



แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก.-ข.

ตอนที่ ๑ (เลขคณิต พีชคณิต และสถิติ)

ปรีชา มัธยมศึกษาตอนปลาย

ของ

กระทรวงศึกษาธิการ



แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก.-ข.

ตอนที่ ๑ (เลขคณิต พีชคณิต และ สถิติ)

ประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย

ของ

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่ ๘,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๐๕

ปกกระดาษราคาเล่มละ ๑๑.๐๐ บาท

(ห้ามขายเกินกว่าราคาที่กำหนดไว้)

พิมพ์ที่โรงพิมพ์คุรุสภา

ปากคลองบางลำพู น. พระนคร

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ ก ๐๒๘๒๕

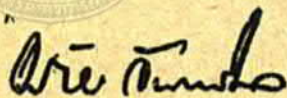
๓๐๐๓๕-๕๓๓๓๗

๑/๒

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในโรงเรียน

ด้วยกรมวิชาการได้จัดทำแบบเรียน คณิตศาสตร์ ก. ข.
ตอนที่ ๑ (เลขคณิต พีชคณิต และสถิติ) เพื่อใช้สำหรับ
ประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. ๔ - ๕) แผนกวิทยาศาสตร์
แผนกศิลปะ และแผนกทั่วไป ที่เรียนคณิตศาสตร์สัปดาห์ละ ๖
ชั่วโมงขึ้น กระทรวงศึกษาธิการได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้
หนังสือในโรงเรียนได้.

ประกาศ ณ วันที่ ๑๕ มิถุนายน ๒๕๐๕



ปลัดกระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก.-ข. ตอนที่ ๑ (เลขคณิต พหุคูณ และสถิติ) นี้ กรมวิชาการได้ขออนุมัติกระทรวงศึกษาธิการให้ นายจรูญ วงศ์สายัณห์ นางสลาย โรจนสโรช นายลัยอาจ ภมระราภา นางพรรณพิศ วสันตสิงห์ นางวิบูลลักษณ์ ชำรรัชต์ และนางสาวอุบล วรรณิณี เป็นผู้เรียบเรียงขึ้น และกระทรวงศึกษาธิการได้แต่งตั้งให้ นายระบิล สัตสุวรรณ เป็นผู้ตรวจ

แบบเรียนเล่มนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สำหรับประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. ๔-๕) แผนกวิทยาศาสตร์ แผนกศิลป์ และแผนกทั่วไปที่เรียนคณิตศาสตร์สัปดาห์ละ ๖ ชั่วโมง หวังว่าแบบเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่การศึกษาในชั้นตามสมควร.

กรมวิชาการ

สารบาญ

หน้า

เลขคณิต — พีชคณิต

บท 1	ทฤษฎีว่าด้วยฟังก์ชันและสมการกำลังที่สอง	1
บท 2	การแก้สมการ	35
บท 3	การแปรผัน	92
บท 4	ตัวเงิน	117
บท 5	หุน (สต็อก และแชร์)	127
บท 6	ทฤษฎีของเลขคี่	141
บท 7	เสียด	150
บท 8	ลอการิทึม	171
บท 9	Undetermined Coefficients	191
บท 10	ฟังก์ชัน เอกพันธ์	210
บท 11	การแยกตัวประกอบด้วยวิธีต่าง ๆ	217
บท 12	อนุกรม	229
	แบบฝึกหัดระดับคนชุดที่ 1	255
	แบบฝึกหัดระดับคนชุดที่ 2	261

วิชาสถิติเบื้องต้น

บทนำ	ข้อความเบื้องต้น	268
บทที่ 1	การนำเสนอข้อมูล	281
บทที่ 2	สัดส่วนและเปอร์เซ็นต์	314
บทที่ 3	การแจกแจงความถี่	329
บทที่ 4	การกำหนดตำแหน่งด้วยเปอร์เซ็นต์ไทล์	353
บทที่ 5	การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง	367
บทที่ 6	การวัดความแปรปรวน	383



บทที่ 1

ทฤษฎีหาค่ารากของฟังก์ชันกำลังสอง

(Theory of Quadratic Functions and Equations)

ก่อนจะกล่าวถึงฟังก์ชันกำลังสอง ควรจะเข้าใจความหมายของคำบางคำก่อนดังนี้

1. นิพจน์ (Expression) หมายถึงจำนวนต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วยพจน์หลายพจน์ แต่ละพจน์แยกกันด้วยเครื่องหมายบวก หรือ ลบ เช่น $a + b$, $x + b - c$ เป็นต้น
2. ตัวแปรเปลี่ยน (Variable) คือ ตัวที่มีค่าเปลี่ยนไปได้ไม่คงที่ มักจะนิยมใช้อักษรพิมพ์ไทย ๆ เช่น x , y , z แทน
3. ฟังก์ชัน (Function) คือ นิพจน์ซึ่งมีตัวแปรเปลี่ยนปรากฏอยู่ เช่น มี x อยู่ในนิพจน์นั้น เรียกว่าฟังก์ชันของ x ค่าของฟังก์ชันย่อมแปรไปตามค่าของตัวแปรเปลี่ยน x เช่น $ax + b$, $2x + 1$, กำลังของตัวแปรเปลี่ยนในนิพจน์มีอย่างสูงเป็น 1 เรียกว่า ฟังก์ชันกำลังหนึ่ง (Linear Function) หรือ $ax^2 + bx + c$ กำลังของตัวแปรเปลี่ยน x มีอย่างสูงในนิพจน์เป็น 2 เรียกว่า ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)
4. สมการ คือ ฟังก์ชันซึ่งจากคาลงไปแน่นอนแล้ว เช่น $ax + b = y$ หรือ $ax + b = 0$ เรียกว่า สมการกำลังหนึ่ง (Linear Equation)

$ax^2 + bx + c = y$ หรือ $ax^2 + bx + c = 0$ เรียกว่าสมการกำลังสอง (Quadratic Equation) เมื่อฟังก์ชันมีค่าจากลงไป ตัวแปรเปลี่ยนค่าเป็นต้องมีค่าจากค่าคงที่ไปด้วย ซึ่งเรียกว่า รากของสมการ

5. รูปทั่วไป (Standard form) ของฟังก์ชันกำลังสอง

ที่ใช้กันทั่วไป คือ $ax^2 + bx + c$, a เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^2 , b เป็นสัมประสิทธิ์ของ x และ c เป็นพจน์อิสระ (absolute term) ทั้ง a , b และ c นี้ ถือเป็นจำนวนคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง

6. การแยกแฟกเตอร์จากฟังก์ชันกำลังสอง

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[x - \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \right] \left[x - \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \right]$$

แฟกเตอร์ของฟังก์ชันกำลังสอง มี 2 แฟกเตอร์ คือ

$$\left[x - \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \right], \text{ และ } \left[x - \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \right]$$

รูปทั่วไปของสมการกำลังสอง คือ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

เมื่อ a , b , c เป็นจำนวนคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง

7. สูตรการหารากของสมการกำลังสอง

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ให้ a หาคำตอบ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เพราะฉะนั้น รากของสมการกำลังสองมี 2 ราก คือ

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ข้อสังเกต จะเห็นว่าทั้งในแฟกเตอร์ของฟังก์ชันกำลังสอง และในราก

ของสมการกำลังสอง มี $b^2 - 4ac$ ตั้งอยู่ในเครื่องหมายเศษ

และ $b^2 - 4ac$ นี้ เรียกว่า discriminant ของฟังก์ชันกำลังสอง

หรือ discriminant ของสมการกำลังสองซึ่งใช้เครื่องหมาย Δ แทน

การหารากของสมการกำลัง 2 ถ้ารากเป็นจำนวนลงตัว เรา

หาคำตอบแยกตัวประกอบได้ แต่ถ้าค่าของรากเป็นจำนวนไม่ลงตัว

ต้องใช้สูตรข้างต้น เช่น

ตัวอย่าง จงหารากของ $4x^2 - 4x - 1 = 0$

วิธีทำ เทียบกับรูปทั่วไปของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ ได้

$a = 4, b = -4, c = -1$ แยกตัวประกอบไม่ได้ต้องใช้สูตร

$$\begin{aligned} \text{รากสูตร} \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{8} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{32}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} \\
 &= \frac{4(1 \pm \sqrt{2})}{8} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} = 1.21, - .21
 \end{aligned}$$

8 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (Graphs of Quadratic Functions)

8.1 ความหมายของฟังก์ชันกำลังสอง

จำนวนพหุนามดีกรี 2 ที่ประกอบด้วยการเปลี่ยนแปลงอิสระตามกำลัง
 อย่างสูงเป็นสอง เรียกว่าฟังก์ชันกำลังสอง เช่น จำนวน $2x^2 + 1$
 มีค่าเปลี่ยนแปลงไปได้เพราะการเปลี่ยนแปลงของ x แต่ x มี
 กำลังสอง ดังนั้นจึงเรียก $2x^2 + 1$ ว่าฟังก์ชันกำลังสองของ x หรือ
 ฟังก์ชันชั้นสองของ x

8.2 รูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันกำลังสองมีรูปทั่วไป คือ $ax^2 + bx + c$ รูปทั่วไปนี้

อาจจะเปลี่ยนแปลงไปได้อีก คือ

เมื่อ b, c มีค่าเท่ากับ 0 ฟังก์ชันจะมีรูป ax^2

เมื่อ b มีค่าเท่ากับ 0 ฟังก์ชันจะมีรูป $ax^2 + c$

เมื่อ c มีค่าเท่ากับ 0 ฟังก์ชันจะมีรูป $ax^2 + bx$

ลักษณะของกราฟฟังก์ชันกำลังสอง จะเป็นรูปโค้งในลักษณะ
 รอยขีดของทรงกรวย Conic Section ที่เรียกว่าพาราโบลา (Parabola)

8.8 การสร้างกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

ในการสร้างกราฟของฟังก์ชัน x กำลังสอง ก็จะเริ่มต้นด้วยการกำหนดให้ y เป็นค่าของฟังก์ชันนั้น เพื่อหาฟังก์ชันของ x ที่หลายบน
วาดกราฟนั้นก่อนที่จะสร้างรูป

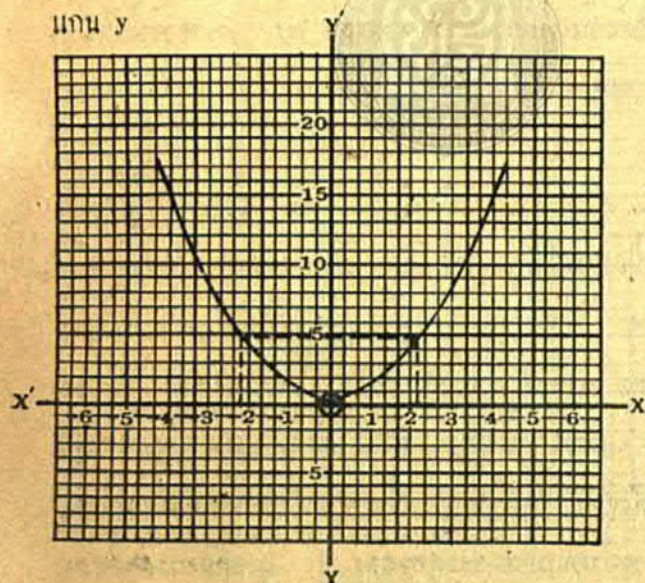
ตัวอย่างที่ 1 จะสร้างกราฟของ x^2 และหาค่าประมาณของ $\sqrt{5}$

วิธีทำ ให้ $y = x^2$

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

มาตราส่วน 8 ช่อง : 1 หน่วยบนแกน x 1 ช่อง : 1 หน่วยบน

แกน y



จาก $y = x^2$

คือ $\sqrt{y} = +x$

ดังนั้นในการหาค่า

$\sqrt{5}$ จึงหาได้เมื่อ

$y = 5$

$\therefore$ จากกราฟ

อ่านได้ $x = 2.28$ และ

-2.28 โดยประมาณ

คือ $\sqrt{5} = \pm 2.28$

รูปที่ 1

8.4 ข้อควรสังเกตจากกราฟพาราโบลา

ากรูปพาราโบลาในตัวอย่างที่ 1 มีข้อควรจำเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง หรือพาราโบลาทั้งต่อไป

1. ในตารางหาฟังก์ชันของรูป $y = ax^2 + bx + c$ จะเห็นว่าเมื่อ y หรือฟังก์ชันมีค่าหนึ่งค่า x มีได้ถึง 2 ค่าเสมอ คือ เมื่อ $y = 1; x = 1$ และ -1 เมื่อ $y = 4; x = 2$ และ -2 นั่นเป็นลักษณะหนึ่งของกราฟของตัวแปรฟังก์ชันกำลังสองจะมีถึง 2 ค่า ต่อเมื่อค่าฟังก์ชันมีเพียงค่าเดียว

2. ท้ายอกโค้ง (Vertex) ของรูปพาราโบลาจะอยู่ที่จุด turning point ซึ่งในกราฟนี้คือแกน y ค่าของฟังก์ชัน (Ordinate) ที่จุด turning point นี้ คือค่าต่ำสุด (Minimum Value) ของฟังก์ชัน และในกรณีพาราโบลาหันส่วนโค้งขึ้น (ดังในรูปตัวอย่างที่ 2) ค่าของฟังก์ชัน (Ordinate) ที่จุด turning point ก็คือค่าสูงสุด (Maximum Value) ของฟังก์ชันเช่นกัน

3. กราฟ $y = x^2$ เปรียบเทียบกับ $y = ax^2$ ก็คือ a มีค่า $+1$ ฉะนั้นค่าของ y หรือฟังก์ชันย่อมเป็นค่าบวกตลอด วัตถุของกราฟย่อมจะอยู่เหนือแกน x ขึ้นไปเรื่อย ๆ เส้นโค้งจะหงายขึ้น ทำให้เกิดค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ถ้า a เป็นลบ ค่าของ y หรือฟังก์ชันจะเป็นค่าลบตลอด วัตถุของกราฟจะพุ่งลงใต้แกน x เส้นโค้งจะคว่ำลง มีโค้งที่เป็นส่วนสูงสุดของรูป และเกิดค่าสูงสุดของฟังก์ชัน ดังนั้นในการสร้างพาราโบลาจากฟังก์ชันกำลังสองทุกรูป ให้สังเกตกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 เมื่อสัมประสิทธิ์ของ

x^2 เป็นจำนวนบวกยกโคจจะหันลงข้างล่าง เมื่อเป็นจำนวนลบยกโคจจะหันขึ้นข้างบน

4. รูปพาราโบลาจะต้องเป็นรูปที่มีลักษณะสมมาตร (Symmetry) คือเมื่อลากเส้นตรงให้ผ่านจุด (turning point) คือจุดยอดของเส้นโค้ง (Vertex) และตั้งฉากกับพิภพกรวย (Abscissa) ให้เป็นแกนสมมาตร (Axis of Symmetry) ซึ่งในตัวอย่างที่ 1 โค้งแกน y แล้วจุดของกราฟที่โค้งไปทางซ้ายและทางขวา จะมีระยะพิภพกรวยจากแกนสมมาตรเท่ากันทุกชั้นไป และทำให้รูปมีลักษณะสมมาตรกัน (Symmetry)

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $-2x^2 - 3$ และหากรูปกราฟจะตอบคำถามต่อไปนี้

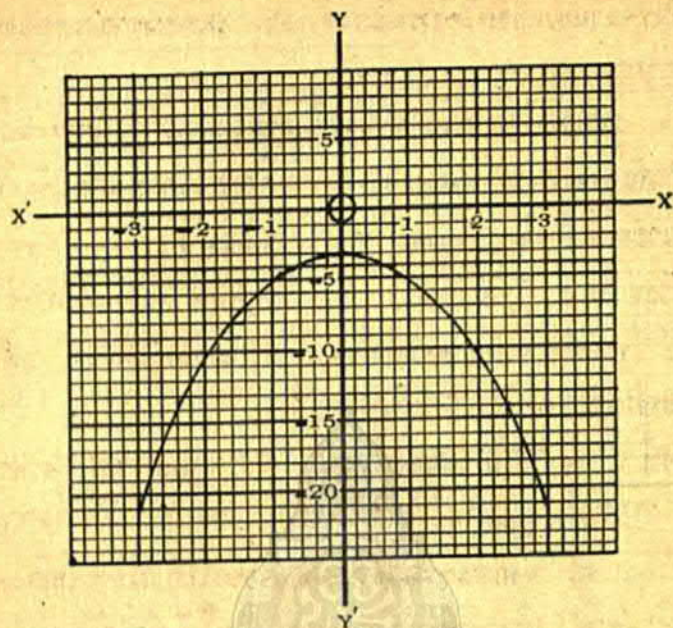
- ฟังก์ชันจะมีเครื่องหมายอย่างไร เมื่อ x เปลี่ยนแปลง
- เมื่อ x มีค่า 1.5 และ -1.5 ฟังก์ชันมีค่าเท่าไร
- เมื่อฟังก์ชันมีค่า -10 x มีค่า ค่าอะไร
- ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดเท่าไร

วิธีทำ ให้ $y = -2x^2 - 3$

x	0	1	2	-1	-2	-3
$-2x^2$	0	-2	-8	-2	-8	-18
$y = -2x^2 - 3$	-3	-5	-11	-5	-11	-21

มาตราส่วน 1 : 1 บนแกน y

5 : 1 บนแกน x



รูปที่ 2

จากกราฟ

ตอบ ก. เมื่อ x มีค่าเปลี่ยนแปลงไป ค่าของ y ก็เปลี่ยนแปลงไป

เช่น แสดงว่าฟังก์ชัน $-2x^2 - 3$ นั้นมีแต่เครื่องหมาย

ลบตลอด

ข. เมื่อ x มีค่า ± 1.5 ค่าของ y หรือฟังก์ชัน $-2x^2 - 3$ มีค่าเท่ากับ -7.5

ค. เมื่อฟังก์ชัน $-2x^2 - 3$ มีค่า -10 x มีสองค่า คือ 1.85 และ -1.85 ค่าประมาณ

ง. ทหาคะบอก(vertex) มีพิกัด $(0, -3)$ คือฟังก์ชัน $-2x^2 - 3$ มีค่าสูงสุดเป็น -3

8.6 การแก้สมการกำลังสองโดยกราฟ

สมการกำลังสองจะเกิดขึ้นได้เมื่อได้กำหนดค่าให้แก่ฟังก์ชันกำลังสองลงไปในช่วงหนึ่ง ๆ ฉะนั้นในการสร้างกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง เมื่อกำหนดค่า y ให้เป็นค่าของฟังก์ชัน เช่น $y = x^2$ หรือ $y = -2x^2 - 8$ นั้น ก็จะเป็นการสร้างกราฟของสมการกำลังสองนั่นเอง และเมื่อ y มีค่าคงที่หนึ่ง ๆ x ย่อมจะมีค่า 2 ค่าเสมอ ค่า x ทั้งสองค่านี้ คือตัวแก้ของสมการ หรือที่เรียกว่ารากของสมการกำลังสองนั่นเอง

รูปทั่วไปของสมการกำลังสอง

สมการกำลังสองมีรูปทั่วไป คือ $ax^2 + bx + c = 0$ ตามความหมายก็คือ เมื่อฟังก์ชัน $ax^2 + bx + c$ มีค่า 0 นั่นเอง และในการแก้สมการนี้ ก็คืออ่านค่าพิกัดรากของทุกที่เส้นกราฟของ $ax^2 + bx + c$ ที่ตัดกับเส้น $y = 0$ หรือแกน x นั่นเองเป็นค่าของรากสมการ

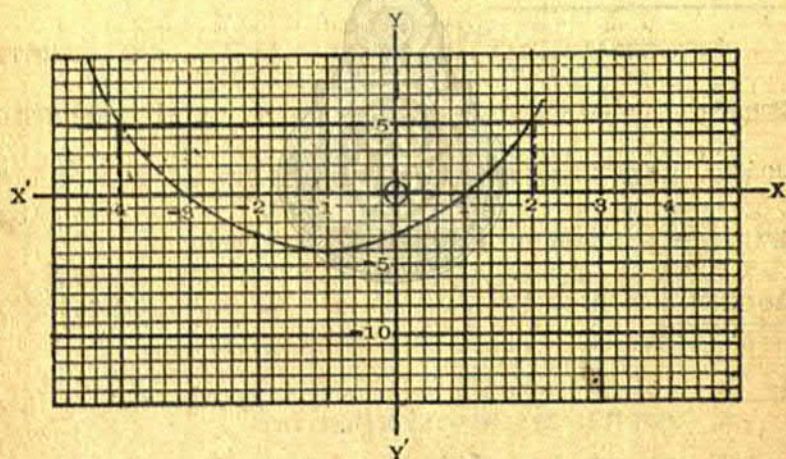
ตัวอย่างที่ 8 จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $x^2 + 2x - 3$ และตอบข้อความต่อไปนี้

- เครื่องหมายของฟังก์ชันเป็นอย่างไรบ้าง
- ค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป็นเท่าไร เมื่อ x เปลี่ยนแปลงไปเป็นจำนวนจริง
- สมการ $x^2 + 2x - 3 = 0$ มีรากของสมการเป็นเท่าไร
- ระนาบกราฟของฟังก์ชันนี้แกสมการ $x^2 + 2x - 8 = 0$ ได้โดยวิธีใด และจะได้ค่า x เท่าไร

x	0	1	2	-4	-1	-2	-3	1.5
x^2	0	1	4	16	1	4	9	2.25
$2x$	0	2	4	-8	-2	-4	-6	+3.0
$y = x^2 + 2x - 3$	-3	0	5	5	-4	-3	0	-2.25

มาตราส่วน 5 : 1 ขนแกน x

1 : 1 ขนแกน y



จากกราฟ

ตอบ ก. เมื่อ x เปลี่ยนแปลงค่ามากกว่า 1 ค่า y จะเพิ่มขึ้น

∴ ฟังก์ชันมีเครื่องหมายบวก

เมื่อ x เปลี่ยนแปลงค่าน้อยกว่า -3 ค่า y จะเพิ่มขึ้น

∴ ฟังก์ชันมีเครื่องหมายบวก

ถ้า x เปลี่ยนแปลงค่าน้อยกว่า 1 แต่ยังคงมากกว่า -8 หรือ
เรียกว่าระหว่าง 1 และ -8 ค่า y เป็น - เส้นโค้ง

อยู่ใต้แกน x

∴ ฟังก์ชันมีเครื่องหมายลบ เมื่อ x มีค่าระหว่าง 1 และ -8

ข. เมื่อ x เปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนจริง ฟังก์ชันมีค่าน้อยกว่า -4

ค. สมการ $x^2 + 2x - 3 = 0$ มีรากเป็น 1 และ -3

ง. สมการ $x^2 + 2x - 8 = 0$ จะอาศัยแก้สมการจากกราฟ
ของฟังก์ชัน $x^2 + 2x - 3$ ได้ โดยทำให้รูปทางซ้ายมือ
ในสมการเหมือนกับฟังก์ชัน $x^2 + 2x - 3$ ดังนี้

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \text{ก็คือ} \quad x^2 + 2x - 3 = 5$$

ดังนั้นจึงอ่านค่า x จากกราฟของ $y = x^2 + 2x - 3$

ที่ตัดกับกราฟของ $y = 5$ ได้ค่า $x = 2$ และ -4

8.6 การแก้สมการกำลังสองแบบแยกฟังก์ชัน

ในการแก้สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ตามที่เรียนมาแล้วนั้น ได้
กระทำโดยวิธีสร้างกราฟของฟังก์ชัน $ax^2 + bx + c$ ขึ้นก่อน แล้วอ่านค่า x
เมื่อฟังก์ชันนั้นค่า = 0 เป็นรากสมการ แต่ในการแก้สมการอาจจะทำได้
โดยวิธีอีกอย่างหนึ่ง คือ แยกสมการออกเป็นสองฟังก์ชันที่มีค่าเท่ากัน คือ
 $ax^2 = -bx - c$ แล้วสร้างกราฟ $y = ax^2$ และ $y = -bx - c$ ขึ้นตัก
กัน ค่า x ที่หาคัดทั้งสองเป็นรากสมการ

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $2x^2 + x - 15 = 0$ โดยวิธีกราฟ

วิธีทำ โค้ชวอแบกเป็นสองฟังก์ชัน $\therefore 2x^2 = 15 - x$

ให้ $y = 2x^2$

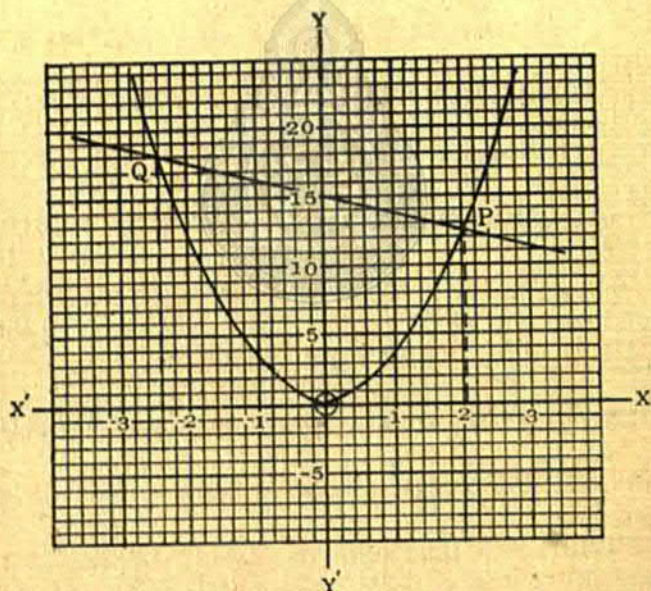
และ $y = 15 - x$

x	0	± 1	± 1.5	± 3.5
y	0	2	4.5	24.5

x	0	2	-1
y	15	13	16

มาตราส่วน 4 : 1 ขนแกน x

1 : 1 ขนแกน y



จากกราฟ

โค้วพาราโบลาตัดกับเส้นตรงที่จุด P และ Q

ตอบ $x = 2.5$ และ -3

 มหาวิทยาลัยศิลปากร

 แบบฝึกหัด ชุดที่ 1 ก.

หรรากของสมการต่อไปนี้

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $x^2 - 8x + 15 = 0$
3. $x^2 + (a - 2b)x = 2ab$
4. $5t^2 = 7t + 6$
5. $x^2 + 8x + 4 = 0$
6. $m^2 - 5m + 1 = 0$
7. $2y^2 = 7y - 5$
8. $14y^2 - 5y = 1$
9. $x^2 - 2x - mx + 1 + m - 2m^2 = 0$
10. $3t^2 - 2t = 6$
11. $5x^2 + 3x - 5 = 0$
12. $\frac{t - 3}{2t - 7} = \frac{2t - 1}{t + 3}$
13. $\frac{3P + 1}{P + 8} + \frac{P - 8}{3P - 1} = 1$
14. $5y^2 + 4 + 21y = 0$
15. $3m^2 + 121 = 44m$

เขียนกราฟหรรากสมการต่อไปนี้

16. $x^2 - 4x + 1 = 0$
17. $2x^2 - 7 = 5x$
18. $x^2 + 5x = -10$
19. $x^2 - 4x + 4 = 0$
20. $x^2 + x = 6$

9. ชนิดของตัวเลข (Numbers)

1. จำนวนตรรกยะ (Rational Number) คือจำนวนเลขที่ทําเป็นเศษส่วนได้ เช่น 2 , $.3$, $.4$, $\frac{2}{5}$

2. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) คือจำนวนเลขที่ทําเป็นเศษส่วนค่าประมาณใกล้เคียงเท่านั้น ฉะนั้นจึงไม่สามารถทําเป็นเศษส่วนได้ เช่น $\sqrt{2} = 1.414 \dots\dots$, $\sqrt{3} = 1.732 \dots$

3. จำนวนจริง (Real Number) ได้แก่จำนวนที่เป็น Rational และ Irrational Numbers

4. จำนวนไม่จริง (Unreal) คือจำนวนเลขที่ไม่ทราบค่าแน่แต่เพียงค่าประมาณ เช่นจำนวนเลขลบที่ตกอยู่ในเครื่องหมายเสือกกำลังที่เป็นเลขคู่ เช่น $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-8}$ เป็นต้น

10. การพิจารณาลักษณะรากของสมการกำลังที่สอง ลักษณะรากของสมการกำลังสองขึ้นอยู่กับ Discriminant คือ $b^2 - 4ac$ ซึ่งใช้เครื่องหมาย Δ แทนดังนี้

1. ถ้า $\Delta = 0$ รากของสมการเป็นจำนวนจริง จำนวนตรรกยะ (rational) และมีค่าเท่ากัน

2. ถ้า Δ เป็นจำนวนบวกและเป็นกำลังสองสมบูรณ์ รากสมการเป็นจำนวนจริง จำนวนตรรกยะ (rational) แต่มีค่าไม่เท่ากัน

3. ถ้า Δ เป็นจำนวนบวก แต่ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ รากของสมการเป็นจำนวนจริง จำนวนอตรรกยะ (Irrational) แต่มีค่าไม่เท่ากัน

4. ถ้า Δ เป็นจำนวนลบ รากของสมการเป็นจำนวนไม่จริง และค่าไม่เท่ากัน

ค่าของ $b^2 - 4ac$ หรือ Δ จะใช้ในการพิจารณาแฟคเตอร์ของฟังก์ชันกำลังสองใดเช่นเดียวกัน

1. ถ้า $\Delta = 0$ แฟคเตอร์ของฟังก์ชันเป็นจำนวนจริง จำนวนตรรกยะ (rational) และมีค่าเท่ากัน

2. ถ้า Δ เป็นจำนวนบวกและเป็นกำลังสองสมบูรณ์ แฟคเตอร์ของฟังก์ชันเป็นจำนวนจริง จำนวนตรรกยะ (rational) แต่มีค่าไม่เท่ากัน

3. ถ้า Δ เป็นจำนวนบวก แต่ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ แฟคเตอร์เป็นจำนวนจริง จำนวนอตรรกยะ (Irrational) และมีค่าไม่เท่ากัน

4. ถ้า Δ เป็นจำนวนลบ แฟคเตอร์ของฟังก์ชันเป็นจำนวนไม่จริง และค่าไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาลักษณะของรากแห่งสมการ $5x^2 - 2x - 7 = 0$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \text{ และในที่นี้ } a = 5, b = -2, c = -7$$

$$\therefore \Delta = 4 - 4(5)(-7)$$

$$= 4 + 140 = 144 = (12)^2$$

เมื่อ Δ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ รากสมการเป็นจำนวนจริงและ เป็นจำนวนตรรกยะ แต่มีค่าไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่า แฟคเตอร์ของฟังก์ชัน $2x^2 - 4x + 1$ เป็นจำนวนชนิดใด

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1$$

$$= 16 - 8$$

$$= 8$$

แฟกเตอร์ของพหุนามเป็นจำนวนจริง อตรรกยะ (irrational) และค่าไม่เท่ากัน

11. ความสัมพันธ์ของรากเกี่ยวกับตัวสัมประสิทธิ์ในสมการกำลังสอง

เพราะสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีราก 2 ราก ดังนั้นให้ α และ β เป็นรากทั้ง 2 น

$$\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ผลบวกของราก คือ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-\text{สัมประสิทธิ์ของ } x}{\text{สัมประสิทธิ์ของ } x^2}$

ผลคูณของราก คือ $\alpha \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{พจน์อิสระ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของ } x^2}$

$\therefore$ เกิดเป็นสูตรการตั้งสมการกำลังสองคือ $x^2 - (\text{ผลบวกของราก})x + \text{ผลคูณของราก} = 0$

จากความสัมพันธ์ของรากและสัมประสิทธิ์ จะใช้ประโยชน์ในการทำสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับรากของสมการได้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง ถ้า α และ β เป็นรากของสมการ $px^2 + 2qx + r = 0$ จงหาผลบวกของกำลังสามของรากทั้งสอง

วิธีทำ สมการ $px^2 + 2qx + r = 0$

$$\text{ผลบวกของราก คือ } \alpha + \beta = -\frac{2q}{p}$$

$$\text{และผลคูณของราก } \alpha \beta = \frac{r}{p}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \\ &= (\alpha + \beta) \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta \right\} \\ &= \left(-\frac{2q}{p}\right) \left\{ \left(-\frac{2q}{p}\right)^2 - 3\frac{r}{p} \right\} \\ &= \left(-\frac{2q}{p}\right) \left(\frac{4q^2}{p^2} - \frac{3r}{p}\right) \\ &= \left(-\frac{2q}{p}\right) \left(\frac{4q^2 - 3pr}{p^2}\right) \\ &= \frac{2q(3pr - 4p^2)}{p^3} \end{aligned}$$

12. การสร้างสมการกำลังสอง

การสร้างสมการกำลังสองจะสร้างได้เมื่อ

1. มีรากของสมการกำหนดไว้ให้

หรือ 2. เมื่อกำหนดสมการมาให้ และรากของสมการที่จะสร้างขนานนาม
ส่วนสัมพันธภาพรากของสมการที่กำหนดมาให้

ตัวอย่างที่ 1 ให้สร้างสมการที่มี 7 และ -2 เป็นราก

วิธีทำ ใช้วิธีแฟกเตอร์ $(x-7)(x+2) = 0$

$$\text{สมการนั้นคือ } x^2 - 5x - 14 = 0$$

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างสมการที่มีราก $1 \pm \sqrt{p}$

วิธีทำ โดยใช้สูตรรูปทั่วไปของสมการคือ $x^2 - (\text{ผลบวกของราก})$

$$x + \text{ผลคูณของราก} = 0$$

$$\text{สมการนั้นคือ } x^2 - \left\{ (1 + \sqrt{p}) + (1 - \sqrt{p}) \right\} x + (1 + \sqrt{p})(1 - \sqrt{p}) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - p = 0$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด α, β เป็นรากของสมการ $x^2 + px + r = 0$

จงสร้างสมการที่มีรากเท่ากับ $r\alpha + \beta$ และ $r\beta + p$

วิธีทำ เมื่อ α, β เป็นรากของ $x^2 + px + r = 0$

$$\alpha + \beta = -p$$

$$\alpha\beta = r$$

สมการที่สร้างใหม่มียาก $r\alpha + p$ และ $r\beta + p$

รูปทั่วไปของสมการคือ $x^2 - (\text{ผลบวกของราก}) x + \text{ผลคูณของราก} = 0$

$$\therefore \text{สมการใหม่ คือ } x^2 - \left\{ (r\alpha + p) + (r\beta + p) \right\} x + (r\alpha + p)(r\beta + p) = 0$$

$$x^2 - \left\{ r(\alpha + \beta) + 2p \right\} x + r^2\alpha\beta + pr(\alpha + \beta) + p^2 = 0$$

แทนค่าของ $\alpha + \beta$ และ $\alpha\beta$

$$x^2 - \left\{ r(-p) + 2p \right\} x + r^2 \cdot r + pr(-p) + p^2 = 0$$

$$x^2 - p(2-r)x + r^3 - rp^2 + p^2 = 0$$

18. การหาความสัมพันธ์ของตัวสัมประสิทธิ์และพจน์อิสระในสมการกำลังสอง

1. ความสัมพันธ์ของตัวสัมประสิทธิ์และพจน์อิสระในสมการเคียวเมอราทงสองของสมการสัมพันธ์กัน

2. ความสัมพันธ์ของตัวสัมประสิทธิ์และพจน์อิสระในสมการสองสมการเมอราทงในสมการนั้นสัมพันธ์กัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ของตัวสัมประสิทธิ์ในสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมอราทงสองของสมการเป็นอัตราส่วน $m:n$

วิธีทำ ให้รากหนึ่งเป็น $m\alpha$ และอีกรากหนึ่งเป็น $n\alpha$

$$\therefore m\alpha + n\alpha = -\frac{b}{a}$$

$$\text{กคช } (m+n)\alpha = -\frac{b}{a} \therefore \alpha = \frac{-b}{a(m+n)}$$

$$m\alpha \cdot n\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{กคช } mn\alpha^2 = \frac{c}{a} \therefore \alpha^2 = \frac{c}{amn}$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} (m+n)^2 = \frac{c}{amn}$$

$$b^2 mn = ac (m+n)^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ของตัวสัมประสิทธิ์ในสมการ $px^2 + qx + r = 0$

และ $mx^2 + nx - 1 = 0$ เมอราทงของสมการแรกเป็น 2 เท่าของรากหนึ่งในสมการที่ 2

วิธีทำ สมมติให้ 2α เป็นรากของสมการ $px^2 - qx + r = 0$

$$\therefore 4p\alpha^2 - 2q\alpha + r = 0 \text{ ----- (1)}$$

และ α เป็นรากของสมการ $mx^2 + nx - 1 = 0$

$$\therefore m\alpha^2 + n\alpha - 1 = 0 \text{ ----- (2)}$$

ใช้กฎของการคูณไขว้ (The Rule of cross Multiplication)

$$\begin{array}{cccc} -2q & r & 4p & -2q \\ n & -1 & m & n \end{array}$$

$$\frac{\alpha^2}{2q - nr} = \frac{\alpha}{rm + 4p} = \frac{1}{4pn + 2qm}$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{(rm + 4p)^2} = \frac{\alpha^2}{(2q - nr)} \times \frac{1}{(4pn + 2qm)^2}$$

$$\therefore (2q - nr)(4pn + 2qm) = (rm + 4p)^2$$

แบบฝึกหัดที่ 1 ข.

1. จงใช้ Δ พิจารณาลักษณะของรากของสมการต่อไปนี้

ก. $x^2 - x + 40 = 0$

ข. $2x^2 + 7 = 11x$

ค. $x^2 + 2x + 1 = 0$

ง. $3x^2 - 2x = 8$

จ. $(2x + 1)^2 = x + 6$

2. จงใช้ Δ พิจารณาลักษณะของแฟกเตอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $2x^2 + 5x - 1$

ข. $3x^2 + x + 2$

ค. $4x^2 - 7x + 3$

๖. $x^2 - 3x - 1$

๗. $x^2 - 4x + 4$

3. ถ้ารากของสมการ $4x^2 + 8mx + 3 = 0$ เท่ากัน จงหาค่าของ m

4. $x^2 + (k-2)x + 3$ แยกออกเป็นสองแฟกเตอร์เท่ากัน จงหาค่าของ k

5. จงหาค่า p ซึ่งทำให้ $x^2 + 2x + px + 3$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

6. ถ้า $2x^2 + 4x + r - 5$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จงหาค่าของ r

7. จงสร้างสมการซึ่งมีรากดังต่อไปนี้

ก. $\frac{a+2b}{3}$

ข. $\frac{p}{5q}$ และ $\frac{-q}{5p}$

ค. $-m \pm \sqrt{2}$

ง. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2-m}}$

8. ถ้า α และ β เป็นรากของสมการ $lx^2 + 2mx + n = 0$ จงหาค่าของ

ก. $\alpha^2 + \beta^2$

ข. $\alpha^4 + \beta^4$

ค. $(\alpha - \beta)^2$

ง. $\alpha^4\beta + \beta^4\alpha$

จ. $\frac{2\alpha + 2\beta}{\beta^2} + \frac{2\beta}{\alpha^2}$

9. ถ้า m และ n เป็นรากของสมการ $px^2 - qx - r = 0$ จงสร้างสมการซึ่งมีรากเป็น m^2 และ n^2

10. ถ้า x_1 และ x_2 เป็นรากของสมการ $mx^2 + nx + 1 = 0$ จงสร้างสมการซึ่งมีรากเป็น $(2x_1 + 3x_2)$ และ $(3x_1 + 2x_2)$

11. จงหาความสัมพันธ์ของตัวสัมประสิทธิ์ของสมการ $x^2 - 2qx - r = 0$ และ $x^2 + px - m = 0$ เมื่อสมการทั้งสองมีรากหนึ่งรากเท่ากัน

12. ถ้า α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จงสร้างสมการ
ที่มีรากเป็น $\frac{\alpha^3}{\beta}$ และ $\frac{\beta^3}{\alpha}$

การพิจารณาเครื่องหมายและค่าของฟังก์ชัน

14. การพิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชัน

เนื่องจากค่าของฟังก์ชันกำลังสองของ x (หรือของตัวอักษรใด) ย่อม
เปลี่ยนแปลงไปตามค่าจริงของ x (หรืออักษรนั้น ๆ) ฉะนั้นเครื่องหมาย
ของฟังก์ชันย่อมเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังนั้นการที่จะทราบว่าเครื่องหมายของ
ฟังก์ชันเป็นบวกหรือลบ จึงจำเป็นต้องพิจารณาค่าของ x โดยถือค่าของ x ซึ่งทำ
ให้ฟังก์ชันนั้นมีค่า 0 เป็นหลักก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

- ตัวอย่างที่ 1. จงพิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชัน $2x^2 + 3x - 20$ เมื่อ
 x มีการวิ่ง

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 20 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 4)$$

เมื่อ $x = \frac{5}{2}$ และ -4 , $2x^2 + 3x - 20$ จะมีค่า = 0

ใช้ $x = \frac{5}{2}$ และ $x = -4$ เป็นหลักการพิจารณา ดังนี้

1) เมื่อ $x > \frac{5}{2}$ $(x - \frac{5}{2})$ มีเครื่องหมายเป็น +
 $(x + 4)$ มีเครื่องหมายเป็น +

$\therefore f(x)$ มีเครื่องหมายเป็น +

2) เมื่อ $x < -4$ $(x - \frac{5}{2})$ มีเครื่องหมายเป็น -
 $(x + 4)$ มีเครื่องหมายเป็น -

$\therefore f(x)$ มีเครื่องหมายเป็น +

3) เมื่อ $-4 < x < \frac{5}{2}$ $(x - \frac{5}{2})$ มีเครื่องหมายเป็น -

$(x + 4)$ มีเครื่องหมายเป็น +

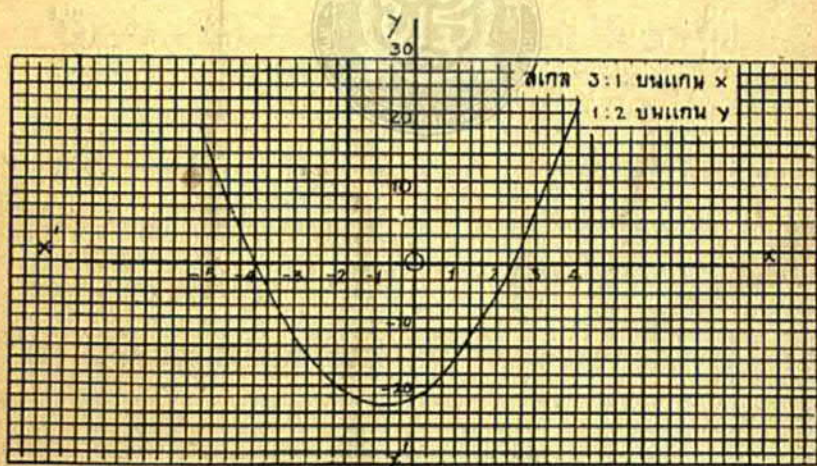
$\therefore f(x)$ มีเครื่องหมาย -

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าจริงทุกค่ามากกว่า $\frac{5}{2}$ และ x มีค่าจริงทุกค่าน้อยกว่า -4 พังก์ชันนี้มีเครื่องหมายเป็น +

เมื่อ x มีค่าจริงทุกค่าระหว่าง -4 และ $\frac{5}{2}$ พังก์ชันจะมีเครื่องหมายเป็น - เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้นควรดูกราฟประกอบคำอธิบาย คือ

ให้ $y = 2x^2 + 3x - 20$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2.5	3	4
y	34	15	0	-11	-18	-21	-20	-15	0	7	22



ดูในรูปจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่ามากกว่า $\frac{5}{2}$ ขึ้นไปทางขวา เส้นโค้งจะ
อยู่เหนือแกนพิกตราย (x -axis) แสดงว่าฟังก์ชันมีเครื่องหมายเป็น +

เมื่อ x มีค่าน้อยกว่า $-\frac{5}{2}$ ลงไปทางซ้าย เส้นโค้งจะอยู่เหนือ
แกนพิกตราย (x -axis) แสดงว่าฟังก์ชันมีเครื่องหมายเป็น +

เมื่อ x อยู่ระหว่าง $\frac{5}{2}$ และ $-\frac{5}{2}$ เส้นโค้งจะอยู่ใต้แกนพิกตราย
(x -axis) แสดงว่าฟังก์ชันมีเครื่องหมายเป็น -

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเครื่องหมายของ $x^2 - 3x + 5$ เมื่อ x มีค่าจริง

ฟังก์ชันนี้ จะแยกแฟกเตอร์ได้โดยใช้วิธีแยกแฟกเตอร์แบบกำลังสอง
สมบูรณ์ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 5 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

ถ้าเครื่องหมายระหว่าง $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ และ $\frac{11}{4}$ เป็น - ใช้แยก
แฟกเตอร์โดยใช้วิธี $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ คือแยกได้เป็น $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
 $-\frac{11}{4} = \left(x - \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{11}{2}}\right) \left(x - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{11}{2}}\right)$ แต่ในที่นี้ เครื่องหมาย
ระหว่าง $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ และ $\frac{11}{4}$ เป็น + ไม่สามารถจะแยกแฟกเตอร์ได้ ต้อง
พิจารณาดังนี้

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \text{ หรือเป็น } + \text{ ทุกค่าของ } x \text{ ที่เป็นจำนวนจริง}$$

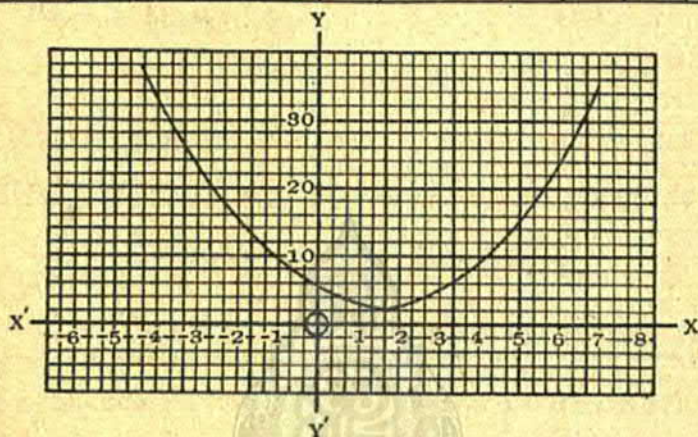
$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \text{ เป็น } + \text{ ทุกค่าของ } x \text{ ที่เป็นจำนวนจริง}$$

$$\text{ถ้กคิ } f(x) = x^2 - 3x + 5 \text{ เป็น } + \text{ ทุกค่าของ } x \text{ ที่เป็นจริง}$$

เปรียบเทียบรูปจากกราฟ

ให้ $y = x^2 - 3x + 5$

x	-	-3	-2	-1	0	1	1.5	2	3	4	5	6
y	45	23	15	9	5	3	2.75	3	5	9	15	23



สังเกตจากรูปจะเห็นได้ว่า เส้นโค้งอยู่เหนือแกนพิกศารายทั้งรูป แสดงว่าฟังก์ชันเป็น + ทุกค่าของ x ที่เขียนจริง

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ค.

