอบของ
 (I) $p^3 - q^3 - (x^2 - pq)(p - q)$ (II) $3y^2 - 2mn - y(n - 6m)$
 (III) $x(y^2 + z^2 - x^2) + y(x^2 + z^2 - y^2)$ (VI) $a^7 - a^2 + 8a^4 - 8$
46. จงแสดงว่าจุด $(2, -2), (6, 22), (-1, 7)$ อยู่บนเส้นกราฟที่มีสมการแบบ $y = ax^2 + b$ แล้วหาค่าของ a และ b

47. ถ้าลูกหัวนสามตัวกับลูกไก่สองตัวราคา 2.07 บาท ลูกเป็ดสองตัวกับลูกหัวน
สี่ตัวราคา 2.10 บาท ลูกไก่หนึ่งตัวกับลูกเป็ดสามตัวราคา 81 สตางค์ จง
หาว่าสัตว์แต่ละชนิดราคาตัวละเท่าไร
48. รถไฟสายหนึ่งแล่นจากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง เมื่อแล่นไปได้ 50
กิโลเมตร ก็เกิดอุปสรรคต้องแล่นช้าลงเป็นเศษสามส่วนห้าของความเร็ว
เดิมและถึงปลายทางช้าไป 3 ชั่วโมง แต่ถ้าอุปสรรคเกิดขึ้นห่างออกไป
จากที่เดิมอีก 50 กิโลเมตร ก็จะถึงปลายทางช้าไปเพียง 2 ชั่วโมง จงหา
ระยะทางระหว่างเมืองทั้งสองและความเร็วเดิมของรถ



พิมพ์ที่ โรงพิมพ์คุรุสภา

นายสหัส กาญจนพัตตะ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา

๓๑ มีนาคม ๒๔๘๒

๗. ๕๓



โรงพิมพ์ตุรุสภา