1. จงหาเครื่องหมายของฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนจริง

ก. $x^2 - 7x - 8$

ข. $2x^2 + x - 10$

ค. $6x^2 + x - 35$

ง. $x^2 - 22x + 125$

จ. $x^2 + 6x + 10$

2. จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $y^2 + y - 20$ มีเครื่องหมายเป็น -

เมื่อ y มีค่าระหว่าง 4 ถึง -5

3. เมื่อไรฟังก์ชันต่อไปนี้มีเครื่องหมายเป็น บวก

ก. $14 + 5t - t^2$

ข. $5m + 84 - m^2$

ค. $\alpha \beta + (\alpha - \beta)x - x^2$

4. จงแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน $x^2 - x + 2$ เป็นบวกทุกค่าจริงของ x

5. จงหาเครื่องหมายของฟังก์ชันต่อไปน เมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนจริง

ก. $\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

ข. $\frac{x - 3 - 2x^2}{x^2 - 7x + 13}$

การพิจารณาค่าของฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันของ x ย่อมมีค่าเปลี่ยนไปตามค่าเปลี่ยนแปร x ฉะนั้น

จึงพิจารณาค่าของฟังก์ชันใดดังนี้

ตัวอย่างที่ 1. ถ้า x มีค่าเป็นจำนวนจริง จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $x^2 - x + 10$

วิธีทำ สมมติให้ $x^2 - x + 10 = y$

$\therefore x^2 - x + (10 - y) = 0$

เมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนจริง Δ จะต้องมากกว่า หรือเท่ากับศูนย์

ตามสูตร $\Delta = b^2 - 4ac$

ในที่นี้ $a = 1, b = -1, c = 10 - y$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= (1)^2 - 4(1)(10 - y) > 0 \\ &= 1 - 40 + 4y > 0 \end{aligned}$$

$$4y \geq 39$$

$$y \geq \frac{39}{4}$$

ดังนั้น y คือค่าของฟังก์ชัน มีค่าตั้งแต่ $\frac{39}{4}$ จนถึง $+\infty$

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเป็น $\frac{39}{4}$ หรือ $9\frac{3}{4}$

เทียบดูจากค่าในตารางกราฟ

$$\text{ให้ } y = x^2 - x + 10$$

x	-1	0	.5	1	2
y	12	10	9.75	10	12

จะเห็นว่า เมื่อ $x = .5$ ทุกค่าสุดของเส้นโค้งเป็น 9.75 หรือ

$9\frac{3}{4}$

คือ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเป็น $9\frac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 4. เมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนจริง $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ มีค่าเท่ากับใด

$$\text{ให้ } \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = y$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4 = yx + 2y$$

$$x^2 + (2 - y)x + (4 - 2y) = 0$$

$$\therefore x \text{ เป็นจำนวนจริง } \therefore \Delta \geq 0$$

$$\Delta \equiv (2 - y)^2 - 4(1)(4 - 2y) \geq 0$$

$$4 - 4y + y^2 - 16 + 8y \geq 0$$

$$y^2 + 4y - 12 \geq 0$$

$$(y + 6)(y - 2) \geq 0$$

$$(1) \text{ เมื่อ } y > 2 \quad \begin{array}{l} (y + 6) \text{ มีเครื่องหมาย } + \\ (y - 2) \text{ มีเครื่องหมาย } + \end{array}$$

$$\therefore \Delta > 0$$

$$\text{เมื่อ } y = 2 \quad \Delta = 0$$

ฉะนั้น ค่าของ $f(x)$ มีได้ทุกค่าตั้งแต่ 2 ขึ้นไปจนถึง $+\infty$

$$(2) \text{ เมื่อ } y < -6 \quad \begin{array}{l} (y + 6) \text{ มีเครื่องหมาย } - \\ (y - 2) \text{ มีเครื่องหมาย } - \end{array}$$

$$\therefore \Delta > 0$$

$$\text{เมื่อ } y = -6 \quad \Delta = 0$$

ฉะนั้นค่าของ $f(x)$ มีได้ทุกค่าตั้งแต่ -6 ถึง $-\infty$

$$(3) \text{ เมื่อ } -6 < y < 2 \quad (y+6) \text{ มีเครื่องหมาย } + \\ (y-2) \text{ มีเครื่องหมาย } -$$

$$\therefore \Delta < 0$$

ดังนั้นค่าของ $f(x)$ มีระหว่าง 2 และ -6 ไม่ได้

สรุปผลได้ว่า $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ มีค่าได้ทุกค่านอกจาก

ระหว่าง 2 และ -6

สรุปประกอบ

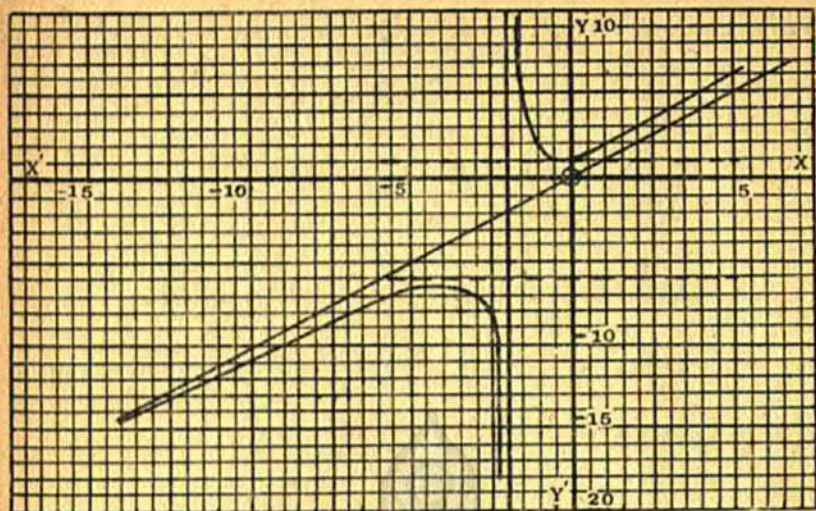
ให้

$$y = x + \frac{4}{x+2}$$

$$(y-x)(x+2) = 4$$

x	-2	-3	-5	-10	-14
y	∞	-7	$-6\frac{1}{3}$	$-10\frac{1}{2}$	$-14\frac{1}{3}$

x	-1	0	1	5
y	3	2	$2\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$



ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\frac{7+3x-x^2}{x+1}$ มีค่าใดทุกค่าเมื่อ x เป็น

จำนวนจริง

$$\text{ให้ } \frac{7+3x-x^2}{x+1} = y$$

$$7 + 3x - x^2 = xy + y$$

$$-x^2 + (3-y)x + (7-y) = 0$$

$$\because x \text{ เป็นจำนวนจริง } \therefore \Delta \geq 0$$

$$\Delta = (3-y)^2 - 4(-1)(7-y) \geq 0$$

$$9 - 6y + y^2 + 28 - 4y \geq 0$$

$$y^2 - 10y + 37 \geq 0$$

มองไม่เห็นทางแยกแ่ก่เคอร์ Δ ธรรมดาทำโดยวิธีการดังต่อไปนี้

สมมติให้ y

$$\Delta \equiv (y^2 - 10y + 25) - 25 + 37 \geq 0$$

$$(y - 5)^2 + 12 \geq 0$$

$(y - 5)^2$ เป็น 0 หรือ + ทุกค่าของ y ที่เป็นจำนวนจริง

$\therefore \Delta \equiv (y - 5)^2 + 12$ เป็น + ทุกค่าของ y ที่เป็นจำนวนจริง

คือ $f(x) \equiv \frac{7 + 3x - x^2}{x + 1}$ มีค่าจริงใดทุกค่าไม่จำกัด

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ง.

1. ถ้า x เป็นจำนวนจริง จงหาค่าจากคของฟังก์ชัน

ก. $\frac{11 - 2x - x^2}{x + 5}$ ข. $\frac{4x^2 + 3}{4(1 - 2x)}$

2. จงแสดงให้เห็นจริงว่า ฟังก์ชัน $\frac{x^2 + 5}{x + 2}$ มีค่าจริงใดทุกค่านอกจากค่าระหว่าง 2 และ -10 เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

3. จงหาค่าต่ำสุดของ $x^2 + 3x + 6$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

4. ถ้า x เป็นจำนวนจริงจงพิสูจน์ว่า $\frac{2x^2 - x - 5}{x}$ มีค่าจริงใดทุกค่าไม่จำกัด

5. เมื่อ x เป็นจำนวนจริง จงหาค่าของ

ก. $\frac{x^2 + x}{x - 1}$ ข. $\frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$

6. จงหาค่าจากคของฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

ก. $\frac{4x - 3}{x^2 + 1}$ ข. $\frac{6x + 5}{2x^2 + 1}$

ค. $\frac{8(3 - 2x)}{x^2 + 4}$

7. เมื่อ x เป็นจำนวนจริง จงหาค่าของ $\frac{2-x-3x^2}{5}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 จ.

1. จงใช้มาตราส่วน 4 ช่อง ต่อ 1 หน่วย บนแกน x และ 1 ช่อง ต่อ 1 หน่วย บนแกน y สร้างกราฟของ $y = x^2$ ในระหว่างค่า x ที่เปลี่ยนแปลงจาก -5 ถึง 5 และ

ก. อ่านค่าประมาณของ $(2.1)^2$ และ $(-2.6)^2$

ข. หาค่า $\sqrt{18}$
2. โดยใช้แกนพิกัดคู่เดียวกัน จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน

ก. $2x^2 + 3$ และหาค่าฟังก์ชันเมื่อ $x = \pm 5$

ข. $-2x^2 - 3$ และหาค่า x เมื่อฟังก์ชันมีค่า -5
3. โดยใช้แกนพิกัดคู่เดียวกัน จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน

ก. $4x - x^2$ และ อ่านค่า x เมื่อฟังก์ชัน $= 0$

ข. $x^2 + 3x$ และ อ่านค่า x เมื่อฟังก์ชัน $= 0$
4. บนแกนพิกัดคู่เดียวกัน และมาตราส่วนเดียวกัน จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $x^2 - 6x + 11$ และ $8x - 9 - x^2$ สำหรับค่า x ที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 6 และจงหาว่า เมื่อฟังก์ชันทั้งสองนี้เท่ากัน x มีค่าเท่าไร
5. จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $2x^2 + 3x - 20$ และจากกราฟจงตอบคำถาม

ก. ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดเท่าไร

- ข. เครื่องหมายของฟังก์ชันเป็นบวกเมื่อไร และลบเมื่อไร
- ค. แกสมการ $2x^2 + 3x - 20 = 0$
6. จงสร้างกราฟของ $y = 4 + 2x - x^2$ สำหรับค่า x ที่อยู่ระหว่าง -2 กับ 4 และจากกราฟ
- ก. ทารากของสมการ $x^2 - 2x - 4 = 0$
- ข. หาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $4 + 2x - x^2$
- ค. พิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชัน $4 + 2x - x^2$ ว่าเป็นบวกเมื่อไร เป็นลบเมื่อไร
7. จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $2x^2 - 8x + 8$ และจากกราฟ
- ก. อณาคาตาศักของฟังก์ชัน
- ข. เครื่องหมายของฟังก์ชันเป็นบวกหรือลบอย่างไร
- ค. ค่า x สองค่าของสมการ $x^2 - 4x + 4 = 0$ เป็นเท่าไร
- ง. พิจารณาโดยกราฟว่า รากของสมการ $x^2 - 4x + 8 = 0$ เป็นจำนวนไม่จริง
8. จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $3x^2 - x + 1$ และจากกราฟจงตอบคำถาม
- ก. เครื่องหมายของฟังก์ชันเป็นอย่างไร
- ข. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเป็นเท่าไร
- ค. หาค่า x ในสมการ $3x^2 - x - 4 = 0$
9. จงสร้างกราฟของ $y = x^2$ และ $y = 5x - 6$ และแก้สมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ จากกราฟ

10. จงสร้างกราฟของ $x = y^2$ และหาค่าของ $\sqrt{10}$ และใช้กราฟช่วยประกอบในการแก้สมการ $3y^2 + 2y - 5 = 0$
11. จงสร้างกราฟของ $y = (x + 2)(x - 6)$ และหาค่าน้อยที่สุดของ $(x + 2)(x - 6)$ และหาค่า x ใน $(x + 2)(x - 6) = 3$ ให้ถูกต้องที่สุด
12. จงหาโดยวิธีกราฟว่า รากของสมการ $5x - 10 - x^2 = 0$ เป็นจำนวนจริงหรือไม่ เพราะอะไร และจากกราฟจงหาว่า
- ก. ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $5x - 10 - x^2$ เป็นเท่าไร
- ข. เครื่องหมายของฟังก์ชัน $5x - 10 - x^2$ เป็นบวกหรือลบเมื่อไร
13. จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $(2y - 5)(y + 3)$ และจากกราฟ
- ก. พิจารณาเครื่องหมายของฟังก์ชัน
- ข. ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดเท่าไร
- ค. สมการ $(2y - 5)(y + 3) = 5$ มีค่า y เท่าไร
14. จงสร้างกราฟของฟังก์ชัน $x^2 - 6x + 8$ และแก้สมการ $x^2 - 7x + 10 = 0$ จากกราฟนั้น

บทที่ 2

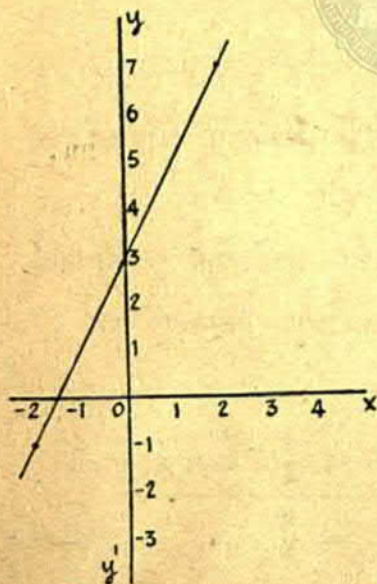
การแก้สมการ (To solve equations)

1.1 ตัวอย่างที่ 1 ตัวไม่ทราบค่า 1 ตัวและมีการตั้งเพียง 1 ได้เคยเรียนมาแล้วใน
บทจะไม่กล่าวถึงวิธีแก้ทางพีชคณิต แต่จะกล่าวถึงวิธีแก้ทางกราฟดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $2x + 8$ ด้วยกราฟ

วิธีทำ สมมติให้ $y = 2x + 8$ ดังนั้นเมื่อสมมติค่าของ x
เปลี่ยนไป ค่าของ y ก็เปลี่ยนเปลี่ยนไปด้วยดังในตารางนี้

x	- 2	0	2
$2x$	- 4	0	4
$y = 2x + 8$	- 1	8	7



เขียนเส้นลงในกระดาษตาราง ใช้สเกล

.5 นิ้ว ต่อ 1 หน่วย จะเห็นเส้นตัดแกน

x ที่จุด $x = - 1.5$ แสดงว่า x

จะมีค่า $- 1.5$ เมื่อ y มีค่าเป็น 0

ก็คือ ค่า $x = - 1.5$ เป็นคำตอบ

สมการของสมการหรือ รากของสมการ

นั่นเอง จึงได้คำตอบ $x = - 1.5$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ก.

จงแก้สมการต่อไปนี้ด้วยกราฟ

1. $3x = 2$ 2. $3x - 1 = 0$ 3. $x - 2 = 0$

4. $4x + 5 = 0$ 5. $2x - 3 = 0$ 6. $5 - x = 0$

7. $2x + 1 = 0$ 8. $7 - 2x = 0$

1.2 สมการกำลังสอง (Quadratic Equations) คือสมการที่มีตัว
ไม่ทราบค่า (Unknown) 1 ตัวและมีการตั้งอย่างสูงเพียง สอง หรือ สามารถ
ทำเป็นรูปกำลังสองได้ การแก้สมการแบบนี้ สามารถทำได้เป็น 3 วิธี คือ

1. อาศัยวิธีแยกออกเป็นตัวประกอบ (factors) มีหลักดังนี้

ก. ทำส่วนให้หมดไป (ถ้ามี) แล้วย้ายทุก ๆ พจน์มาอยู่ทาง
ซ้ายมือ ให้ทางขวามือเป็น ศูนย์

ข. แบ่งพวกทางซ้ายมือเป็น 3 ชุด คือ ชุดที่ 1 เอาพวก x^2
มารวมกัน ชุดที่ 2 เอาพวก x มารวมกัน ที่เหลือเป็นชุด
ที่ 3

ค. แยกแฟกเตอร์พวกทางซ้ายมือ แล้วให้ทุก ๆ แฟกเตอร์
เท่ากับศูนย์ เพื่อหาค่าตัวไม่ทราบค่า Unknown (x)

ตัวอย่าง จงแก้สมการ

ก. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{5}{4}$

ข. $\frac{a}{a-x} + \frac{a+b+x}{b} = \frac{3}{2}$

วิธีทำ ก. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{5}{4}$

คูณ 4 (x-1) (x-4) ทุกพจน์

$$4(x-4) + 4(x-1) = 5(x-4)(x-1)$$

$$4x - 16 + 4x - 4 = 5(x^2 - 5x + 4)$$

$$8x - 20 = 5x^2 - 25x + 20$$

$$0 = 5x^2 - 33x + 40$$

$$(5x - 8)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = 1\frac{8}{5} \text{ หรือ } 5 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ข. $\frac{a}{a-x} + \frac{a+b+x}{b} = \frac{3}{2}$

คูณ 2b(a-x) ทุกพจน์

$$2ab + 2(a+b+x)(a-x) = 3b(a-x)$$

$$2ab + 2a^2 + 2ab + 2ax - 2ax - 2bx - 2x^2 = 3ab - 3bx$$

$$-2x^2 + bx + 2a^2 + ab = 0$$

$$2x^2 - bx - a(2a+b) = 0$$

$$\{2x - (2a+b)\} \{x+a\} = 0$$

$$x = \frac{b+2a}{2} \text{ หรือ } -a \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ข้อควรจำ โดยการใช้การทดลอง $x = -a$ เป็นค่าที่ใช้ได้

2. อาศัยวิธีกำลังสองสมบูรณ์ (Completing the Square) มี

หลักการ

ก. ทำส่วนให้เหมือนกัน (ถ้ามี) บ้างพจน์ที่มี x^2 และ ที่มี x มาไว้ทางซ้ายมือ ภาคสมมูล หรือพจน์อิสระ (Absolute term) เอาไว้ทางขวามือ

ข. ทำสัมประสิทธิ์ (ส.ป.ส.) ของ x^2 ให้เป็นหนึ่ง

ค. เอา 2 ทหาร ส.ป.ส. ของ x แล้วยกกำลังสอง บวกเข้าทั้งสองข้าง

ง. ทำทางซ้ายมือให้เป็นรูปผลบวกหรือผลต่างกำลังสอง

จ. ถอดรากกำลังสอง เพื่อหาค่า x

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า x จากสมการ $6x^2 + 13x + 6 = 0$

วิธีทำ $6x^2 + 13x = -6$

เอา 6 ทหารตลอด

$$x^2 + \frac{13}{6}x = -1$$

$$x^2 + \frac{13}{6}x + \left(\frac{13}{12}\right)^2 = -1 + \left(\frac{13}{12}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{13}{12}\right)^2 = -1 + \frac{169}{144}$$

$$= -\frac{144 + 169}{144}$$

$$= \frac{25}{144}$$

$$x + \frac{13}{12} = \pm \sqrt{\frac{25}{144}} = \pm \frac{5}{12}$$

$$x = -\frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$= -\frac{13}{12} \text{ หรือ } -\frac{8}{12} = -\frac{8}{12} \text{ หรือ } -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{8}{12} \text{ หรือ } -\frac{2}{3}$$

ตอบ

ข้อควรจำ ขอนใช้วิธีแยกออกเป็นตัวประกอบก็ได้ และง่ายกว่า

8. อาศัยวิธีใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ตัวอย่าง จงหาค่า x จากสมการ $2x^2 + 9ax = 180a^2$

วิธีทำ จากสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

จากสมการ $2x^2 + 9ax - 180a^2 = 0$

a ตามสูตรคือ 2, b คือ $9a$ และ c คือ $-180a^2$

$$= \frac{-9a \pm \sqrt{81a^2 - 4(2)(-180a^2)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-9a \pm \sqrt{81a^2 + 1440a^2}}{4}$$

$$= \frac{-9a \pm \sqrt{1521a^2}}{4}$$

$$= \frac{-9a \pm 39a}{4}$$

$$= -12a \text{ หรือ } \frac{15a}{2}$$

อย่าลืม ก่อนใช้สูตรต้องทำให้เข้ารูป $ax^2 + bx + c = 0$ เสียก่อน
สำหรับตัวอย่างนี้ ความจริงจะใช้วิธีแยกตัวประกอบก็ได้ (ถ้าแยกเป็น
ตัวประกอบได้ควรใช้แบบ 1 ถ้าแยกไม่ได้จึงใช้สูตรแบบ 8 ถึงตัวอย่างต่อไป
นี้)

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า x จากสมการ $x^2 + 3x + 1 = 0$

วิธีหา ในข้อนี้

$$a = 1, b = 3, c = 1$$

ตามสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ หรือ } \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{-3 + 2.236}{2} \text{ หรือ } \frac{-3 - 2.237}{2} \quad (\sqrt{5} = 2.236)$$

$$= \frac{-0.764}{2} \text{ หรือ } \frac{-5.236}{2}$$

$$= -0.382 \text{ หรือ } -2.618$$

$$x = -0.382 \text{ หรือ } -2.618 \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ข.

จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้โดยวิธีทำให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$1. x^2 - 2x - 1 = 0 \quad 2. 3x^2 + 8x = -2$$

$$3. x^2 - 7x = 5 \quad 4. ax^2 + 2bx - c = 0$$

$$5. lx^2 - nx - m = 0$$

จงแก้สมการต่อไปนี้โดยวิธีใดก็ได้

$$6. 15x^2 + x - 84 = 0 \quad 7. 85 = 2x(4x + 9)$$

$$8. 27y^2 - 15y = 112 \quad 9. s^2 + 2s = 3.2$$

$$10. 1 - 3(x - 1)(x - 2) = 11(x - 1)$$

1.8 สมการที่ตัวไม่ทราบค่า 1 ตัว และกำลังสูงกว่า 2 อาจทำได้ โดยอาศัยวิธีทฤษฎีเศษเหลือ (Remainder theorem) เข้าช่วยขบจนลงมาจนเหลือกำลังสอง หรือหาตัวแทนให้เป็นรูปกำลังสองก่อน

ตัวอย่าง จงแก้สมการ

$$\text{ก. } x^3 - 39x + 70 = 0$$

$$\text{ข. } (x-3)x + \frac{40}{x(x-3)} = 14$$

วิธีทำ ก. $f(x) \equiv x^3 - 39x + 70$

$$f(5) = 5^3 - 39(5) + 70$$

$$= 125 - 195 + 70 = 0$$

ได้ $x - 5$ เป็นตัวประกอบจำนวนหนึ่ง

$$x^3 - 39x + 70 = x^2(x-5) + 5x(x-5) - 14(x-5)$$

$$= (x-5)(x^2 + 5x - 14)$$

$$= (x-5)(x+7)(x-2)$$

$$(x-5)(x+7)(x-2) = 0$$

$$x = 5, -7, 2. \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

คำอธิบาย เมื่อได้ $x - 5$ เป็นตัวประกอบจำนวนหนึ่งแล้ว เขามาวางเป็นตัวประกอบรวม เพื่อหาตัวประกอบอื่น ๆ ดังที่ทามาแล้วก็ได้ หรือจะหาตัวมาบวก หรือลบเพื่อให้แยกเป็นตัวประกอบก็ได้ โดยอาศัยหลักเอาตัวประกอบตัวหน้า (x) ไปหารใจทยตัวหน้า (x^3) ได้

ผลลัพธ์ (x^2) มาคูณกับตัวประกอบตัวหลัง (-5) เป็น $-5x^2$
 แล้วนำ $(x-5)(x+7)(x-2)$ ไปเพิ่มและจะแยกออกเป็นตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\therefore x^3 - 39x + 70 &= (x^3 - 5x^2) + 5x^2 - 39x + 70 \\ &= x^2(x - 5) + (x - 5)(5x - 14) \\ &= (x - 5)(x^2 + 5x - 14) \\ &= (x - 5)(x + 7)(x - 2)\end{aligned}$$

แล้วนำ $(x - 5)(x + 7)(x - 2) = 0$ ก็หาค่า x ได้

ก. ให้ $y = x^2 - 3x$

$$y + \frac{40}{y} = 14$$

$$y^2 + 40 = 14y$$

$$y^2 - 14y + 40 = 0$$

$$(y - 4)(y - 10) = 0$$

$$y = 4, 10$$

เมื่อก $y = 4, x^2 - 3x = 4$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = 4, -1 \text{ จบ}$$

เมื่อก $y = 10, x^2 - 3x = 10$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x = 5, -2 \text{ จบ}$$

คำอธิบาย ให้ $y = x^2 - 3x$ แล้วหาค่า y ก่อน, มาหา x ภายหลัง

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ค.

จงแก้สมการ

$$1. \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{4(x+1)} + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 0$$

$$2. \frac{2}{5x+2} - \frac{6x^2}{25x^2+15x+2} = 0$$

$$3. \frac{4}{x+5} + \frac{1}{x-2} + \frac{2x^2}{x^2+3x-10} = 0$$

$$4. \frac{3x}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2-5x+6}$$

$$5. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = 0$$

$$6. (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = -1$$

$$7. x^2 + 10p^2 - 7px - 20pq + 7qx + 10q^2 = 0$$

$$8. x^3 - 37x - 84 = 0$$

$$9. y^3 - 3a^2y + 2a^3 = 0$$

$$10. 2x^3 - 7x^2 = 17x - 10$$

$$11. 2x^3 + 3 = 3x^2 + 10x$$

$$12. 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

$$13. x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$14. 1 - \frac{2}{2x^2 - x} = \frac{8}{(2x^2 - x)^2}$$

$$15. 16(y^2 + \frac{1}{y^2}) = 257$$

$$16. (x^2 - x)^2 + 120 = 26(x^2 - x)$$

$$17. (2x^2 + 4x)^2 = 20x(x + 2) + 24$$

$$18. \frac{x^2 - 5x}{4} = \frac{9}{x^2 - 5x}$$

$$19. x(x + 2a) = \frac{4a^4}{x^2 + 2ax} - 3a^2$$

2 แบบที่ 2 การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว

2.1 การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัว แต่มักจะลงเป็น 1 สมการแบบ

ที่แก้ได้ $a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ นักเรียนเคยแก้

สมการแบบนี้ด้วยวิธีพีชคณิตมาแล้ว ก็ทำให้ตัวไม่ทราบค่าตัวใดตัว

หนึ่งหมดไป แล้วหาคำตอบที่เหลือ เมื่อใดแล้วจงเอาไปแทนค่าเพื่อ

หาอีกตัวหนึ่ง นอกจากวิธีที่กล่าวมาแล้วนั้น นักเรียนควรได้ทราบวิธีแก้

สมการแบบนี้ ๆ อีกคือ

1. การแก้สมการด้วยวิธีการ

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $x + y = 16$, $x - y = 0$

วิธีทำ $x + y = 16$

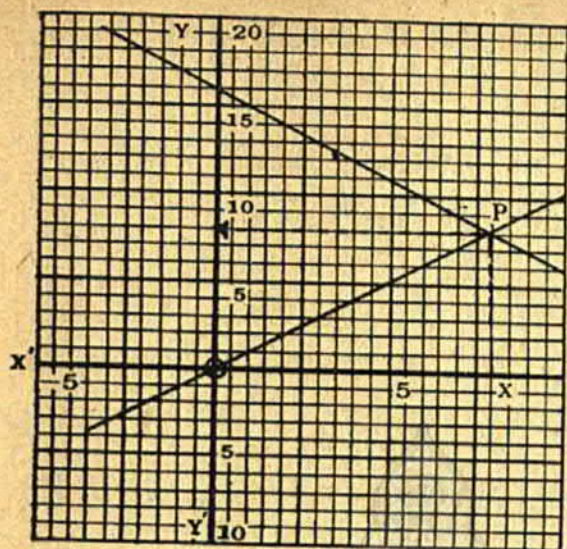
$$\therefore y = 16 - x$$

สมมติค่า x ขึ้น 3 ค่า จะได้ค่า y ดังนี้

x	4	0	-2
y	12	16	18

และ $\therefore x - y = 0$

$\therefore y = x$ (สมมติค่า x จะได้ค่า y เท่ากัน)



ใช้สเกล .2" ต่อ 1 หน่วย
บนแกน y
และ .1" ต่อ 1 หน่วย
บนแกน x

จะเห็นว่าสมการทั้ง 2 นี้นิพจน์กราฟเป็นเส้นตรงตัดกันตรงจุด P เมื่ออ่านค่าจะได้

$$\left. \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 8 \end{array} \right\} \text{ตอบ}$$

หมายเหตุ ความปกติกราฟเส้นตรงนี้จะหาค่าเพียงสองค่าก็พอ แต่เพื่อกันผิดพลาด จึงควรหาเส้นละสามค่า ถ้าได้ค่าทั้งสามอยู่ในเส้นตรงเดียวกันเป็นถุกแน่นอน.

2. การแก้สมการด้วยการใช้กฎการคูณไขว้ ซึ่งมีหลักดังนี้

ก. ขยายพจน์ทอຍข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับมาข้างซ้าย อย่าลืมเปลี่ยนเครื่องหมายให้ตรงข้าม ให้ทางข้างขวาเป็นศูนย์

ข. เรียงลำดับให้พจน์ที่มี x เป็นพจน์หน้า ถัดไปเป็นพจน์ที่มี y ถัดไปเป็นพจน์อิสระ

ค. บวกเอาสมการที่สอง (ใช้ตัว y เป็น ส.ป.ส.) ของ x, y และพจน์อิสระออกมาเรียงลำดับดังนี้

จากสมการแรก ส.ป.ส. y พจน์อิสระ ส.ป.ส. x ส.ป.ส. y

จากสมการหลัง ส.ป.ส. y พจน์อิสระ ส.ป.ส. x ส.ป.ส. y

ง. ไขว้เขาสักส่วน

ตัวอย่าง แก่สมการ $3x + 2y = 18$, $2x + 5y = 16$

วิธีทำ

$$3x + 2y - 18 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2x + 5y - 16 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \nearrow & -13 \\ 5 & \searrow & -16 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 3 & \nearrow & 2 \\ 2 & \searrow & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & \nearrow & 2 \\ 5 & \searrow & 5 \end{array}$$

$$\frac{x}{2(-16) - 5(-18)} = \frac{y}{(-18)(2) - (-16)(3)} = \frac{1}{3(5) - (2)(2)}$$

$$\frac{x}{-32 + 90} = \frac{y}{-36 + 48} = \frac{1}{15 - 4}$$

$$\frac{x}{58} = \frac{y}{12} = \frac{1}{11}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

ข้อสังเกต 1. เมื่อบวกสมการที่สองของ x และ y กับพจน์อิสระมาเรียงลำดับดังนี้
ลำดับของบวกรวมเครื่องหมายมาด้วย สำหรับเครื่องหมายบวกไม่จำเป็นต้อง
เขียนลงไป

การเข้าสัปดาห์ทำงาน ส่วนของ x ใ้จากส.ป.ส. ของ y ใน (1)
 คูณพจน์อิสระใน (2) ลบจาก ส.ป.ส. y ใน (2) คูณพจน์อิสระใน (1)
 ส่วนของ y ใ้จาก พจน์อิสระใน (1) คูณ ส.ป.ส. x ใน (2) ลบ
 จากพจน์อิสระใน (2) คูณ ส.ป.ส. x ใน (1)

เศษของพจน์อิสระ (ซึ่งไม่มี x และ y เป็นส.ป.ส.) เป็น 1 ส่วนคือ
 ส.ป.ส. x ใน (1) คูณส.ป.ส. y ใน (2) ลบจากส.ป.ส. x ใน (2) คูณ
 ส.ป.ส. y ใน (1)

เมื่อได้สัปดาห์แล้ว จะใ้ค่าของ x โดยคูณใ้ สัปดาห์ที่ 1 กับ 3
 และค่า y จะใ้จากคูณใ้ สัปดาห์ที่ 2 กับสัปดาห์ที่ 3

2. ข้อสำคัญ คือการแก้สมการแบบน ถัดของ x และ y ในสอง
 สมการต้องเหมือนกัน จึงจะใ้กฎนได้

2.2 การแก้สมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัว ถัดสองถัดสองถัด

1. วิเคราะห์ไป คือเปลี่ยนตัวแปรไม่ทราบค่า (Unknown) ตัวหนึ่งใ้
 เป็นรูปของถัดสองถัด ถัดคือพยายามใ้เหลือตัวแปรไม่ทราบค่า Unknown
 เพียงตัวเดียว

ตัวอย่าง จงแก้สมการ ก. $x^2 - 2y^2 = 1$

$$8x - y = 7$$

$$x + y = 11$$

$$xy = 30$$

$$\text{วิธีทำ ก. } x^2 - 2y^2 = 1 \quad \text{----- (1)}$$

$$8x - y = 7 \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{จาก (2), } y = 8x - 7 \quad \text{----- (3)}$$

แทนค่า y ใน (1), $x^2 - 2(8x - 7)^2 = 1$

$$x^2 - 2(9x^2 - 42x + 49) - 1 = 0$$

$$x^2 - 18x^2 + 84x - 98 - 1 = 0$$

$$-17x^2 + 84x - 99 = 0$$

$$17x^2 - 84x + 99 = 0$$

$$(17x - 33)(x - 3) = 0$$

$$x = \frac{33}{17} \text{ หรือ } 3 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

แทนค่า x ใน (3) $\therefore y = 8\left(\frac{33}{17}\right) - 7 ; 8 \times 3 - 7$

$$= -\frac{20}{17}, 2 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

$$\text{จ.} \quad x + y = 11 \quad \text{----- (1)}$$

$$xy = 30 \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{จาก (1),} \quad x = 11 - y \quad \text{----- (3)}$$

แทนค่า x ใน (2), $(11 - y)y = 30$

$$11y - y^2 - 30 = 0$$

$$y^2 - 11y + 30 = 0$$

$$(y - 5)(y - 6) = 0$$

$$y = 5 \text{ หรือ } 6$$

แทนค่า y ใน (3), $x = 11 - 5 \text{ หรือ } 11 - 6$

$$x = 6 \text{ หรือ } 5$$

$$x = 5, y = 6, \text{ หรือ } x = 6, y = 5 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

คำอธิบาย วิธีทำให้ตัวไม่ทราบค่า (Unknown) หดไปทีละตัว จนเหลือ
เพียงตัวเดียวไว้ใช้ใส่เสมอ วิธีนี้ใช้ได้ทั่ว ๆ ไปแทบทุกกรณี
ในการแก้สมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ ก. $x^2 - y^2 = 11$
 $x + y = 11$
 ข. $4x^2 - y^2 = 28$
 $2x - y = 2$

วิธีทำ ก. $x^2 - y^2 = 11$ ----- (1)
 $x + y = 11$ ----- (2)
 (1) $\div$ (2), $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = 1$
 $x - y = 1$ ----- (3)
 (2) + (3), $2x = 12$
 $x = 6$
 (2) - (3), $2y = 10$
 $y = 5$
 $x = 6, y = 5$ ตอบ

วิธีทำ ข. $4x^2 - y^2 = 28$ ----- (1)
 $2x - y = 2$ ----- (2)
 (1) $\div$ (2), $\frac{4x^2 - y^2}{2x - y} = \frac{28}{2}$
 $2x + y = 14$ ----- (3)

$$(3) + (2), \quad 4x = 16$$

$$x = 4$$

$$(3) - (2), \quad 2y = 12$$

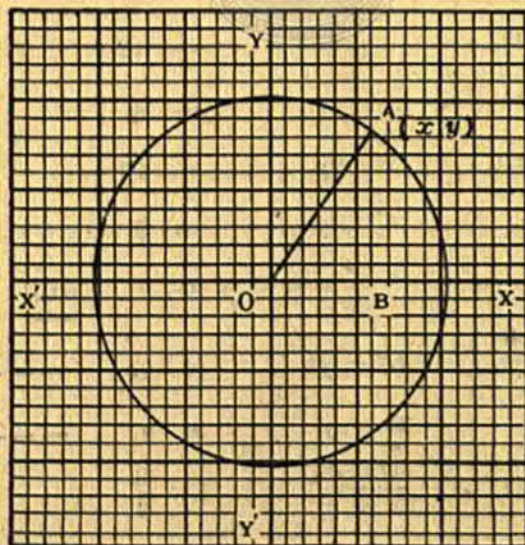
$$y = 6$$

$$x = 4, y = 6 \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

2. การแก้สมการด้วยกราฟของวงกลม

เนื่องจากรูปทั่วไปของสมการของกราฟวงกลมเป็น $x^2 + y^2 = r^2$

แสดงว่าจุดศูนย์กลางเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และรัศมี r สร้างวงกลม
ได้ดังนี้



พิสูจน์ เลือกจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมให้เขียนจุด A และให้
พิกัด (Co-ordinates) เป็น (x, y) จะหาความสัมพันธ์ของค่า
พิกัดกับรัศมี r ได้โดยลากเส้น OA เป็นรัศมี และ AB เป็นเส้น
ตั้งฉากบนแกน X ดังในรูป จากทฤษฎีในเรขาคณิตได้

$$OB^2 + BA^2 = OA^2$$

$$\text{คือ } x^2 + y^2 = r^2$$

และสมการ $x^2 + y^2 = r^2$ นี้ เป็นรูปทั่วไปของสมการวงกลม
ที่มีจุดศูนย์กลางที่กำเนิดและรัศมี r

ตัวอย่างที่ 1 ก. เมื่อรูปของพจน์อิสระ (คือ r^2) เป็นกำลังสองสมบูรณ์

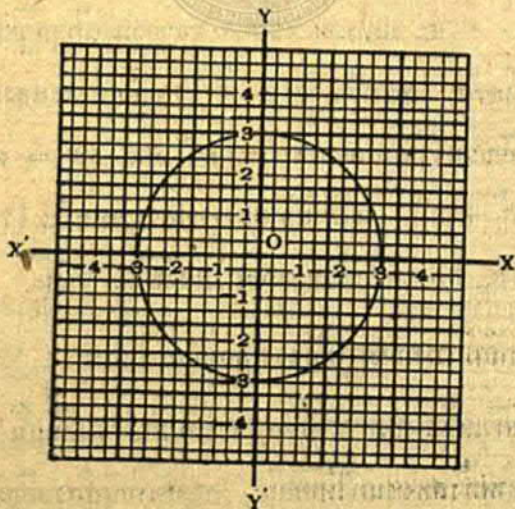
จงเขียนกราฟของวงกลม $x^2 + y^2 = 9$

วิธีทำ

รูปทั่วไปของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่กำเนิดคือ

$x^2 + y^2 = r^2$ ฉะนั้น $r^2 = 9$; $r = 3$ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง

OA = 3 เป็นรัศมี มาตราส่วน ตามข้อตั้งหนึ่งหน่วยบนแกน x และ y



ข. เมื่อบรู๊ของพจน์อิสระไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์.

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $x^2 + y^2 = 58$

รากบรู๊ของสมการที่จะออกเป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็น $x^2 + y^2 = r^2$ แต่ในที่นี้ $r^2 = 58$ ไม่ใช่กำลังสองสมบูรณ์จึงหาความยาวของรัศมีได้ดังนี้

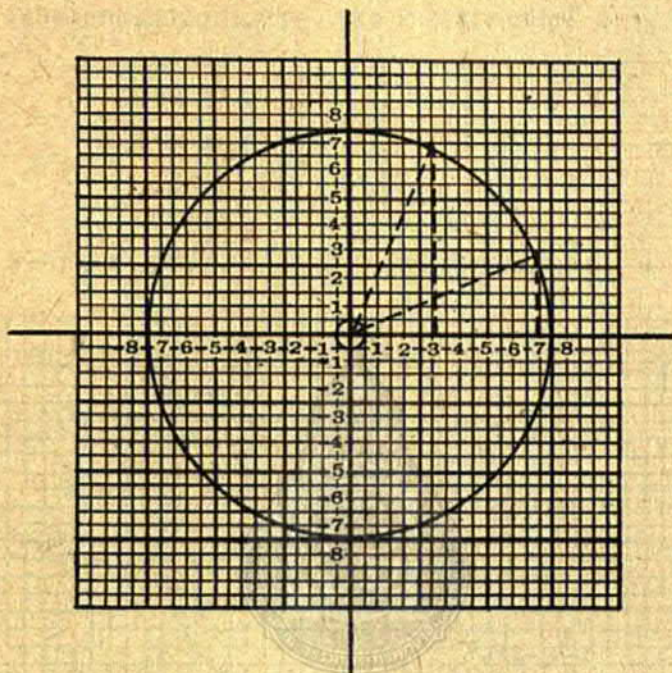
1. สมมติค่าของ x ที่จะทำให้ y^2 ออกมาเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ในที่นี้ถ้า $x = 3$ จะได้ $y^2 = 49$
 $\therefore y = 7$ จึงได้จุด $(3, 7)$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมใช้จุด O ซึ่งเป็นจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลาง ทางวงเวียนจากราก $O (0, 0)$ ถึงจุด $(3, 7)$ เขียนวงกลม หรือ

2. แยก 58 หรือ r^2 พยายามใช้ทฤษฎีบทของไพทาโกรัส ออกเป็น $x^2 + y^2$ คือเป็นกำลังสองสมบูรณ์สองจำนวนรวมกันหรือหักจากกัน เช่น $58 = 49 + 9 = 7^2 + 3^2$ จะได้พิกัดของจุดปลายรัศมีเป็น $(7, 3)$ หรือ $(3, 7)$ แล้วเขียนวงกลมโดยวิธี ก. ก็นั่น

ค. การแก้สมการที่ออกบรู๊เป็นวงกลมและเส้นตรง

ในการหาตัวแก้ของสมการวงกลมและเส้นตรงร่วมกันนี้ จะหาได้

โดยการสร้างกราฟทั้งสองชนิดให้ตกกัน ค่าของพิกัดที่ตกกันนั้น คือ



ค่าของตัวแก้แห่งสมการทั้งสอง เพราะพิกัดตรงจุดตกกันเป็นพิกัดของจุด
รวมที่อยู่บนเส้นตรงและวงกลม

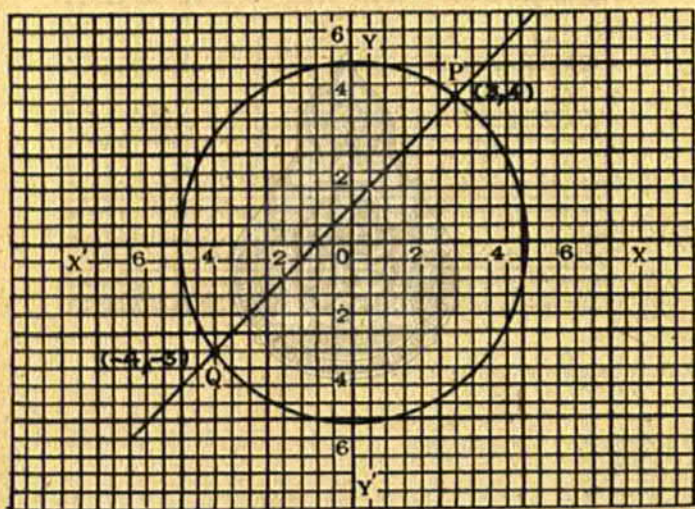
ตัวอย่าง จงแก้สมการ $x^2 + y^2 = 25$ และ $y - x = 1$ โดย
วิธีกราฟ

วิธีทำ วงกลมมีรัศมียาว 5 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด
ใช้มาตราส่วน 2 ซม. ต่อหนึ่งหน่วยบนแกนทั้งสอง

$$y - x = 1$$

x	0	-1	2
y	1	0	3

จากจุด P; Q และทราฟทั้งสองเส้นก็ตัดกันมีพิกัด (3, 4), (-4, -3)



$$\text{คำตอบ } x = 3; y = 4$$

$$x = -4; y = -3$$

แบบฝึกหัดที่ 2 ง.

จงแก้สมการโดยวิธีการ

$$1. x^2 + y^2 = 53$$

$$y - x = 5$$

$$2. \quad x^2 + y^2 = 18$$

$$2x - y = 1$$

$$8. \quad x^2 + y^2 = 41$$

$$y = 2x - 8$$

$$4. \quad x^2 + y^2 = 29$$

$$4x - 8y = 14$$

2.8 การแก้สมการซึ่งมีตัวไม่ทราบค่าสองตัว และเป็นสมการพหุนามกำลังสอง
ทั้งสองสมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ ก. $x^2 + y^2 = 58$

$$xy = 21$$

$$จ. \quad 4x^2 + 9y^2 = 186$$

$$8xy = 80$$

วิธีทำ ก. $x^2 + y^2 = 58 \dots\dots\dots (1)$

$$xy = 21 \dots\dots\dots (2)$$

$$(2) \times 2, \quad 2xy = 42 \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) + (3), \quad x^2 + 2xy + y^2 = 100$$

$$(x + y)^2 = 10^2$$

$$(x + y) = \pm \sqrt{10^2}$$

$$= \pm 10 \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned}
 (1) - (3), \quad x^2 - 2xy + y^2 &= 16 \\
 (x - y)^2 &= 4^2 \\
 x - y &= \pm \sqrt{4^2} \\
 &= \pm 4 \dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

จาก (4), (5)

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -10, \\ x - y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -10, \\ x - y = -4 \end{cases}$$

บวกกันได้

$$\begin{array}{rclcl}
 2x & = & 14, & 6, & -6, & -14 \\
 x & = & 7, & 3, & -3, & -7
 \end{array}$$

ลบกันได้

$$\begin{array}{rclcl}
 2y & = & 6, & 14, & -14, & -6 \\
 y & = & 3, & 7, & -7, & -3
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 7, 3, -3, -7 \\ y = 3, 7, -7, -3 \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

วิธีทำ ๑. $4x^2 + 9y^2 = 186 \dots\dots (1)$

$$3xy = 80 \dots\dots (2)$$

$$(2) \times 4, \quad 12xy = 120 \dots\dots (3)$$

$$(1) + (3) \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 256$$

$$(2x + 3y)^2 = 16^2$$

$$(2x + 3y) = \pm \sqrt{16^2}$$

$$= \pm 16 \dots\dots (4)$$

$$(1) - (3) \cdot 4x^2 - 12xy + 9y^2 = 16$$

$$(2x - 3y)^2 = 4^2$$

$$2x - 3y = \pm \sqrt{4^2}$$

$$= \pm 4 \dots\dots\dots (5)$$

จาก (4), (5)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 2x - 3y = 4, \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 2x - 3y = -4, \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = -16, \\ 2x - 3y = 4, \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = -16, \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

บวกกันได้

$$\begin{array}{rclcl} 4x & = & 20, & 12, & -12, & -20 \\ x & = & 5, & 3, & -3, & -5 \end{array}$$

ลบกันได้

$$\begin{array}{rclcl} 6y & = & 12, & 20, & -20, & -12 \\ y & = & 2, & 3\frac{1}{3}, & -3\frac{1}{3}, & -2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5, \quad 3, \quad -3, \quad -5 \\ y = 2, \quad 3\frac{1}{3}, \quad -3\frac{1}{3}, \quad -2 \end{array} \right\} \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย

การแก้สมการแบบนโจทยมีลักษณะเป็นผลบวกของกำลังสอง
สมการหนึ่ง แต่ต้องถอดรากกำลังที่ 2 ทั้ง 2 จำนวน ส่วน
อีกสมการหนึ่งเป็นรูปของผลคูณ วิเคราะห์ถอดรากกำลัง
ทั้งสองของทั้ง 2 จำนวนในสมการหนึ่ง นำมาคูณกันแล้วคูณกับ
อีก 2 นแต่ละเป็นควกลางที่เหมาะสม คือไปแก้หาตัวเลขมาคูณ
ผลคูณ ของอีกสมการหนึ่งให้เท่ากับ ควกลาง ที่เหมาะสมตามท
ที่คิดไว้ เช่นในข้อ ก. ควกลางที่เหมาะสมคือ $2xy$ จึงเอา 2

คุณสมการที่ 2 ส่วนในข้อ ข. ตัวกลางที่เหมาะสมคือ
 $\sqrt{4x^2} \times \sqrt{9y^2} \times 2 = 12xy$ จึงต้องเอา 4 ไปคูณใน
 สมการ 2

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 จ.

จงหาค่า x และ y จากสมการต่อไปนี้

- | | | | |
|-------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| 1. $7x^2 + y^2$ | $= 28$ | 2. $2x^2 - 3y^2$ | $= 6$ |
| $x - 2y$ | $= -9$ | $3x + y$ | $= 11$ |
| 3. $x^2 + 4y^2$ | $= 180$ | 4. $x - y$ | $= \frac{5}{6}$ |
| xy | $= 36$ | xy | $= 1$ |
| 5. $3x - 7y$ | $= 1$ | 6. $x^3 + y^2$ | $= 58$ |
| xy | $= 10$ | xy | $= 14$ |
| 7. $x^2 + y^2$ | $= 61$ | 8. $x^2 + 4y^2$ | $= 18$ |
| xy | $= 30$ | xy | $= 3$ |
| 9. $25y^2 + 9x^2$ | $= 29$ | 10. $36x^2 + 16y^2$ | $= 145$ |
| xy | $= \frac{2}{3}$ | $2xy$ | $= 1$ |

ตัวอย่างที่ 2

จงแก้สมการ ก.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{xy} = \frac{1}{3}$$

ข. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{10}{3}$

$$\frac{1}{xy} = \frac{25}{3}$$

วิธีทำ

ก.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{2}{xy} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots (2)$$

$$(1)^2 \quad \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{36} \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) \times 2 \quad \frac{4}{xy} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots (4)$$

$$(3) - (4), \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{36} - \frac{2}{3} = \frac{1}{36} \dots\dots (5)$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$= \pm \frac{1}{6} \dots\dots\dots (6)$$

จาก (1) และ (6)

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

บวกกันได้

$$\frac{2}{x} = 1, \quad \frac{4}{6}$$

$$x = 2, \quad 3$$

ลบกันได้

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{6} \quad 1$$

$$y = 3 \quad 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2, \quad 3 \\ y = 3, \quad 2 \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

วิธีทำ

ข.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{10}{8} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{25}{3} \dots\dots\dots (2)$$

$$(1)^2 \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{100}{9} \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \times 4, & \quad \frac{4}{xy} = \frac{100}{9} \dots\dots\dots (4) \\
 (3) + (4), & \quad \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{100}{9} + \frac{100}{3} = \frac{100+300}{9} \\
 & \quad = \frac{400}{9} \\
 & \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 \\
 & \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \pm \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2} \\
 & \quad = \pm \frac{20}{3} \dots\dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

จาก (5) และ (1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{20}{3} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{10}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{20}{3} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{10}{3} \end{cases}$

บวกกันได้ $\begin{aligned} \frac{2}{x} &= \frac{10}{3} & ; & \quad \frac{2}{x} = -10 \\ x &= \frac{3}{5} & ; & \quad x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$

ลบกันได้ $\begin{aligned} \frac{2}{y} &= 10 & ; & \quad \frac{2}{y} = -\frac{10}{3} \\ y &= \frac{1}{5} & ; & \quad y = -\frac{3}{5} \end{aligned}$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \\
 y &= \frac{1}{5}, -\frac{3}{5} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \\ y &= \frac{1}{5}, -\frac{3}{5} \end{aligned}} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

คำอธิบาย เราจะหา xy คุณตลอดทั้ง 2 สมการเพื่อให้ไม่มีตัวไม่ทราบค่า
 Unknown (x และ y) ในส่วนแล้วแทนค่ากันเหมือนทดมา
 แล้วในตัวอย่าง 1 ก็ได้ แต่ส่วอีกทำให้คนไม่ได้ออกพยายาม
 หา $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ ก่อนแล้วจึงหา x, y ภายหลัง

ตัวอย่างที่ 3 รวบรวมการ ก. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{144}$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{12}$$

ข. $\frac{16}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{37}{9}$

$$\frac{4}{xy} = \frac{1}{6}$$

วิธีทำ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{144} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{12} \dots\dots\dots (2)$$

$$(2) \times 2 \quad \frac{2}{xy} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) + (3) \quad \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{144} + \frac{1}{6} = \frac{25 + 24}{144}$$

$$= \frac{49}{144}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \pm \sqrt{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \pm \frac{7}{12} \dots\dots (4)$$

$$(1) - (3) \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{144} - \frac{1}{6} = \frac{25 - 24}{144} = \frac{1}{144}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2} = \pm \frac{1}{12} \dots\dots (5)$$

จาก (4) และ (5),

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{7}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

บวกกันได้

$$\frac{2}{x} = \frac{8}{12}, \quad \frac{6}{12}, \quad -\frac{6}{12}, \quad -\frac{8}{12}$$

$$x = 8, \quad 4, \quad -4, \quad -8,$$

ลบกันได้

$$\frac{2}{y} = \frac{6}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad -\frac{8}{12}, \quad -\frac{6}{12}$$

$$y = 4, \quad 8, \quad -8, \quad -4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 8, 4, -4, -8 \\ y = 4, 8, -8, -4 \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

คำอธิบาย เราทำส่วนให้หมดไปแล้วทำเหมือนกับตัวอย่างที่ 2 ก็ได้ แต่
จะยุ่งกว่านี้

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1\frac{1}{2}$$

วิธีทำ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{17}{4} \dots\dots\dots (1)$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (2)$$

$$(2)^2 \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{9}{4} \dots\dots\dots (3)$$

$$(1)-(3), \quad \frac{2}{xy} = \frac{8}{4} \dots\dots\dots (4)$$

$$(1)+(4), \quad \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{4}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \pm \frac{5}{2} \dots\dots\dots (5)$$

จาก (5) และ (4),
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

บวกกันได้
$$\begin{aligned} \frac{2}{x} &= \frac{8}{2}; & -\frac{2}{2} \\ x &= \frac{1}{2}; & -2 \end{aligned}$$

ลบกันได้
$$\begin{aligned} \frac{2}{y} &= \frac{2}{2}; & -\frac{8}{2} \\ y &= 2; & -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}; & -2 \\ y &= 2; & -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย ข้อนี้ไม่ควรทำส่วนให้หมดไป เพราะจะทำให้ยุ่งยากกว่านี้มาก

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ณ.

จงหาค่า x และ y จากสมการต่อไปนี้

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	= 5	2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	= $\frac{8}{15}$
$\frac{4}{xy}$	= 24	$\frac{1}{xy}$	= $\frac{1}{15}$
3. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$	= 11	4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$	= $\frac{1}{12}$
$\frac{1}{xy}$	= -28	$\frac{1}{xy}$	= $\frac{1}{24}$
5. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$	= $\frac{17}{4}$	6. $\frac{1}{xy}$	= $-\frac{9}{2}$
$\frac{4}{xy}$	= 4	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$	= $\frac{45}{4}$
7. $\frac{9}{y^2} + \frac{1}{z^2}$	= $\frac{17}{16}$	8. $\frac{1}{x^2} + \frac{16}{y^2}$	= $\frac{87}{9}$
$\frac{6}{yz}$	= $-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{xy}$	= $-\frac{2}{3}$

$$9. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 74$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 12$$

$$10. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{36}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า x, y จากสมการ $x^2 - 4xy = 0$

$$x^2 - xy + 5y^2 = 25$$

วิธีทำ

$$x^2 - 4xy = 0 \dots\dots (1)$$

$$x^2 + xy + 5y^2 = 25 \dots\dots (2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad x(x - 4y) = 0$$

$$x = 0, 4y$$

เมื่ $x = 0$ แทน x ใน (2)

$$5y^2 = 25$$

$$y^2 = 5$$

$$y = \pm \sqrt{5}$$

เมื่ $x = 4y$ แทน x ใน (2)

$$16y^2 + 4y^2 + 5y^2 = 25$$

$$25y^2 = 25$$

$$y = \pm 1$$

$$\text{แทนค่า } y = \pm 1 \text{ ใน } x = 4y \quad \therefore x = \pm 4$$

$$x = 0, y = \pm \sqrt{5}; \quad x = \pm 4, y = \pm 1$$

คำอธิบาย จำนวนทางซ้ายมือของสมการ (1) แยกออกเป็นตัวประกอบได้
แต่เมื่อยหารด้วยสมการ (2) ไม่สามารถตัดกันได้ ต้องใช้
วิธีเหมือนตัวอย่าง 1 คือ หา x เป็นจำนวนของ y หรือ y
เป็นจำนวนของ x แล้วไปแทนค่าให้เหลือเพียง x หรือ y
ตัวเดียว

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า y และ z จากสมการ $2y^2 - 3yz + 2z^2 - \frac{11}{4} = 0$

$$\begin{aligned} & y^2 - 4yz + z^2 = -\frac{1}{2} \\ \text{วิธีทำ} \quad 2y^2 - 3yz + 2z^2 &= \frac{11}{4} \dots\dots\dots (1) \\ y^2 - 4yz + z^2 &= -\frac{1}{2} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \div (2) \quad \frac{2y^2 - 3yz + 2z^2}{y^2 - 4yz + z^2} &= -\frac{11}{2} \\ 4y^2 - 6yz + 4z^2 &= -11y^2 + 44yz - 11z^2 \\ 15y^2 - 50yz + 15z^2 &= 0 \\ 3y^2 - 10yz + 3z^2 &= 0 \\ (y - 3z)(3y - z) &= 0 \\ y &= 3z, \quad \frac{z}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } y \text{ ในสมการ (2) เมื่อ } y &= 3z & \text{เมื่อ } y &= \frac{z}{3} \\ 9z^2 - 12z^2 + z^2 &= -\frac{1}{2} & \frac{z^2}{9} - \frac{4z^2}{3} + z^2 &= -\frac{1}{2} \\ -2z^2 &= -\frac{1}{2}; & z^2 - 12z^2 + 9z^2 &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 & = & \frac{1}{4} \\
 z & = & + \frac{1}{2} \\
 y & = & + \frac{3}{2}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{rcl}
 -2x^2 & = & -\frac{9}{2} \\
 z^2 & = & \frac{9}{4} \\
 z & = & + \frac{3}{2} \\
 y & = & + \frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$y = \pm \frac{3}{2}, z = \pm \frac{1}{2}; y = \pm \frac{1}{2}, z = \pm \frac{3}{2} \text{ ตอบ}$$

คำอธิบาย เขามาหารกันแล้วคูณทแยง เพื่อให้ทางขวามือเป็น 0 แล้ว
 แยกทางขวามือเป็นตัวประกอบเพื่อหา y เป็นจำนวนของ z
 หรือ z เป็นจำนวนของ y ไปแทนค่าในสมการใดสมการ
 หนึ่งก็ได้ เพื่อให้เหลือเพียง y หรือ z เพียงค่าเดียว

อย่าลืม ถ้าแยกออกเป็นตัวประกอบคี่กันไว้ ควรแยกออกคี่กันก่อน

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ข

จงแก้สมการ

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. $x^2 - xy + y^2 = 28$ | 2. $x^2 - 2xy = 12$ |
| $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ | $xy - 2y^2 = 3$ |
| 3. $x^2 - 3xy = 72$ | 4. $3x^2 + 8y^2 = 70$ |
| $xy - 3y^2 = 12$ | $5x^2 + 8xy = 42$ |
| 5. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 60$ | 6. $x^2 + 2xy + 10y^2 = 145$ |
| $2x^2 + y^2 = 24$ | $xy + y^2 = 24$ |

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $4x^2 + y^2 + 58 = 21 (2x - y)$

$$xy = 8$$

วิธีทำ $4x^2 + y^2 + 58 = 21 (2x - y) \dots\dots\dots(1)$

$$xy = 8 \dots\dots\dots(2)$$

$$(2) \times 4 \quad 4xy = 32$$

จาก (1) $4x^2 - 4xy + y^2 + 32 + 58 = 21 (2x - y)$

$$(2x - y)^2 - 21 (2x - y) + 90 = 0$$

$$[(2x - y) - 15] [(2x - y) - 6] = 0$$

$$2x - y = 15, 6 \dots\dots\dots(8)$$

จาก (2) และ (8) $xy = 8 \quad xy = 8 \dots\dots\dots(4)$

$$2x - y = 15 \quad 2x - y = 6 \dots\dots\dots(5)$$

จาก (5) $y = 2x - 15 \quad y = 2x - 6 \dots\dots\dots(6)$

แทนค่า y ใน (4) $x(2x - 15) = 8 \quad x(2x - 6) = 8$

$$2x^2 - 15x - 8 = 0 \quad 2x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 8) = 0 \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, 8 \quad (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = 4, -1$$

แทนค่า x ใน (6) $y = -16, 1 \quad y = 2, -8$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}, 8, 4, -1 \\ y = -16, 1, 2, -8 \end{array} \right\} \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย สมการที่มี xy นั้นแก้แล้ว ต่อไปพยายามหาสมการ $2x - y$

โดยเอา $4xy$ ไปลบสมการ (1) เพื่อทำให้เป็นรูป $(2x - y)^2$
 แล้วเอาสมการ (2) ซึ่งเท่ากับ $4xy$ ไปบวกเพื่อทำให้ค่าไม่เปลี่ยนแปลง
 ต่อไปก็แยกเป็นตัวประกอบ ตอนแยกเป็นตัวประกอบ
 นั้นถ้าจะจัดควรสมมติให้ $2x - y = m$ แล้วแยกตัวประกอบ
 เป็นจำนวนของ m ก่อน ต่อไปจึงเปลี่ยน m เป็น $2x - y$

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $\frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = 8$

$$(x + y)(x + 2y) = 48$$

$$\text{วิธีทำ } \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = 8 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(x + y)(x + 2y) = 48 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad x^2 + 2y^2 = 3xy \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad \underline{x^2 + 2y^2} + 3xy = 48 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{เอา } 3xy \text{ จาก (3) แทน } x^2 + 2y^2 \text{ ใน (4) } 3xy + 3xy = 48$$

$$xy = 8 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{เอา } 8 \text{ แทนค่า } xy \text{ ใน (3) } x^2 + 2y^2 = 24 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{จาก (5)} \quad x = \frac{8}{y} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{เอา } \frac{8}{y} \text{ แทน } x \text{ ใน (6) } \frac{64}{y^2} + 2y^2 = 24$$

$$64 + 2y^4 = 24y^2$$

$$\text{เอา } 2 \text{ หารตลอด } y^4 - 12y^2 + 32 = 0$$

$$(y^2 - 4)(y^2 - 8) = 0$$

$$y^2 = 4, 8$$

$$y = \pm 2, \pm \sqrt{8} \text{ หรือ } \pm 2\sqrt{2}$$

แทนค่า y ใน (7)

$$x = \pm 4, \pm \sqrt{\frac{4}{2}} \text{ หรือ } \pm 2\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm 4, \pm 2\sqrt{2} \\ y &= \pm 2, \pm 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย เมื่อทำส่วนให้หมดไปแล้ว ต้องเหลือพวกกำลังสองเหมือนกันจึงจะแก้สมการได้ ค่อยไปทำให้สมการหนึ่งเข้ารูปผลบวกของกำลังสอง ส่วนอีกสมการหนึ่งเป็นรูปผลคูณ แล้วแทนค่าให้เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว เหมือนตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $\frac{2x+y}{x-2y} + \frac{x-2y}{2x+y} = \frac{50}{7}$

$$x^2 + y^2 = 40$$

วิธีทำ $\frac{2x+y}{x-2y} + \frac{x-2y}{2x+y} = \frac{50}{7} \dots\dots\dots (1)$

$$x^2 + y^2 = 40 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{ให้ } \frac{2x+y}{x-2y} = m \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{จาก (1)} \quad m + \frac{1}{m} = \frac{50}{7}$$

$$7m^2 + 7 = 50m$$

$$7m^2 - 50m + 7 = 0$$

$$(m-7)(7m-1) = 0$$

$$m = 7, \frac{1}{7}$$

เมื่อ $m = 7$ แทนค่าใน (3) $\frac{2x+y}{x-2y} = 7$

$$2x + y = 7x - 14y$$

$$15y = 5x$$

$$x = 3y$$

แทนค่า x ใน (2) $9y^2 + y^2 = 40$

$$10y^2 = 40$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$x = \pm 6$$

เมื่อ $m = \frac{1}{7}$ แทนค่าใน (3) $\frac{2x+y}{x-2y} = \frac{1}{7}$

$$14x + 7y = x - 2y$$

$$13x = -9y$$

$$x = -\frac{9y}{13}$$

แทนค่า x ใน (2) $\frac{81}{169}y^2 + y^2 = 40$

$$\frac{81y^2 + 169y^2}{169} = 40$$

$$\frac{250y^2}{169} = 40$$

$$\therefore y^2 = \frac{40 \times 169}{250}$$

$$y = \pm \frac{26}{5}$$

$$\therefore x = \mp \frac{18}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm 6, \mp \frac{18}{5} \\ y &= \pm 2, \pm \frac{26}{5} \end{aligned} \right\} \underline{\text{ตอบ}}$$

คำอธิบาย ถ้าโจทย์มีเศษส่วนและส่วนกลับ (reciprocal) ของมัน อยู่ด้วย ต้องสมมติให้เท่า กับ อักษร ตัวใดตัวหนึ่งหาค่า อักษรตัวที่สมมุติก่อนแล้วจึงมาหาค่า x, y ภายหลัง

แบบฝึกหัด ชุดที่ 2 ข.

จงแก้สมการ

$$1. \frac{x}{2y} + \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \quad 2. \frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = 2\frac{1}{3}$$

$$(x+y)(x+2y) = 24 \quad (x+y)(x-2y) = -4$$

$$3. \frac{2y}{z} - \frac{z}{y} = 2\frac{1}{3} \quad 4. \frac{y}{z} + \frac{3z}{y} = 8\frac{1}{2}$$

$$(y+z)(2y-z) = 20 \quad (y+z)(y+3z) = 15$$

$$5. x + y = 6 \quad 6. x^2y^2 - 14xy = -40$$

$$x^2y^2 + 30 = 11xy \quad x - y = 8$$

$$7. x - y = 1 \quad 8. x^2y^2 + 120 = -23xy$$

$$xy^2 + 72 = 18xy \quad x + y = -2$$

$$9. x^2 + y^2 + 47 = 12x + 12y \quad 10. xy = 12$$

$$xy = 6 \quad x^2 + 16y^2 + 320 = 30x + 120y$$

$$11. \frac{2x+y}{x-2y} + \frac{x-2y}{2x+y} = \frac{50}{7}$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$12. \frac{y-2z}{2y-z} + \frac{2y-z}{y-2z} = \frac{26}{5}$$

$$y^2 + z^2 = 90$$

การแก้สมการเชิงกำลังมากกว่าสองขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ

$$ก. \quad x^3 + y^3 = 407$$

$$x + y = 11$$

$$ข. \quad 8x^3 - y^3 = 189$$

$$4x^2 + 2xy + y^2 = 9$$

$$\text{วิธีทำ ก.} \quad x^3 + y^3 = 407 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x + y = 11 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) \div (2), \quad \frac{x^3 + y^3}{x + y} = \frac{407}{11}$$

$$\frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} = 37$$

$$x^2 - xy + y^2 = 37 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad y = (11 - x) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ใส่ 11 - x แทน y ใน (3)

$$x^2 - x(11 - x) + (11 - x)^2 = 37$$

$$x^2 - 11x + x^2 + 121 - 22x + x^2 = 37$$

$$3x^2 - 33x + 84 = 0$$

$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$(x - 7)(x - 4) = 0$$

$$\begin{aligned}
 x &= 7 \text{ หรือ } 4 \\
 \text{แทนค่า } x \text{ ใน (4), } y &= (11-7) \text{ หรือ } (11-4) \\
 &= 4 \text{ ,, } 7 \\
 x &= 4 \text{ หรือ } 7, \quad y = 7 \text{ หรือ } 4 \text{ ตอบ}
 \end{aligned}$$

วิธีที่ ๒.

$$\begin{aligned}
 8x^3 - y^3 &= 243 \dots\dots\dots (1) \\
 4x^2 + 2xy + y^2 &= 27 \dots\dots\dots (2) \\
 (1) \div (2) \quad \frac{8x^3 - y^3}{4x^2 + 2xy + y^2} &= \frac{243}{27} \\
 \frac{(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)}{4x^2 + 2xy + y^2} &= 9 \\
 2x - y &= 9 \\
 2x - 9 &= y \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

ใส่ $2x - 9$ แทน y ใน (2)

$$4x^2 + 2x(2x - 9) + (2x - 9)^2 = 27$$

$$4x^2 + 4x^2 - 18x + 4x^2 - 36x + 81 - 27 = 0$$

$$12x^2 - 54x + 54 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$(x - 3)(2x - 3) = 0$$

$$x = 3, \frac{3}{2} \text{ หรือ } \frac{1}{2}$$

แทนค่า x ใน (3)

$$\begin{aligned}
 y &= 2(3) - 9, 2\left(\frac{3}{2}\right) - 9 \\
 &= -3; \quad -6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= 3, \frac{1}{2} \\
 y &= -3, -6 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \right\} \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

คำอธิบาย เามาหารกันก่อนเพื่อตัดทอนให้กำลังน้อยลง แล้วจึงใช้แบบ
แทนค่า เพื่อให้เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ณ.

จงแก้สมการต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 - y^2 = 207$ | 2. $4x^2 - y^2 = 11$ |
| $x + y = 23$ | $2x - y = 1$ |
| 3. $x + 3y = -16$ | 4. $49y^2 - 16z^2 = 185$ |
| $x^2 - 9y^2 = 328$ | $7y + 4z = 5$ |
| 5. $11x - 5y = 4$ | 6. $x^3 - y^3 = 152$ |
| $121x^2 - 25y^2 = -104$ | $x - y = 2$ |
| 7. $x^3 + y^3 = -152$ | 8. $x^3 - 27y^3 = 91$ |
| $x^2 - xy + y^2 = 76$ | $x - 3y = 1$ |
| 9. $64y^3 - z^3 = -387$ | 10. $y^3 - 125x^3 = -657$ |
| $4y - z = -3$ | $y^2 + 5yx + 25x^2 = 219$ |

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า x, y ที่เป็นจำนวนเต็มจากสมการ

$$\text{ก. } x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133$$

$$x^2 + xy + y^2 = 19$$

$$\text{ข. } x^4 + 4y^4 = 580$$

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 58$$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีที่ ๗.} \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\
 &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\
 &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)
 \end{aligned}$$

$$\therefore x^4 + x^2y^2 + y^4 = 183 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ} \quad \therefore x^2 + xy + y^2 = 19 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) \div (2) \quad \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{183}{19}$$

$$\frac{(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 7$$

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) + (3), \quad 2x^2 + 2y^2 = 26$$

$$x^2 + y^2 = 13 \dots\dots\dots (4)$$

$$(2) - (3), \quad 2xy = 12 \dots\dots\dots (5)$$

$$(3) + (5), \quad x^2 + 2xy + y^2 = 25$$

$$(x + y)^2 = 5^2$$

$$x + y = \pm 5 \dots\dots\dots (6)$$

$$(3) - \frac{(5)}{2}, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 1$$

$$(x - y)^2 = 1^2$$

$$x - y = \pm 1 \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{จาก (6) และ (7) } \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1, \end{cases} \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1, \end{cases} \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{cases} \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\text{บวกกันได้} \quad 2x = 6, \quad 4, \quad -4, \quad -6$$

$$x = 3, \quad 2, \quad -2, \quad -3$$

ลบกันได้

$$2y = 4, \quad 6, \quad -6, \quad -4$$

$$y = 2, \quad 3, \quad -3, \quad -2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3, 2, -2, -3. \\ y = 2, 3, -3, -2, \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

คำอธิบาย แยกออกเป็นตัวประกอบก่อน เขามาหารกัน

วิธีทำ จ. $x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2$
 $= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$
 $= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

$$\therefore x^4 + 4y^4 = 580 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ } \therefore x^2 - 2xy + 2y^2 = 58 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) \div (2) \quad \frac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{580}{58}$$

$$\frac{(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)}{x^2 - 2xy + 2y^2} = 10$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 10 \dots\dots\dots (3)$$

$$(3) + (2), \quad 2x^2 + 4y^2 = 68$$

$$x^2 + 2y^2 = 34 \dots\dots\dots (4)$$

$$(3) - (2), \quad 4xy = -48$$

$$xy = -12 \dots\dots\dots (5)$$

$$x = -\frac{12}{y} \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{เขา } -\frac{12}{y} \text{ แทนค่า } x \text{ ใน (4), } \frac{144}{y^2} + 2y^2 = 34$$

$$144 + 2y^4 = 34y^2$$

$$2y^4 - 34y^2 + 144 = 0$$

$$y^4 - 17y^2 + 72 = 0$$

$$(y^2 - 9)(y^2 - 8) = 0$$

$$y^2 = 9, 8$$

$$y = \pm 3, \pm \sqrt{8} \quad (\pm 2\sqrt{2})$$

$$\text{เขา } \pm 8 \text{ แทนค่า } y \text{ ใน (6), } x = \frac{-12}{\pm 3} = \mp 4$$

$$x = \mp 4, y = \pm 3 \text{ ตอบ}$$

คำอธิบาย แยกเป็นคู่ประกอบย่อยออกก่อน นำมาหารกันคือไปใช้ไข้อย่างแทน
ค่าให้เหลือเพียง x ตัวเดียว หรือ y ตัวเดียว แล้วเลือกเขา
เฉพาะค่าที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น (คือ $y = \pm 3$) ส่วนค่าที่
มีเครื่องหมายกรณฑ์ ทิ้งอยู่ (คือ $y = \pm 2\sqrt{2}$) เขาไว้
เวียนภายหลัง

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ญ.

จงหาค่า x และ y ที่เป็นจำนวนเต็มจากสมการต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| 1. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21$ | 2. $x^2 - xy + y^2 = 19$ |
| $x^2 + xy + y^2 = 7$ | $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 273$ |
| 3. $x^4 + 4y^4 = 340$ | 4. $x^4 + 4y^4 = 260$ |
| $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$ | $x^2 - 2xy + 2y^2 = 10$ |
| 5. $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 = 108$ | 6. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 9$ |
| $x^2 + 2xy + 3y^2 = 18$ | $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 = 297$ |

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่า x และ y จากสมการ $x^3 - y^3 = 98$

$$x^2y - xy^2 = 30$$

วิธีทำ $x^3 - y^3 = 98 \dots\dots (1)$

$$x^2y - xy^2 = 30 \dots\dots (2)$$

$$(2) \times 3 \quad 3x^2y - 3xy^2 = 90 \dots\dots (3)$$

$$(1) - (3) \quad x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8$$

$$(x - y)^3 = 2^3$$

$$x - y = 2 \dots\dots (4)$$

จาก (2) $xy(x - y) = 30$

เอา 2 แทน $x - y$ $2xy (2) = 30$

$$xy = 15 \dots\dots (5)$$

จาก (4) $x = y + 2 \dots\dots (6)$

เอา $y + 2$ แทน x ใน (5) $(y + 2)y = 15$

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

$$(y + 5)(y - 3) = 0$$

$$y = -5, 3$$

แทนค่า y ใน (6) $x = -3, 5$

$$x = -3, 5$$

$$y = -5, 3$$

} ตอบ

คำอธิบาย ขอนฉาแยกออกเป็นตัวยประกอบและตัดกันแล้ว จะทำให้ยุ่งยากกว่าที่จะทำให้เป็นรูปกำลังสาม

อย่าลืม

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า x, y จากสมการ $x + y = 7$

$$x^2y^2 + 72 = 18xy$$

วิธีทำ

$$x + y = 7 \dots\dots (1)$$

$$x^2y^2 + 72 = 18xy \dots\dots (2)$$

$$\text{จาก (2)} \quad x^2y^2 - 18xy + 72 = 0$$

$$(xy - 12)(xy - 6) = 0$$

$$xy = 12, 6 \dots\dots (3)$$

$$\text{จาก (2), (3)} \quad xy = 12 \quad \quad \quad xy = 6 \dots\dots (4)$$

$$x + y = 7 \quad \quad \quad x + y = 7 \dots\dots (5)$$

$$\text{จาก (5)} \quad x = 7 - y \quad \quad \quad x = 7 - y$$

$$\text{แทนค่า } x \text{ ใน (4)} \quad (7 - y)y = 12 \quad \quad \quad (7 - y)y = 6$$

$$7y - y^2 - 12 = 0 \quad \quad \quad 7y - y^2 - 6 = 0$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0 \quad \quad \quad y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$(y - 4)(y - 3) = 0 \quad \quad \quad (y - 6)(y - 1) = 0$$

$$y = 4, 3 \quad \quad \quad y = 6, 1$$

$$x = 3, 4 \quad \quad \quad x = 1, 6$$

$$x = 3, 4, 1, 6$$

$$y = 4, 3, 6, 1$$

} ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $(x^2 + y^2)(x + y) = 65$

$$x^2 + x + y^2 + y = 18$$

$$\text{วิธีทำ} \quad (x^2 + y^2)(x + y) = 65 \dots\dots (1)$$

$$x^2 + x + y^2 + y = 18 \dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } x^2 + y^2 &= m \dots\dots (3) \\
 x + y &= n \dots\dots (4) \\
 \text{จาก (1) } mn &= 65 \dots\dots (5) \\
 \text{จาก (2) } m + n &= 18 \dots\dots (6) \\
 \text{จาก (6) } n &= 18 - m \dots\dots (7) \\
 \text{แทนค่า } n \text{ ใน (5) } m(18 - m) &= 65
 \end{aligned}$$

$$18m - m^2 - 65 = 0$$

$$m^2 - 18m + 65 = 0$$

$$(m - 13)(m - 5) = 0$$

$$m = 13, 5$$

$$\text{แทนค่า } m \text{ ใน (7) } n = 5, 13$$

$$\text{เมื่อ } m = 13, n = 5 \text{ แทนค่าใน (3), (4)}$$

$$x^2 + y^2 = 13 \dots\dots (8)$$

$$x + y = 5 \dots\dots (9)$$

$$\text{จาก (9) } y = 5 - x$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน (8) } x^2 + (5 - x)^2 = 13$$

$$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x = 3, 2$$

$$y = 2, 3$$

เมื่อ $m = 5$ $n = 13$ แทนค่าใน (8)

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$x + y = 13$$

จะเห็นว่าจะได้ค่าไม่จริงจึงต้องตัดออก

$$\therefore \text{ค่า } x, y \text{ ที่เป็นไปได้ คือ } \begin{array}{l} x = 3, 2 \\ y = 2, 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \end{array}} \right\} \text{ตอบ}$$

แบบฝึกหัดที่ 2 ง.

จงหาค่า x และ y จากสมการ

1. $x^3 - y^3 = 26$, $x^2y - xy^2 = 6$
2. $x^3 + y^3 = 35$, $x^2y + xy^2 = 30$
3. $x^3 + y^3 = 91$, $xy(x + y) = 84$
4. $x^3 - y^3 = 117$, $xy(x - y) = 30$
5. $(x^2 - y^2)(x + y) = 25$, $x^2 + x - y^2 + y = 10$
6. $(x^2 + y^2)(x - y) = 40$, $x^2 - x + y^2 + y = 18$
7. $(x^2 + y^2)(x + y) = 15$, $x^2 + x + y^2 + y = 8$

แบบที่ 3 การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว

การแก้สมการเพื่อหาคำไม่ทราบค่า 3 ตัว โจทย์จะต้องให้สมการมา 3 สมการจึงจะได้ แต่ถ้าโจทย์ให้มาเพียง 2 สมการ เราจะหาคำไม่ได้ แต่จะหาอัตราส่วนของตัวไม่ทราบค่าได้ โดยใช้กฎการคูณไขว้ ดังนี้

พิจารณาส่วนของ x, y, z

จากสมการ

$$ax + by + cz = 0$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

วิธีทำ $ax + by + cz = 0 \dots\dots(1)$

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \dots\dots(2)$$

(1) เอา z หารตก

$$a\left(\frac{x}{z}\right) + b\left(\frac{y}{z}\right) + c = 0 \dots\dots(3)$$

(2) เอา z หารตก

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right) + b_1\left(\frac{y}{z}\right) + c_1 = 0 \dots\dots(4)$$

เพื่อให้ $\frac{y}{z}$ หกไป ทำดังนี้

$$(3) \times b_1 \quad ab_1\left(\frac{x}{z}\right) + bb_1\left(\frac{y}{z}\right) + b_1c = 0 \dots\dots(5)$$

$$(4) \times b \quad a_1b\left(\frac{x}{z}\right) + bb_1\left(\frac{y}{z}\right) + bc_1 = 0 \dots\dots(6)$$

$$(5) - (6) \quad \frac{x}{z}(ab_1 - a_1b) = bc_1 - b_1c$$

$$\frac{x}{z}$$

$$= \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}$$

$$\therefore \frac{x}{bc_1 - b_1c}$$

$$= \frac{z}{ab_1 - a_1b} \dots\dots(7)$$

ในทำนองเดียวกันหาได้ว่า $\frac{y}{z}$

$$= \frac{ca_1 - c_1a}{ab_1 - a_1b}$$

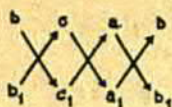
$$\therefore \frac{y}{a_1c - ac_1}$$

$$= \frac{z}{ab_1 - a_1b} \dots\dots(8)$$

$$\text{จาก (7) และ (8) } \therefore \frac{x}{bc_1 - b_1c} = \frac{y}{ca_1 - c_1a} = \frac{z}{ab_1 - a_1b}$$

จากผลที่ได้ เห็นได้ว่าส่วนของ $x:y:z$ เกือบกับสัมประสิทธิ์

ของ x, y, z จากสมการ (1) และ (2) ซึ่งจัดได้ดังนี้



ส่วนของ x ได้จากสัมประสิทธิ์ y ในสมการ $(1) \times$ ส.ป.ส. z ใน

(2) ลบ ส.ป.ส. y ใน (2) $\times$ ส.ป.ส. z ใน (1)

ส่วนของ y ได้จาก ส.ป.ส. z ใน (1) $\times$ ส.ป.ส. x ใน (2) ลบ

ส.ป.ส. z ใน (2) $\times$ ส.ป.ส. x ใน (1)

ส่วนของ z ได้จาก ส.ป.ส. x ใน (1) $\times$ ส.ป.ส. y ใน (2) ลบ

ส.ป.ส. x ใน (2) $\times$ ส.ป.ส. y ใน (1)

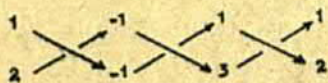
นคอทมาของกฎการคูณไขว้ (Rule of Cross Multiplication)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ x, y, z จากสมการต่อไปนี้

$$x + y - z = 0 \quad 3x + 2y - z = 0 \quad 4x^2 - 3y^2 + 8z^2 = 0$$

วิธีทำ เอาสมการที่ x, y, z มากำถึงเป็นเทอมเหมือนกันมาหาอัตรา

ส่วนของ $x:y:z$ ตามกฎการคูณไขว้ดังนี้



$$\frac{x}{-1 - (-2)} = \frac{y}{-3 - (-1)} = \frac{z}{2 - 3}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$$

ให้ $k = \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$ k เป็นจำนวนคงที่

$$\therefore x = k, \quad y = -2k, \quad z = -k$$

จาก $4x^2 + 3y^2 + 8z^2 = 24$ แทนค่า x, y, z

$$4k^2 + 12k^2 + 8k^2 = 24$$

$$24k^2 = 24$$

$$k^2 = 1$$

$$k = \pm 1$$

$$x = \pm 1, y = \mp 2, z = \mp 1 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ฏ.

แก้สมการต่อไปนี้โดยใช้กฎการคูณไขว้ และวงรีภาพเฉพาะทศนิยม

ไม่ทราบค่า 2 ตัว

$$1. \quad 3x + 2y - 16 = 0, \quad 5x - 3y + 5 = 0$$

$$2. \quad x - 3y = 6, \quad 2x - 9y = 11$$

$$3. \quad x + y = 18, \quad 2x - 3y = 1$$

$$4. \quad ax - by - c = 0, \quad cx - ay - b = 0$$

$$5. \quad 5x + 3y = 2, \quad 10x - 9y = -1$$

$$6. \quad x - 2y + z = 0, \quad 5x - 4y - 7z = 0, \quad x^2 + 2y^2 - 5z^2 = 12$$

$$7. \quad x - 3y - z = 0, \quad 3x + y - 8z = 0, \quad x^2 + y^2 - 5z^2 = 6$$

$$8. \quad x + y - 7z = 0, \quad x - y + z = 0, \quad 2x^3 - y^3 + z^3 = 9$$

$$9. \quad 5x + 3y + z = 0, \quad 2x + y + z = 0, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 18$$

$$10. \quad px + ry + qz = 0, \quad rx + qy + pz = 0, \quad qx + py + rz = 0$$

จงพิสูจน์ว่า $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr$

ตัวอย่างที่ 2. จงหาค่า x, y, z จากสมการ

$$\text{ก.} \quad xy^2z^2 = 288 \quad x^2yz^2 = 192 \quad x^2y^2z = 144$$

$$\text{ข.} \quad (x+y)(y+z) = 15, \quad (y+z)(z+x) = 20,$$

$$(z+x)(x+y) = 12$$

วิธีทำ ก. $xy^2z^2 = 288 \quad \dots\dots\dots (1)$

$$x^2yz^2 = 192 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$x^2y^2z = 144 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) \times (2) \times (3) \quad x^5y^5z^5 = \underline{288} \times \underline{192} \times \underline{144}$$

$$= \underline{12 \times 12 \times 2 \times 12 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 12 \times 12}$$

$$= 12^5 \times 2^5$$

$$xyz = 24$$

ยกกำลังสอง $x^2y^2z^2 = 24 \times 24 \quad \dots\dots\dots (4)$

$$(4) \div (1) \quad \frac{x^2y^2z^2}{xy^2z^2} = \frac{24 \times 24}{288}$$

$$x = 2$$

$$(4) \div (2) \quad \frac{x^2y^2z^2}{x^2yz^2} = \frac{24 \times 24}{192}$$

$$y = 3$$

$$(4) \div (8) \quad \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 z} = \frac{24 \times 24}{144}$$

$$z = 4$$

$$x = 2, y = 3, z = 4 \quad \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย แขนงเอสมีการทง 8 มาคูณกัน แต่กำลังของตัว unknown ต้อง เท่ากัน ส่วนตัวเลขนั้น ไม่ควรคูณกัน เพราะจะทำให้ ถอดกรณท (root) ยากขึ้น ควรแยกออกเป็นตัวย่อย ๆ และเมื่อถอดกรณทกำลังทเป็นเลขคู่ ($\sqrt[4]{\sqrt[6]{}}$ 7 ล 7) ต้อง ใดเครื่องหมาย $\pm$

$$\text{ข. } (x + y)(y + z) = 15 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(y + z)(z + x) = 20 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(z + x)(x + y) = 12 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) \times (2) \times (3) \quad (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 = 15 \times 20 \times 12$$

$$= 5 \times 8 \times 4 \times 5 \times 4 \times 8$$

$$= 5^2 \times 4^2 \times 8^2$$

$$= 5 \times 4 \times 8$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = \pm 60 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) \div (1) \quad z + x = \pm 4 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$(4) \div (2) \quad x + y = \pm 3 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$(4) \div (3) \quad y + z = \pm 5 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(5) + (6) + (7) \quad 2(x + y + z) = \pm 12$$

$$x + y + z = \pm 6 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$(8) - (5) \quad y = \pm 2$$

$$(8) - (6) \quad z = \pm 3$$

$$(8) - (7) \quad x = \pm 1$$

$$x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 3 \quad \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย แขนงเขามาคูณกันหมดทั้ง 3 สมการ ได้กำลังสองทุก ๆ วงเล็บ เมื่อหักกำลัง 1 จึงได้เครื่องหมาย $(\pm)$ แล้วหาสมการที่กำหนดให้มาหาร จะเหลือเป็น สมการกำลัง หนึ่งทุก ๆ สมการซึ่งจะแก้ได้โดยง่าย

การแก้สมการสามตัวไม่ทราบค่าสามตัวโดยวิธีต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า x, y, z จากสมการ

$$x^2 + xy + xz = 9, y^2 + xy + yz = 27, z^2 + xz + yz = 45$$

$$\text{วิธีทำ} \quad x^2 + xy + xz = 9 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 + xy + yz = 27 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$z^2 + xz + yz = 45 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{จาก } (1) \quad x(x + y + z) = 9 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{จาก } (2) \quad y(y + x + z) = 27 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{จาก } (3) \quad z(z + x + y) = 45 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$(4) + (5) + (6) \quad (x+y+z)(x+y+z) = 81$$

$$(x + y + z) = \pm 9 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(4) \div (7) \quad x = \pm 1$$

$$(5) \div (7) \quad y = \pm 3$$

$$(6) \div (7) \quad z = \pm 5$$

$$x = \pm 1, y = \pm 3, z = \pm 5 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

คำอธิบาย แทนเอาสามตัวคูณกัน แต่ต้องมีตัวประกอบร่วมเหมือนกัน

ต่อไปก็แยกเอาตัวประกอบร่วมออกมา

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 จู.

จงหาค่า x, y, z จากสมการ

$$1. \quad x^2yz = 48 \quad xy^2z = 72 \quad xyz^2 = 96$$

$$2. \quad xy^2z = k^4 \quad x^2yz = n^4 \quad xyz^2 = m^4$$

$$3. \quad xy^2z^2 = 18 \quad x^2y^2z = 12 \quad x^2yz^2 = 36$$

$$4. \quad xy^2z^2 = a^5 \quad x^2y^2z = b^5 \quad x^2yz^2 = c^5$$

$$5. \quad xy + yz = 14 \quad yz + zx = 20 \quad zx + xy = 18$$

$$6. \quad xy + yz = 6 \quad yz + zx = 8 \quad zx + xy = 10$$

$$7. \quad x^2 + xy + xz = 18, y^2 + xy + yz = 6, z^2 + xz + yz = 12$$

$$8. \quad xy - x^2 + xz = 16, yz + y^2 - xy = 32, -xz + z^2 + yz = 48$$

$$9. \quad -xy + xz + x^2 = 8, yz + xy - y^2 = 12, xz - yz + z^2 = 20$$

$$10. \quad x^2 + xy - xz = 40, xy - yz + y^2 = 32, xz + yz - z^2 = 8$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x + y - z = 8, y^2 + z^2 - x^2 = 28,$

$$yz = 6$$

วิธีทำ

$$x + y - z = 8 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 + z^2 - x^2 = 28 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$yz = 6 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(3) \times 2 \qquad 2yz = 12 \dots\dots\dots (4)$$

$$(2) - (4) \quad y^2 - 2yz + z^2 - x^2 = 16$$

$$(y - z)^2 - x^2 = 16$$

$$\left\{ (y - z) + x \right\} \left\{ (y - z) - x \right\} = 16 \dots\dots\dots (5)$$

$$(5) \div (1) \qquad (y - z) - x = 2 \dots\dots\dots (6)$$

$$(1) - (6) \qquad 2x = 6$$

$$x = 3$$

$$(1) + (6) \qquad 2(y - z) = 10$$

$$y - z = 5$$

$$y = 5 + z \dots\dots\dots (7)$$

เอา $5 + z$ แทน y ใน (3) $(5 + z)z = 6$

$$z^2 + 5z - 6 = 0$$

$$(z + 6)(z - 1) = 0$$

$$z = -6, 1$$

แทนค่า z ใน (7) $y = -1, 6$

$x = 3, y = -1, z = -6$ หรือ $x = 3, y = 6, z = 1$ ตอบ

คำอธิบาย ^๑ตอนที่ $(y - z)^2 - x^2 = 16$ ^๒นั้นจะสมมติให้ $y - z = m$

แล้วแยกเป็นตัวประกอบ $m + x$ กับ $m - x$ ส่วนสมการ (1)

^๓เมื่อเอา m ไปแทน $y - z$ ก็จะได้ $m + x$ หาค่าเป็น m, x

^๔ก่อนแล้วจึงเอา $y - z$ มาแทน m ภายหลังก็ได้

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $(x+y)^2 - z^2 = 55$, $x^2 - (y+z)^2 = 11$,
 $x + y - z = 5$

วิธีทำ

$$(x+y)^2 - z^2 = 55 \dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 - (y+z)^2 = 11 \dots\dots\dots (2)$$

$$x + y - z = 5 \dots\dots\dots (3)$$

จาก (1) $(x+y+z)(x+y-z) = 55 \dots\dots\dots (4)$

จาก (2) $(x+y+z)(x-y-z) = 11 \dots\dots\dots (5)$

(4) $\div$ (3) $x + y + z = 11 \dots\dots\dots (6)$

(5) $\div$ (6) $x - y - z = 1 \dots\dots\dots (7)$

(6) + (7) $2x = 12$

$$x = 6$$

(6) - (3) $2z = 6$

$$z = 3$$

(3) - (7) $2y = 4$

$$y = 2$$

$$x = 6, y = 2, z = 3 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

คำอธิบาย แยกออกเป็นตัวประกอบแล้วตัดกันให้เหลือเพียงสมการที่มีตัว
 unknown กาลังเพียง 1 แล้วหาสมการเหล่านี้นมาบวกหรือลบ
 กันก็ได้คำตอบ unknown นั้น

แบบฝึกหัดที่ 2 ท.

วงกลม

1. $x + y - z = 2$ $y^2 + z^2 - x^2 = -6$ $yz = 3$
2. $x + z - y = 10$ $x^2 + y^2 - z^2 = -20$ $zy = 10$
3. $z + x - y = 4$ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $xy = 12$
4. $z + y - x = 11$ $y^2 + x^2 - z^2 = -35$ $yx = 10$
5. $y + x - z = 5$ $x^2 + z^2 - y^2 = -23$ $xz = 6$
6. $y + z - x = 6$ $z^2 + x^2 - y^2 = -24$ $zx = 12$
7. $(x+y)^2 - z^2 = 32$ $x^2 - (y+z)^2 = 16$; $x+y-z = 4$
8. $(y+z)^2 - x^2 = 9$ $y^2 - (z+x)^2 = -45$; $y+z-x = 1$
9. $(z+x)^2 - y^2 = 11$, $z^2 - (x+y)^2 = -89$; $z+x-y = 1$
10. $(x+y)^2 - z^2 = 45$, $(y+z)^2 - x^2 = 105$; $x+y-z = 8$

บทที่ 3

การแปรผัน (Variation)

การแปรผัน คือ การสัมพันธ์ระหว่างของสองสิ่ง หรือมากกว่าใน
เมื่อสิ่งหนึ่งเปลี่ยนแปลงไป สิ่งอื่น ๆ ก็เปลี่ยนแปลงตามสิ่งนั้นไปอย่างใด
สัดส่วนกัน (proportionally)

1. การแปรผันตรง (Direct Variation) หมายความว่าความสัมพั
ระหว่างของสองสิ่ง ในเมื่อสิ่งหนึ่งเพิ่มขึ้น อีกสิ่งหนึ่งก็เพิ่มขึ้น และเมื่อ
สิ่งหนึ่งลดลง อีกสิ่งหนึ่งก็ลดลงอย่างใดสัดส่วนกัน เช่น

รถไฟขบวนหนึ่งแล่น	1 ชม.	ไต่ทาง	40 กม.
ถ้าวัดไฟขบวนหนึ่งแล่น	2 " "	" "	80 " "
" "	4 " "	" "	160 " "
" "	$\frac{1}{2}$ " "	" "	20 " "
" "	$\frac{1}{4}$ " "	" "	10 " "

ตามตัวอย่างข้างบนนี้จะเห็นว่า ถ้าเพิ่มเวลาขึ้นสองเท่า ก็ต้องเพิ่ม
ระยะทางขึ้นสองเท่า และถ้าลดเวลาลง 4 เท่า ก็ต้องลดระยะทางลง 4 เท่า
เช่นนี้ เรากล่าวได้ว่า ระยะทางแปรผันตรงกับจำนวนเวลาและถ้าจะกล่าว
โดยทั่วไปโดยสมมติให้ y กม. เป็นระยะทาง x ชม. เป็นจำนวนเวลา
แล้ว เราจึงกล่าวได้ว่า y แปรผันตรง (Varies directly as, or is
proportional to) กับ x เขียนย่อ ๆ ว่า $y \propto x$

ตามตัวอย่างข้างบน เมื่อพิจารณาจะเห็นว่าค่าที่อยู่ในอันดับ
เดียวกัน ของ ระยะเวลา กับ จำนวนเวลา เมื่อนำ มาหารกันย่อม มีค่าไม่เปลี่ยน
แปลง หรือคงที่ (constant)

$$\text{คห } \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \text{จำนวนคงที่}$$

$$\text{หรือ } \frac{y}{x} = k \quad (\text{เมื่อ } k \text{ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง})$$

$$\text{ดังนั้น } y \propto x$$

$$\text{เราได้ว่า } \frac{y}{x} = k$$

$$\text{หรือ } y = xk$$

หรือจะกล่าวโดยทั่ว ๆ ไปก็ได้ว่า ถ้าจำนวนหนึ่งแปรผันตรงกับอีกจำนวน
หนึ่ง ผลหารของสองจำนวนนั้นจะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง หรือจำนวนหนึ่งเท่ากับ
อีกจำนวนหนึ่งคูณกับจำนวนที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง

ตรงกันข้าม ถ้าจำนวน 2 จำนวน หารกันโดยผลพหุคูณที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง
หรือจำนวนหนึ่งเท่ากับอีกจำนวนหนึ่งคูณกับจำนวนที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง
แล้ว เราจึงได้ว่าจำนวน 2 จำนวนนั้น แปรผกผันกัน

2. การแปรผกผัน (Inverse Variation) หมายความว่าความสัมพันธ์
ระหว่างสองสิ่งในเมื่อสิ่งหนึ่งเพิ่มขึ้นอีกสิ่งหนึ่งลดลง และเมื่อสิ่งหนึ่ง
ลดลง อีกสิ่งหนึ่งก็เพิ่มขึ้นอย่างใกล้ชิดส่วนกัน เช่น

ช่างไม้ 15 คน	สร้างบ้านหลังหนึ่งเสร็จใน	60 วัน
ช่างไม้ 30 คน	,, ,, นั้น ,,	30 วัน
ช่างไม้ 45 คน	,, ,, ,,	20 วัน
ช่างไม้ 5 คน	,, ,, ,,	180 วัน

ตามตัวอย่างข้างบน ถ้าเพิ่มจำนวนชน 8 เท่า ก็ต้องลดจำนวนวันลง 8 เท่า หรือลดจำนวนคนลง 8 เท่า ก็ต้องเพิ่มจำนวนวันชน 8 เท่า เช่นนี้ เรากล่าวได้ว่าจำนวนวันแปรผกผันกับจำนวนคน และถ้าจะกล่าวโดยทั่ว ๆ ไป โดยให้ y เป็นจำนวนวัน และ x เป็นจำนวนคน เรากล่าวได้ว่า y แปรผกผัน (Varies inversely as, or is inversely proportional to) x เมื่อพิจารณาตามตัวอย่างข้างบนจะเห็นได้ว่า ผลคูณของจำนวนวัน และจำนวนคนที่อยู่ในอันดับเดียวกันย่อมเท่ากันเสมอ คือ $yx = y_1x_1 = y_2x_2 = \dots\dots\dots$

$$\text{หรือ } yx = k \quad (k \text{ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง})$$

$$\text{หรือ } y = k \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{คือ } y \propto \frac{1}{x}$$

หรือจะกล่าวโดยทั่ว ๆ ไป ก็ได้ว่า ถ้าจำนวน 2 จำนวนแปรผกผันกัน ผลคูณของ 2 จำนวนนั้นค่าไม่เปลี่ยนแปลง หรือจำนวนหนึ่งแปรผกผันกับส่วนกลับ (reciprocal) ของอีกจำนวนหนึ่ง

ตรงกันข้าม ถ้าผลคูณของจำนวน 2 จำนวนมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง จำนวน 2 จำนวนนั้นก็แปรผกผันกัน

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $y \propto x$ และ $y = 40$ เมื่อ $x = 16$ จงหาว่าเมื่อ $y = 60$, x จะมีค่าเท่าไร

$$\text{วิธีทำ } \therefore y \propto x$$

$$\therefore y = kx \quad (k \text{ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง})$$

$$\text{เมื่อ } y = 40, x = 16, 40 = k \times 16$$

$$k = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\text{เมื่อ } y = 60$$

$$60 = \frac{5}{2} x$$

$$x = 60 \times \frac{2}{5} = 24 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า y แปรผกผันกับ z และ $y = 80$ เมื่อ $z = 4$ จงหาค่าของ z เมื่อ $y = 10$

วิธีทำ

$\therefore y$ แปรผกผันกับ z

$$\therefore y \propto \frac{1}{z}$$

$$\text{ได้ } y = \frac{k}{z}$$

$$\text{เมื่อ } y = 80, z = 4, 80 = \frac{k}{4}$$

$$k = 320$$

$$\text{เมื่อ } y = 10 \quad 10 = \frac{320}{z}$$

$$z = \frac{320}{10} = 32 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 8 จำนวนเวลาที่ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่ง 1 ครั้งแปรผกผันกับกรณที่ที่สองของความยาวของลูกตุ้มนาฬิกา นาฬิกาเรือนหนึ่งมีลูกตุ้มยาว 1 เมตร แกว่ง 1 ครั้งเป็นเวลา 1 วินาที ถ้าลูกตุ้มยาว 64 ซม. จะแกว่งกี่ครั้งใน 1 นาที

วิธีทำ

ให้ t วินาที เป็นเวลาที่ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่ง 1 ครั้ง m ซม. เป็นความยาวของลูกตุ้มนาฬิกา

$$t \propto \sqrt{m}$$

$$t = k \sqrt{m}$$

ลูกตุ้มยาว 1 ม. $1 = k \sqrt{100}$

$$k = \frac{1}{10}$$

ลูกตุ้มยาว 64 ซม. $t = \frac{1}{10} \sqrt{64}$
 $= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

เวลา $\frac{4}{5}$ วินาที ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่ง 1 ครั้ง

เวลา 60 ,, ,, $\frac{5}{4} \times 60 = 75$ ครั้ง

ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่ง 75 ครั้ง ใน 1 นาที ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 กำลังสองของจำนวนวันที่ดาวนพเคราะห์หมีรอบดวงอาทิตย์
 แปรผันตรงกับกำลังสามของระยะทางจากดาวนพเคราะห์ไปยัง
 บังดวงอาทิตย์ ถ้าดาวพฤหัสบดีและโลกอยู่ห่างจากดวง
 อาทิตย์ 488 ล้าน และ $91\frac{1}{4}$ ล้านไมล์ตามลำดับ จงหาว่า
 ดาวพฤหัสบดีหมีรอบดวงอาทิตย์เป็นเวลากี่วัน
 ให้ t วัน เป็นเวลาที่ดาวนพเคราะห์หมีรอบดวงอาทิตย์
 d ล้านไมล์ เป็นระยะทางจากดาวนพเคราะห์ไปยังดวงอาทิตย์

$$t^2 \propto d^3$$

$$t^2 = kd^3 \quad (k \text{ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง})$$

สำหรับโลก $t = 365$, $d = 91\frac{1}{4} = \frac{365}{4}$

$$365^2 = k \times \left(\frac{365}{4}\right)^3$$

$$k = \frac{64}{365}$$

สำหรับดาวพฤหัสบดี หา t เมื่อ $d = 488$

$$t^2 = \frac{64}{365} \times 488^3$$

$$t = 8 \times 488 \times \sqrt{\frac{488}{365}}$$

$$= 3864 \sqrt{\frac{966}{730}}$$

$$= 3864 \sqrt{1.323288}$$

$$= 3864 \times 1.15 \text{ (approx)}$$

$$= 4448.6$$

ดาวพฤหัสบดีหมุนรอบดวงอาทิตย์ประมาณ 4448.6 วัน. ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $(x+y) \propto (x-y)$

จงพิสูจน์ว่า

ก. $x \propto y$

ข. $x^2 + y^2 \propto xy$

วิธีทำ

$$\therefore (x+y) \propto (x-y)$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} = k \quad (\text{เมื่อ } k \text{ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง})$$

ก. $\frac{x+y+x-y}{x+y-x+y} = \frac{k+1}{k-1} \text{ (Componendo et dividendo)}$

$$\frac{2x}{2y} = \frac{k+1}{k-1}$$

ค. $x \propto y \therefore \frac{k+1}{k-1} \text{ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง}$

$$\therefore x + y \propto x - y$$

$$(\text{ในข้อ ก.}) \quad \therefore \frac{x+y}{x-y} = k$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2 - 2xy} = k^2$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = k^2 x^2 + k^2 y^2 - 2k^2 xy$$

$$\therefore (1 - k^2) x^2 + (1 - k^2) y^2 = -2(1 + k^2) xy$$

$$\therefore \frac{(x^2 + y^2)}{xy} = \frac{-2(1 + k^2)}{1 - k^2} \text{ ซึ่งมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง}$$

$$\therefore x^2 + y^2 \propto xy$$

ข้อควรจำ

ก. ขยายมาจากการเพิ่มขึ้นหรือลดลงนั้น จะเป็นเรื่องของการแปรผันใดก็ตามเมื่อเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างใดสัดส่วนกันเท่านั้น ถ้าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่เป็นสัดส่วนกันแล้ว จะเป็นการแปรผันไม่ได้ เช่น ถ้าชาย 1 คน กินข้าว 2 ชาม ชาย 2 คน กินข้าว 3 ชาม แล้วชาย 3 คน กินข้าว 6 ชาม คงไม่ใช่เป็นเรื่องของการแปรผัน

ข. เรื่องตัวทศนิยมไม่เปลี่ยนแปลง (constant) ถ้าเป็นความสัมพันธ์ของตัวแปรใด ๆ แล้วใช้ตัวแปรใด ๆ แต่ถ้าวัดแปรแล้วคง

ใช้คนละตัว เช่น ตามตัวอย่างที่ 5 กล่าวว่า กำลังสองของจำนวนเวลา
 ที่คววนพเคราะห์หมุนรอบดวงอาทิตย์ แปรผันตรงกับกำลังสามของระยะทาง
 จากคววนพเคราะห์ไปยังดวงอาทิตย์นั้นจะเป็นคววนพเคราะห์ดวงใดก็ตาม
 ถ้าเป็นเรื่องจำนวนเวลากับระยะทางแล้ว ใช้ตัว constant (มีค่าไม่เปลี่ยน)
 ตัวเดียวกันเสมอ

ค. จำนวนทั้งหลายที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปรลง เมื่อนำมาบวก ลบ
 คูณ หาร ยกกำลัง ฯ แล้วผลลัพธ์ ก็ยังมีค่าไม่เปลี่ยนแปรลงเสมอ

ง. ตัวเลขต่าง ๆ ถือว่ามีค่าไม่เปลี่ยนถ้าเป็นตัวเลขอยู่แล้วต้อง
 บอกไว้ควรวาตัวใดที่มีค่าไม่เปลี่ยน

จ. a เป็นจำนวนคงที่ (constant) และ b เป็นจำนวนคงที่
 (constant) ; a ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ b นอกจากตัวคงที่ (constant) นั้น
 เป็นตัวเดียวกัน

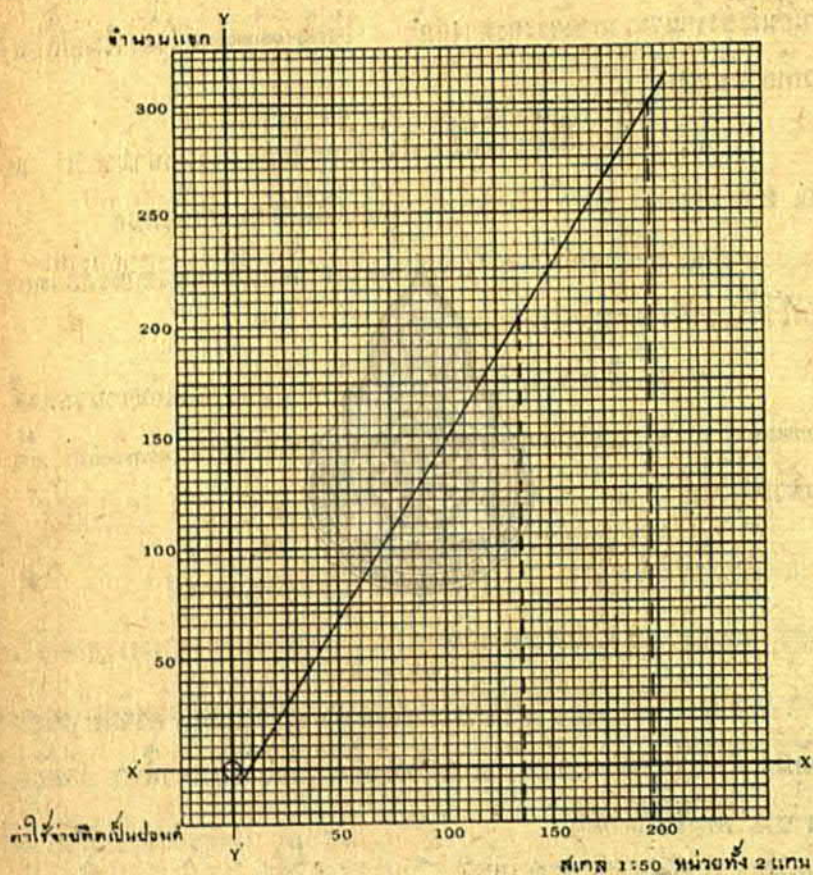
ฉ. ถ้า y แปรผันตรงกับ x
 แล้ว $\frac{y}{x} = k$ หรือ $y = kx$

ช. ถ้า y แปรผกผันกับ x
 $yx = k$

ซ. ต้องใช้หน่วยให้ตรงกันเช่น ตามตัวอย่างที่ 4 ความยาวของ
 ลูกตุ้มนาฬิกาเป็น ซม. ฉะนั้นความยาวในข้อนี้ถ้าเกี่ยวกับคัมมนาฬิกา ก็ต้อง
 เป็น ซม. เหมือนกันหมด

ตัวอย่าง ค่าใช้จ่ายเพื่อใช้ในการวิ่ง ส่วนหนึ่งคงที่ อีกส่วนหนึ่งแปร
 ผันตามจำนวนแขกที่มาในงาน ถ้าค่าใช้จ่ายทั้งสิ้น 64 ปอนด์
 มีแขกมา 80 คน ถ้าค่าใช้จ่าย 88 ปอนด์ มีแขก 120 คน

จงเขียนกราฟซึ่งจะอ่านจำนวนเงินค่าใช้จ่าย เมื่อมีแขกคงแต่ 50 ถึง 300 และหาว่าจะเสียค่าใช้จ่ายเท่าไร ถ้ามีแขกมา 200 คน



ตอบ อ่านจากกราฟ แขก 200 ค่าใช้จ่าย 186 ปอนด์

„ 50 „ 46 „

„ 900 „ 196 „

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 ก.

จงเปลี่ยนให้เป็นรูปสมการ

- ก. a แปรผันตรงกับ b^2 ข. $c \propto \sqrt{d}$
 ค. t แปรผกผันกับ $\frac{1}{s}$ ง. $m \propto \frac{1}{n}$
 จ. x^2 แปรผกผันกับ y^2 ฉ. $(y+z) \propto \frac{1}{x^2}$
 ช. $x^2y^4 \propto z^6$
- เส้นรอบวงของวงกลมยาว x ฟุต แปรผันตรงกับรัศมี ซึ่งยาว y นิ้ว
- จำนวนงานที่ชายคนหนึ่งทำได้ t หน่วย แปรผันตรงกับเวลาที่เขาใช้ในการทำ m ชั่วโมง
- แรงมา h ของเครื่องจักรของเรือภายในลำหนึ่งโตสัดส่วนยกกำลังสามของความเร็ว x ไมล์ต่อชั่วโมง
- ปริมาตร v ค.บ.ฟ. ของจำนวนแก๊สที่กำหนดให้เมื่ออุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงแปรผกผันกับความกดดัน p ปอนด์ตารางฟุต ที่ไครย์
- การแปรผันของอักษรชุดหนึ่งเป็นดังต่อไปนี้ จงเขียนสมการแล้วเติมจำนวนเลขในวงเล็บให้ถูกต้อง และเขียนกราฟ หาจำนวนในช่องว่างด้วย

ก.

x	0	2	4	(..)	7	-1.5	(..)	-5
y	0	(..)	20	3	35	(..)	-10	-25

ข.

t	2	(..)	5	8	-2	(..)	10	
s	40	20	16	(..)	-40	-16	(..)	

7. ถ้า $y \propto x^2$ และ $y = 86$ เมื่อ $x = 4$ จงหาค่าของ
 ก. y เมื่อ $x = 2$
 ข. x เมื่อ $y = 4$
8. ถ้า $x - y \propto x + y$ จงพิสูจน์ว่า $x^2 - xy + y^2 \propto x^2 + xy + y^2$
9. ถ้า y แปรผกผันกับ $\sqrt{x}$ และ $y = 5, x = 4$
 จงหาค่าของ ก. x เมื่อ $y = 2$
 ข. y เมื่อ $x = 100$
10. ทราบแล้วว่า $y \propto (ax - 2)$ เมื่อ $x = 5, y = 3; x = 6, y = 4$
 และถ้า $x = 3, y = 2$ จงหาค่า a แล้วจงหาค่าของ x เมื่อ $y = 6$
11. ถ้า $c + d$ แปรผันตรงกับ $\frac{cd}{c + d}$ จงพิสูจน์ว่า $c^2 \pm d^2 \propto cd$
12. ราคาของเพชรแปรผันตรงกับกำลังสองของน้ำหนัก เพชรหนึ่งเม็ดหนัก
 4 การัต ราคา 40,000 บาท จงหาราคาของเพชรอีกเม็ดหนึ่งหนัก
 สิบยี่สิบเม็ดหนักเม็ดหนึ่ง แค่นั้น 8 การัต
13. ระยะจากทิวทัศน์หนึ่งถึงตึกจากที่สูง แปรผันตรงกับกำลังสองของ
 เวลาที่ใช้ไป วัตถุหนึ่งตกได้ 1600 ฟุต ใน 10 วินาที ถ้าวัตถุ
 ตกได้ 400 ฟุต จะเป็นเวลากี่วินาที
14. แรงมาของเครื่องจักรของเรือภายในลำหนึ่งเคลื่อนที่ส่วนกับกำลังสามของ
 อัตราความเร็ว ถ้าแรงมาเป็น 80 เมออัตราความเร็วเป็น 8 น็อต
 จงหาว่าแรงมาเท่าใด เมออัตราความเร็วเป็น 12 น็อต
15. ทหารรถคันหนึ่งแล่นไป 72 ไมล์ ความเร็วตลอด
 จะแปรผันตรงกับกำลังสองของอัตราพ่วง ถ้าพ่วง 8 คัน ความเร็ว
 จะเป็น 48 ไมล์ ต่อชั่วโมง จงหาว่าถ้าพ่วง 10 คัน อัตราความเร็ว

ของตัวรถจักรจะเป็นเท่าไร และจงหาจำนวนมากที่สุดของรถตุ๊กที่จะมา
พ่วงโดยรถจักรยังแล่นได้

46. ในบางครั้งปรากฏว่า จำนวนหนึ่งอาศัยการแปรผันของ 2 จำนวน
หรือมากกว่าซึ่งอาจแปรผันโดยไม่ได้อาศัยซึ่งกันและกันเลย เช่น

ถ้า $x \propto y$ เมื่อ z คงที่ และ $x \propto z$ เมื่อ y คงที่

แล้ว $x \propto yz$ เมื่อ y และ z เปลี่ยนแปลง

พิสูจน์ วิธีที่ 1 ให้ x ค.ร.น. เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม
 y นว เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม
 z นว เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม

ถ้าฐานคงที่ พื้นที่ $\propto$ ส่วนสูง

คห ถ้า z คงที่ $x \propto y$

และถ้าส่วนสูงคงที่ พื้นที่ $\propto$ ฐาน

คห ถ้า y คงที่ $x \propto z$

แต่พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ฐาน}$

$$x = \frac{1}{2} yz$$

$$x \propto yz \quad (\because \frac{1}{2} \text{ คงที่})$$

วิธีที่ 2 ให้ x เปลี่ยนจาก x ไปสู่ a

y ,, y ,, b

z ,, z ,, c

ในตอนที่ z คงที่ $x \propto y$ นั่น

ขณะที่ y เปลี่ยนจาก y ไปสู่ b นั้น x เปลี่ยนจาก x ยังไม่ถึง a (ต้องเปลี่ยนค่า z อีก) สัมผัสถึง a

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \dots\dots\dots (1)$$

ในตอนที่ y คงที่ $x \propto z$

x เปลี่ยนจาก a ไปสู่ a

$$\frac{a}{a} = \frac{z}{c} \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) \times (2) \quad \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{(1)}{bc} yz$$

$$x = \frac{(a)}{bc} yz$$

คือ $x \propto yz$ $\frac{a}{bc}$ มีค่าไม่เปลี่ยน

3. การแปรผันเกวเนอ (Joint Variation) จำนวนหนึ่งจะเรียกว่าแปรผันเกวเนอ (varies jointly) กับจำนวนอื่น ๆ หลาย ๆ จำนวนใดก็ตามเมื่อจำนวนนั้นแปรผันตรงกับ ผลคูณของจำนวนเหล่านั้น และคำว่า "เกวเนอ" (jointly) นั้น บางครั้งก็ละไว้ในฐานที่เข้าใจ ไม่จำเป็นต้องเขียนไว้ เช่น L จะแปรผันเกวเนอกับ m และ n ก็เมื่อ

$L \propto mn$ $L = kmn$ (k มีค่าไม่เปลี่ยน) หรือถ้าบอกว่า x แปรผันตรงกับ y และแปรผกผันกับ z ก็คือ $x \propto \frac{y}{z}$ หรือ $x = k \frac{y}{z}$ (k มีค่าไม่เปลี่ยน)

ข้อควรจำ ระวังคำว่า "และ" ในที่นี้หมายความว่า "คูณ" มิได้หมายความว่า "บวก" ดังนั้นเรื่องราวในวรรคหลังสุดอย่าได้เขียนเป็น $x \propto y + \frac{1}{z}$ ซึ่งผิด

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า x แปรผันกับ y และ แปรผกผันกับ z^2 และ $x = 4$
 $y = 1$ และ $z = 2$ จงหา z เมื่อ $x = 2$ และ $y = 8$

วิธีทำ x แปรผันกับ y และ x แปรผกผันกับ z^2

$$x \propto \frac{y}{z^2}$$

$$x = k \frac{y}{z^2} \quad \text{เมื่อ } k \text{ คงที่}$$

$$x = 4 \quad \text{เมื่อ } y = 1 \text{ และ } z = 2$$

$$4 = k \times \frac{1}{2^2}$$

$$k = 4 \times 4 = 16$$

$$x = 16 \frac{y}{z^2}$$

เมื่อ

$$x = 2, y = 8, z = ?$$

$$2 = 16 \times \frac{8}{z^2}$$

$$z^2 = \frac{16 \times 8}{2} = 64$$

$$z = \pm 8$$

ตอบ เมื่อ $x = 2, y = 8, z = 8$ หรือ -8

หมายเหตุ ค่าของ x, y, z ต้องตอบเป็นคู่ๆ ไม่ใช่ตอบว่า $z = 8$ หรือ -8 และต้องตอบทั้งสองค่าของ z ถ้าตอบค่าเดียวก็จะผิด
 ค่าตอบเพียงส่วนหนึ่งของคู่ก็เป็นจริงตามบัญญัติ

ตัวอย่างที่ 2 ปริมาตรของกรวยกลม (cone) แปรผันตามส่วนสูงเมื่อพื้นที่
ฐานคงที่ และแปรผันตามพื้นที่ฐาน เมื่อส่วนสูงคงที่
กรวยกลมมีปริมาตรเป็น 54 ลบ.ซม. เมื่อพื้นที่ฐานเป็น
27 ตร.ซม. และมีความสูงเป็น 6 ซม. ให้หาความสูงเมื่อ
พื้นที่ฐานเป็น 120 ตร.ซม. และมีปริมาตรเป็น 1000
ลบ.ซม.

วิธีทำ ให้ v ลบ.ซม. เป็นปริมาตรของกรวยกลม

a ตร.ซม. เป็นพื้นที่ฐาน

h ซม. เป็นความสูง

v แปรผันตาม h เมื่อ a คงที่

และ v แปรผันตาม a เมื่อ h คงที่

v แปรผันกับ a และ h เมื่อ a และ h แปรผัน

$$v \propto ah$$

$$v = kah \quad \text{เมื่อ } k \text{ คงที่}$$

$$v = 54 \quad \text{เมื่อ } a = 27 \text{ และ } h = 6$$

$$54 = k \times 27 \times 6$$

$$k = \frac{54}{27 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{1}{3} ah$$

$$v = 1000, a = 120, h = ?$$

$$1000 = \frac{1}{3} \times 120 \times h$$

$$h = \frac{1000}{40} = 25$$

ตอบ กรวยกลมทึบปริมาตร 1000 ลบ.ซม. และมีพื้นที่ฐาน 120 ตร.ซม. มีความสูง 25 ซม.

ตัวอย่างที่ 8 จำนวนงานที่ทำใน 1 ชั่วโมง แปรผันตรงกับค่าจ้างที่ไ้รับใน 1 ชั่วโมง และแปรผกผันกับรากที่สองของจำนวนชั่วโมงที่ทำใน 1 วัน งานชิ้นหนึ่งทำวันละ 9 ชั่วโมง และได้ค่าจ้างชั่วโมงละ 2 บาท งานเสร็จใน 6 วันจงหาว่าถ้าทำงานชิ้นเดียวกันวันละ 16 ชั่วโมง ใ้ค่าจ้างชั่วโมงละ 4.50 บาท งานจะเสร็จในกี่วัน

วิธีทำ ให้ x หน่วยเป็นจำนวนงานที่ทำใน 1 ชั่วโมง
 y บาท เป็นค่าจ้างที่ไ้รับใน 1 ชั่วโมง
 z ชั่วโมง เป็นจำนวนชั่วโมงที่ทำใน 1 วัน

$$x \propto \sqrt{\frac{y}{z}}$$

$$x = k \sqrt{\frac{y}{z}} \quad (\text{เมื่อ } k \text{ มีค่าคงที่})$$

ทำงานวันละ 9 ชั่วโมงเสร็จใน 6 วัน

ใน $9 \times 6 = 54$ ชั่วโมง ทำงานได้ 1 หน่วย

“ 1 “ “ $\frac{1}{54}$ “

$$\frac{1}{54} = k \sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$\text{ใ้ } k = \frac{1}{36}$$

$$x = \frac{1}{36} \times \frac{9}{2} \times \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{32}$$

งาน $\frac{1}{32}$ หน่วย ทำใน 1 ชั่วโมง

งานเสร็จใน $\frac{32}{16} = 2$ วัน (ทำวันละ 16 ชม.)

ตอบ งานเสร็จใน 2 วัน

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 ข.

1. จงเขียนให้เป็นรูปสมการ

ก. x แปรผกผันของ y และ z หรือ (ราก) กำลังที่สองของ z

ข. z แปรผันตรงกับ x^2 และแปรผกผันกับ y

ค. ส่วนกลับของ z แปรผันของ x^2 และ y

ง. h แปรผันตรงกับ x และ y^2 และแปรผกผันกับ z

จ. L มีบางส่วนแปรผันตรงกับ m และบางส่วนแปรผกผันกับ n

ฉ. y มีบางส่วนคงที่ และบางส่วนแปรผันตรงกับ z

ช. x แปรผันตรงกับ y^2 และแปรผกผันกับ z

ซ. m มีบางส่วนแปรผันตรงกับ n และบางส่วนแปรผกผันกับ p^2

ณ. x เท่ากับผลบวกของ 2 จำนวน ๆ หนึ่งคงที่ อีกจำนวนหนึ่งแปรผันตรงกับ y

ญ. y แปรผันตรงกับผลบวกของ 2 จำนวน จำนวนหนึ่งแปรผกผันกับ x อีกจำนวนหนึ่งแปรผันตรงกับ x^2

2. ถ้า x แปรผกผันกับ y และผกผันกับกำลังสองของ z และ $x = 8$ เมื่อ $y = 8$ และ $z = 1$ ให้หาค่าของ z เมื่อ $x = 4$ และ $y = \frac{1}{8}$
3. เวลาในการเดินทางจากท่าแห่งหนึ่งถึงท่าอีกแห่งหนึ่ง (ด้วยพาหนะใด ๆ ก็ได้) แปรผันตรงกับระยะทางและแปรผกผันกับอัตราเร็วของการเดินทาง รถหนึ่งเดินทางจาก กรุงเทพฯ ถึง อโยธยา ซึ่งห่างกัน 80 กม. ด้วยอัตราความเร็ว 40 กม. ต่อ ชม. จะถึงอโยธยาในเวลา 2 ชม. ให้หาว่ารถเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปลพบุรี ซึ่งห่างจาก กรุงเทพฯ 154 กม. จะต้องแล่น ชม. ละเท่าใด จึงจะถึงถนนใน 8 ชั่วโมง 30 นาที.
4. ปริมาตรของทรงกระบอกกลมแปรผันตามกำลังสองของรัศมี และความยาวของรูปทรงกระบอกกลมนั้น จึงเปรียบเทียบรัศมีของทรงกระบอกกลมสองอันซึ่งมีปริมาตรเป็น 82 ต่อ 45 และมีความยาวเป็น 8 ต่อ 5
5. ค่าของเหรียญเงินแปรผันเกวเนืองกับความหนาและกำลังสอง ของเส้นผ่าศูนย์กลางของเหรียญ ถ้าเหรียญชนิดหนึ่ง 2 อัน มีค่าเป็นอัตราส่วน 10 : 9 และความหนาเป็นอัตราส่วน 5 : 8 จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของเหรียญอันที่ 2 ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางของเหรียญอันที่ 1 เป็น $2\frac{2}{3}$ นิ้ว

ตัวอย่างระคนเรื่องการแปรผัน

ตัวอย่างที่ 1

เลขจำนวนหนึ่งคือ y แปรผันตรงกับผลบวกของเลขสองจำนวน จำนวนที่หนึ่งมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง อีกจำนวนหนึ่งแปรผกผันกับ x และ $y = 4$ เมื่อ $x = -1$; $y = -8$ เมื่อ $x = 5$

หาค่า y เมื่อ $x = -3$

วิธีทำ ให้ $y \propto (A + B)$

$y = k(A + B)$ เมื่อ k มีค่าคงที่

ให้ A มีค่าคงที่ ส่วน B แปรผกผันกับ x คือ $B \propto \frac{1}{x}$

$B = \frac{m}{x}$ เมื่อ m มีค่าคงที่

$$y = k\left(A + \frac{m}{x}\right)$$

$$= kA + \frac{km}{x}$$

เมื่อ $y = 4, x = -1, 4 = kA + \frac{km}{-1}$

$$4 = kA - km \dots\dots\dots (1)$$

$y = -8, x = 5, -8 = kA + \frac{km}{5}$

$$-40 = 5kA + km \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \quad -36 = 6kA$$

$$kA = -6$$

แทนค่า kA ใน (1) $4 = -6 - km$

$$km = -10$$

เมื่อ $x = -3, y = -6 - \frac{10}{-3}$

$$= -6 + \frac{10}{3}$$

$$= -2\frac{2}{3}$$

ตอบ เมื่อ $x = -3, y = -2\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า y เท่ากับผลบวกของเลข 2 จำนวน จำนวนหนึ่ง P แปรผันตรงกับ x อีกจำนวนหนึ่ง Q แปรผกผันกับ x ถ้า $y = na + b$ เมื่อ $x = a$,

และ $y = a + nb$ เมื่อ $x = b$ จงหาค่า y เมื่อ $x = ab$

วิธีทำ ให้ $y = (p + Q)$ เมื่อ $P \propto x$ และ $Q \propto \frac{1}{x}$
 $y = mx + \frac{k}{x}$ (เมื่อ m และ k มีค่าคงที่)

$$y = a + nb, x = b, a + nb = mb + \frac{k}{b} \dots \dots \dots (1)$$

$$y = na + b, x = a, na + b = ma + \frac{k}{a} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) \text{ คูณด้วย } b \quad ab + nb^2 = mb^2 + \frac{k}{b} \dots \dots \dots (3)$$

$$(2) \text{ คูณด้วย } a \quad na^2 + ab = ma^2 + \frac{k}{a} \dots \dots \dots (4)$$

$$(3) - (4) \quad n(b^2 - a^2) = m(b^2 - a^2)$$

$$b \neq a \text{ เสร็จ } (b^2 - a^2) \text{ หาคancel}$$

$$m = n$$

$$\text{แทนค่า } m \text{ ใน } (1) \quad a + nb = nb + \frac{k}{b}$$

$$k = ab$$

$$\text{เมื่อ } x = ab, y = nab + \frac{ab}{ab}$$

$$= nab + 1$$

$$\text{ตอบ } \text{เมื่อ } x = ab, y = nab + 1$$

ตัวอย่างที่ 3 รายได้ของรถไฟแปรผันตรงกับอัตราความเร็วเฉลี่ยที่เกินจาก 20 ไมล์ต่อชั่วโมง ส่วนรายจ่ายแปรผันตรงกับกำลังสองของอัตราความเร็วที่เฉลี่ยเกินจาก 20 ไมล์ต่อชั่วโมงเช่นเดียว

กัน ถ้าอัตราเร็วเฉลี่ย 40 ไมล์ ต่อชั่วโมงจะพอกทัน ถ้า
อัตราเร็วเฉลี่ยเป็น 25 ไมล์ ต่อชั่วโมง จะไ้กำไรร้อยละ
เท่าใด

วิธีทำ ให้อัตราความเร็วเฉลี่ยของรถไฟเป็น x ไมล์ ต่อ 1 ชั่วโมง

A บาท เป็นรายไ้ B บาท เป็นรายจ่าย

$$A \propto (x - 20)$$

$$A = k(x - 20) \quad (k \text{ มีค่าคงที่})$$

$$B \propto (x - 20)^2$$

$$B = m(x - 20)^2 \quad (m \text{ มีค่าคงที่})$$

ถ้าแล่นชั่วโมงละ 40 ไมล์ พอกทันคน คือ

$$A = B$$

$$k(40 - 20) = m(40 - 20)^2$$

$$20k = 400m$$

$$k = 20m$$

ถ้าแล่นชั่วโมงละ 25 ไมล์

$$A = k(25 - 20) = 5k = 100m$$

$$B = m(25 - 20)^2 = 25m$$

ทุน 100 m บาท ไ้กำไร $100m - 25m = 75m$ บาท

ทุน 100 บาท ไ้กำไร $\frac{75m}{100m} \times 100 = 75$ บาท

ตอบ ไ้กำไร 75%

พิมพ์ n เล่ม ขายได้ nb บาท

ขายได้ 112 บาททุน 100 บาท

$$,, \quad nb \quad ,, \quad ,, \quad \frac{100}{112} \times nb = \frac{25 nb}{28} \text{ บาท}$$

$$\frac{25 nb}{28} = 770 k + kn$$

แทนค่า $b = 2k$ $\frac{25 nk}{14} = 770 k + nk$

$$\frac{25 n}{14} - n = 770$$

$$\frac{11 n}{14} = 770$$

$$n = 770 \times \frac{14}{11}$$

$$= 980$$

ตอบ พิมพ์ 980 เล่ม จึงจะได้กำไร 12%

แบบฝึกหัดที่ 3 ค.

1. ถ้า y แปรผันตรงกับผลบวกของสองปริมาณ ปริมาณหนึ่ง แปรผันตรงตาม x อีกปริมาณหนึ่งแปรผันตรงตาม x^2 และถ้า $y = 10$ เมื่อ $x = 1$ และ $y = 14$ เมื่อ $x = 2$ จงหาค่า x เมื่อ $y = 4$
2. ถ้า $x - y \propto x + y$ จงพิสูจน์ว่า $x^2 - y^2 \propto xy$
3. ถ้า $x \propto y$ และ z แปรผกผันกับ v จงพิสูจน์ว่า $\frac{x}{z} \propto yv$
4. ปริมาณ x แปรผันตรงกับผลบวกของสองปริมาณ ซึ่งปริมาณหนึ่งแปรผันตรงกับ y^2 ส่วนอีกปริมาณหนึ่งแปรผกผันกับ z ถ้า $x = 16$ เมื่อ $y = 2$ และ $z = 1$ และถ้า $x = 5$ เมื่อ $y = 1$ และ $z = 2$ จงหาค่าของ y เมื่อ $x = 10$ $z = 4$

5. นกพิสัยไขศักรของการแกว่งของเข็มนาฬิกาคน คือ เวลาที่ลูกตุ้ม
ไขแกว่งแปรผันตรงกับรากที่สองของมวลของลูกตุ้ม
นาฬิกาคน ถ้าลูกตุ้มนาฬิกาขยาว 1 หลา แกว่ง 1 ครั้ง ในเวลา 1 วินาที
ให้หาว่าลูกตุ้มนาฬิกาขยาว 2 ฟุต 1 นิ้ว จะแกว่งกี่ครั้ง ใน 1 นาที
6. ความหนักเปลี่ยนแปลงของเวลาหนึ่ง แปรผกผันกับส่วนกลับของ
ระยะทางที่แล่นไป เมื่ออัตราความเร็วคงที่ และแปรผันตรงกับกำลังสอง
ของอัตราความเร็วเมื่อระยะทางคงที่ จงพิสูจน์ว่า ความหนักเปลี่ยนแปลง
ของถ่านหินของเรือถ่านจะแปรผกผันเนื่องกับเวลาที่ใช้ในการเดินทาง
และกำลังสามของอัตราความเร็ว
7. จำนวนแรงงานของคน ๆ หนึ่งแปรผันตรงตามค่าจ้างราย ชม. และ
แปรผกผันรากที่สองของจำนวน ชม. ที่เขาทำใน 1 วัน ถ้าเขาทำงาน
ชิ้นหนึ่งแล้วใน 6 วัน โดยทำวันละ 9 ชม. ได้รับค่าจ้าง ชม. ละ
1 บาท ทำงานชิ้นนี้ต้องทำวันละ 6 ชม. ได้ค่าจ้าง ชม. ละ 1.50 บาท
จะเสร็จในเวลาเท่าวัน
8. ปริมาตรของรูปทรงกระบอกแปรผันตรงกับกำลังสองของรัศมีของฐาน
เมื่อความสูงคงเดิมและแปรผันตรงกับความสูงเมื่อฐานคงเดิม รูปทรง
กระบอกรูปหนึ่งมีปริมาตร 792 ลบ. ซม. สูง 7 ซม. และรัศมีของ
ฐานเป็น 6 ซม. จงหาความสูง ถ้ารูปทรงกระบอกมีรัศมีของฐาน
ยาว 7 ซม. มีปริมาตร 770 ลบ. ซม.

9. ในการร่วมชมรมศิษย์เก่าของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าค่าใช้จ่ายประกอบด้วยส่วนหนึ่งซึ่งมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง เช่น ค่าเช่าสถานที่ และอีกส่วนหนึ่งเป็นค่าอาหาร ซึ่งแปรผันตรงกับจำนวนศิษย์เก่าที่มา ถ้ามีศิษย์มาร่วมด้วย 150 คน จะต้องใช้จ่าย 9,200 บาท และถ้าศิษย์เก่ามาร่วม 208 คน จะสิ้นค่าใช้จ่าย 4,260 บาท จงหาว่าคณะกรรมการจัดงานจะต้องเก็บเงินจากศิษย์เก่าคนละเท่าไร จึงจะเหลือเป็นกำไรจากศิษย์เก่าคนละ 5.50 บาท เพื่อเก็บไว้บำรุงสมาคม ในเมื่อมีศิษย์มาร่วมชมรม 400 คน
10. ค่าใช้จ่ายในการพิมพ์หนังสือส่วนหนึ่งคงที่ อีกส่วนหนึ่งแปรผันตรงกับจำนวนหนังสือพิมพ์ ถ้าพิมพ์ 770 เล่ม พอกัน พิมพ์ 980 เล่ม กำไร 12% จงหาว่า ถ้าพิมพ์ 680 เล่ม จะได้กำไรหรือขาดทุนร้อยละเท่าไร

บทที่ 4

ตั๋วเงิน

ตั๋วเงิน คือ เอกสารเครดิตที่ใช้หมุนเวียนแทนเงินในวงการค้าทั่วไป
มีใช้อยู่ ๓ ชนิด

1. ตั๋วสัญญาใช้เงิน (Promissory Note)
2. ตั๋วแลกเงิน (Bill of Exchange)
3. เช็ค

ตั๋วสัญญาใช้เงิน เป็นเอกสารเครดิต ที่ผู้ออกตั๋วสัญญาว่า ตนจะ
จ่ายเงินให้แก่ผู้รับ เป็นจำนวนเงินจำกัด ในวัน และ เวลาที่กำหนด โดย
ปราศจากเงื่อนไข

ตั๋วแลกเงิน เป็นเอกสารเครดิตที่ผู้ออกตั๋วเงินสั่งบุคคลอีกคนหนึ่ง
เรียกว่า ผู้จ่าย จ่ายเงินจำนวนแน่นอนโดยปราศจากเงื่อนไขให้แก่ผู้รับ ใน
วันและเวลาที่กำหนด

เช็ค เป็นเอกสารเครดิต ที่ผู้ออกตั๋วสั่งธนาคารเจ้าของเช็ค จ่าย
เงินจำนวนแน่นอน ให้แก่บุคคลผู้รับเงินหรือผู้ถือ ในวันและเวลาที่กำหนด
ลักษณะของตั๋วเงินตามกฎหมายแพ่งและพาณิชย์ ไทย ระบุว่า

ต้องมอบคุณความคง

1. ตัวสัญญาใช้เงิน

คือหนังสือตราสาร ที่บุคคลหนึ่งเรียกว่า ผู้ออกตัว ให้คำมั่น สัญญาว่า จะใช้เงินจำนวนหนึ่งให้แก่บุคคลอีกคนหนึ่ง หรือให้ใช้ตามคำสั่ง ของบุคคลอีกคนหนึ่ง เรียกว่า ผู้รับเงิน และตัวสัญญาใช้เงินต้องมีข้อความ ดังต่อไปนี้

- 1) ระบุว่าตราสารนี้ เป็นตัวสัญญาใช้เงิน
- 2) คำมั่นสัญญาโดยปราศจากเงื่อนไขว่า จะใช้เงินเป็นจำนวน
แน่นอน
- 3) วันถึงกำหนดใช้เงิน
- 4) สถานที่ใช้เงิน
- 5) ชื่อ และ ยี่ห้อ ผู้รับเงิน
- 6) วัน และ เวลา สถานที่ ที่ออกตัวสัญญาใช้เงิน
- 7) ลายมือชื่อผู้ออกตัว

มีข้อความยกเว้นคือ

- 1) ถ้าไม่ระบุเวลาใช้เงิน ให้ใช้เมื่อเห็น หมายถึงเมื่อผู้ทรง
หรือผู้ถอนำตัวเงินไปยื่นให้ผู้ต้องจ่ายเงิน
- 2) ไม่ระบุสถานที่ใช้เงิน ให้ถือเอาภูมิลำเนาของผู้ออกตัวเป็น
สถานที่ใช้เงิน
- 3) ไม่ระบุวันออกตัว ผู้ออกตัวจะกำหนดวันออกไปเองก็ได้

2. ตั๋วแลกเงิน

คือหนังสือตราสาร ที่บุคคลผู้หนึ่ง เรียกว่า ผู้ส่งขาย ส่ง
บุคคลอีกผู้หนึ่ง เรียกว่า ผู้จ่าย ให้ใช้เงินแก่บุคคลคนหนึ่ง หรือให้ใช้
ตามคำสั่งของบุคคลคนหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า ผู้รับเงิน ต้องมีข้อความดังต่อไปนี้

- 1) คำบอกชื่อว่า เป็นตั๋วแลกเงิน
- 2) ต้องเป็นคำสั่งโอนยตราจากเงินให้ใช้เงินจำนวนแน่นอน
- 3) ชอ หรือ บหือ ผู้จ่าย
- 4) วันถึงกำหนดใช้เงิน
- 5) สถานที่ใช้เงิน
- 6) ชอ และ บหือ ผู้รับเงิน หรือจ่ายให้แก่ผู้ใด
- 7) วัน และ สถานที่บอกกล่าว
- 8) ลายมือชอผู้ส่งขาย

ชอชกเงิน เช่นเคยวกยตั๋วสัญญาใช้เงิน

ตั๋วสัญญาใช้เงิน หรือ ตั๋วแลกเงินที่มกำหนดวันใช้เงินแน่นอน
เรียกว่า Time Note และวันถึงกำหนดใช้เงิน เรียกว่า "วันถึงกำหนด"
(Date of Maturity) และตั๋วเงินที่มิได้ระบุวันถึงกำหนด คือให้จ่ายเมื่อ
เห็น เรียกว่า Demand Note ในตั๋วเงินจะต้องระบุดีตราออกโดยว่าเช่น
เปอร์เซ็นต์ แต่ถ้าไม่ระบุ ถือว่า ต้องชำระดอกเบี้ยตามอัตรากฎหมาย
อนุญาต นอกเสียจากจะระบุไว้ว่า ไม่มีดอกเบี้ย

ตัวเงินนั้น อาจเปลี่ยนแปลงไปก็ได้ ผลคือ หมายความว่า "ผู้ทรง"

ถ้าในตัวเงินระยะข้อผลคือตัวไว้ การที่จะเปลี่ยนแปลงผลคือ คือ ผู้ทรง ไป จะ
 ต้องให้เจ้าของข้อที่จะเป็นผลประโยชน์ เช่น ข้อของตัวไว้ข้างหลังตัวเงินนั้น
 เรียกว่า "การสละหลัง" การเช่นนั้น จะเพียงแต่เช่นสายมอข้อ หรืออาจ
 จะมีข้อความการโอนก็ได้

เมื่อถึงวันถึงกำหนดใช้เงิน ปรากฏว่า เป็นวันเสาร์ อาทิตย์
 หรือวันหยุดราชการ ให้หยุดเวลาไป จนถึงวันราชการถัดไปได้

ถ้าปรากฏว่า ก่อนจะถึงวันถึงกำหนด ผู้ทรงตัว ข้อการที่จะได้
 เงินใช้ อาจนำตัวไปขายให้แก่ธนาคารได้ โดยธนาคารจะคิดลดเงิน
 จำนวนหนึ่ง ซึ่งเป็นคอกเบี้ยของเงินต้นที่ระบุไว้ในตัวเงิน จากวงหนาทัวเงิน
 มาขึ้นเงิน จนกระทั่งถึงวันถึงกำหนดในตัว จำนวนเงินที่ธนาคารจะหักออก
 จากจำนวนเต็มหน้าตัวนั้น เรียกว่า เงินลดธนาคาร และการหักคอกเบี้ยนั้น
 เป็นการหักคอกเบี้ยชนิดเดียว (Simple Interest) ส่วนจำนวนเงินที่ไต่รับ
 หลังจากธนาคารหักเงินลดออกแล้ว เรียกว่า เงินชำระคืน (Proceeds)

นักธุรกิจ ตามปรกติมักจะยืมเงินจากธนาคาร โดยที่ออกตัว
 สัญญาใช้เงินไว้ให้ มีกำหนดระยะเวลา 80 หรือ 60 หรือ 90 วันบ้าง
 สามเดือนบ้าง ดังนั้น ธนาคารจะหักเงินลดจากวงหนาทัวเงินถึงวันถึงกำหนด
 ในตัว แล้วจึงจ่ายเงินชำระคืน ให้แก่นักธุรกิจที่ออกตัวเงินนั้น แต่ในการที่
 ธนาคารจะรับทำเช่นนั้น ก็ต่อเมื่อผู้ออกตัวสัญญาใช้เงินให้แก่ธนาคารมีหลัก
 ประกันอันเป็นที่เชื่อถือได้ ให้ไว้ต่อธนาคาร

ตัวอย่าง

ตัวเงินใบหนึ่ง มีจำนวนเงินหน้าตัว 500 บาท และเวลาดังกำหนด 90 วัน หลังจากวันออกตัว แต่ปรากฏว่า ตัวเงินนั้นถูกนำไปขึ้นแก่ธนาคาร ในวันออกตัวนั้นเอง ธนาคารก็คิดตราเงินลด 8% ชะยากทราบว่า ธนาคารจะต้องจ่ายเงินให้แก่ผู้ทรงตัวหน้าตัวนั้นไปเงินเท่าไร

วิธีทำ

เงินหน้าตัว 100 บาท ธนาคารคิดลด ในเวลา 365 วัน เป็นเงิน 8 บาท

$$\begin{array}{rcll} \text{,,} & 500 & \text{,,} & \text{,,} & 365 & \text{,,} & \text{,,} & = & \frac{8 \times 500}{100} \\ \text{,,} & 500 & \text{,,} & \text{,,} & 90 & \text{,,} & \text{,,} & = & \frac{8 \times 500 \times 90}{100 \times 365} \\ & & & & & & & = & 9.86 \end{array}$$

ฉะนั้นธนาคารจะต้องจ่ายเงินให้แก่ผู้หน้าตัวไปเงิน

$$\text{ธนาคารเป็นจำนวน } 500 - 9.86 = 490.14 \text{ บาท}$$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. วันออกตัวเงินฉบับหนึ่งทนายแดงได้รับ เป็นวันที่ 4 ตุลาคม 2503 จำนวนเงินหน้าตัว 8000 บาท ตัวสัญญาใช้เงินนี้ ระบุให้ทนายแดงเป็นผู้ทรงตัว ไปรับเงินทบบริษัท ก. ในวันที่ 8 กุมภาพันธ์ 2504 ปรากฏว่า วันที่ 6 พฤศจิกายน 2503 นายแดงต้องการใช้เงิน จึงนำตัวเงินไปขึ้นแก่ธนาคารแห่งหนึ่ง ธนาคารก็คิดเงินลด $2\frac{1}{2}\%$ ดังนั้นจงคำนวณหาว่า

- 1) ธนาคารหักเงินลงไปเท่าไร
- 2) นายแดงรับเงินไปจากธนาคารเท่าไร

2.

ตัวสัญญาใช้เงิน

บริษัท ก.

วันที่ 9 มีนาคม 2504

ข้าพเจ้า นายปรีชา ฉลาด สัญญาจ่ายเงินให้แก่ นางสาว
วิมล งามเลลา เป็นจำนวนเงิน 9544 บาท (เก้าพันห้าร้อยสี่สิบสี่บาท
ถ้วน) ณ วันที่ 8 พฤศจิกายน 2504

นายปรีชา ฉลาด

ท่านางสาววิมล งามเลลา ผู้ นำตัวไปขึ้นเงินที่ธนาคาร
เมื่อวันที่ 7 เมษายน 2504 และธนาคารหักเงินลด 5 % ดังนั้น

8. ฉันได้รับตัวเงินใบหนึ่ง สัญญาใช้เงิน 5500 บาท อีก 8 เดือนข้างหน้า
บริษัทผู้ออกตัวจริงจะจ่ายเงินให้ แต่ฉันทนที่จะรอรบในงวดกำหนด
ไม่ได้ ฉันจึงนำไปขึ้นเงินเสียก่อน ทันทีที่ได้รับตัวเงินนั้น ธนาคาร
จ่ายเงินให้ 5890 บาท อยากทราบว่า ฉันต้องเสียอัตราดอกเบี้ยเงินลด
กี่เปอร์เซ็นต์

4.

ตัวแลกเงิน

บริษัท สมใจ

วันที่ 1 พฤษภาคม 2504

ข้าพเจ้า นางสาวสมใจ สมมุติ ให้บริษัทสมใจจ่ายเงิน
จำนวน 7800 บาท (เจ็ดพันสามร้อยบาทถ้วน) แก่นายจิต สันติ
ในวันที่ 31 ธันวาคม 2504

นางสาวสมใจ สมมุติ

นายจิต สันติ จึงนำตัวแลกเงินไปขึ้นเงินกับธนาคาร เมื่อ
วันที่ 10 กรกฎาคม 2504 ธนาคารหักเงินลด 5% ดังนั้น จึงท้าว

1) นายจิต สันติ ถูกหักเงินลดไปเท่าไร

2) นายจิต สันติ ใ้รับเงินกี่บาทไปเท่าไร

5. ข้าพเจ้า นายจิต สันติ ใ้รับ ตัวเงิน จากนางสาวสมใจ สมมุติ
เป็นจำนวนเงินจำนวนหนึ่ง จนถึงกำหนดในข้ออีก 146 วัน ช่างหน้า
จากวันที่ข้าพเจ้าใ้รับ ปรากฏว่า ข้าพเจ้าไปขึ้นตัวขายให้แก่ธนาคาร
ธนาคารหักเงินลด 5% ซึ่งเป็นจำนวนเงินถูกหัก 100 บาท ดังนั้น
ท่านคำนวณได้ว่า ข้าพเจ้า นายจิต สันติ ใ้รับตัวเงินมีราคาหน้าตัว
เป็นจำนวนเงินเท่าไร

6. นางสาวสมใจ สมมุติ ขายสินค้าชิ้นหนึ่งให้แก่บริษัท ก. เป็นจำนวน
เงิน 78000 บาทถ้วน ซึ่งบริษัท ก. ออกตัวเงินให้ จะถึงกำหนดใ้
เงินอีกนานข้างหน้า แต่ตัวเงินโยนนี้ นางสาว สมใจ นำไปขึ้นธนาคาร
หักเงินลด 5% นางสาวสมใจใ้รับเงินเพียง 71,640.00 บาท อยาก
ทราบว่า จนถึงกำหนดเป็นจำนวนถ้วน นับจากวันที่นางสาวสมใจ
นำตัวไปขึ้นแก่ธนาคาร

7. นายปรีชา ออกตั๋วเงิน วันที่ 1 มกราคม 2504 ให้แก่นายจิต สันติ เป็นจำนวนเงิน 78200 บาทถ้วน และการออกตั๋วเงิน ระบุอายุของตั๋ว จนถึงวันถึงกำหนดเป็นเวลา 8 เดือน นายจิตนำตั๋วไปขึ้นแก่ธนาคาร ธนาคารหักเงินลด เป็นจำนวนเงินที่หักไว้ทั้งสิ้น 915 บาท อยากทราบว่า ธนาคารคิดเงินลดกี่เปอร์เซ็นต์
8. ถ้าแทนที่นายจิต จะนำตั๋วเงิน 78200 บาท ไปขึ้นธนาคาร โดยขอมิให้ธนาคารหักเงินลดไว้ ทั้งในข้อ 7. นายจิตต้องการใช้เงิน 78200 บาท เต็มที่ ในขณะที่ใครรับตั๋ว นายจิตจึงนำตั๋วเงินนั้นไปประกันเงินกู้เอกชน ซึ่งเอกชนคิดดอกเบี้ยเชิงเดียวรจากนายจิต 5% เท่ากับธนาคาร ทั้งนี้ อยากทราบว่า ถ้านายจิตกู้เอกชนอย่างไร โดยนายจิตขอมิให้ธนาคารหักเงินลดจำนวนหนึ่งไว้ โดยธนาคารยอมคิดเงินลด 4% แล้วนายจิตขอมิกู้เงินจำนวนที่ขยขาดอยู่จากจำนวน 78200 บาทนั้นจากเอกชน โดยขอมิให้เอกชนคิดดอกเบี้ย 5% ทั้งนี้ อย่างไหนดีกว่ากัน เพราะเหตุไร
9. นายจอนได้รับตั๋วเงินใบหนึ่งราคา £ 1081 12s 10d วันถึงกำหนดเป็นวันที่ 7 ธันวาคม ปรากฏว่า นายจอนนำตั๋วเงินไปขึ้นแก่ธนาคารกรุงลอนดอน เมื่อวันที่ 6 สิงหาคม ธนาคารคิดลด 6% อยากทราบว่า นายจอนจะได้อะไรหลังจากหักเงินแล้วเท่าไร
10. นายสันทได้รับตั๋วเงินทมิสนา เป็นจำนวนเงิน 500 เปโซ ตั๋วนี้กำหนด 90 วัน นับแต่วันออกตั๋ว นายสันทนำตั๋วไปขึ้นที่ธนาคารชาติ

มณิลา ในวันออกตัว ธนาคารหักเงินลด 8% ไว้แล้ว อยากทราบว่า นายสันติได้รับเงินลด จากลดเงินลดแล้วเท่าไร

11. คุณเดินทางไปฟิลิปปินส์ คุณขอยืมเงินจากธนาคารชาติฟิลิปปินส์ 697 เปโซ เขียนตั๋วเงินให้ไว้ 90 วัน จึงจะถึงกำหนดจ่ายเงิน ซึ่งคุณได้รับจากประเทศไทย แต่ธนาคารหักเงินลดอัตรา 8% ไว้แล้ว ดังนั้น คุณจะต้องเขียนตั๋วเงินเป็นจำนวนเท่าไร จึงจะได้รับเงินเต็มจำนวน 697 เปโซ
12. เมื่อนายเปรื่อง เปรื่องปราศณู ไปศึกษาที่ฟิลิปปินส์ นางสาวสุนา ได้ขอยืมเงินนายเปรื่อง 440 เปโซ แต่เขียนตั๋วเงินไว้ให้ 500 เปโซ วงเงินกำหนด 80 วัน นับจากวันออกตัว แต่นายเปรื่องเกิดมีอุบัติเหตุของในวันนั้น จึงนำตั๋วเงินไปขึ้นแก่ธนาคาร ธนาคารหักเงินลด 6% อยากทราบว่า นายเปรื่องได้กำไรในการให้นางสาวสุนาขอยืม กเปอร์เซ็นต์
13. ในการททคณะครูไทยเดินทางไปทำงานต่างจังหวัด ปรากฏว่า ได้มีการใช้ตั๋วเงิน ดังนั้น นายปรีดาได้ตั๋วเงินราคา 5840 บาท ซึ่งจะถึงกำหนด ในวันที่ 4 มกราคม 2504 แต่ปรากฏว่า พอถึงวันที่ 26 พฤศจิกายน 2503 นายปรีดานำตั๋วเงินไปขึ้นทธนาคารกรุงเทพฯ ในจังหวัดนั้น ธนาคารหักอัตราเงินลด $2\frac{1}{2}\%$ ดังนั้น นายปรีดาถูกหักเงินลดเท่าไร
14. นายเด่น คงงาม ได้รับตั๋วเงิน 95216 บาท ลงวันที่ 9 มีนาคม ระยะเวลาถึงกำหนด 9 เดือน นายเด่นนำตั๋วเงินไปขึ้นทธนาคาร เมื่อครบ 6 เดือน ธนาคารหักเงินลดอัตรา 5% ดังนั้น นายเด่น คงงาม ถูกหักเงินลดเท่าไร

15. นายพัฒนาได้ควเงิน 8760 บาท ลงวันที่ 18 พฤษภาคม เวลา
 5 เดือน และเมื่อวันที่ 1 สิงหาคม นายพัฒนนำควไปขึ้นทอนาคาร
 ถูกเรียกเงินลด 8% คงน นายพัฒนาเสียเงินลดให้แก่ธนาคารไป
 เท่าไร



๘ บทที่ 5

หุ้น (สต็อก และ แชร)

1. หุ้น (แชร์)

ในการจดทะเบียนตั้งบริษัท บริษัทจะต้องแจ้งจำนวนเงินทุนของกิจการ และเนื่องจากเป็นบริษัทที่มีกิจการใหญ่ เงินทุนนั้นจึงต้องแบ่งออกเป็น ส่วนย่อย ๆ เรียกว่า หุ้น (share) และแต่ละหุ้นต้องระบุกำหนดไว้ว่า หุ้นละเท่าไร เรียกว่า มูลค่าหุ้น เช่น สมมติว่า บริษัท ก. จดทะเบียนทุน 100,000 บาท และแบ่งออกเป็น 100 หุ้น ก็แสดงว่า หุ้น หนึ่ง ๆ ต้องมีมูลค่าหุ้น 1,000 บาท เป็นต้น ในการซื้อหุ้น บริษัทอาจจะไม่เรียกเงินครบมูลค่าหุ้นก็ได้ แต่อาจจะเรียกเป็นครั้งคราว เช่น อาจจะเรียก 50% ของมูลค่าหุ้นก่อน หรือ บางที ภายหลังต้องมีการระดมหุ้นให้เร็ว และกระจายกิจการไปในหมื่นคนจำนวนมาก บริษัทอาจจะแบ่งเงินทุนออกเป็นหุ้นย่อยมากขึ้น และมูลค่าหุ้น หนึ่ง ๆ ก็ระน้อยลง เช่น บริษัทอาจจะแบ่งเป็น 5,000 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 20 บาท เช่นนั้นเช่นกัน หุ้นชั้นต้นจะได้รับเงินปันผลตามทฤษฎีใดประกาศ และแบ่งให้เป็นครั้งคราว หรืออาจจะในเวลา 1 ปี เป็นต้น แต่ภายหลังหากทุนก็อาจจะเรียกหุ้นเพิ่มให้ครบมูลค่าหุ้น หรืออาจจะไม่จ่ายเงินปันผลให้ การซื้อขายหุ้น อาจจะขายโอนกรรมสิทธิ์ถือหุ้นไปได้ โดยไม่ต้องขายทั้งหุ้น จะแบ่งขายครั้งหนึ่งก็ได้ และอาจจะขายด้วยราคาต่ำกว่ามูลค่าหุ้น หรือสูงกว่า หรือน้อยกว่าก็ได้

2. หุ้น (Stock)

บางบริษัทเป็นรูปสต็อก ใครจะซื้อเท่าไรก็ได้ แต่เวลาคิดคำนวณในการซื้อขายสต็อกในการคิดเงินปันผล คิดจาก 100 เช่นสต็อกราคา 80 ก็หมายความว่าสต็อก 100 ซื้อขายกัน 80 เงินปันผล 8% หมายความว่าถืสต็อก 100 ได้เงินปันผล 8 คอปปี้ การถืสต็อก เช่นถื 5,000 บาท หมายความว่ามวามหุ้นอยู่ในบริษัท เป็นจำนวน 5,000 บาท แต่มได้มสิทธิเขาไปร่วมกิจการของบริษัทเหมือนมถืหุ้นธรรมดา การขายอาจจะขายเพียงส่วนหนึ่งก็ได้ เช่น มถืสต็อก 5,000 บาท อาจจะขายเสียครึ่งหนึ่ง คอปปี้ 2,500 บาท ก็ได้ ไม่เหมือนหุ้น จะต้องขายทั้งหุ้น ขายเพียงครึ่งหุ้นไม่ได้ แต่ลักษณะการปันผลเหมือนกัน

3. พันธบัตร (Bond)

เงินที่รัฐบาลปล่อยเพื่อการของสาธารณะ และเป็นการกู้เงินช่นทั่วไป รัฐบาลออกตั๋ว เรียกว่า พันธบัตร ไว้ให้เป็นประกัน ในพันธบัตรนั้น รัฐบาลจะจ่ายเงินปันผลให้เป็นจำนวนแน่นอน และจะได้ถืคืนในเวลากำหนดหนึ่ง อาจจะเป็นวง ๆ เป็นครั้งคราว โดยการจับสลากหรือจะมกำหนดเวลาแน่นอนว่า รัฐบาลจะได้ถืคืนพันธบัตรไปไถ่ก่อน เป็นต้น เช่น บจกธน รัฐบาลประกาศขายพันธบัตรอัตราปันผล 8% คอปปี้ ถ้าผู้ซื้อพันธบัตร 1 พันธบัตรไว้เป็นเวลา 10 ปี แต่ถืถืของการเงินคน รัฐบาลจะจ่ายเงินค่าพันธบัตรคนให้ แต่อัตราปันผลจะต้องลดลงตามส่วน เช่นนี้ เป็นต้น ในการไถ่รัฐบาลได้เงินจากประชาชนแล้วรัฐบาลรับประกันการกู้ยืมนี้ เรียกว่า พันธบัตร ทงสิ้น

4. ราคาตลาด

การปรกฏราคาซื้อขายหลักทรัพย์ข้างประเทศมีตลาดหลักทรัพย์หรือ แชร กันอย่างมากมาชดเคยว ฉะนั้น ราคาในการซื้อขายอาจจะไม่เท่าเทียมราคามูลค่าของหลักทรัพย์ หรือ แชรนั้น แล้วแต่ความนิยมของผู้เล่นหลักทรัพย์ หรือ แชร หรือ ผลกระทบของเหตุการณ์ทางการเงินบนผล เป็นคนถ้าราคาตลาดสูงกว่ามูลค่าหุ้นเดิม เรียกว่า At Premium ถ้าราคาหลักทรัพย์ต่ำกว่ามูลค่าหุ้นเดิม เรียกว่า At Discount แต่ถ้าราคาตลาดเท่ากับมูลค่าหุ้นเดิม เรียกว่า At Par

5. ชนิดของหลักทรัพย์ หรือ แชร

5.1 Preference Stock ผู้ถือหุ้นประเภทนี้ ได้รับเงินปันผลแน่นอน และได้รับก่อนหุ้นส่วนอื่น แต่โดยปริยาย ผู้ถือหุ้นประเภทนี้ไม่ได้รับเงินปันส่วนอื่น

5.2 Debenture Stock เกิดขึ้นเนื่องจากบริษัทต้องการขยายกิจการ มิได้เกิดในการตั้งบริษัทแรกเริ่มลงทุน เราเรียกกันว่า "หุ้นกู้" และบริษัทมีอสังหาริมทรัพย์เป็นหลักประกัน ฉะนั้น หุ้นประเภทนี้ไม่คืน

5.3 Ordinary Stock หุ้นสามัญ ผู้ถือหุ้นประเภทนี้ไม่มีโอกาสเข้าร่วมในการจัดการของบริษัทเป็นผู้เข้าคํางานของบริษัทได้เลย เสียภัยเท่ากับพวกที่ 1 แต่ไม่แน่นอน จะได้รับเงินปันผลหรือไม่ และถ้าได้รับเงินปันผลมากในฐานะเป็นผู้ถือหุ้นของบริษัท

6. อัตรานายหน้า (Brokerage)

การซื้อขายหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ หรือในธนาคารก็ตาม จะต้องมีการ
หักค่านายหน้าซึ่งแล้วแต่จะตกลงกันว่า ค่านายหน้าจากการซื้อหรือการขาย
ตามปกติ คือจากทั้งทางผู้ซื้อและผู้ขาย เช่น สมมติว่า สักขี ราคา
90 บาท ค่านายหน้า 2% หมายความว่า ผู้ซื้อจะต้องซื้อด้วยราคา 90 บาท
และบวกด้วยค่านายหน้าอีก 2% และผู้ขายจะได้รับเงินจากการขาย 90 บาท
หักค่านายหน้าเสีย 2% จำนวนเงินค่านายหน้าที่หักทั้งหมดนี้เรียกว่า ค่า
นายหน้า (Commission)

7.1 การคำนวณหารายได้จากการลงทุนซื้อสต็อก

เมื่อโจทย์กำหนดจำนวนสต็อก

ตัวอย่างที่ 1 ณมีสต็อกอยู่ในครอบครอง 44,000 บาท เป็นสต็อก
ชนิด 4% ครั้นสิ้นปี จะได้เงินปันผลเท่าไร

วิธีทำ

สต็อก	100	บาท	ได้เงินปันผล	4	บาท
„	44000	„	„	$\frac{4 \times 44000}{100}$	„
				= 1760	„

ตอบ เงินปันผล 1,760 บาท

เมื่อโจทย์กำหนดจำนวนเงินลงทุน

ตัวอย่างที่ 2 เงินลงทุน 9,800 บาท ซื้สตัคชัณก 8 $\frac{1}{2}$ % ราคา 98
กัณน ฉัจะไครบเงินผลประโยชน์เท่าไร

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ลงทุนกัวยเงิน} & 98 & \text{บาท} \quad \text{ไค้เงินบัณผล} \quad \frac{7}{2} \quad \text{บาท} \\
 & & \\
 & 9,800 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{7 \times 9800}{2 \times 98} \quad \text{,,} \\
 & & = 350 \quad \text{,,}
 \end{array}$$

ตอบ เงินบัณผล 350 บาท

7.2 การหาจำนวนเงินลงทุน

เมื่อโจทย์กำหนดจำนวนสตัค ราคาตลาด และอัตราเงินบัณผล

ตัวอย่างที่ 3 ฉัจะไค้รบัยเงินซื้สตัค 4,000 บาท ชัณก 4 % เมอ
ราคาตลาด 92 เป็นจำนวนเงินเท่าไร

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl}
 \text{จำนวนสตัค} & 100 & \text{บาท} \quad \text{ไค้รบัยเงินซื้} \quad 92 \quad \text{บาท} \\
 & & \\
 & 4,000 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{92 \times 4000}{100} \quad \text{,,} \\
 & & = 3680 \quad \text{,,}
 \end{array}$$

ตอบ ไค้รบัยเงินซื้เป็นเงิน 3,680 บาท

๒. เมื่อโททย์กำหนดจำนวนสต็อก ราคา ตลาด และอัตราเงินขึ้นผล
และค่านายหน้า

ตัวอย่างที่ 4 ฉันจะต้องจ่ายเงินค่าสต็อก 16,000 บาท ชนิก 3% ราคา
ตลาด 95.5 ค่านายหน้า 1.5% เท่าไร

วิธีทำ

จำนวนสต็อก 100 บาท ฉันจะต้องจ่ายเงินซื้อ $95.5 + 1.5 = 97$ บาท
 ,, 16,000 ,, ,, $\frac{97 \times 16000}{100}$,,
 = 15520 ,,

ตอบ จะต้องจ่ายเงินซื้อ 15,520 บาท

๓. เมื่อโททย์กำหนดรายได้ประจำ ราคาตลาด และอัตราเงินขึ้นผล
ตัวอย่างที่ 5 ฉันจะต้องจ่ายเงินลงทุนซื้อสต็อก ชนิก 4% เมื่อราคาตลาด
92 เป็นจำนวนเงินเท่าไร ฉันจึงจะได้รายได้ประจำ 2,000 บาท

วิธีทำ

ถ้าได้รายได้ 4 บาท จะต้องลงทุนซื้อด้วยเงิน 92 บาท
 ,, 2,000 ,, ,, $\frac{92 \times 2000}{4}$,,
 = 46000 ,,

ตอบ จะต้องจ่ายเงินลงทุน 46,000 บาท

จำนวนสต็อกคงเหลือที่ขายสต็อกขึ้น 3% ที่ $\frac{98 \times 30000}{105}$ บาท

$$= 28000 \text{ ,,}$$

รายได้สุทธิจากเงินปันผลของสต็อกขึ้น 5% $= \frac{28000 \times 5}{100}$,,

$$= 1400 \text{ ,,}$$

รายได้เพิ่มขึ้น $1400 - 900 = 500 \text{ ,,}$

ตอบ รายได้เพิ่มขึ้น 500 บาท

7.4 การหาอัตราเงินปันผล

ก. เมื่อโจทย์กำหนดราคาตลาดให้

ตัวอย่างที่ 8 ฉันได้รับเงินปันผลจากการลงทุนซื้อสต็อกราคา 120 เป็นจำนวน 5 ชยาททราบว่า สต็อกของฉันเป็นชนิดกปีเปอร์เซ็นต์

วิธีทำ

สต็อกราคา 120 บาท	ได้รับเงินปันผล	5 บาท
,, 100 ,,	,, ,,	$\frac{5 \times 100}{120}$,,
		$= 4\frac{1}{6}$,,

ตอบ สต็อกเป็นชนิด $4\frac{1}{6}\%$

ข. เมื่อโจทย์กำหนดรายได้จากเงินปันผล และจำนวนสต็อก

ตัวอย่างที่ 9 ฉันมีสต็อกอยู่ 4,000 บาท ได้รายได้ละ 160 บาท ทุกปี
จงหาว่า อัตราเงินปันผลของสต็อกของฉันเป็นเท่าไร

๖๔๐
วิธีทำ

สต็อกจำนวน	4,000 บาท	ได้รับรายได้จากเงินปันผล	160 บาท
"	100 "	"	$\frac{160 \times 100}{4000}$ "
= 4 "			

ตอบ อัตราเงินปันผล 4 %

ค. เมื่อโจทย์กำหนดราคาตลาด เงินลงทุน และ เงินรายได้
ตัวอย่างที่ 10 เงินลงทุนในการซื้อหลักทรัพย์หนึ่ง เช่นจำนวนเงิน
20,800 บาท เมื่อราคา 104 ปรากฏว่า ฉันได้รับรายได้
1,600 บาท อยากทราบว่า สต็อกของฉันเป็นชนิด
 กบเพชรเซ็นต์

๖๔๐
วิธีทำ

เงินลงทุน	20,800 บาท	ได้รับรายได้จากเงินปันผล	1600 บาท
"	104 "	"	$\frac{1600 \times 104}{20800}$ "
= 8 "			

ตอบ สต็อกเป็นชนิด 8 %

7.5 การหาราคาตลาด

ตัวอย่างที่ 11 สต็อกของฉันเป็นชนิด 4% ฉันลงทุนในการซื้อหลักทรัพย์
 นไป 4,600 บาท และได้รับเงินปันผล 200 บาท ทุกปี
 ฉันอยากทราบว่า ฉันซื้อหลักทรัพย์ราคาตลาดเท่าไร

วิธีทำ

เงินรายได้จากเงินปันผล 200 บาท มาจากเงินลงทุน 4600 บาท
 " " 4 " " $\frac{4600 \times 4}{200}$ "
 = 92 บาท

ตอบ สัดส่วนราคาตลาด 92

7.6 การเปรียบเทียบผลการลงทุนจากสัดส่วนหลายชนิด

ตัวอย่างที่ 12 ฉันทายาทรายงานว่า ฉันทะลงทุนก่อนหนึ่งซอสสัดส่วน 8%
 ราคา 98 สนิท $3\frac{1}{2}\%$ ราคา 98 บาท สนิท 4% ราคา
 104 บาท หรือ สนิท $2\frac{1}{2}\%$ ราคา 82.5 บาท

วิธีทำ

ถ้าลงทุนด้วยเงิน 1 บาท จะได้รับเงินปันผล สนิท 3% ราคา
 98 บาท = $\frac{3}{98}$ บาท

ถ้าลงทุนด้วยเงิน 1 บาท จะได้รับเงินปันผล สนิท $3\frac{1}{2}\%$
 ราคา 98 = $\frac{7}{196}$ บาท

ถ้าลงทุนด้วยเงิน 1 บาท จะได้รับเงินปันผล สนิท 4% ราคา
 104 = $\frac{4}{104}$ บาท

ถ้าลงทุนด้วยเงิน 1 บาท จะได้รับเงินปันผล สนิท $2\frac{1}{2}\%$
 ราคา 82.5 = $\frac{5}{165}$ บาท

ทั้งสี่ซอสจะมีรายได้ต่อ 1 บาท ดังนี้

สนิท 8%	สนิท $3\frac{1}{2}\%$	สนิท 4%	สนิท $2\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{33}$

จะเห็นได้ว่า ในเงินที่ลงทุนไป 1 บาท จะได้รับรายได้จาก
 สนิท 4% มากกว่าซอสอื่น

13. ฉันลงทุน 28940 บาท ขอซื้อตั๋วชนิด 4.5% ราคาตั๋ว 105 ฉันจะมีตั๋วอยู่กี่ใบในกรณีที่เป็นจำนวนเท่าไร
14. ฉันมีเงินอยู่ 19400 บาท ฉันจะซื้อตั๋วชนิด 3.5% ราคา 97 ได้เป็นจำนวนเท่าไร และฉันจะมีรายได้จากเงินปันผลเป็นปีละเท่าไร
15. ฉันมีตั๋วชนิด 4% อยู่ 12450 บาท ฉันจะขายออกด้วยราคาตลาด 84 ฉันจะขายได้เงินทั้งสิ้นเท่าไร และถ้าฉันซื้อตั๋วชนิด 3% ด้วยราคา 88 ฉันจะได้รายได้มากกว่า หรือน้อยกว่าเดิมเท่าไร
16. เพื่อนของฉันเขาจะขายตั๋วบริษัท ซีเมนต์ ให้ราคา 101.5 อัตรา 4% ทั้งสิ้นมีเป็นจำนวน 81000 บาท ฉันอยากทราบว่า ฉันจะต้องมีเงินเท่าไรจึงจะซื้อได้ และฉันจะได้รับเงินปันผลเท่าไร
17. ฉันมีเงินลงทุนอยู่ 15120 บาท อยากจะซื้อตั๋วชนิด 5% ราคาตั๋ว 94 $\frac{3}{8}$ อัตราดอกเบี้ย $\frac{1}{8}$ % อยากทราบว่าฉันจะได้เงินปันผลสักเท่าไร และฉันจะเป็นเจ้าของตั๋วจำนวนเท่าไร
18. ฉันลงทุนซื้อตั๋วชนิด 3.5% มา สิ้นเงินทั้งหมด 32200 บาท เมื่อราคาตั๋ว 80.5 ฉันจะได้เงินปันผลเท่าไร
19. ฉันซื้อตั๋วชนิด 5% เมื่อราคา 97 ได้เงินรายได้จากเงินปันผล 200 บาท อยากทราบว่า ฉันลงทุนซื้อไปเท่าไร และฉันมีกรรมสิทธิ์ในตั๋วเป็นจำนวนเงินเท่าไร
20. นายจันทร์ได้รับเงินปันผลจากหุ้นของบริษัทเทรคคิง ชนิด 7.5% อยู่จำนวนหนึ่ง ได้รับเงินปันผลเป็นจำนวน 450 บาท อยากทราบว่า เขามีหุ้นอยู่เป็นจำนวนเท่าไร

21. นายเกิดลงทุนซื้อสต็อกชนิด 5% เมื่อราคาสต็อก 120 ขยายทราบบว่า
นายเกิดได้รับเงินปันผลเป็นร้อยละเท่าไรของเงินทุน
22. คนลงทุนซื้อสต็อกสองราย รายแรกลงทุน 7920 บาท ชนิดสต็อก
8.5% เมื่อราคาสต็อก 99 รายที่สองลงทุน 9660 บาท ชนิดสต็อก
4.5% เมื่อราคา 105 รวมทั้งสองรายคนได้รับเงินปันผลร้อยละเท่าไร
ของเงินลงทุน
23. คนซื้อสต็อกบริษัท น. เป็นเงิน 4680 บาท ได้อัตราปันผล 4% คน
คนได้เงินปันผลเป็น 180 บาท ขยายทราบบว่าราคาสต็อกเท่าไร
24. จงหาราคาสต็อกชนิด 3% ซึ่งคนลงทุนไป 85910 บาท ได้รายได้
1265 บาทตอบ
25. นายประยูรต้องการทราบบว่า ถ้าเขาจะลงทุนด้วยเงินจำนวนหนึ่งซื้อ
สต็อกชนิด 3% ราคา 87 กับซื้อสต็อกชนิด 4% ราคา 115 อย่าง
ไหนจะให้รายได้มากกว่ากัน
26. นายปรีชาต้องการทราบบว่า ถ้าเขาซื้อสต็อกชนิด 3% ราคา 62.5
และสต็อกชนิด 3.5% ราคา 74.5 สต็อกชนิด 4% ราคา 80.75
รายไหนจะได้รายได้มากที่สุด และรายไหนจะได้รายได้น้อยที่สุด ถ้า
เขาลงทุนด้วยจำนวนเงินเท่ากัน
27. นาย ก. ซื้อสต็อกชนิด 4% จำนวน 24000 บาท เมื่อราคาสต็อก
135 แล้วกลับซื้อสต็อกชนิด 2.5% เมื่อราคา 108 ดังนั้นเงินปันผล
ที่ได้รวมทั้งหมดจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเท่าไร

28. คุณซื้อสต็อกจำนวน 27500 บาท เมื่อราคาสต็อก 90.5 และค่านายหน้า .5% อยากทราบว่าฉันจะต้องจ่ายเงินทั้งสิ้นเท่าไร และนายหน้าได้รับค่านายหน้าจากฉันไปเท่าไร
29. คุณลงทุนซื้อสต็อกชนิด 8% จำนวนหนึ่ง ได้เงินปันผลปีละ 8000 บาท แล้วฉันแบ่งขายสต็อกของฉันไปเสียครึ่งหนึ่ง เมื่อราคา 92 เอลเงินไปซื้อสต็อกรถไฟ ด้วยราคา 46 สต็อกชนิดนั้นเป็นสต็อกประเภทเปอร์เซ็นต์ ฉันจึงจะได้รับรายได้เพิ่มขึ้นปีละ 500 บาท
30. ฉันมีเงินอยู่ 79200 บาท จะแบ่งซื้อสต็อก 3 ชนิด ให้ได้รับเงินรายได้จากเงินปันผลเท่ากัน อยากทราบว่า ฉันจะต้องซื้อสต็อกทั้งสามชนิดคนเท่าไร สต็อกทั้งสามชนิดนี้ คือ
- 1) สต็อกชนิด 8% ราคา 120
 - 2) สต็อกชนิด 5% ราคา 110
 - 3) สต็อกชนิด 4% ราคา 104

๒๓๖

บทที่ 6

ทฤษฎีของเลขดัชนี (The Theory of Indices)

เมื่อจำนวนเลขโดยยกกำลัง หมายถึงจำนวนเลขนั้นคูณด้วยตัวเอง

มีจำนวนตัวคูณเท่ากับจำนวนกำลัง เช่น 2^3 หมายถึง 2 คูณด้วย 2 รวม

3 ตัว คือ $2 \times 2 \times 2$ ตัวอักษรแทนค่าตัวเลขเช่นเดียวกัน x^3 หมายถึง

$x \times x \times x$ เมื่อเขียนเป็นเลขยกกำลังแล้ว เราเรียกตัวเลข 2 หรืออักษร x นั้นว่า ฐาน และเรียกตัวเลขแสดงกำลังว่า ดัชนี (index)

ทฤษฎีของเลขดัชนี (Theory of Indices)

- 1) เลขฐานเดียวกันคูณกันได้เลขฐานนั้นกำลังเป็นผลบวกของดัชนี
เช่น $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

พิสูจน์

$$x^a = (x \times x \times x \times x \dots \dots \dots a \text{ หน้ })$$

$$x^b = (x \times x \times x \times x \times x \dots \dots \dots b \text{ หน้ })$$

$$\begin{aligned} \therefore x^a \cdot x^b &= (x \times x \times x \times \dots \dots a \text{ หน้ }) (x \times x \times x \times \dots \dots b \text{ หน้ }) \\ &= x^{a+b} \end{aligned}$$

- 2) เลขฐานเดิมเมื่อยกกำลังซ้อนได้ เลขฐานนั้นกำลังเป็นดัชนีซึ่งเป็นผลคูณของดัชนีเดิมและดัชนีซ้อน เช่น $(x^a)^b = x^{ab}$

$$x^a = x \times x \times x \times \dots \times a \text{ พหุคูณ}$$

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= (x \times x \times x \times \dots \times a \text{ พหุคูณ}) \\ &\quad (x \times x \times x \times x \times \dots \times a \text{ พหุคูณ}) \dots \dots \dots b) \\ &= (x \times x \times x \times x \times \dots \times ab \text{ พหุคูณ}) \\ &= x^{ab} \end{aligned}$$

3) เลขฐานเดียวกันหารกันได้ เลขฐานนั้นมักเขียนเป็นผลทางของ
คชณเดิม เช่น

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad \text{เมื่อ } a \text{ มีค่ามากกว่า } b,$$

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}} \quad \text{เมื่อ } a \text{ น้อยกว่า } b$$

$$x^a = x \times x \times x \times x \times \dots \times a \text{ พหุคูณ}$$

$$x^b = x \times x \times x \times \dots \times b \text{ พหุคูณ}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{x \times x \times x \times x \times \dots \times a \text{ พหุคูณ}}{x \times x \times x \times \dots \times b \text{ พหุคูณ}}$$

$$= x \times x \times x \times x \times \dots \times a-b \text{ พหุคูณ}$$

$$= x^{a-b} \quad \text{เมื่อ } a > b$$

$$\text{หรือ } \frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x \times x \times x \times \dots (b-a)} = \frac{1}{x^{b-a}}$$

$$\text{เมื่อ } a < b$$

4) เลขฐานใดมีคชณเป็น 0 ย่อมมีค่าเป็น 1 คือ $x^0 = 1$

พิสูจน์

เนื่องจาก

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

ถ้า $a=b$

$$\frac{x^a}{x^a} = x^{a-a} = x^0$$

$$\therefore x^0 = 1$$

- 5) เลขฐานใดเมื่อมีเลขชี้เป็นจำนวนลบ คือ ส่วนกลับของเลขฐานนั้น เมื่อมีเลขชี้เป็นจำนวนบวก เช่น $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$

พิสูจน์

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

เมื่อ $a = 0$

$$\frac{x^0}{x^b} = x^{0-b}$$

$$\therefore \frac{1}{x^b} = x^{-b}$$

6. เลขฐานใดที่ติดกรณฑ์ใด เลขฐานนั้นมีเลขชี้เป็นส่วนกลับของลำดับกรณฑ์นั้น เช่น

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

พิสูจน์

$$\frac{b}{x} = x \times x \times x \times \dots \times b \text{ พจน์}$$

$$\sqrt[a]{x^b} = \sqrt[a]{x \times x \times x \times \dots \times b} \text{ พจน์} = x^{\frac{b}{a}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 6 ก.

(1) รวบรวมผลสำเร็จโดยวิธีคิดในใจ

$$x^5 \times x^3, b^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{2}{5}}, c^5 \times c^{\frac{1}{5}}, d^{-\frac{1}{6}} \times d^{-\frac{2}{3}}, m^4 \div m^{\frac{1}{2}},$$

$$x^p \div x^{-3p}, r^{-\frac{2}{3}} \div r^{\frac{4}{5}}, 2ax \times 3a^4x, ax \times a^2x^2, 4m^{\frac{1}{2}} \div 2m^{\frac{1}{4}}$$

(2) รวบรวมเป็นเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

$$(x^3)^2, (y^{\frac{1}{2}})^4, (r^{\frac{3}{5}})^{-10}, (a^{-3})^7, (k^{-p})^{\frac{2}{p}}$$

(3) รวบรวมให้เป็นเลขชี้ศูนย์ (คิดในใจ)

$$3\sqrt{x^2}, 4\sqrt{x^8}, 5\sqrt[3]{1}, 6\sqrt[6]{c}, 3\sqrt[3]{d^{-6}}$$

$$p\sqrt[2]{\frac{2}{xp}}, a\sqrt[3]{\frac{8a}{x^2}}, x\sqrt{m^{-x}}$$

(4) รวบรวมค่าของเลขต่อไป

$$\frac{1}{4^2}, 32^{\frac{1}{5}}, 64^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{3}{2}}, 9^{\frac{5}{2}}, 27^{\frac{4}{3}}, 8^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{-8^{\frac{2}{3}}}{27}\right)$$

(5) รวบรวมสมการต่อไป

$$1. x^{\frac{1}{2}} = 3 \quad 6. x^{\frac{2}{3}} = 9$$

$$2. x^{\frac{3}{2}} = 8 \quad 7. x^{\frac{1}{5}} = -2$$

$$3. x^{\frac{1}{5}} = 2 \quad 8. 3x^{\frac{1}{2}} = b$$

$$4. \frac{1}{x^3} = \frac{2}{3} \quad 9. \sqrt{x} = 2$$

$$5. \frac{1}{x^4} = 2a \quad 10. \sqrt[3]{x} = a$$

จงทำให้เลขต่อไปนี้มีเศษเป็นจำนวนบวก

$$(6) \frac{4x^{-2}a^3}{b^2c^{-3}}$$

$$(9) \frac{1}{4x^{-2}y^{-5}a^2}$$

$$(7) 5 \div 2^{-2}$$

$$(10) \frac{\sqrt[4]{c^{-8}}}{\sqrt[3]{5^{-1}}}$$

$$(8) 3^{-4} \div 2^{-3}$$

จงลดทอนสมการต่อไปนี้

$$(11) a^{\frac{1}{2}} + 2$$

$$= 4$$

$$(16) (m^2 - 4m + 4)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$(12) 10^{-x}$$

$$= \frac{1}{10000}$$

$$(17) (n^2 + 2n + 5)^{\frac{1}{2}} = n + 3$$

$$(13) 2^x$$

$$= 16$$

$$(18) (x - b)^{\frac{1}{2}} = (4b)^{\frac{1}{2}}$$

$$(14) 3^{-x}$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$(19) (x + b)^{\frac{1}{3}} = (9b)$$

$$(15) (x - 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 8$$

$$(20) (x^{\frac{5}{6}} + 5) = 37$$

ถ้าข้อความต่อไปนี้ถูกให้เขียนเครื่องหมาย ✓ และถ้าผิดให้เขียน
เครื่องหมาย ✕ ท้ายข้อความต่อไปนี้

$$(21) 3^{-2}$$

$$= -9$$

$$(26) \sqrt[3]{8a^6} = 2a^2$$

$$(22) 5a^0$$

$$= 1$$

$$(27) \sqrt{a^2 + 9} = a + 3$$

$$(23) 8^{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{16}$$

$$(28) \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$(24) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{9}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{9}}$$

$$(29) \sqrt{16a^{36}} = 4a^6$$

$$(25) (-a^2)^4$$

$$= a^8$$

$$(30) \sqrt[3]{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{5}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 6 ข.

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ และให้เลขชี้กำลังเป็นจำนวนบวก และไม่ติดเครื่องหมายกรณฑ์ (ราก)

$$(1) \frac{4r^{-6} p^{-4}}{8r^{-2} p^{-8}}$$

$$(5) \left(\frac{m^2}{n^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \div \left(\frac{n^3}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) (a^{-2} b^2)$$

$$(6) a^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{a^{\frac{2}{3}} b^4 c^{\frac{1}{2}}} \times (3^{-4} a^2 b^4 c^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$$

$$(3) (a^{-2} b^2)^{-1}$$

$$(7) \left\{ (a-b)^{-x} \right\}^4 \div \left\{ (a+b)^4 \right\}^x$$

$$(4) (x^{-1} + y^{-1})^{-2}$$

$$(8) \left(\frac{36 \sqrt{xy^3}}{25 \sqrt{x^3y}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(9) \sqrt[3]{8x^2} \sqrt{y} \div \sqrt{9y^3} \sqrt[3]{x}$$

$$(10) \left(\frac{a^{n+1}}{a^{1-n}} \right)^n \div \frac{a^{-n}}{a}$$

$$(11) \frac{3^{-1}}{3^{-1} + 3^{-2}}$$

$$(12) \sqrt[4]{x^{2n+1}} \times \sqrt[4]{x^{-1}}$$

$$(13) \frac{2^n \times (2^{n-1})^2}{2^{n+1} \times 2^{n-1}} \times \frac{1}{4^n}$$

$$(14) \frac{3 \times 2^n - 4 \times 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$$

$$(15) \frac{2^{n+3}}{15^{-n-1}} \times \frac{6^{n+2}}{5^{n+1}}$$

$$(16) \frac{5^{-2} (a-b)^0 x^{-3}}{x^{-4} y^0}$$

$$(17) (a^2 - a^{-1} b^{-2}) a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$$

ในการแยกตัวประกอบของนิพจน์ซึ่งมีเศษส่วน ถ้ามีพจน์เหล่านั้นอยู่ในรูป
กฎเกณฑ์ของตัวประกอบกำลัง 2 กำลัง 3 สามารถจะแยกได้ ก็แยกออก
ตามแบบนั้น ๆ

ตัวอย่าง 1 จงแยกตัวประกอบของ

$$(1) (a-b) \text{ ออกเป็นตัวประกอบกำลังตรงหนึ่งของพหุนาม}$$

$$(2) 25 a^x - 16 b^y \quad ,, \quad ,,$$

วิธีทำ (1) $(a-b) = (a^{\frac{2}{2}} - b^{\frac{2}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

$$(2) 25 a^x - 16 b^y = (5a^{\frac{x}{2}} - 4b^{\frac{y}{2}}) (5a^{\frac{x}{2}} + 4b^{\frac{y}{2}})$$

ตัวอย่าง 2 จงแยกตัวประกอบของ

$$m - 4 m^{\frac{1}{2}} - 12$$

วิธีทำ $m - 4 m^{\frac{1}{2}} - 12 = (m^{\frac{1}{2}} - 6) (m^{\frac{1}{2}} + 2)$

ตัวอย่าง 3 จงแยกตัวประกอบของ $x^{-6} - 64 y^{-6}$

วิธีทำ $(x^{-2})^3 - (4 y^{-2})^3 = (x^{-2} - 4y^{-2}) (x^{-4} + 4x^{-2} y^{-2} + 16 y^{-4})$

ตัวอย่าง 4 จงทำเป็นผลสำเร็จ $(27 m^n + 1) \div (8\sqrt[n]{m^n} + 1)$

วิธีทำ $\frac{(27 m^n + 1)}{8\sqrt[n]{m^n} + 1} = \left\{ \frac{(3 m^{\frac{n}{3}})^3 + 1}{(3 m^{\frac{n}{3}} + 1)} \right\}$

$$= \frac{(3 m^{\frac{n}{3}} + 1) (9 m^{\frac{2n}{3}} - 3 m^{\frac{n}{3}} + 1)}{(3 m^{\frac{n}{3}} + 1)}$$

$$= 9 m^{\frac{2n}{3}} - 3 m^{\frac{n}{3}} + 1$$

แบบฝึกหัดที่ 8 ค.

จงแยกตัวประกอบ

$$1. \ 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}} + 2$$

$$2. \ a^{8n} + 27$$

$$3. \ x^{-3} - 8y^{-3}$$

$$4. \ x^{-4} + 2x^{-2} - 3$$

$$5. \ a^{\frac{2}{3}} - 4b^{\frac{2}{3}}$$

จงหาคำของ

$$6. \ (a + a^{\frac{1}{2}} - 4) (a + a^{\frac{1}{2}} + 4)$$

$$7. \ \frac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} + b^{-2}}$$

$$8. \ 27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}} + 64^0$$

$$9. \ 81^{\frac{1}{2}} + (-82)^{\frac{4}{5}} + 9^{\frac{3}{2}} + 1564^0$$

$$10. \ (3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{1}{3}} - 6 + m^{-\frac{1}{3}}) (2m^{\frac{1}{3}} - 3)$$

$$11. \ \frac{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{9}} - y^{\frac{1}{9}}}$$

$$12. \ (e^x + 3 + e^{-x}) (2e^x - 3e^{-x})$$

$$13. \frac{a^{\frac{5}{3}} - 8a^{\frac{2}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}}$$

$$14. \frac{x - 5x^{\frac{1}{2}}}{x - 3\sqrt{x} - 10} \div \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$$

$$15. \frac{x^{\frac{4}{3}} - 4\sqrt[3]{x^{-4}}}{\sqrt[3]{x^4} + 4 + 4x^{-\frac{4}{3}}}$$

แก้สมการต่อไปนี้

$$16. 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = (5x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$17. x^{2a} - 9x^a + 20 = 0$$

$$18. a - a^{\frac{1}{2}} = 42$$

$$19. 3^{2x+3} - 55 = 28(3^x - 2)$$

$$20. x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$$

$$21. y^{\frac{1}{2}} - 4y^{\frac{1}{4}} = -3$$

$$22. a^{-2} + 7a^{-1} + 12 = 0$$

$$23. x^{\frac{3}{2}} - 9x = 27(1 - x^{\frac{1}{2}})$$

$$24. x + 3x^{\frac{2}{3}} = -3x^{\frac{1}{3}} - 1$$

บทที่ 7

เลียด (Surd)

เลขจำนวนใดซึ่งตกอยู่ในเครื่องหมายรากกำลังเท่าใดก็ตาม เลขจำนวนนั้น ๆ เรียกว่า จำนวนเลียด เช่น $\sqrt{x}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$.

1. ชนิดของตัวเลข (Numbers)

1. จำนวนตรรกยะ (Rational Number) คือ จำนวนเลขทศนิยมเศษส่วนใด เช่น 2, .8, .4, $\frac{2}{3}$, -5.

2. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) คือ จำนวนเลขทศนิยมเพียงค่าประมาณใกล้เคียงเท่านั้น ฉะนั้น จึงไม่สามารถทำเป็นเศษส่วนได้ เช่น $\sqrt{2} = 1.414 \dots\dots\dots \sqrt{3} = 1.7321 \dots\dots\dots$

3. อันดับของรากหรือกรณจก กษกำลังของกรณจก (order) เขียนเหมือนเลขดัชนีบนเครื่องหมายกรณจก

2. ชนิดของเลียด

2.1 เลียดแท้ (Real surd) คือ จำนวนเลียดที่ผลเป็นจำนวนตรรกยะ เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{x}$

2.2 เลียดไม่แท้ (Unreal surd) คือ จำนวนเลียดที่ทำเป็นจำนวนตรรกยะได้ เช่น $\sqrt{4} = 2$.

2.3 เลียดผสม (Mixed surd) เลขจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายรากเมื่อแยกตัวประกอบแล้ว ตัวใดสามารถระลอกรากได้ ก็ลอกออกมาเป็นตัวคูณนอกเครื่องหมายกรณจก ส่วนตัวลอกไม่ได้ คงอยู่ในเครื่องหมายตามเดิม เช่น

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{a^3 b^2} = a \sqrt[3]{b^2}$$

รูปของเลขจำนวนทศาทศออกมาแล้ว เรียกว่าเลขคี่ผสม

2.4 เลขคี่ผสม (Entire surd) เมื่อนำตัวคูณหน้าเครื่องหมายรากทั้งหมดยกกำลังเท่าจำนวนกำลังของราก แล้วคูณกับจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ เลขจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ทั้งหมดคนเรียกเลขคี่ผสม เช่น

$$x \sqrt{2} = \sqrt{2x^2}$$

$$\sqrt[4]{(a+b)} = \sqrt[4]{b^4(a+b)}$$

2.5 เลขคี่กำลังที่สอง (Quadratic surd) ทุก ๆ กรณฑ์ของมตัวเลขแสดงกำลังของกรณฑ์ ยกเว้นกรณฑ์กำลังที่ 2 ไม่ต้องมี เรียกว่า Quadratic surd.

2.6 เลขคี่เหมือน (Like surd) คือ เลขคี่ใด ๆ ที่สามารถเขียนเป็นรูปเดียวกันได้ เช่น $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ เป็นเลขคี่เหมือน

2.7 เลขคี่ไม่เหมือน (Unlike surd) คือ เลขคี่ทั่วไปที่ไม่เหมือนกันเลย เช่น $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{x}$

2.8 เลขคี่เชิงประกอบ (Compound surds) คือ นิพจน์ใดที่เขียนในรูปเลขคี่ตั้งแต่ 2 นิพจน์ขึ้นไป ติดต่อกันด้วยเครื่องหมายบวกและลบ เช่น $(5\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $(2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{7})$, $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y})$

2.9 เลขคี่อันคล้ายกัน เลขคี่ใด ๆ ที่มีรูปแบบแสดงอันคล้ายกัน เรียกว่าเลขคี่อันคล้ายกัน เช่น $\sqrt{x}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{9}$

2.10 เลขคู่สังยุค (Conjugate surds.) เลขคู่กำลังที่สอง 2 พจน์
ประกอบเป็น 1 นิพจน์ เมื่อเอานิพจน์รูปเดียวกัน แต่ต่างเครื่องหมายกัน
2 นิพจน์มาคูณกัน จะได้ผลคูณเป็นจำนวนเต็มหรือ เลขคู่ Conjugate surds
เช่น $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$

$$(2\sqrt{3} + \sqrt{a})(2\sqrt{3} - \sqrt{a}) = (4 \times 3) - a = 12 - a$$

แบบฝึกหัดคิดในใจ ชุดที่ 7 ก.

1. จำนวนใดที่เป็น Quadratic surds. ของเลขต่อไปนี้

$$\sqrt{8}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{x+y}, \sqrt[3]{x+y}, \sqrt{16}, \sqrt[4]{41}, \sqrt{ab}$$

2. จำนวนใดที่เป็นเลขคู่สมบูรณ์

$$\sqrt{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{(x+y)^3}, \sqrt{16}, \sqrt{64}, 6\sqrt{5}, 6\sqrt{8}, 3\sqrt{50}$$

3. จำนวนใดที่เป็นเลขคู่ผสม

$$8\sqrt{5}, \sqrt{25}, 3\sqrt{(x+y)}, 5\sqrt{7}, 4, \sqrt{16}, 6, 2^3\sqrt{27}, 3\sqrt{81}$$

4. จงทำเป็นเลขคู่สมบูรณ์

$$3\sqrt{2}, 2^3\sqrt{8}, 4a\sqrt{3a}, 2b^2\sqrt{2b}, 3mn^2\sqrt{7mn}, 2h^2c^4\sqrt[3]{5h^2c^2}$$

5. จงทำเป็นเลขคู่ผสม

$$\sqrt{9x}, 3\sqrt[3]{8y^3}, 2\sqrt[4]{81y^3}, \sqrt{45a^2}, \sqrt{27m^3}, \sqrt{9x^2 - 18x^3}$$

8. กฎของเสอด

8.1 การทำเสอดให้เป็นเลขคั่น

เสอดคั่นคั่นโค เมื่อจะเปลี่ยนให้เป็นเลขคั่น ให้เลขกำลังของรากเป็นส่วนของคั่นของฐานนั้น เช่น

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

พิสูจน์

$$x^b = x \cdot x \cdot x \dots b \text{ พจน์}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[a]{x^b} &= \sqrt[a]{x \cdot x \cdot x \dots b \text{ พจน์}} \\ &= x^{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

ข้อสังเกต เมื่อจะเปลี่ยนเลขคั่นเป็นเสอด คงทำโดยวิธีกลับกัน คือ ส่วนของคั่น คือ เลขแสดงกำลังของรากของเลขฐานนั้น

ตัวอย่างที่ 1 รงเปลี่ยนเสอดต่อไปนี้เป็นเลขคั่น

$$1. \sqrt[4]{a^3}$$

$$2. \sqrt[3]{27c^2}$$

วิธีทำ 1) $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

$$2) \sqrt[3]{27c^2} = \sqrt[3]{3^3 c^2} = 3c^{\frac{2}{3}}$$

ตัวอย่างที่ 2 รงทำเลขต่อไปนี้เป็นเสอด

$$1. a^{\frac{2}{3}}$$

$$2. 4^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}$$

วิธีทำ 1) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

$$2) 4^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4^2 c} = \sqrt[3]{16c}$$

8.2 การคูณและการหารเลขชี้

ก. เลขชี้คี่เป็นอันดับเท่ากัน คูณหรือหารกัน รวมเข้าในเครื่องหมายกรณฐานเดียวกันได้ เช่น

$$\sqrt{a} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

พิสูจน์ $\sqrt{a} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = (ab/c)^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

ในทำนองเดียวกัน $\sqrt[3]{\frac{ab}{c}} = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}$ คิว

ข. ถ้าเลขชี้คี่ไม่เท่ากัน เมื่อต้องการจะคูณและหารในเครื่องหมายกรณฐานเดียวกัน ต้องทำให้มีอันดับเดียวกันก่อน เช่น

$$a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{y} = b\sqrt{\frac{b}{x^a}} \cdot b\sqrt{y}$$

$$= b\sqrt{\frac{b}{x^a} \cdot y}$$

พิสูจน์ $a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{y} = x^{\frac{1}{a}} \cdot y^{\frac{1}{b}}$

$$= x^{\frac{1}{a}} \times \frac{b}{b} \cdot y^{\frac{1}{b}}$$

$$= x^{\frac{b}{ab}} \cdot y^{\frac{1}{b}}$$

$$= \sqrt[b]{\frac{b}{x^a}} \sqrt[b]{y}$$

$$= \sqrt[b]{\frac{b}{x^a y}}$$

8.3 การทำเลขชี้กำลังให้เป็นเลขคี่จนคล้ายกันได้ และเป็นอันดับต่ำสุดเท่าที่จะทำได้ ค.ร.น. ของอันดับของเลขชี้กำลังทั้งหมด แล้วทำทุกเลขหรือทุกพจน์ใหม่อันดับเท่า ค.ร.น. ที่หาได้ เช่น

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{y}, \quad \sqrt[4]{z}$$

ค.ร.น. ของอันดับของเลขชี้กำลัง 2, 3, 4, คือ 12

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt[12]{x^6}, \quad \sqrt[3]{y} = \sqrt[12]{y^4}, \quad \sqrt[4]{z} = \sqrt[12]{z^3}$$

$$\therefore \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{y}, \quad \sqrt[4]{z} \text{ คือ } \sqrt[12]{x^6}, \quad \sqrt[12]{y^4}, \quad \sqrt[12]{z^3}$$

พิสูจน์ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2} \times \frac{12}{12}} = \sqrt[12]{\frac{12}{x^2}} = \sqrt[12]{x^6}$

$$\sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3} \times \frac{12}{12}} = \sqrt[12]{\frac{12}{y^3}} = \sqrt[12]{y^4}$$

$$\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4} \times \frac{12}{12}} = \sqrt[12]{\frac{12}{z^3}} = \sqrt[12]{z^3}$$

ตัวอย่าง จงทำเป็นผลสำเร็จ

1. $3\sqrt{33} \times 2\sqrt{77}$

2. $7\sqrt[3]{2} \times 2\sqrt{5}$

3. $\frac{1}{3}\sqrt{2} \times \sqrt[16]{x^4} \times \sqrt[12]{x^9} \div \sqrt[4]{y}$

วิธีทำ 1) $3\sqrt{33} \times 2\sqrt{77} = 3 \times 2 \sqrt{33 \times 77}$
 $= 6 \sqrt{3 \times 11 \times 11 \times 7}$
 $= 66 \sqrt{21}$

2) $7^3 \sqrt{2} \times 2 \sqrt{3} = 7^6 \sqrt{2^2} \times 2^6 \sqrt{3^2}$
 $= 7 \times 2^6 \sqrt{4 \times 27}$
 $= 14^6 \sqrt{108}$

3) $\frac{1}{3} \sqrt{2} \times {}^{16}\sqrt{x^4} \times {}^{12}\sqrt{x^9} \div {}^4\sqrt{y}$
 $= \frac{1}{3} \sqrt{2} \times \sqrt{x^{\frac{4}{8}}} \times \sqrt{x^{\frac{9}{6}}} \div \sqrt{y^{\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{1}{3} \sqrt{2} \times \sqrt{x^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} \div \sqrt{y^{\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}}$
 $= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2x^2}{y^{\frac{1}{2}}}} = \frac{x \sqrt{2}}{3^4 \sqrt[4]{y}}$

8.4 การบวกและการลบเซอด

เซอดเหมือนกันแทนที่จะบวกหรือลบกันได้ แต่ถ้าเซอดคน ๆ เป็น
 เซอดผสมหรือ เซอดสมบูรณ์ ทำให้เป็นเซอดเหมือนเสียก่อน แล้วจึงบวก
 ลบแบบพีชคณิตทั่วไปเช่น

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} - c\sqrt{x} \quad (\sqrt{x} \text{ เป็นเซอดเหมือน})$$

$$\therefore a\sqrt{x} + b\sqrt{x} - c\sqrt{x} = \sqrt{x} (a + b - c)$$

ตัวอย่างที่ 1 หมายความว่า

$$1. \quad 4\sqrt{63} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$$

$$2. \quad \sqrt{18p^3q^3} - p\sqrt{8pq^3} + q\sqrt{50p^3q}$$

วิธีทำ 1) $4\sqrt{63} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28} = 4\sqrt{9 \times 7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{4 \times 7}$

$$= 12\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 16\sqrt{7}$$

$$= \sqrt{7} (12 + 5 - 16)$$

$$= \sqrt{7}$$

$$2) \quad \sqrt{18p^3q^3} - p\sqrt{8pq^3} + q\sqrt{50p^3q}$$

$$= 3pq\sqrt{2pq} - 2pq\sqrt{2pq} + 5pq\sqrt{2pq}$$

$$= pq\sqrt{2pq} (3 - 2 + 5)$$

$$= 6pq\sqrt{2pq}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\sqrt{5} = 2.2361$, $\sqrt{3} = 1.7321$, หมายความว่า

$$8\sqrt{500} - 2\sqrt{243}$$

วิธีทำ $8\sqrt{500} - 2\sqrt{243} = 8\sqrt{100 \times 5} - 2\sqrt{81 \times 3}$

$$= 80\sqrt{5} - 18\sqrt{3}$$

$$= (80 \times 2.2361) - (18 \times 1.7321)$$

$$= 35.91$$

แบบฝึกหัดที่ 7 ข.

1) หมายความว่า

$$a^{\frac{2}{3}} \quad 5m^{\frac{3}{4}}, \quad 4^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}, \quad (5^3x)^{\frac{1}{2}}, \quad m^{\frac{1}{2}} \times n^{\frac{1}{2}}, \quad (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$$

2) จงแปลงเป็นเลขคั่น

$$^4\sqrt{a^3}, \quad ^5\sqrt{b^2}, \quad ^3\sqrt{27c^2}, \quad ^4\sqrt{16a^3}, \quad \sqrt{4m^2-n^2}, \quad ^4\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}$$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$3) \sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$$

$$4) 3\sqrt{147} - 7\sqrt{\frac{1}{27}} - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$5) 2a\sqrt{a^2x} + 3a^2\sqrt{4x} - a\sqrt{9a^2x}$$

$$6) 3\sqrt{20} + 2\sqrt{18} - \sqrt{45} + \sqrt{8}$$

$$7) \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$8) \frac{1}{3}^3\sqrt{81} - 3^3\sqrt{24} + \frac{1}{2}^3\sqrt{54}$$

$$9) 5\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$$

$$10) 3\sqrt{28} + \frac{1}{3}\sqrt{175} - \frac{3}{2}\sqrt{63}$$

$$11) 3^3\sqrt{\frac{1}{3}} - 2^3\sqrt{\frac{1}{81}} - 4^3\sqrt{-72}$$

$$12) \sqrt{125} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + \frac{2}{9}\sqrt{45}$$

$$13) a\sqrt{b} + \sqrt{b} - c\sqrt{b}$$

$$14) 3\sqrt{\frac{5x}{y}} + 2\sqrt{\frac{1}{5}x^3y} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{y}{5x^3}}$$

$$15) \text{ จงหาค่าของ } x^2 - 2x - 1 \text{ เมื่อ } x = 1 + \sqrt{2}$$

$$16) \text{ จงหาค่าของ } x^2 - 4x + 41 \text{ เมื่อ } x = 2 - 3\sqrt{5}$$

$$17) \text{ จงหาค่าของ } x^2 + 2x - 1 \text{ เมื่อ } x = -1 + \sqrt{2}$$

4. การทำส่วนของเลขเศษส่วนให้เป็นเลขคี่ให้เป็นจำนวนตรรกยะ

(Rationalizing the Denominator)

ก. ในการตอบจำนวนเลข เมื่อเขียนเศษส่วน ต้องทำส่วนที่เป็นเลขคี่ ให้เป็นจำนวนตรรกยะก่อน โดยหาคำมาคูณและต้องไม่ทำให้ค่าของจำนวนเดิมเปลี่ยนแปลงค่าที่นำมาคูณ คือ 1 แต่เปลี่ยนรูปตามความต้องการของโจทย์ เช่น $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เลขครุคูณเดียวกัน มีจำนวนเท่ากันกำลังของกรณที่แล้ว จะถอดรากเป็นจำนวนตรรกยะได้เสมอ ฉะนั้น การเปลี่ยนรูปค่า 1 จึงเปลี่ยนเป็นรูปเลขคี่มีจำนวนซึ่งเมื่อคูณกับส่วนซึ่งเป็นเลขคี่เต็มแล้ว ครบจำนวนตามจำนวนกำลังของกรณที่ (คือถอดการณที่ออกได้)

ตัวอย่าง รงทำส่วนของเศษส่วนต่อไปนี้ เป็นจำนวนตรรกยะ

1. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

2. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

วิธีทำ 1) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

2) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{5^2}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 25}{5 \times 25}} = \sqrt[3]{\frac{50}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{50}{5}}$

ข. ถ้าส่วนของเศษส่วนจำนวนนั้นมีรูปลักษณะเป็นเลขคี่ละ ประกอบด้วย

2 พจน์ จะทำเป็นจำนวนตรรกยะได้ โดยทำให้เป็น Conjugate surds

ตัวอย่าง รงทำให้ส่วนของ $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนทักยะ

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} &= \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})} \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{2-12} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 7 ค.

รงทำให้เป็นผลสำเร็ว

1) $\sqrt{\frac{1}{7}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{4}{2}}$

3) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

4) $\sqrt{\frac{5}{8}}$

5) $\sqrt[3]{\frac{8a^2}{4b}}$

6) $\sqrt[4]{\frac{64m^2}{9n^6}}$

7) $\frac{2a-b}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

8) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

9) $\frac{\sqrt{b}+a}{\sqrt{b}-a}$

10) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}}$

$$11) \quad \frac{2\sqrt{3} + 4}{3\sqrt{3} - 2}$$

$$12) \quad \frac{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}$$

5. การแยกตัวประกอบของเสียด

เมื่อนพจน์มรูปรูขงจะแยกตัวประกอบได้ ก็ควรแยกตามกฎของการแยกตัวประกอบในพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ พังกชันต่อไปนี้

1. $(a - b)$ ให้เป็นเลขเสียดอันดับครึ่งของกษณเกม

$$2. m - 4\sqrt{m} - 12$$

3. $x + 27y$ ให้เป็นเลขเสียดอันดับ $\frac{1}{3}$ ของกษณเกม

วิธีทำ 1) $(a - b) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 =$
 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$$2) m - 4\sqrt{m} - 12 = (\sqrt{m} - 6)(\sqrt{m} + 2)$$

$$3) x + 27y = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{27y})^3$$

$$= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{27y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{27xy} + \sqrt[3]{27y^2})$$

ตัวอย่างที่ 2 จงทำเป็นผลต่ำเร

$$(27m^n + 1) \div (\sqrt[3]{27m^n} + 1)$$

วิธีทำ $\frac{27m^n + 1}{\sqrt[3]{27m^n} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{27m^n})^3 + 1}{\sqrt[3]{27m^n} + 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(8\sqrt[3]{m^n} + 1)(9\sqrt[3]{m^{2n}} - 8\sqrt[3]{m^n} + 1)}{(8\sqrt[3]{m^n} + 1)} \\
 &= 9\sqrt[3]{m^{2n}} - 8\sqrt[3]{m^n} + 1
 \end{aligned}$$

6. ลักษณะสมบัติของ Quadratic surds.

(Some Properties of Quadratic surds)

ทฤษฎีที่ 1

กำหนดให้

จะพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

Surd จะเท่ากับจำนวนคยะรวมกับเลขไม่ได้

$\sqrt{a}$ และ $\sqrt{b}$ เป็นเลขแท้ และ x เป็นจำนวนคยะ

$\sqrt{a} = x + \sqrt{b}$ ไม่ได้

สมมติว่า $\sqrt{a} = x + \sqrt{b}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $a = x^2 + 2x\sqrt{b} + b$

$$a = x^2 + b + 2x\sqrt{b}$$

$$2x\sqrt{b} = a - x^2 - b$$

$$\therefore \sqrt{b} = \frac{a - x^2 - b}{2x}$$

เลขแท้จะเท่ากับจำนวนคยะไม่ได้ ที่สมมติไว้จริงไม่จริง

$$\text{นั่นคือ } \sqrt{a} \neq x + \sqrt{b}$$

ทฤษฎีที่ 2

ถ้า $a + \sqrt{b} = m + \sqrt{n}$, a และ m ต่างก็เป็น

จำนวนคยะ $\sqrt{b}$ และ $\sqrt{n}$ ต่างก็เป็นเลขแท้ แล้ว

$$a = m, \sqrt{b} = \sqrt{n} \text{ และ } a - b = m - n$$

กำหนดให้ $a + \sqrt{b} = m + \sqrt{n}$, a และ m เป็นจำนวนตรรกยะ b และ n เป็นเลขยกกำลัง

จะพิสูจน์ว่า $a = m$ และ $\sqrt{b} = \sqrt{n}$

พิสูจน์ ถ้า $a \neq m$, a ต้อง $< m$ หรือ $a > m$

สมมติว่า $a < m$

ฉะนั้น ถ้าหา x ที่ $a + x = m$ ซึ่งเมื่อเพิ่มให้ a จนเท่ากับ m จะได้ $a + x = m$

$$\therefore a + \sqrt{b} = m + \sqrt{n}$$

$$\text{แทนค่า } m, \therefore a + \sqrt{b} = a + x + \sqrt{n}$$

$$\sqrt{b} = x + \sqrt{n}$$

แต่เลขยกกำลังจะเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกเลขยกกำลังไม่ได้

$$\sqrt{b} \neq x + \sqrt{n}$$

ฉะนั้น ที่สมมติไว้ไม่เป็นความจริง a จะน้อยกว่า m ไม่ได้
ทำนองเดียวกัน

$$\text{ถ้า } a > m$$

ก็ต้องหาค่า x มา $+ m$ เพื่อให้ได้ผลเท่ากับ a จะได้ผลไม่เป็น
ความจริง

เมื่อ a ไม่มากกว่า และไม่น้อยกว่า m

$$\therefore a = m \text{ และเมื่อบวกถึงเท่ากันยอมเท่ากัน}$$

$$\therefore \sqrt{b} = \sqrt{n} \quad \text{ด้วย}$$

โดยทำนองเดียวกัน สมสิ่งเท่ากันจากสิ่งเท่ากัน เหลือเท่ากัน

$$\therefore a - \sqrt{b} = m - \sqrt{n}$$

ทฤษฎีที่ 3 ถ้า $\sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ แล้วจะได้ผลว่า

$$\sqrt{m - \sqrt{n}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

กำหนดให้ $\sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

จะพิสูจน์ว่า $\sqrt{m - \sqrt{n}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

พิสูจน์ $\sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (ให้ยก)

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $m + \sqrt{n} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

$$\begin{aligned} m + \sqrt{n} &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} \\ &= (a + b) + 2\sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$\therefore m = (a + b) \quad (\text{ทฤษฎีที่ 2})$$

$$\text{และ } \sqrt{n} = (2\sqrt{ab}) \quad (\text{ทฤษฎีที่ 2})$$

$$\begin{aligned} \therefore m - \sqrt{n} &= (a + b) - 2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

ถอดรากกำลังที่ 2 ทั้ง 2 ข้าง

$$\therefore \sqrt{m - \sqrt{n}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

7. วิธีหารากกำลังที่ 2 ของ Quadratic Surds

เราจะได้เห็นจากทฤษฎีที่ 8 ว่า ถ้า

$$\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

ฉะนั้น ถ้าเราจัดวางรูป m ในรูป $(a + b)$

และ $\sqrt{n}$ ในรูปของ $2\sqrt{ab}$ ได้ กระบวนการดังกล่าวที่ 2 ของ Quadratic Surds ได้

ตัวอย่างที่ 1 หารากที่สองของ $5 + 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} 5 + 2\sqrt{6} &= (3 + 2) + 2\sqrt{3 \times 2} \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{3 \times 2} \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

ตัวอย่างที่ 2 หารากที่สองของ $28 - 6\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 28 - 6\sqrt{3} &= 28 - 2 \times 3\sqrt{3} \\ &= 28 - 2\sqrt{9} \times 3 \\ &= 28 - 2\sqrt{27} \\ &= 27 + 1 - 2\sqrt{27 \times 1} \\ &= (\sqrt{27})^2 + (\sqrt{1})^2 - 2\sqrt{27 \times 1} \\ &= (\sqrt{27} - \sqrt{1})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{28 - 6\sqrt{3}} &= \sqrt{27} - 1 \\ &= 3\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 รงหากรณชาติ 2 ของ $\sqrt{32} - \sqrt{24}$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{32} - \sqrt{24} &= \sqrt{16 \times 2} - \sqrt{4 \times 6} \\
 &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6} \\
 &= (3\sqrt{2} + \sqrt{2}) - 2\sqrt{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\
 &= (\sqrt{3\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{4\sqrt{2}})^2 - 2\sqrt{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\
 &= (\sqrt{3\sqrt{2}} - \sqrt{4\sqrt{2}})^2 \\
 \therefore \sqrt{\sqrt{32} - \sqrt{24}} &= \sqrt{3\sqrt{2}} - \sqrt{4\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 7 ง.

รงหากรณชาติ 2 ของ

- 1) $8 + 2\sqrt{15}$
- 2) $9 - 2\sqrt{14}$
- 3) $12 - 6\sqrt{3}$
- 4) $4a + b + 4\sqrt{ab}$
- 5) $18 - 2\sqrt{77}$
- 6) $2(p + \sqrt{p^2 - q^2})$
- 7) $96 + 12\sqrt{15}$
- 8) $77 + 10\sqrt{54}$
- 9) $a + 12 - \sqrt{48a}$

$$10) \quad 5x + 2y + 2\sqrt{10xy}$$

$$11) \quad 1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$12) \quad 1\frac{3}{5} + \sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$13) \quad \sqrt{243} - \sqrt{240}$$

$$14) \quad 9m + 8n + 6\sqrt{8mn}$$

$$15) \quad 3x - 1 + 2\sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

8. สมการเลือก

(Irrational Equations)

เลือกในรูปสมการ ไม่แตกต่างอะไรกับสมการธรรมดา เพียงแต่ว่า
เมื่อแก้สมการก็ของลดทอนจนเหลือเป็นชั้น ๆ ไป จนในที่สุดได้ค่าของตัวไม่
ทราบค่า (unknown) ซึ่งไม่ติดเครื่องหมายกรณฑ์

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\sqrt{12x+1} = 7$

วิธีทำ ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้าง $12x+1 = 7^2$

$$12x = 49 - 1$$

$$12x = 48$$

$$\therefore x = 4$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-11} = \sqrt{x-16}$

วิธีทำ $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-11} = \sqrt{x-16}$

ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้าง; $(x+5) + (x-11) - 2\sqrt{(x+5)(x-11)}$
 $= x - 16$

$$x + 10 = 2\sqrt{(x+5)(x-11)}$$

ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้าง; $x^2 + 20x + 100 = 4(x^2 - 6x - 55)$

$$x^2 + 20x + 100 = 4x^2 - 24x - 220$$

$$3x^2 - 44x - 320 = 0$$

$$(3x + 16)(x - 20) = 0$$

$$\therefore x = 20, -\frac{16}{3}$$

(ทดสอบ) ถ้า $x = 20$ เมื่อแทนค่าในสมการเป็นความจริง แต่
เมื่อ $x = -\frac{16}{3}$ ไม่เป็นความจริง ฉะนั้น ค่า x มีได้แต่ค่าเดียว คือ
 $x = 20$ จึงตอบแต่เพียงค่าเดียว

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $x^2 + 6\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 11 + 2x$

วิธีทำ

$$x^2 + 6\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 11 + 2x$$

$$\therefore x^2 - 2x - 11 + 6\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 0 \dots\dots (1)$$

$$\text{สมมติให้ } y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{ยกกำลัง 2 ของ (2)} \quad y^2 = x^2 - 2x + 5 \dots\dots\dots$$

$$y^2 - 5 = x^2 - 2x \dots\dots\dots (3)$$

ใช้ (2) และ (3) แทนค่าใน (1)

$$y^2 - 5 - 11 + 6y = 0$$

$$y^2 + 6y - 16 = 0$$

$$(y + 8)(y - 2) = 0$$

$$\therefore y = 2, -8$$

(แต่ เราสมมติค่า y เฉพาะค่า + จึงใช้ค่า $y = 2$ ค่าเดียว)

แทนค่า y ใน (8)

$$2^2 - 5 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 1$$

หมายเหตุ ต้องทำการทดสอบทุกครั้งเพื่อระไ้ได้ทราบค่าแท้ และคอยเฉพาะค่าที่ใช่ได้เป็นความจริงเท่านั้น

แบบฝึกหัดชุดที่ 7 จ.

จงแก้สมการต่อไปนี้

$$1. \sqrt{3x + 10} = x$$

$$2. \sqrt{2x - 3} - 5 = 0$$

$$3. \sqrt{x + 2} = -3$$

$$4. 2y + 8\sqrt{2y} = 4$$

$$5. 2p = \sqrt{p} + 3$$

$$6. 2a + \sqrt{5 - 2a} = 5$$

$$7. R + \sqrt{7 - R} = 7$$

$$8. \sqrt{a + 2} - \sqrt{a - 3} = 1$$

$$9. \sqrt{2x - 5} + \sqrt{x - 2} = 2$$

$$10. \sqrt{2b + 3} + \sqrt{b + 1} - 5 = 0$$

$$11. \sqrt{8 - x} + \sqrt{x + 2} = 2\sqrt{x + 5}$$

$$12. \sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{x - 1}$$

$$13. \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$14. \frac{6}{x} - \frac{13}{\sqrt{x}} = -6$$

$$15. 2\sqrt{x+1} - 5\sqrt[4]{x+1} + 3 = 0$$

$$16. 3\sqrt{2x-1} + 18\sqrt[4]{2x-1} = 10$$

$$17. 4x + 1 - 2\sqrt{x^2 - 6x + 2} = x^2 - 2x$$

$$18. x^2 + 18 = 8x + 6\sqrt{x^2 - 8x + 9}$$

$$19. (x+1)^2 = 5(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)$$

$$20. 80 - \frac{16x}{5} = 2x^2 - 3\sqrt{5x^2 + 8x - 21}$$



๘ บทที่ 8

ลอการิทึม (Logarithms)

ลอการิทึม เขียนย่อ ๆ ว่า log.

๑. นิยาม ลอการิทึมของเลขจำนวนใด เมื่อกำหนดฐานให้ คือ เลขซึ่งกำลังของฐาน ซึ่งเมื่อฐานยกกำลังแล้ว จะเท่ากับเลขจำนวนนั้น

“log” ไม่เคยอยู่ลอย ๆ แบบในเครื่องหมายคำพูดนั้นเลย จะต้องมีจำนวนเลขจำนวนหนึ่งกำกับมาด้วย และจะต้องมีฐาน ในทศนิยมที่เลขที่กำกับมานั้น เป็นจำนวน N และฐานของ log. นั้น เป็น a. ดังนั้นเขาเขียนเป็นรูป “log_aN”

“log_aN” อ่านว่า log ของจำนวน N. ฐาน a. ตามนิยามว่า

“log_aN” เท่ากับเลขจำนวนหนึ่ง คือ x (1)

แต่ x ทวน เป็นเลขซึ่งกำลังของ a ซึ่งเมื่อ

$$a^x = N \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{ดังนั้น เมื่อ } \log_a N = x \text{ - เมื่อใด เราทราบได้ทันทีว่า}$$

$$a^x = N \text{ เมื่อใด}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ log ของ 1024 เมื่อกำหนดฐานเป็น 4

วิธีทำ ให้ $\log_4 1024 = x$

∴ จากนิยาม $4^x = 1024$

$$2^{2x} = 2^{10}$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$\therefore \log_4 1024 = 5$$

ตัวอย่างที่ 2 $\log$ ของเลขจำนวนใด เมื่อกำหนดฐานเป็น 49 มีค่าเป็น 2 จงหาเลขจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้เลขจำนวนนั้นเป็นจำนวน N .

$$\therefore \log_{49} N = 2$$

$$\text{ตามนิยาม } 49^2 = N$$

$$\therefore N = 2401$$

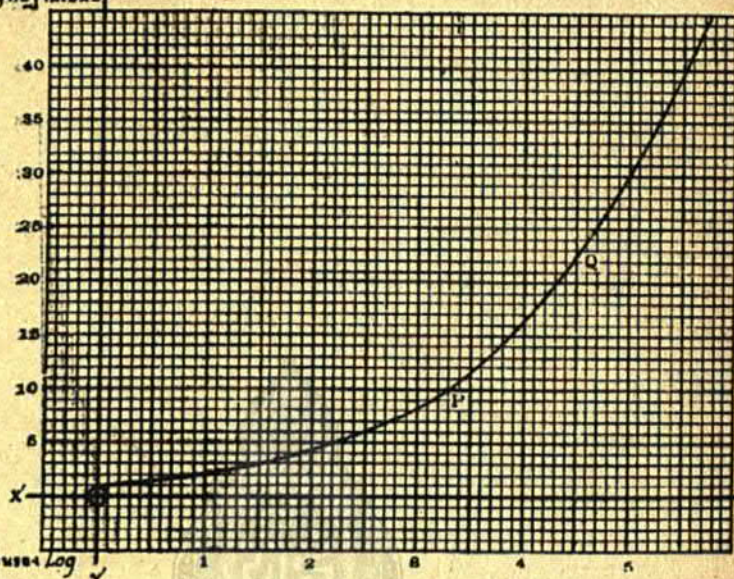
$$\therefore \log_{49} 2401 = 2$$

ตัวอย่าง จงเขียนเป็นกราฟของ $\log_2 y = x$ ใช้สเกลใหญ่ที่สุด หากค่าของ $\log_2 10$, $\log_2 22.9$ ทศนิยม 2 ตำแหน่ง ด้วยวิธีการสเกล 10 นว และ .1 นว คือ 1 หน่วย บนแกน x และ y ตามลำดับจากสมการ $y = 2^x$

$$\text{หรือ } \log_2 y = x$$

x	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
	1	1.41	2	2.82	4	5.65	8	16	32

จำนวนของ Log ที่ขึ้นฐานเป็น 2



ตอบ อ่านจากกราฟ เมื่อ $y = 10$ $x = 3.32$
 ถ้า $y = 22.9$ $x = 4.5$

แบบฝึกหัดชุดที่ 8 ก.

1. จงหาค่าของ log ของ .008 เมื่อฐานเป็น 5
2. จงหาค่าของ log ของ .00001 เมื่อฐานเป็น .01
3. จงหาค่าของ log ของเลขจำนวนต่อไปนี้

เลขจำนวน	27,	.125,	.01,	.8 ,	1000
ฐาน	$\sqrt{3}$	8,	.1,	9,	.001

4. จงหาค่าของ $\log_4 8$, $\log_3 243$, $\log_{.01} 100$ $\log \sqrt[7]{343}$

5. จงหาจำนวนเลขชี้กำลัง ค่าของ $\log$ ของจำนวนเลขนั้น

ฐาน	.1,	.8,	.25,	16,	9,	.1,
เป็น	$\frac{1}{2}$,	-2,	-1,	$-\frac{1}{2}$,	1.5,	-3

2 สูตรของ Logarithm

2.1 $\log$ ของ 1 ทุก ๆ ฐานที่กำหนด มีค่าเป็น 0

พิสูจน์ เนื่องจาก $a^0 = 1$ ฉะนั้น $\log_a 1 = 0$

2.2 $\log$ ของเลขจำนวนใดที่มีฐานเท่ากับตัวของมันเอง มีค่าเป็น 1

พิสูจน์ เนื่องจาก $a^1 = a$ $\therefore \log_a a = 1$

2.3 $\log$ ของผลคูณ เท่ากับผลบวกของ $\log$ ของตัวคูณแต่ละตัว เมื่อ

ฐานเท่ากัน คือ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

พิสูจน์ ให้ $\log_a M = x$ $\therefore M = a^x$

ให้ $\log_a N = y$ $\therefore N = a^y$

$$\therefore MN = a^x \cdot a^y$$

$$MN = a^{x+y}$$

$$\therefore \log_a MN = x+y$$

$$\text{แทนค่า } x \text{ และ } y = \log_a M + \log_a N$$

2.4 $\log$ ของผลหาร เท่ากับผลลบของ $\log$ ของตัวตั้งและตัวหาร เมื่อฐาน

เท่ากัน คือ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

พิสูจน์ ให้ $\log_a M = x \quad \therefore M = a^x$

ให้ $\log_a N = y \quad \therefore N = a^y$

$$\therefore \frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

2.5 $\log$ ของเลขซึ่งยกกำลัง จะเท่ากับเลขชี้กำลังคูณด้วย $\log$ ของเลขจำนวนนั้น

คือ $\log_a M^p = p \log_a M$

พิสูจน์ ให้ $\log_a M = x$

$$M = a^x$$

$$M^p = a^{px}$$

$$\therefore \log_a M^p = px = p \log_a M$$

log สามัญ คือ $\log$ ของเลขจำนวนใด ๆ ซึ่งมีฐานเป็น 10 เช่น $\log_{10} N$ เรียกว่า $\log$ สามัญ หรือ Common log ทั่ว ๆ ไปแล้วมักจะไม่นิยาม แต่ทงไว้ล่อย ๆ เป็น $\log N$ ให้เข้าใจเอาเองว่าฐาน 10

ค่าของ $\log$ ที่ปรากฏมักจะไม่เป็นจำนวนเต็มเสมอไป เช่น $\log_a N = x$; x อาจจะเป็นเลขจำนวนทศนิยม เช่น สมมติ x เป็น 1.845 เป็นคนเลขจำนวนเต็มหน้าทศนิยม เราเรียกว่า characteristic (แคแรคเทอริสติก) และเลขหลังจุดทศนิยม เราเรียกว่า Mantissa ตามหลักทั่ว ๆ ไปแล้ว

characteristic จะเป็น + หรือ - ก็ได้ แต่ Mantissa ต้องมีจำนวน
บวกเสมอ

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\log$ ของ 248 ฐาน 9

วิธีทำ

$$\text{ให้ } \log_9 248 = x$$

$$248 = 9^x$$

$$9^5 = 9^{2x}$$

$$2x = 5$$

$$x = 2.5$$

ดังนั้น

$$\log_9 248 = 2.5$$

มี

characteristic เป็น 2 Mantissa เป็น .5

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ Mantissa และ Characteristic ของ

$$\log_9 \frac{1}{248}$$

วิธีทำ

$$\log_9 \frac{1}{248} = x$$

$$\frac{1}{248} = 9^x$$

$$\frac{1}{9^5} = 9^{2x}$$

$$9^{-5} = 9^{2x}$$

$$2x = -5$$

$$x = -2.5$$

ดังนั้น ทำ Mantissa เป็น + ให้ $x = -2 - .5 + 1 - 1 = -3 + .5$

Characteristic เป็น - 3 Mantissa เป็น .5

เขียนรวม $\log_9 \frac{1}{243} = \bar{3}.5$

(เครื่องหมาย $\bar{3}$ หมายความว่า 3 ตัวเคียวเท่านั้นเป็น -)

วิธานแคแรคเทอริสติกของ $\log$ สามัญ

เนื่องจาก $10^1 = 10 \therefore \log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100 \therefore \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000 \therefore \log_{10} 1000 = 3$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = .1 \therefore \log_{10} .1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = .01 \therefore \log_{10} .01 = -2$

ดังนั้น ก. เมื่อต้องการทราบค่าของ $\log_{10} 175$ คือ Characteristic

โดยที่

$100 < 175 < 1000$

$10^2 < 175 < 10^3$

$\log 10^2 < \log 175 < \log 10^3$

$2 < \log 175 < 3$

ค่าของ $\log 175$ อยู่ระหว่าง 2 และ 3 คือ มากกว่า 2 ขึ้นไป แต่ยังไม่ถึง 3

ดังนั้น $\log 175$ มีค่า 2 + (ทศนิยม) คือ $\log 175$ มี Characteristic เป็น 2

๔
ข. เมฆาคาของ $\log 17.5$

$$10 < 17.5 < 100$$

$$10^1 < 17.5 < 10^2$$

$$\log 10 < \log 17.5 < \log 10^2$$

$$1 < \log 17.5 < 2$$

๕
ฉะนั้น Characteristic ของค่า $\log 17.5$ เป็น 1

๔
ค. เมฆาคาของ $\log .0175$

$$.01 < .0175 < .1$$

$$10^{-2} < .0175 < 10^{-1}$$

$$\log .01 < \log .0175 < \log .1$$

$$-2 < \log .0175 < -1$$

๕
ฉะนั้น ค่าของ $\log .0175$ มากกว่า -2 ขึ้นไป แต่ยังไม่ถึง -1

$\log .0175 = -2 +$ (ทศนิยม) ฉะนั้น Characteristic เป็น -2

๘. วิธีหา Mantissa

๔
วิธีหา Mantissa นั้น คำนวณตารางของ logarithm ตารางที่ใช้กัน
โดยมากใช้สำหรับนักเรียนชั้นน้อย 4 ตำแหน่งเท่านั้น และนักเรียนจะคง
จำไว้ว่า $\log$ ของเลขซึ่งมีตัวเลขเหมือนกัน Mantissa เท่ากัน ทั้งนี้

เพราะจำนวนเลขที่เหมือนกันจะเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนหลัก 100 หรือ 1000
 อย่างไรก็ดีโดยทั่วไป 10 คูณเข้ากับหลักหน่วย ซึ่งทำให้ค่า $\log$ เปลี่ยน
 แปรแต่เพียงแค่ว่าตัวเศษ (Characteristic) เท่านั้น เช่น $\log 6.682 =$
 0.8249

$$\begin{aligned}\log 66.82 &= \log (10 \times 6.682) = \log 10 + \log 6.682 \\ &= 1 + 0.8249 = 1.8249\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 668.2 &= \log (10^2 \times 6.682) = 2 \log 10 + \log 6.682 \\ &= 2 + 0.8249 = 2.8249\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log .6682 &= \log (10^{-1} \times 6.682) = -1 \log 10 + \log 6.682 \\ &= \bar{1} + 0.8249 = \bar{1}.8249\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log .06682 &= \log (10^{-2} \times 6.682) \\ &= -2 \log 10 + \log 6.682 \\ &= \bar{2}.8249\end{aligned}$$

4. การใช้ตาราง logarithms

การเปิดหา Mantissa จากตาราง $\log$ นั้น นิยมใช้ตัวเลขทั้งหมด
 (ทั้งจำนวนเต็มและทศนิยมปนกัน) ตั้งต้นแต่ตัวเลขนำหน้าที่ไม่ใช่ 0 ไม่ต้อง
 ว่าเป็นเลขตำแหน่งหลักคั่นยี่สิบหรือหลักทศนิยม เช่น $\log 66.82$ หรือ $\log$
 668.2 หรือ $\log 6.682$ หรือ $\log .06682$
 ดูจากตารางดังนี้

No	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8252	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8227	8298	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	4	5	6

ดูที่ช่อง No. ตรงตัวเลข 66 หมายถึง 2 ตัวแรกของ 6682 เลข
 ทศ 8 เป็น 8 ดูตรงช่องบนของตารางตรงกึ่งเลข 8 คูณลงมาตรง
 บรรทัดเคียวกย 66 จะเห็นเป็นเลข 8248 ตำแหน่งที่ 4 เป็นเลข 2 คูณ
 ของตารางขวามือตรงเลข 2 ช่องเล็ก ช่องที่ 1 บรรทัดเคียวกยเลข 66 จะ
 พบตัว 1 เอา 1 ที่ไปรวมกับ 8248 ได้ผลเป็น 8249 แสดงว่า Mantissa
 เป็น .8249

การที่จะรู้หลักความแตกต่างของ $\log$ ของเลขต่าง ๆ กัน ดูที่ Characteristic ตามวิชาแคลคูลัสคิก ก็นั้น

$$100 < 668.2 < 1000$$

$$\text{ฉะนั้น } \log 100 < \log 668.2 < \log 1000$$

$$2 < \log 668.2 < 3$$

$$\text{ฉะนั้น } \log 668.2 = 2.8249$$

$$\log 66.82 = 1.8249$$

$$\log 6.682 = 0.8249$$

$$\log .06682 = \bar{2} . 8249$$

การหา Antilog เมื่อต้องการรู้ว่าจำนวน $\log$ นั้น คือ จำนวนเลข

อะไร เช่น $\log_a N = x$ ฉะนั้น เมื่อใด $x = 2.8249$ จะต้องการทราบ

จำนวน N ว่าเป็นเท่าไร ต้องไปใช้ตาราง Antilog จะทราบว่า $N = 668.2$

สรุปได้ว่าการใส่ Characteristic ให้นับจำนวนหลักของเลขจำนวน

เต็มหน้าทศนิยมแล้วหักเสีย 1 ได้ Characteristic 2 $\log 668.2 =$

2.8249 $\log 66.82 = 1.8249$ ถ้าเลขนั้นเป็นจำนวนทศนิยมทงน

Characteristic จะต้องเป็น — ให้สังเกตดูว่า ตัวเลขตัวหน้าออกจาก 0
 อยุ่หลังทศนิยมเป็นตำแหน่งที่เท่าไร ต้องได้ Characteristic เป็น — เท่านั้น
 เช่น $\log .06882$ ตัว 6 อยุ่หลังทศนิยมเป็นตำแหน่งที่ 2 ต้องได้ Characteristic 2 และ $\log .006882 = \bar{3}.8249$

การเบิกตาราง Anti-logarithms คู่กับ Mantissa คือ เลขหลังทศ
 ทศนิยม เช่น $\log N = 1.2459$ คู่ของแรก (ซึ่ง $\log$) บรรทัดทศนิยม
 .24 ตัวที่ 8 ของ .2459 เป็นเลข 5 คูณบอกของตารางตรงกับเลข 5 ซึ่ง
 เกยวณบนบรรทัดที่ 24 จะพบ 1758 ตัวที่ 4 เป็นเลข 9 คูณบอก
 ตารางซึ่งใหญ่สุดท้ายตรงกับเลข 9 บรรทัดที่ 24 เห็นเป็นจำนวน
 เลข 4 เอาเลข 4 นี้ไปเพิ่มท้าย 1758 + 4 เป็น 1762 กัน

Anti-logarithms

ตำแหน่งที่ 3

ตำแหน่งที่ 4

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional parts		
											123	456	789
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	011	222	334
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	011	222	334
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	011	222	334

การทราบว่า N ควบ เป็นจำนวนเต็มเท่าใด และมีทศนิยมอยู่ตรง
 ใดของทศ Characteristic ในทศ Characteristic เป็น 1 ฉะนั้นแสดง
 ว่า มีเลขหน้าทศนิยม 2 ตำแหน่ง หรือเป็นเลขจำนวนเต็ม 2 หลัก

$$\log N = 1.2459$$

เปิด Antilog คือ Mantissa .2459 ให้ 1762

$$\text{ทราบว่า } N = 17.62$$

$$\text{ถ้า } \log N = 3.2459$$

เปิด Antilog วิชาเดียวกัน ทราบว่า $N = 1762$ มีเลขจำนวนเต็ม 4 ตัว

$$\text{ถ้า } \log N = 2.2459$$

เปิด Antilog ทราบว่า $N = .01762$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\frac{2.31 \times .037 \times 1.43}{.0561 \times 3.87 \times 0.0019}$ โดยวิธีใช้ log

$$\text{วิธีทำ ให้ } x = \frac{2.31 \times .037 \times 1.43}{.0561 \times 3.87 \times 0.0019}$$

$$\text{ฉะนั้น } \log x = \log \frac{2.31 \times .037 \times 1.43}{.0561 \times 3.87 \times 0.0019}$$

$$\therefore = \log 2.31 + \log .037 + \log 1.43 - \log .0561 \\ - \log 3.87 - \log 0.0019$$

$$= 0.3636 + 2.5682 + 0.1553 -$$

$$2.7490 - 0.5877 - 3.2788$$

$$= 2.4716$$

เปิด Antilog ทราบว่า

$$x = 296.2$$

ตัวอย่าง เลขจำนวนเต็มทศนิยมจะมีเครื่องหมาย Charac-
teristic เป็น 8 เมื่อเลขจำนวนนั้น ๆ เป็น logฐาน 7

วิธีทำ สมมติให้

$$\begin{aligned} \log_7 N &= 3 \\ N &= 7^3 \end{aligned}$$

สมมติให้

$$\begin{aligned} \log_7 M &= 4 \\ \therefore M &= 7^4 \end{aligned}$$

ฉะนั้น เลขทุก ๆ จำนวนซึ่งอยู่ระหว่าง 7^3 และ 7^4 จึงเป็นเลขซึ่งจะมี Characteristic เป็น 3 เมื่อเป็น $\log$ ฐาน 7 จึงมีได้

$$7^4 - 7^3 = 2058 \text{ จำนวน}$$

5. การเปลี่ยนฐาน $\log$ จากฐานเดิมให้เป็นฐานอื่น

ใช้ประโยชน์สำหรับเปลี่ยนให้เป็นฐาน 10 ซึ่งใช้ตาราง

logarithm ได้ สมมติให้เปลี่ยน $\log_b M$ เป็นฐาน a

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \log_b M &= x \\ \therefore M &= b^x \\ \log_a M &= \log_a b^x \\ &= x \log_a b \\ \therefore x &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \\ \therefore \log_b M &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง รหาค่าของ

$$\begin{aligned} \log_{12} 275 &= \frac{\log_{10} 275}{\log_{10} 12} = \frac{2.4393}{1.0792} \\ &= 2.26 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 8 ข.

1. จงหา Characteristics ของ

$\log$ ของ 329, 1504, 2408, 1006, 12

เมือฐาน 3, 11, 7, 9, 19

2. จงหา Characteristics ของ $\log$ สามัญ ของ

2.26, 625.1, .0325, .00001, 35951, .01,

3. ถ้า Mantissa ของ $\log$ 6448 เป็น .8091 จงหาค่าของ

$\log$ ของ 1.6448, .06448, .006448, 64.48, 644.8

4. ถ้า $\log 32.5 = 1.51188$ จงหาจำนวนเลข ซึ่งมี $\log$ ของเลขนั้น ๆ เป็น

2.51188, $\overline{1.51188}$, $\overline{2.51188}$, $\overline{3.51188}$, 3.51188

5. จงหาค่าของ $\log \frac{15}{4} + \log \frac{2}{3} - \log \frac{1}{160}$

6. จงหารากกำลังที่ 7 ของ 9

กำหนด $\log 3 = .4771$ และ $\log 1.369 = 0.1363$

7. จงหาค่าของ $\frac{2.38 \times 3.901}{4.83}$ และ $\frac{925.9 \times 1.597}{740.3}$

8. จงอ่านค่าจากตาราง logarithms ของ

3.45, 54.6, 6847, 6.847×10^3 , $.0345 \times 10^2$

9. จงอ่านค่าจากตาราง antilog หาจำนวนเต็ม เมื่อดูการทศของเลขจำนวนนั้น มีค่าเป็น 2.732, $\overline{3.127}$, 0.6425, $\overline{1.4845}$, $\overline{5.2346}$,

10. จงหาค่าของ

1. 24.32×6.185

2. $396.4 \times .00017$

3. $\frac{3.8 \times 5.69}{10.78}$

4. $\frac{2.803}{.0634 \times 4.185}$

5. $24.87 \times \frac{39.4}{89.7}$

6. $\frac{7.859}{45.28}$ จง 30.1

7. $\sqrt[6]{.489} \times \frac{3.2}{4.7}$

8. $\log_{24} 475$ and $\log_{8.95} 12.45$

9. $\log_{.02} \sqrt{148}$ and $\log_3 12 \times \log_{12} 8$

10. $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$

6. สมการซึ่งมีจำนวนตัวแปรค่าเป็นเลขชี้กำลัง

Exponential Equations

สมการชนิดนี้ ตัวแปรของการทรายนามัน กลายเป็นเลขชี้

กำลังในสมการไปและการถอดสมการชนิดนี้ ต้องใช้ $\log$ เข้าช่วยจึงจะได้

ตัวอย่าง 1 จงถอดสมการ $5^x = 2^{-y}$ และ $5^{2+y} = 2^{2-x}$

ต้องการเทคนิคเพียง 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ $5^x = 2^{-y}$

ดังนั้น $\log 5^x = \log 2^{-y}$

$x \log 5 = -y \log 2$

$$x = -y \frac{\log 2}{\log 5} \dots \dots \dots (1)$$

$$5^{2+y} = 2^{2-x}$$

$$\log 5^{2+y} = \log 2^{2-x}$$

$$(2+y) \log 5 = (2-x) \log 2$$

$$2 \log 5 + y \log 5 = 2 \log 2 - x \log 2$$

$$y \log 5 + x \log 2 = -2 (\log 5 - \log 2)$$

แก้ค่าของ x ใน (1) แทน

$$y \log 5 - y \frac{\log 2}{\log 5} \times \log 2 = -2 (\log 5 - \log 2)$$

$$y [(\log 5)^2 - (\log 2)^2] = -2 \log 5 (\log 5 - \log 2)$$

$$y (\log 5 - \log 2) (\log 5 + \log 2) = -2 \log 5 (\log 5 - \log 2)$$

$$y (\log 5 + \log 2) = -2 \log 5$$

$$y \log 10 = -2 \log 5$$

$$y = -2 \log 5$$

$$= -2 \times 0.6990$$

$$= -1.3980$$

$$x = -y \frac{\log 2}{\log 5}$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน } x = -(-2 \log 5) \times \frac{\log 2}{\log 5} = 2 \log 2$$

$$= 2 \times 0.3010$$

$$x = 0.6020$$

$$\underline{\text{ตอบ}} \quad x = .60, \quad y = -1.40$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\log 2 = .3010$ จงหาค่าสมการต่อไปนี้

$$2^x \cdot 5^y = 1 \text{ and } 5^{x+1} \cdot 2^y = 2$$

ให้ $\log$ เข้าช่วยได้

$$x \log 2 + y \log 5 = 0$$

$$(x+1) \log 5 + y \log 2 = \log 2$$

สมการทั้งสองเพื่อไม่เปลืองบรรทัดเขียน สมมติให้ $\log 2$

$$= a, \log 5 = b.$$

$$ax + by = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$b(x+1) + ay = a \dots\dots\dots$$

$$bx + ay = a - b \dots\dots\dots (2)$$

เอา $a \times (1)$ ได้

$$a^2x + aby = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{เอา } b \times (2) \quad b^2x + aby = ab - b^2 \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (3) - (a^2 - b^2)x = b(a - b)$$

$$x = -\frac{b}{a+b}$$

$$= -\frac{\log 5}{\log 2 + \log 5} = -\log 5$$

$$-\log 5 = -\log 10 + \log 2 = -1 + .3010 = -.6990$$

$$x = -.6990$$

จากสมการ (1)

$$y = -\frac{ax}{b} = -\frac{a}{b} (-\log 5)$$

$$= \frac{a}{b} \log 5$$

$$= \frac{\log 2}{\log 5} \cdot \log 5$$

$$= \log 2 = .3010$$

ตอบ $x = -.6990$ $y = .3010$

แบบฝึกหัดชุดที่ 8 ค.

จงลดสมการต่อไปนี้.—

กำหนด $\log 2 = .3010$

$\log 3 = .4771$

$\log 7 = .8451$

1. $2^{x-1} = 5$

2. $8^{x-4} = 7$

3. $5^{1-x} = 6^{x-3}$

4. $2^x = 9^y$ และ $2^{y+1} = 8^{x-1}$

5. $8^{5-3x} = 12^{4-2x}$

6. $2^x \cdot 9^{x+4} = 7^x$

7. $2^{2x+1} \cdot 8^{2x+2} = 7^{4x}$

8. $\frac{7^{2x}}{2^{x-4}} = 9^{3x-7}$

9. $7^{x+y} = 9$, $8^{2x+y} = 1$

10. กำหนด $\log 27 = a$, $\log 56 = b$, $\log 15 = c$
 จงหาค่าของ $\log 28$ and $\log 21$ ในเทอมของ a , b , c .
11. กำหนด $\log 36 = a$, $\log 66 = b$,
 $\log 2 = c$ จงหา $\log 242$ ในเทอมของ a , b , c .
12. แก่สมการ $3^{x+2} \cdot 7^{y-1} = 8$, $3^y \cdot 7^{x+1} = 7$



บทที่ 9

Undetermined Coefficients

หลักสำคัญของ Undetermined Coefficients คือการสมมติค่าของ
 สัมประสิทธิ์ใน Rational Integral Functions (คือฟังก์ชันที่มีเลข
 ชาติกำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มและเป็นบวกและเลขเรียงกัน) ให้เป็นไป
 ตามรูปที่ของการ เช่น เมื่อต้องการจะแยก $x^2 - 3x + 2$ ออกเป็นตัวประกอบ
 ง่ายสมมติให้ $(x + a), (x + b)$ เป็นตัวประกอบ เมื่อคูณกันแล้วเป็น $x^2 + (a+b)x$
 $+ ab$ ตัว a และ b เป็น Undetermined Coefficients หลักการของ
 Undetermined Coefficients

คือการหาค่าของ Undetermined Coefficients โดยการเทียบ
 สัมประสิทธิ์ของ ตัวแปรที่มีกำลังเหมือนกัน ใน ฟังก์ชัน ที่มีค่าเท่ากัน เสมอ
 (ฟังก์ชันที่เป็นเอกลักษณ์)

ข้อควรจำเกี่ยวกับเรื่องการหา Undetermined Coefficients

1. ถ้ามีส่วนควรทำให้ส่วนหมดไป โดยเอา ค.ร.น. คูณ
 ฟังก์ชันซึ่งเป็นเอกลักษณ์จนตลอด
2. ทำทั้ง 2 ให้ เรียบร้อย เหมือนกัน โดยเป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปร
 มีกำลังลดหลั่นกันอย่างเป็นระเบียบ
3. เอาสัมประสิทธิ์ (ส.ป.ส.) ของจำนวนตัวแปรที่มีเลขกำลัง
 เหมือนกันของทั้ง 2 ฟังก์ชันมาเทียบ เท่ากัน ถ้าหากฟังก์ชัน
 หนึ่งไม่มีก็ให้ถือว่า ส.ป.ส. เท่ากับ 0
4. จำนวนใดที่ยังไม่ทราบค่าแน่นอน ก็สมมติตัวอักษรแทน แต่
 ต้องสมมติให้ เรียงตามลำดับเลขกำลัง
5. แก้สมการหาค่าตัว อักษรที่สมมติ ขึ้น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า k, m, n จากเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$3x^2 - 7x - 3 = k(x+2)(x-3) + m(2x-7) + n$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7x - 3 &= k(x+2)(x-3) + m(2x-7) + n \\ &= k(x^2 - x - 6) + m(2x-7) + n \\ &= kx^2 - kx - 6k + 2mx - 7m + n \\ &= kx^2 - (k-2m)x - 6k - 7m + n \end{aligned}$$

ตามหลักของ Undetermined Coefficients (คือนำเอา ส.ป.ส. ของ

ตัวแปรที่มีกำลังเท่ากันมาเทียบเท่ากัน)

$$k = 3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-(k-2m) = -7 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$-6k - 7m + n = -3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

แทนค่า k ใน (2) $-3 + 2m = -7$

$$m = -2$$

แทนค่า k, m ใน (3) $-18 + 14 + n = -3$

$$k = 3, m = -2, n = 1 \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

อย่าลืม! เมื่อแทนค่า k, m, n ทางขวามือ แล้วขยายออกไป ก็จะได้
ผลลัพธ์ตรงกับทางซ้ายมือ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า A และ B จากเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\frac{7x-10}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-2}$$

$$\text{๑๔๐} \quad \text{วิธีที่ ๑} \quad \frac{7x-10}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-2}$$

1๒๗ $(x+2)(3x-2)$ คูณตลอด

$$7x-10 = A(3x-2) + B(x+2)$$

$$\text{๑๔๑} \quad \text{วิธีที่ II.} \quad 7x-10 = 3Ax-2A+Bx+2B$$

$$= (3A+B)x - 2A+2B$$

ตามหลักของ Undetermined Coefficients (คือนำเอา ส.ป.ส. ของ

ตัวแปรพหุนามมาเทียบเท่ากัน)

$$3A+B = 7 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-2A+2B = -10 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{จาก (2)} \quad A-B = 5 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) + (3) \quad 4A = 12$$

$$A = 3$$

$$\text{แทนค่า A ใน (3)} \quad 3-B = 5$$

$$B = -2$$

$$\therefore \frac{7x-10}{(x+2)(3x-2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{3x-2} \quad \text{ตอบ}$$

$$\text{๑๔๑} \quad \text{วิธีที่ II.} \quad 7x-10 = A(3x-2) + B(x+2)$$

$$\text{ถ้า } x = -2, -14-10 = A(-6-2)$$

$$-24 = -8A$$

$$A = 3$$

$$\text{ถ้า } x = \frac{2}{3}, \quad \frac{14}{3} - 10 = B\left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

$$\frac{-16}{3} = \frac{8}{3} B$$

$$B = \frac{-16}{3} \times \frac{3}{8} = -2$$

$$\frac{7x-10}{(x+2)(3x-2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{3x-2} \quad \text{ตอบ}$$

คำอธิบาย วิธีที่ 1 นี้ใช้หลัก Undetermined Coefficients โดยนำเอา
ส.ป.ส. ของพจน์ ที่เหมือนกันมาเท่ากัน จะได้รูปเป็นสมการ
กำลังสองของ A กับ B แล้วหาค่า A, B

ส่วนวิธีที่ 2 นั้น เนื่องจากฟังก์ชันทั้งซ้ายและขวาเท่ากันทุกค่าของ x
จึงหาค่า x ที่จะทำให้ ส.ป.ส. ของ B เป็น 0 ก็จะได้ $x = -2$ เมื่อเอา
 -2 ไปแทน x ก็จะได้ค่า A ต่อมาหาค่า x ที่จะทำให้ ส.ป.ส. ของ A
เป็น 0 บ้าง ก็จะได้ $\frac{2}{3}$ เมื่อเอา $\frac{2}{3}$ ไปแทน x ก็จะได้ค่า B

ตัวอย่างที่ 8 หาค่า A, B, C จากเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\frac{3x-93}{x^3-21x+20} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+5}$$

$$\text{วิธีทำ } \frac{3x-93}{x^3-21x+20} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+5}$$

$$x^3-21x+20 = (x-1)(x-4)(x+5)$$

$$\text{เอา } (x-1)(x-4)(x+5) \text{ คูณตลอด}$$

$$3x-93 = A(x-4)(x+5) + B(x-1)(x+5) + C$$

$$(x-1)(x-4)$$

๓๔๔

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีที่ 1. } 3x - 98 &= A(x^2 + x - 20) + B(x^2 + 4x - 5) + \\
 &\quad C(x^2 - 5x + 4) \\
 &= Ax^2 + Ax - 20A + Bx^2 + 4Bx - 5B + Cx^2 \\
 &\quad - 5Cx + 4C \\
 &= (A+B+C)x^2 + (A+4B-5C)x - 20A \\
 &\quad - 5B + 4C
 \end{aligned}$$

การหาค่าของ Undetermined Coefficients (การหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า)
 ด้วยการเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่เหมือนกัน

$$\begin{aligned}
 A+B+C &= 0 \dots\dots\dots (1) \\
 A+4B-5C &= 3 \dots\dots\dots (2) \\
 -20A-5B+4C &= -98 \dots\dots\dots (3) \\
 (2)-(1) \quad 3B-6C &= 3 \\
 B-2C &= 1 \dots\dots\dots (4) \\
 (1) \times 20, \quad 20A+20B+20C &= 0 \dots\dots\dots (5) \\
 (3) + (5), \quad 15B+24C &= -98 \\
 5B+8C &= -31 \dots\dots\dots (6) \\
 (4) \times 5, \quad 5B-10C &= 5 \dots\dots\dots (7) \\
 (6) - (7), \quad 18C &= -36
 \end{aligned}$$

$$C = -2$$

แทนค่า c ใน (4), $B + 4 = 1$

$$B = -3$$

แทนค่า B, C ใน (1), $A - 3 - 2 = 0$

$$A = 5$$

$$\frac{3x-93}{x^3-21x+20} = \frac{5}{x-1} - \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+5} \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

วิธี 2. $3x - 93 = A(x-4)(x+5) + B(x-1)(x+5) + c(x-1)(x-4)$

เมื่อ $x = 4, 12 - 93 = B(4-1)(4+5)$

$$-81 = 27B$$

$$B = -3$$

เมื่อ $x = -5, -15 - 93 = C(-5-1)(-5-4)$

$$-108 = 54C$$

$$C = -2$$

เมื่อ $x = 1, 3 - 93 = A(1-4)(1+5)$

$$-90 = -18A$$

$$A = 5$$

$$\frac{3x-93}{x^3-21x+20} = \frac{5}{x-1} - \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+5} \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ก.

จงหาค่า A และ B จากเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$1. \quad \frac{5x-18}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$$

$$2. \quad \frac{4}{(x-5)(x-6)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x-5}$$

$$3. \quad \frac{4x+25}{x^2-5x-6} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+1}$$

จงหาค่า A, B, C จากเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$4. \quad 2x^2-4x+14 = A(x^2+1) + B(x+1)(x-1) + C(2x-3)$$

$$5. \quad A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1)^2 = 2x(2x-6)$$

$$6. \quad \frac{6x^2-26x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$7. \quad \frac{6x+52}{(x+2)(3-x)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+4}$$

$$8. \quad \frac{7x^2-4x-5}{(2x-3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$9. \quad \frac{24x}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$10. \quad \frac{4x+23}{x^3+3x^2-10x-24} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเปลี่ยน $8x^3-2x-4$ ให้เป็นรูป Integral Function ของ

$$2x+1$$

วิธี
ทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } 8x^3 - 2x - 4 &\equiv k(2x+1)^3 + m(2x+1)^2 + n(2x+1) + p \\
 &\equiv k(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) + m(4x^2 + 4x + 1) \\
 &\quad + n(2x + 1) + p \\
 &\equiv 8kx^3 + 12kx^2 + 6kx + k + 4mx^2 + 4mx + m + 2nx \\
 &\quad + n + p \\
 &\equiv 8kx^3 + (12k + 4m)x^2 + (6k + 4m + 2n)x + k \\
 &\quad + m + n + p
 \end{aligned}$$

ตามหลักของ Undetermined Coefficients

(คือนำเอา ส.ป.ส.

ของตัวแปรที่มีกำลังเท่ากันมาเทียบเท่ากัน)

$$\begin{aligned}
 8k &= 8 & \dots\dots\dots (1) \\
 12k + 4m &= 0 & \dots\dots\dots (2) \\
 6k + 4m + 2n &= -2 & \dots\dots\dots (3) \\
 k + m + n + p &= -4 & \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

จาก (1)

$$k = 1$$

แทนค่า k ใน (2),

$$12 + 4m = 0$$

$$m = -3$$

แทนค่า k, m ใน (3), $6 - 12 + 2n = -2$

$$2n = 4$$

$$n = 2$$

แทนค่า k, m, n ใน (4), $1 - 3 + 2 + p = -4$

$$p = -4$$

$$8x^3 - 2x - 4 \equiv (2x+1)^3 - 3(2x+1)^2 + 2(2x+1) - 4 \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

คำอธิบาย จะไม่สมมติ k ก็ได้ เพราะว่า $(2x+1)^3 = 8x^3 + \dots$
 และไม่มี x^3 ที่ไหนอีกแล้ว ดังนั้น k ต้อง $= 1$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกออกเป็นตัวประกอบ

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 7x + y + 8$$

วิธีทำ $\therefore 2x^2 - 3xy - 2y^2 = (x - 2y)(2x + y)$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 7x + y + 8 &\equiv \{(x - 2y) + m\} \{(2x + y) + n\} \\ &\equiv 2x^2 - 3xy - 2y^2 + m(2x + y) \\ &\quad + n(x - 2y) + mn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เหลือ } 7x + y + 8 &\equiv 2mx + my + nx - 2ny + mn \\ &\equiv (2m + n)x + (m - 2n)y + mn \end{aligned}$$

ตามหลักของ Undetermined Coefficients (คือนำเอา ส.ป.ส.
 ของตัวแปรที่มีกำลังเท่ากันมาเทียบเท่ากัน)

$$2m + n = 7 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$m - 2n = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$mn = 8 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) \times 2, \quad 4m + 2n = 14 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (2), \quad 5m = 15$$

$$m = 3$$

แทนค่า m ใน (1), $6 + n = 7$

$$n = 1$$

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 7x + y + 8 \equiv (x-2y+3)(2x+y+1) \text{ ตอบ}$$

คำอธิบาย ใช้เพียง 2 สมการก็หาค่าได้แล้ว ส่วนสมการที่ 3 เอาไว้
ตรวจสอบผลลัพธ์ (คือเมื่อได้ค่า m และ n แล้วนำมาคูณกัน
ของได้ -15 จึงจะถูก)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ k ซึ่งทำให้ $10x^2 + 21xy - 10y^2 - 11x$
 $+ 45y - k$ แยกออกเป็นตัวประกอบได้

$$\text{วิธีทำ } \therefore 10x^2 + 21xy - 10y^2 = (5x - 2y)(2x + 5y)$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } 10x^2 + 21xy - 10y^2 - 11x + 45y + k &\equiv \{(5x - 2y) + m\} \\ &\quad \{(2x + 5y) + n\} \\ &\equiv 10x^2 + 21xy - 10y^2 \\ &\quad + m(2x + 5y) + n(5x - 2y) + mn \\ \text{เหลือ } -11x + 45y + k &\equiv 2mx + 5my + 5nx - 2ny \\ &\quad + mn \\ &\equiv (2m + 5n)x + (5m - 2n)y \\ &\quad + mn \end{aligned}$$

คามหลักของ Undetermined Coefficients

$$2m + 5n = -11 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$5m - 2n = 45 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$mn = k \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) \times 5, \quad 10m + 25n \quad = -55 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(2) \times 2, \quad 10m - 4n \quad = 90 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$(4) - (5), \quad 29n \quad = -145$$

$$n \quad = -5$$

$$\text{แทนค่า } n \text{ ใน } (1), \quad 2m - 25 \quad = -11$$

$$2m \quad = 14$$

$$m \quad = 7$$

$$-35 \quad = k$$

ตอบ

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ข.

1. จงแปลง $2x^2 - x + 2$ ให้เป็นรูป $A + B(x-2) + C(x-1)(x+1)$
2. จงแปลง $3y^3 - 7y - 5$ ให้เป็น (Integral Function ของ $(y+1)$)
3. จงแปลง $16y^3 - 24y^2 - 8y$ ให้เป็น Integral Function ของ $2y-1$
4. จงแปลง $5z^3 - 28z^2 + 42z - 12$ ให้เป็น Integral Function ของ $(z-2)$

จงแยกออกเป็นตัวประกอบ

$$5. \quad 6x^2 + xy - y^2 - 8x + 6y - 40$$

$$6. \quad 6x^2 - xy - 2y^2 + 12x - 15y - 18$$

$$7. \quad 5x^2 - 17xy - 12y^2 + 29x - 24y + 36$$

จงหาค่า k ซึ่งทำให้ functions ต่อไปนี้แยกตัวประกอบได้

8. $2x^2 - 9xy - 5y^2 + 14x + 18y + k$

9. $6x^2 - 7xy - 3y^2 - 26x + 17y + k$

10. $12x^2 + 7xy - 12y^2 + 2x - 39y + k$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาราก(หรือกรณ)ที่ 2 ของ $4x^8 - 4x^7 + 9x^6 - 4x^5 - 12x^4$
 $+ 8x^3 - 16x^2 + 16$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} 4x^8 - 4x^7 + 9x^6 - 4x^5 - 12x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16 &= (2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)^2 \\ &= 4x^8 + 4ax^7 + (a^2 + 4b)x^6 + \\ &\quad (4c + 2ab)x^5 + (b^2 + 4d + \\ &\quad 2ac)x^4 + \dots \end{aligned}$$

เอา ส.ป.ส. มาเท่ากัน $4a = -4 \dots \dots \dots (1)$

$a^2 + 4b = 9 \dots \dots \dots (2)$

$4c + 2ab = -4 \dots \dots \dots (2)$

$b^2 + 4d + 2ac = -12 \dots \dots \dots (4)$

จาก (1), $a = -1$

แทนค่า a ใน (2) $1 + 4b = 9$

$b = 2$

แทนค่า a, b ใน (3) $4c - 4 = -4$

$c = 0$

แทนค่า a, b, c ใน (4), $4 + 4d + 0 = -12$

$$d = -4$$

รากที่ 2 ของการคือ $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 4$ ตอบ

คำอธิบาย สมมติแค่ตัว d คงนบนเมอชยายไป มีตัว d อยู่ด้วยก็พอแล้ว
ไม่ต้องชยายต่อไปอีก (ก็แค่ x^4)

ตัวอย่างที่ 8 จงหาราก(หรือกรณ)ที่ 8 ของ $27x^6 - 27x^5 - 126x^4 + 89x^3 + 210x^2 - 75x - 125$

วิธีทำ วิธีที่ I ให้ $27x^6 - 27x^5 - 126x^4 + 89x^3 + 210x^2 - 75x - 125 = (3x^2 + mx - 5)^3$

$$\begin{aligned} &= \{3x^2 + (mx - 5)\}^3 \\ &= (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(mx - 5) + \dots \\ &= 27x^6 + 27mx^5 + \dots \end{aligned}$$

นำเอา ส.ป.ส. มาเท่ากัน $27m = -27$

$$m = -1$$

กรณที่ 8 ของการคือ $3x^2 - x - 5$ ตอบ

คำอธิบาย เราสมมติก็หรวตัว m ชนเพียงตัวเดียว (เพราะว่าตัวต้นและ
ตัวท้าย เราทราบแน่แล้วว่ต้องเป็น $3x^2$ กับ -5 คงนบนก็
ชยายออกไปเพียงทมตัว m ก็พอแล้ว ไม่ต้องชยายออกไปหมค

วิธี II. ให้ $27x^6 - 27x^5 - 126x^4 + 89x^3 + 210x^2 - 75x - 125 = (3x^2 + mx - 5)^3$

$$\text{เมื่อ } x=1, 27 - 27 - 126 + 89 + 210 - 75 - 125 = (3+m-5)^3$$

$$-27 = (m-2)^3$$

$$-3 = m-2$$

$$-1 = m$$

ราก(หรือกรณ)ที่ 3 ของการคือ $3x^2 - x - 5$ ตอบ

คำอธิบาย ให้ x มีค่าเท่าไรก็ได้ แต่เท่ากับ 1 ก็ที่สุดเพราะคุณเลขน้อย

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ สามารถทำเป็นรูปกำลังสอง

สมบูรณ์ (perfect square) ได้ทุก ๆ ค่าของ x จึงพิสูจน์ว่า

$$\frac{c}{a} = \sqrt{d} \text{ และ } \left(2b - \frac{a^2}{2}\right)^2 = 16d$$

วิธีทำ ให้ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + mx + n)^2$

$$= x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)x^2 + 2mnx + n^2$$

$$\text{นำเอา ส.ย.ส. มาเท่ากัน} \quad 2m = a \dots\dots\dots (1)$$

$$m^2 + 2n = b \dots\dots\dots (2)$$

$$2mn = c \dots\dots\dots (3)$$

$$n^2 = d \dots\dots\dots (4)$$

$$(3) \div (1) \quad n = \frac{c}{a}$$

$$\text{จาก (4),} \quad n = \sqrt{d}$$

$$\frac{c}{d} = \sqrt{d}$$

$$\begin{aligned}
 (1)^2 \quad 4m^2 &= a^2 \\
 2m^2 &= \frac{a^2}{2} \dots\dots\dots (5) \\
 (2) \times 2, \quad 2m^2 + 4n &= 2b \dots\dots\dots (6) \\
 \{(6) - (5)\}^2 \left(2b - \frac{a^2}{2}\right)^2 &= (2m^2 + 4n - 2m^2)^2 \\
 &= 16n^2 \\
 &= 16d \quad (\because n^2 = d \text{ จาก } (4))
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ค.

จงหาราก(หรือกรณ)ที่ 2 โดยอาศัยวิธี Undetermined Coefficients

1. $x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 20x^3 + 25x^2 - 24x + 16$
2. $4x^6 - 12x^4 + 24x^3 + 9x^2 - 36x + 86$
3. $25 - 20x + 14x^2 - 4x^3 - 29x^4 + 12x^5 - 6x^6 + 9x^8$

จงหารากกำลังที่ 8 โดยอาศัยวิธี Undetermined Coefficients

4. $8y^6 + 12y^5 - 80y^4 - 85y^3 + 45y^2 + 27y - 27$
5. $27x^6 - 27x^5 - 99x^4 + 71x^3 + 182x^2 - 48x - 64$
6. ถ้า $x(x+1)(x+2)(x+3) + p$ สามารถทำเป็นรูปกำลังสองได้ทุก ๆ ค่าของ x จงหาค่า p
7. ถ้า $9x^4 - 12x^3y + Mx^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4$ สามารถทำเป็นรูปกำลังสองได้ทุก ๆ ค่าของ x จงหาค่า M
8. จงหาค่า p และ M ซึ่งทำให้ $4x^4 + Mx^3 + px^2 + 4x + 1$ สามารถทำเป็นรูปกำลังสองได้ทุก ๆ ค่าของ x

9. ถ้า $x^4 - kx^3 + mx^2 - nx + 4$ สามารถทำเป็นรูปกำลังสองได้
 จงพิสูจน์ว่า $2k = n$ และ $(m - \frac{k^2}{4}) = 4$
10. ถ้า $ax^3 + bx^2 + cx + d$ สามารถทำให้เป็นรูป กำลังสาม (perfect cube) ได้ จงพิสูจน์ว่า $\frac{b^3}{c^3} = \frac{a}{d}$, $bc = 9ad$ และ $b^3 = 27a^2d$

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า $x^3 + ax^2 + bx + c$ หารด้วย $x^2 + mx + n$ ลงตัว จง
 พิสูจน์ว่า $m(a - m) = (b - n)$ และ $mc + n^2 = nb$

วิธีทำ ให้ $\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + mx + n} = (x + k)$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + k)(x^2 + mx + n)$$

$$= x^3 + mx^2 + nx + kx^2 + mkx + nk$$

$$= x^3 + (m + k)x^2 + (mk + n)x + nk$$

นำเอา ส.ป.ส. มาเท่ากัน $m + k = a$ (1)

$mk + n = b$ (2)

$nk = c$ (3)

จาก (1) $a - m = k$ (4)

จาก (2) $b - n = mk$ (5)

จาก (4) และ (5) $b - n = m(a - m)$

จาก (3) $k = \frac{c}{n}$

เอา $\frac{c}{n}$ แทนค่า k ใน (2), $\frac{mc}{n} + n = b$

$mc + n^2 = nb$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า α, β, γ เป็นรากของสมการ $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{C}{A},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A}$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

หรือ $x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$ และ $\therefore \alpha, \beta, \gamma$ เป็นรากของ
สมการ

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}$$

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}$$

นำเอา ส.ป.ส. มาเท่ากัน

$$-(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{B}{A}$$

$$\text{หรือ } (\alpha + \beta + \gamma) = -\frac{B}{A}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{C}{A}$$

$$-\alpha\beta\gamma = \frac{D}{A}$$

$$\text{หรือ } \alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A}$$

ข้อควรจำ ผลของตัวอย่างนี้ใช้เป็นสูตรได้ด้วย กล่าวคือผลบวกของราก

$$(\alpha + \beta + \gamma) = -\text{ส.ป.ส. ของ } x^2 \text{ ผลบวกของผลคูณของ}$$

$$\text{รากคราวละ 2 ตัว} = \text{ส.ป.ส. ของ } x$$

ผลคูณของรากทั้งสาม = - ภาคสมบูรณ์ (absolute term)

แต่อย่างใดก็ต้องทำให้ ส.ป.ส. ของ x^3 เป็น 1 ก่อนเสมอ

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลบวกของกำลังสอง และผลบวกของกำลังสามของรากของสมการ

$$mx^3 - nx + p = 0$$

วิธีทำ ให้ α, β, γ เป็นรากของสมการ $mx^3 - nx + p = 0$

$$\text{ผลบวกของกำลังสอง คือ } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$\text{ผลบวกของกำลังสาม คือ } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$\therefore mx^3 - nx + p = 0$$

$$\text{หรือ } x^3 - \frac{n}{m}x + \frac{p}{m} = 0$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{n}{m} \text{ และ } \alpha\beta\gamma = -\frac{p}{m}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{2n}{m} \text{ ตอบ}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma = -\frac{3p}{m} \text{ ตอบ}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ง.

1. ถ้า $x^3 + qx + r$ หารด้วย $x^2 + ax + b$ ลงตัวจงพิสูจน์ว่า

$$r - q = a^2 - ab - b$$

2. ถ้า $y^3 - ly^2 + my - n$ หารด้วย $x^2 + px + q$ ลงตัว จงพิสูจน์ว่า

$$n = q(1 - p); m - q = p(p - 1)$$

3. ถ้า $x^4 + mx^3 + nx + p$ หารด้วย $x^3 + ax + b$ ลงตัว จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{p}{m} = b = n$$

4. ถ้า $x-a$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^3 - px^2 - qx - r$ จงพิสูจน์ว่า

$$a^2(a-p) = q-r$$

5. ถ้า α, β, γ เป็นรากของ $x^3 - mx - 2r = 0$ จงหาค่าของ

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \text{ และ } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

6. จงหาผลบวกของกำลังสอง และผลบวกของกำลังสาม ของรากของ
สมการ $ax^3 - 2bx - c = 0$

7. ถ้า α, β, γ เป็นรากของสมการ $lx^3 + mx^2 - 2nx + p = 0$

$$\text{จงหาค่าของ } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \text{ และ } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$

8. ถ้า α, β, γ เป็นรากของสมการ $kx^3 + 2mx^2 - nx + p = 0$ จงหา
ค่าของ $(S-\alpha)(S-\beta)(S-\gamma)$ เป็น k, m, n, p เมื่อ $S = \alpha + \beta + \gamma$

บทที่ 10

ฟังก์ชัน เอกพจน์ (Homogeneous Functions)

เมื่อพจน์ใดมีค่าเปลี่ยนแปรไปตามค่าที่แปรเปลี่ยนของ x เรียกว่า ฟังก์ชันของ x และมีกระใช้เครื่องหมาย $f(x)$ แทน อ่านว่าฟังก์ชันของ x และถ้าเลขชี้กำลังของ x ในฟังก์ชันมากที่สุดเป็นหนึ่งเช่น ax หรือ $ax + b$ (เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว) เรียกว่าฟังก์ชันกำลังหนึ่ง (Linear Function) ถ้าเลขชี้กำลังของ x ในฟังก์ชันมากที่สุดเป็น 2 เช่น ax^2 หรือ $ax^2 + bx$ หรือ $ax^2 + bx + c$ (เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว) เรียกว่าฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

ฟังก์ชันเอกพจน์ (Homogeneous Function) ฟังก์ชันใดมีตัวแปรเปลี่ยนเป็นมิติ (Dimension) เดียวกันทุกพจน์ เรียกว่าฟังก์ชันเอกพจน์ เช่น $x - y$, $x^2 - xy + y^2$, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ เป็นฟังก์ชันเอกพจน์ของหนึ่ง สอง และ สามมิติตามลำดับ

ฟังก์ชันสมมาตร (Symmetrical Functions) เมื่อเอาตัวอักษรคู่ใดคู่หนึ่งในฟังก์ชันเอกพจน์ของ 2 หรือ 3 ตัวแปรมาสลับที่กันแล้ว ค่าของฟังก์ชันนั้นไม่เปลี่ยนแปลง ฟังก์ชันนั้นเรียกว่าฟังก์ชันสมมาตร เช่น $x + y + z$, $xy + xz + yz$; $(x + y + z)^3$ เป็นฟังก์ชันสมมาตรของ หนึ่ง สอง และ สามมิติตามลำดับ

แต่ $a(x^2 + y^2) + bxy$ เป็นฟังก์ชันสมมาตรเฉพาะ x กับ y ไม่ใช่ a กับ b

ฟังก์ชันสมมาตรมาตรฐาน 1. ฟังก์ชันสมมาตรมาตรฐาน 1 มิติ และ 3 ตัวแปร คือ $M(x + y + z)$ เมื่อ M เป็นตัวมค่าคงที่

2. ฟังก์ชันสมมาตรมาตรฐาน 2 มี 3 ตัวแปร คือ

$M(x^2 + y^2 + z^2) + N(xy + yz + zx)$ เมื่อ M และ N เป็นตัวพหุนามค่าคงที่

จงสังเกตไว้ด้วยว่า ผลบวก ผลต่าง และ ผลคูณของฟังก์ชันสมมาตร

ย่อมได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันสมมาตร เช่น $(x+y)^2 + (x+y), (x+y)^3;$

$(x^3+y^3), (a+b)(a^2-ab+b^2)$ เป็นต้น

ฟังก์ชันสลับ (Alternating Functions) เมื่อนำตัวอักษรใดใดหนึ่งใน

ฟังก์ชันเอกพจน์ของ 2 หรือ 3 ตัวแปรนั้น ๆ แลกกันแล้ว ทำให้เครื่องหมายเปลี่ยนไปจากเดิม (ค่าตัวเลขไม่เปลี่ยน) เรียกว่าฟังก์ชันสลับ เช่น

$(a-b), (b-c), (c-a), (a-b)$ เป็นฟังก์ชันสลับของหนึ่ง และ สามตัว

ตามลำดับ

จงสังเกตว่าผลคูณและผลหารของฟังก์ชันสมมาตรกับฟังก์ชันสลับได้ผลลัพธ์

เป็นฟังก์ชัน สลับ เช่น $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2, (a^4 - b^4) \div (a^2 + b^2)$

$= a^2 - b^2$

ผลคูณ ผลหารของฟังก์ชันสลับ เป็นฟังก์ชันสมมาตร เช่น $(x-y)$

$= x^2 - 2xy + y^2$ และ $(a^3 - b^3) \div (a - b) = a^2 + ab + b^2$ เป็นต้น

ผลบวกของฟังก์ชันทั้งสองนี้ นิยมใช้เครื่องหมาย “ Σ ” แทน อ่านว่า

ซิกม่า “sigma” เป็นอักษรกรีก แล้วเขียนตัวอักษรพจน์แรกแทนลงไป

แสดงว่าเป็นผลบวกของตัวแปร 2 หรือ 3 ตัวที่ติดต่อกัน เช่น $\Sigma a = a + b + c,$

$\Sigma x = x + y + z, \Sigma ab = ab + ac + bc, \Sigma a^2(b-c) = a^2(b-c) +$

$b^2(c-a) + c^2(a-b)$

ถ้าเป็นผลคูณของฟังก์ชันสมมาตร หรือฟังก์ชันสลับ นิยมใช้เครื่องหมาย “ Π ” แทน อ่านว่า ไพ (pi) เช่น $\Pi (b-c) = (b-c)(c-a)$

$(a-b), 3\Pi (b-c) = 3(b-c)(c-a)(a-b)$

หมายเหตุ เครื่องหมาย $\equiv$ (เท่ากับ ๘ ซีก) แสดงว่าเท่ากันเสมอ

ไม่ว่าตัวแปรเปลี่ยนจะมีค่าเท่าไรก็ตาม เรียกว่า Identical sign

ตัวอย่าง หาตัวประกอบของ $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

วิธีทำ อาศัยทฤษฎีหาเศษหกลของแทนค่าฟังก์ชันนจะเท่ากับศูนย์ เมื่อ $b = c$ ดังนั้น $b - c$ เป็นตัวประกอบของฟังก์ชัน

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $c - a$ และ $a - b$ ต่างเป็นตัวประกอบของฟังก์ชัน $\equiv a(b^3 - c^3)$ ซึ่งเป็นพหุ 4 มิติ และ $(a - b)(b - c)(c - a)$ เป็นฟังก์ชันสลับของพวก 3 มิติ (three dimensions) เมื่อหารฟังก์ชันสลับของพวก 4 มิติ ผลลัพธ์ได้ เป็นฟังก์ชันสมมาตร หนึ่งมิติ ซึ่งอยู่ในรูป $M(a + b + c)$ (M เป็นค่าคงตัวไม่ว่า a, b, c จะมีค่าเท่าไรก็ตาม) ดังนั้น

$$a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3) = (a - b)(b - c)(c - a) M(a + b + c)$$

สมมติให้ $a = 2, b = -1, c = 0$ แทนค่า

$$\begin{aligned} 2(-1 + 0) - 1(0 - 8) + 0 &= M(-1 - 0)(0 - 2)(2 + 1)(2 - 1 + 0) \\ -2 + 8 &= M(-1)(-2)(8)(1) \\ 6 &= 6M \\ M &= 1 \end{aligned}$$

$$a(b^3 - c^3) = (b - c)(c - a)(a + b + c)$$

หมายเหตุ เมื่อสมมติค่าของตัวอักษรนั้น ระวางอย่าเลือกค่าจะทำให้ข้างใดข้างหนึ่งเป็นศูนย์ เพราะจะหาค่า M ซึ่งสมมุติเป็นค่าคงตัวไม่ได้

ตัวอย่าง 2 จงพิสูจน์ว่า $(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

วิธีทำ ด้วยการใช้ทฤษฎีบทของแทนค่าข้างซ้าย ให้ x, y , และ $x+y$ เป็นตัวประกอบของฟังก์ชันข้างซ้ายคือ $(x+y)^5 - x^5 - y^5$ และ $xy(x+y)$ เป็นฟังก์ชันสมมาตรพวก 3 มติ ฉะนั้นเมื่อหารจำนวน $(x+y)^5 - x^5 - y^5$ แล้ว ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันสมมาตรพวก 2 มติ คือ $M(x^2+y^2) + Nxy$ เมื่อ M และ N มีค่าคงตัว

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = xy(x+y)[M(x^2+y^2) + Nxy]$$

สมมติ $x=1, y=1$ แทนค่าในฟังก์ชันทั้งข้างซ้ายและข้างขวา

$$30 = 4M + 2N \quad \dots\dots (1)$$

สมมติ $x=2, y=1$ แทนค่าในฟังก์ชันทั้งข้างซ้ายและข้างขวา

$$210 = 30M + 12N$$

$$35 = 5M + 2N \quad \dots\dots (2)$$

$$(2) - (1) \quad 5 = M$$

แทนค่า M ด้วย 5 ใน (1)

$$N = 5$$

$$\therefore (x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$$

ตัวอย่าง 8 แยกตัวประกอบ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

วิธีทำ $\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ หารด้วย $a+b+c$

$$\text{ได้ผลลัพธ์ } a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

ดังนั้น ผลลัพธ์คูณด้วยตัวหาร จึงได้คำตอบที่ถูกต้อง

ดังนั้น

$$I. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$\text{และ } \therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2} \left\{ (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) \right\}$$

$$\equiv \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}$$

กึ่งนั้น

$$\text{II. } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv \frac{1}{2} (a + b + c)$$

$$\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}$$

$$\text{III. ถ้า } a + b + c = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

แบบฝึกหัดข้อที่ 10 ก.

จงหาตัวประกอบต่อไปนี้

$$1. bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$$

$$2. a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

$$3. a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$$

$$4. \times a^3(b-c)$$

$$5. \times (b-c)^3$$

$$6. \times a^2(b+c) + 2abc$$

$$7. \times bc(b+c) + 2abc$$

8. จงพิสูจน์ว่า

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

และนิพจน์ข้างซ้ายจะเท่ากับศูนย์ เมื่อ $a + b + c = 0$

จงหาตัวประกอบของ

9. $8a^3 + b^3 - c^3 + 6abc$
10. $a^3 + b^3 + 27c^3 - 9abc$
11. $8x^3 - 27y^3 + z^3 + 18xyz$
12. $8 + x^3 - y^3 + 6xy$
13. ถ้า $x + 2$ ทหาร $x^4 + x^3 - 6x^2 - ax + 9$ ใกล้เคียงตัวพหุ
 หารค่าของ a
14. k จะมีค่าเท่าไรจึงจะทำให้ $x - 3$ ทหาร $3x^3 - 2x^2 + kx - 3$
 ใกล้เคียงตัว
15. ถ้า $x^3 - 4x^2 + ax + b$ มี $x - 3$ และ $x + 1$ เป็นตัว
 ประกอบ จงหาค่าของ a และ b
16. a และ b จะมีค่าเท่าไร จึงจะทำให้ $x + 2$ เป็นตัวประกอบ
 ร่วมของ $x^2 - 2ax + b$ และ $7x^2 + bx + a$
17. ถ้า $x^3 + x^2 + a$ และ $x^3 + 3x + b$ มีตัวประกอบร่วมเป็น
 นิพจน์กำลังที่สองของ x (Quadratic Expression) จงหา
 ค่าของ a และ b แล้วหาตัวประกอบร่วมด้วย
18. จงหาค่าของ a และ b เมื่อหาร $x^4 - ax^3 + (b - 1)x^2$
 + $ax - 4$ ด้วย $x - 1$ และด้วย $x - 4$ ใกล้เคียงตัว
19. ถ้า $x = b + c - 2a, y = c + a - 2b, z = (a + b - 2c)$
 จงพิสูจน์ว่า $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

$$= -81(a - b)(b - c)(c - a)$$

20. จงพิสูจน์ว่า $(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4$
 $+ x^4 + y^4 + z^4 \equiv 12xyz(x+y+z)$

21. จงหาคำของ $\frac{\sum a^3(b-c)}{\sum a^2(b-c)}$

22. จงหาคำของ $\frac{3abc \prod (b-c)}{\sum a(b^2 - c^2)}$



บทที่ 11

การแยกตัวประกอบด้วยวิธีต่างๆ

หลักในการแยกตัวประกอบ

1. การแยกตัวประกอบนั้นคือ การแยกออกให้เป็นรูปผลคูณ รวมเครื่องหมายบวกหรือลบอยู่ระหว่างวงเล็บไม่ได้
2. การแยกตัวประกอบต้องแยกให้ถึงขั้นที่สุด จนแยกต่อไปอีกไม่ได้
3. ถ้ามีตัวรวม ต้องเอาออกให้หมดก่อน ซึ่งมีหลักสองประการคือ ต้องเอาตัวที่เอาออกมาหารทุก ๆ ตัวของโจทย์ ได้ผลลงตัวเท่าไรเก็บเอาไว้ในวงเล็บ และตัวที่เอาออกมาต้องมีการลงเท่ากันของวงเล็บเดิม
 เช่น $(ax + a)^4 = a^4 (x + 1)^4$
4. ก่อนแยกตัวประกอบ บางพวกควรจับคู่เข้าวงเล็บ อย่างเดียว ถ้ามีเครื่องหมายอยู่หน้าวงเล็บ ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายจำนวนที่อยู่ในวงเล็บ เช่น

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - a - b &= (a^2 - b^2) - (a + b) \\ &= (a - b)(a + b) - (a + b) \\ &= (a + b)(a - b - 1) \end{aligned}$$
 หรือ $-a^2 - b^2 - 2ab + c^2 = c^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= c^2 - (a + b)^2 = (c + a + b)(c - a - b)$
5. อย่าเอาเลขจำนวนไป บวก, ลบ, คูณ, หาร ใส่เข้าไปโดยลำพังเป็น

อินซาค ถ้าเอาจำนวนใดบวกก็ต้องเอาจำนวนนั้นลบออก ถ้าเอาจำนวน
ใดคูณ ก็ต้องเอาจำนวนนั้นหารออก เช่น ingsแยกตัวประกอบ
 $a^4 + a^2b^2 + b^4$

วิธีทำ $a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$ (เอา a^2b^2
 บวกเข้าไปต้องลบออกด้วย)

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

6. การแยกตัวประกอบนั้น เมื่อแยกแล้วควรดูคุณสมบัติ ต้องให้ได้ผลลัพธ์
 เหมือนเดิมจึงจะถูกต้องและใช้ได้

ตัวอย่างที่ 1 ingsแยกตัวประกอบ

1. $3(7x-3)^2 + 4(7x-3) - 15$

2. $x^2 + 10p^2 - 7px - 20pq + 7qx + 10q^2$

3. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 15$

วิธีทำ 1. $\{ 3(7x-3) - 5 \} \{ (7x-3) + 3 \}$

$$= 49x(8x-2)$$

ตอบ

2. $x^2 - 7x(p-q) + (10p^2 - 20pq + 10q^2)$

$$= x^2 - 7x(p-q) + 10(p-q)^2$$

$$= \{ x - 5(p-q) \} \{ x - 2(p-q) \}$$

ตอบ

3. $\{ (x+2)(x+5) \} \{ (x+3)(x+4) \} - 15$

$$\{ (x^2 + 7x) + 10 \} \{ (x^2 + 7x) + 12 \} - 15$$

$$(x^2 + 7x)^2 + 22(x^2 + 7x) + 120 - 15$$

$$(x^2 + 7x)^2 + 22(x^2 + 7x) + 105$$

$$\{(x^2 + 7x) + 15\} \{(x^2 + 7x) + 7\} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ตัวอย่างที่ 2 รวบรวมตัวประกอบ

$$1. 10648 x^3 y^6 + 1331 x^6 y^3$$

$$2. a^3 - 8c^3 - 3a^2b - 24c^2d - 24cd^2 + 3ab^2 - b^3 - 8d^3$$

$$3. 64(x + 2y)^3 - 27(2x - y)^3$$

วิธีทำ 1. $10648 x^3 y^6 + 1331 x^6 y^3$

$$= 1331 x^3 y^3 (2y + x)(4y^2 - 2xy + x^2)$$

$$2. a^3 - 8c^3 - 3a^2b - 24c^2d - 24cd^2 + 3ab^2 - b^3 - 8d^3$$

$$= (a^3 - 8c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - (8c^3 + 24c^2d + 24cd^2 + 8d^3)$$

$$= (a - b)^3 - 8(c + d)^3$$

$$= \{(a - b) - 2(c + d)\} \{(a - b)^2 + 2(a - b)(c + d) + 4(c + d)^2\}$$

$$3. 64(x + 2y)^3 - 27(2x - y)^3$$

$$= \{4(x + 2y) - 3(2x - y)\} \{16(x + 2y)^2 + 12(x + 2y)(2x - y) + 9(2x - y)^2\}$$

$$= \{(4x + 8y - 6x + 3y)\} \{16x^2 + 64xy + 64y^2 + 24x^2 + 36xy - 24y^2 + 36x^2 - 36xy + 9y^2\}$$

$$= (11y - 2x)(76x^2 + 64xy + 49y^2)$$

ตัวอย่างที่ ๑ แยกตัวประกอบ

$$1. (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 - c^2 (x^2 + y^2)$$

$$2. 3c^2 + 6d - 2c + 2x - 9cd - 3cx$$

$$3. bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b) + 2abc$$

วิธีทำ 1. $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 - c^2 (x^2 + y^2)$

$$= a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2 + b^2 x^2 - 2abxy + a^2 y^2 - c^2 (x^2 + y^2)$$

$$= a^2 (x^2 + y^2) + b^2 (x^2 + y^2) - c^2 (x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2) (a^2 + b^2 - c^2) \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

$$2. 3c^2 + 6d - 2c + 2x - 9cd - 3cx$$

$$= (3c^2 - 2c) - (3cx - 2x) - (9cd - 6d)$$

$$= c(3c - 2) - x(3c - 2) - 3d(3c - 2)$$

$$= (3c - 2) (c - x - 3d) \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

$$3. bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b) + 2abc$$

$$= bc(b + c) + c^2 a + ca^2 + a^2 b + ab^2 + 2abc$$

$$= bc(b + c) + (abc + c^2 a) + (a^2 b + a^2 c) + (ab^2 + abc)$$

$$= bc(b + c) + ac(b + c) + a^2(b + c) + ab(b + c)$$

$$= (b + c) (bc + ac + a^2 + ab)$$

$$= (b + c) \{ (ac + a^2) + (bc + ab) \}$$

$$= (b + c) \{ a(c + a) + b(c + a) \}$$

$$= (b + c) (c + a) (a + b) \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

7. การแยกตัวประกอบด้วยการใช้ทฤษฎีหาเศษ (Remainder Theorem)

พยายามหาว่าอะไรเป็นตัวประกอบของฟังก์ชัน โดยเอาจำนวนคงที่แยกตัวประกอบเฉพาะแล้วแทนค่าตัวแปร ตัวเลขใดแทนแล้วทำให้ฟังก์ชันเท่ากับศูนย์ จะได้ตัวแปร ด้วยตัวเลขจำนวนนั้นเป็นตัวประกอบตัวหนึ่ง เอาตัวประกอบนี้ไปหาร และเอาผลลัพท์ที่ได้ออกมาแยกตัวประกอบต่อไป แขนงจะใช้เมื่อตัวที่ไม่ทราบค่าตัวเคยวมกำลังคงที่ 3 ขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 37x - 84$

วิธีทำ 1. $x^3 - 37x - 84$

$$f(x) \equiv x^3 - 37x - 84$$

$$f(-3) = -27 + 111 - 84$$

$$= 0$$

$\therefore x + 3$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $f(x)$

$$\therefore x^3 - 37x - 84 = x^2(x + 3) - 3x^2 - 37x - 84$$

$$= x^2(x + 3) - (x + 3)(8x + 28)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 8x - 28)$$

$$= (x + 3)(x + 4)(x - 7)$$

8. การแยกตัวประกอบพหุคูณ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ อาศัยหลักการแยก

เวียนมาแล้วว่า $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ หารด้วย $x + y + z$ ได้

ผลพหุ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ ก็นั่น ทวตงรเททกบตว

ทวท กณทวตผลพหุ ทอ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

$$\begin{aligned} \text{ทวท } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= \frac{1}{2}(x+y+z) \{ (x^2 - 2xy + y^2) \\ &\quad + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2xz + x^2) \} \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z) \{ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ทวประกอบแบบน ทวตงทองเบ็นก้ดงส้ทมออยู่ 8 พน และ พนทส เกททวทผลทอของ - 8 กัทรากก้ดงทส้ทมอของทง ส้ทมพนนน ังระแบกตามกฏนไค

ตัวอย่างที่ 5. ังแบกทวประกอบของ $8a^3 + b^3 - 27c^3 - 18abc$

$$\begin{aligned} \text{วทท } 8a^3 + b^3 - 27c^3 + 18abc \\ = (2a)^3 + (b)^3 + (-3c)^3 - 3(2a)(b)(-3c) \end{aligned}$$

$$= (2a + b - 3c)(4a^2 + b^2 + 9c^2 - 2ab + 6ac + 8bc)$$

9. การแยกตัวประกอบโดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันสมมาตร และฟังก์ชันสลับ

ตัวอย่างที่ 6 ังแบกทวประกอบ

$$1. (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$$

$$2. (bc+ca+ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$$

$$3. (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4$$

วิธีที่ 1. $(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$

ด้วยการคิดในใจฟังก์ชันนี้จะเท่ากับศูนย์ เมื่อ $b = -c$ ดังนั้น $b + c$ จึงเป็นตัวประกอบจำนวนหนึ่ง ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $c + a$ และ $a + b$ ต่างก็เป็นแฟกเตอร์ของฟังก์ชันนี้ด้วย โจทย์เป็นฟังก์ชันสมมาตรสามตัวแปรและมี 5 มิติ เมื่อเราตัวประกอบทั้ง 3 ซึ่งเป็นฟังก์ชันสมมาตรพวก 8 มิติไปหาร ผลลัพธ์ย่อมเป็นฟังก์ชัน สมมาตรพวกสองมิติซึ่งอยู่ในรูป $M(a^2 + b^2 + c^2) + N(ab + ac + bc)$ เมื่อ M และ N เป็นค่าคงตัว ดังนั้น $(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 = (b + c)(c + a)(a + b)\{M(a^2 + b^2 + c^2) + N(ab + ac + bc)\}$

a, b, c จะมีค่าเท่าไรก็ตาม M และ N ย่อมมีค่าคงตัวเสมอ

สมมติให้ $a = b = 1, c = 0$ แทนค่าในฟังก์ชัน

$$\therefore (1 + 1 + 0)^5 - 1 - 1 - 0 = 1 \times 1 \times 2 \{ M(1 + 1 + 0) + N(1 + 0 + 0) \}$$

$$32 - 2 = 4M + 2N$$

$$4M + 2N = 30 \dots\dots\dots (1)$$

สมมติให้ $a = 0, b = 2, c = 1$ แทนค่าในฟังก์ชัน

$$8^5 - 0 - 2^5 - 1 = 8 \times 1 \times 2 \{ M(0 + 4 + 1) + N(2) \}$$

$$248 - 33 = 30M + 12N$$

$$5M + 2N = 35 \dots\dots\dots (2)$$

$$(2) - (1) \quad M = 5$$

$$\text{แทนค่าใน (1)} \quad N = 5$$

$$\therefore (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 = 5(b+c)(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2 + ab + ac + bc) \quad \text{ตอบ}$$

$$2. (bc+ca+ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$$

ด้วยการคิดแทนค่าในโพรงกษณจะเท่ากับ 0 เมื่อ a เท่ากับ 0
 ดังนั้น a จึงเป็นตัวประกอบตัวหนึ่ง ในทำนองเดียวกันหาพิสูจน์ได้ว่า b
 และ c ต่างเป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของโพรงกษณ ถ้า $b = -c$ โพรงกษณ
 เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $b+c$ ตัวประกอบของโพรงกษณ ในทำนองเดียวกัน $c+a$
 และ $a+b$ ต่างก็เป็นตัวประกอบของโพรงกษณ โจทย์เป็นโพรงกษณสมมาตรสาม
 ตัวแปรพวกนี้ทุก เมื่อเอาตัวประกอบทั้งหกซึ่งเป็นโพรงกษณสมมาตรพวกกำลัง
 หกไปหาร บ่อยได้ผลลัพท์เป็นค่าคงตัว สมมติให้เท่ากับ M

$$\text{ดังนั้น } (bc+ca+ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3 = Mabc(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$\text{ให้ } a = b = c = 1 \text{ แทนค่า}$$

$$\therefore (1+1+1)^3 - 1 - 1 - 1 = M(1)(2)(2)(2)$$

$$27 - 3 = 8M$$

$$24 = 8M$$

$$3 = M$$

$$\therefore (bc+ca+ab)^3 = 8abc(b+c)(c+a)(a+b) \quad \text{ตอบ}$$

$$3. (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 + (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4$$

ด้วยการคิดแทนค่าในโพรงกษณจะเท่ากับศูนย์เมื่อ a เท่ากับ 0
 หรือ b เท่ากับ 0 หรือ c เท่ากับ 0

ดังนั้น a, b, c ต่างเป็นทวีประกอบของฟังก์ชันสมมาตรพหูกำลัง 3
และตัวประกอบที่ใดเป็นพหูกำลังสาม เมื่อเขาไปหารโทษ ผลลัพธ์ที่ใด
เป็นฟังก์ชันสมมาตรพหูกำลังหนึ่ง ซึ่งอยู่ในรูป $M(a+b+c)$

ดังนั้น $(a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4 \equiv Mabc$
 $(a+b+c)$

a, b, c จะมีค่าเท่าไรก็ตาม M ข้อมเป็นค่าคงตัวเสมอ

ให้ $a = b = c = 1$ แทนค่าในฟังก์ชัน

$$\therefore 3^4 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 1 + 1 + 1 \equiv 3M$$

$$84 - 48 \equiv 3M$$

$$36 \equiv 3M$$

$$12 \equiv M$$

$$\therefore (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4 \equiv 12abc(a+b+c)$$

ตอบ

หมายเหตุ วิธีนี้อาจเลือกค่าที่ทำให้ข้างใดข้างหนึ่งเป็นศูนย์ เพราะจะทำให้หาค่าคงตัวไม่ได้

10. การแยกตัวประกอบด้วยหลัก Undetermined coefficients

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกแฟกเตอร์ $6x^2 - 7xy - 3y^2 + 4x + 5y - 2$

วิธีทำ $\therefore 6x^2 - 7xy - 3y^2 = (3x + y)(2x - 3y)$

สมมติให้ $6x^2 - 7xy - 3y^2 + 4x + 5y - 2 \equiv \{(3x + y) + a\} \{(2x - 3y) + b\}$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

$$\therefore 4x + 5y - 2 \equiv a(2x - 3y) + b(3x + y) + ab$$

เอา ส.ป.ส. ของ x ไว้พวกหนึ่งและของ y ไว้พวกหนึ่งดังนี้

$$4x + 5y - 2 = x(2a + 3b) + y(b - 3a) + ab$$

อาศัยหลักเทียบ ส.ป.ส.

$$2a + 3b = 4 \dots\dots\dots (1)$$

$$-3a + b = 5 \dots\dots\dots (2)$$

$$ab = -2 \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) \times 3 \quad -9a + 3b = 15 \dots\dots\dots (4)$$

$$(1) - (4) \quad 11a = -11$$

$$a = -1$$

แทนค่าใน (3)

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore 6x^2 - 7xy - 3y^2 + 4x + 5y - 2 \equiv (3x + y - 1)(2x - 3y + 2) \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 11

แยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $(3x - 6)^3$

2. $(3x - 1)^3 - 27x + 9$

3. $9a^2 - 4c^2 - 30ab - 8cd - 4d^2 + 25b^2$
4. $64(x + 2y)^3 - 27(2x - y)^3$
5. $15y^6 - 19y^3 + 6$
6. $a(a + 1)x^2 + (a + b)x - b(b - 1)$
7. $(p^2 - p - 6)x^2 + 4(2p - 1)x - (p^2 - p - 2)$
8. $a^2 - 2ab - 8b^2 + 4a + 2b + 3$
9. $96a^2 - 20a - 875$
10. $x^4 + x^2 + 1$
11. $a^4 - 7a^2b^2 + b^4$
12. $25x^4 + 36y^4 + 51x^2y^2$
13. $25p^4 + 36q^4 - 69p^2q^2$
14. $a^4 - a^3b - 7a^2b^2 + ab^3 + 6b^4$
15. $(a + b - 2)^2 - (a - b + 1)^2$
16. $m^4 - n^4 - m^3 - mn^3 - n^3 + m^3n$
17. $2(a^6 + b^6) - ab(a^2 + b^2)(2ab - 3a^2 + 3b^2)$
18. $a^2(b^3 - c^3) + b^2(c^3 - a^3) + c^2(a^3 - b^3)$
19. $8a^3 - b^3 - c^3 - 6abc$
20. $2b^2c^2 - 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$
21. a อะมีคาเทอไรณ

- ก. $x - 5$ เป็นตัวประกอบของ $x^2 - 7x + a$
 ข. $2x - 3$ " " " " $ax^2 + x - 6$
 ค. $3x - 2$ " " " " $3x^2 + ax - 4$
 จงแยกตัวประกอบต่อไป

22. $x^6 - 1$

23. $a^4 + 4b^4$

24. $a^3 - 16$

25. $8x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3$

26. $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6$

27. $12(x^4 + 1) + 89x^2 - 56(x^2 + 1)$

28. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 5y - 3$

29. $x^2 - y^2 - 3x + 7y - 10$

30. $x^2 - xy - 6y^2 - 3x - 5y - 4$

บทที่ 12

อนุกรม (Series)

1. อนุกรมคือเลขหลายจำนวนซึ่งมาจกแยกเรียงกันเป็นพจน์ (term) และพจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าทีละอย่างด้วยกฎใดกฎหนึ่ง เช่น
 - 1) ก. 1, 3, 5, 7, พจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าด้วยการบวกด้วย 2
 ข. 7, 5, 3, 1, พจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าด้วยการบวกด้วย -2
 - 2) ก. 1, 3, 9, 27, พจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าด้วยการคูณด้วย 3
 ข. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ พจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าด้วยการคูณด้วย $\frac{1}{3}$
 - 3) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ พจน์ทุกพจน์เป็นส่วนกลับของอนุกรม (1) ก.
 - 4) $1, 3, 5, 7, \dots$ เกิดจากอนุกรมในข้อ (1) ก. แต่ละพจน์
 ยกกำลัง 2
 - 5) $7, \frac{5}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ เกิดจากอนุกรมในข้อ (1) ข. คูณกับอนุกรม
 ในข้อ (2) ข. พจน์ต่อพจน์

2. อนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (Arithmetic Progression)

ใช้ตัวย่อว่า A.P.

อนุกรมพจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าซึ่งเรียงติดกันด้วยการนำจำนวนคงที่ไปบวก เรียกว่าเกิดด้วยกฎบวก เช่น 1, 3, 5, 7, 9
 พจน์ที่ 2 เกิดจากพจน์แรก + 2 คือ $1 + 2 = 3$
 พจน์ที่ 3 เกิดจากพจน์ที่ 2 + 2 คือ $3 + 2 = 5$

พจน์ที่ 4 เกิดจากพจน์ที่ 3 + 2 คือ $5 + 2 = 7$

ดังนั้น ๗ นำมาบวก คือ + 2 เป็นผลต่างระหว่างพจน์หลังและพจน์
หน้าติดกันเรียกว่า ผลต่างร่วม (Common difference) หรือเขียนในอนุกรม
9, 7, 5, 3, 1

พจน์ที่ 2 เกิดจากพจน์ที่ 1 + 2 คือ $9 - 2 = 7$

พจน์ที่ 3 เกิดจากพจน์ที่ 2 + 2 คือ $7 - 2 = 5$

พจน์ที่ 4 เกิดจากพจน์ที่ 3 + 2 คือ $5 - 2 = 3$

ดังนั้น ผลต่างร่วม $7 - 9 = -2$

2.1 รูปทั่วไปของอนุกรม (Standard form) คือ $a, a + d, a + 2d,$
 $a + 3d, \dots$

เมื่อ a เป็นพจน์ต้น ผลต่างร่วมเป็น d

พจน์ที่ 1 เป็น a

พจน์ที่ 2 เป็น $a + d$

พจน์ที่ 3 เป็น $a + 2d$

พจน์ที่ 4 เป็น $a + 3d$

พจน์ที่ n เป็น $a + (n - 1)d$ (พจน์ที่ n มักนิยมใช้ตัวย่อว่า T_n)

2.2 วิธีหาผลต่างร่วม $T_3 - T_2$ หรือ $T_2 - T_1 = d$ คือผลต่างร่วม

ตัวอย่างที่ 1 หหาพจน์ที่ 10 ในอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (A.P.) นี้

6, 10, 14, 18,

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ต้น = 6

d เป็นผลต่างร่วม คือ $10 - 6$ หรือ $14 - 10 = 4$

$$\text{พจน์ที่ } n \text{ หรือ } T_n = a + (n-1)d$$

$$\text{พจน์ที่ } 10 \text{ หรือ } T_{10} = 6 + (10-1)d \\ = 42$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้พจน์ที่ 11 ของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (A.P.) หนึ่งเป็น

80 และ

พจน์ที่ 15 ของอนุกรมนี้เป็น 14 จงหาอนุกรม

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ต้น d เป็นผลต่างร่วม

$$\text{พจน์ที่ } 11 = a + (11-1)d = a + 10d = 80$$

$$\text{พจน์ที่ } 15 = a + (15-1)d = a + 14d = 14$$

$$4d = -16$$

$$d = -4$$

$$\text{แทนค่าในพจน์ที่ } 11 \text{ ได้ } a - 40 = 80$$

$$= 120$$

อนุกรมคือ 120, 116, 112, 108,

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ x ซึ่งทำให้อนุกรม $x + 6, 15 - x, 4 - 2x$

เป็นอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต

วิธีทำ ถ้าอนุกรมเป็นอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต ผลต่างร่วมคือ

$$(15 - x) - (x + 6) = (4 - 2x) - (15 - x)$$

$$9 - 2x = -11 - x$$

$$-x = -20$$

$$x = 20$$

แบบฝึกหัดที่ 12 ก.

จงหาผลต่างรวมของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิตต่อไปนี้

- 1) 2, 5, 8, 11.....
- 2) 1, 6, 11, 16.....
- 3) $\frac{1}{8}, 1\frac{1}{8}, 2\frac{1}{8}, 3\frac{1}{8}$
- 4) $3p+q, 5p-2q, 7p-5q$
- 5) $4x-3y, 2x+y, 5y(9y-2x)$

จงหาผลต่างรวมและพจน์สุดท้ายของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิตต่อไปนี้

- 6) 4, 7, 10, 20 พจน์
- 7) -4, 2, 8, 85 พจน์
- 8) $7, \frac{16}{3}, \frac{11}{3}, \dots$ 15 พจน์
- 9) .08, .18, .18, 12 พจน์
- 10) 4, 9, 14, 19, 50 พจน์
- 11) 10, 7, 4, 1, 10 พจน์

จงหาค่าของ p ซึ่งทำให้อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต

- 12) $4p-8, p+3, 11-p$
- 13) $4-3p, 5-2p, p+16$
- 14) $2p^2+2p+1, p^2+6, 3p^2-2p-1$
- 15) $7p+2, p-6, 4-p$
- 16) $\frac{p}{2}, \frac{p+3}{2}, \frac{5-p}{2}$

$$17) \quad 3p + 2, 5p + 1, 8p + 2$$

$$18) \quad 2p + 1, p + 8, 3p^2$$

จงหาพจน์ที่ 10 และพจน์ที่ 15 ของอนุกรมต่อไปนี้

$$19) \quad 12, 10, 8, \dots$$

$$20) \quad 3p - 1, 5p + 1, 7p + 3, \dots$$

$$21) \quad 20, 15, 10, \dots$$

$$22) \quad x^2 + 1, x^2 + 2, x^2 + 3, \dots$$

$$23) \quad 80, 60, 40, 20, \dots$$

$$24) \quad 10, 14, 18, \dots$$

$$25) \quad \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \dots$$

2.3 การหาผลบวกของอนุกรมกาวหน้าเลขคณิต (A.P.) ถึง n พจน์

อนุกรมกาวหน้าเลขคณิต A.P. ถึง n พจน์ มีดังนี้

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-2)d, a + (n-1)d$$

ให้ S_n เป็นผลบวกถึง n พจน์

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + a + (n-2)d + a + (n-1)d$$

เรียงกลับเอาพจน์สุดท้ายขึ้นก่อนดังนี้

$$S_n = a + (n-1)d + a + (n-2)d + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$$

$$\text{รวม } S_n \text{ ได้ } 2S_n = 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + \dots +$$

$$2n + (n-1)d + 2a + (n-1)d$$

จะเห็นได้ว่า $2a + (n-1)d$ บวกกัน n พจน์ $2Sn = n \{2a + (n-1)d\}$

$$Sn = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

สมมติให้พจน์สุดท้ายคือ พจน์ที่ $n = 1$

$$1 = a + (n-1)d$$

$$Sn = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a+1)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวกของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต 2, 5, 8, 11, ถึง 15 พจน์

วิธีทำ ผลบวกถึง n พจน์คือ $Sn = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

ในทศ พจน์ต้น $a = 2$ ผลต่างร่วม $d = 5 - 2 = 3$

จำนวนพจน์ $n = 15$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2 \times 2 + (15-1)3]$$

$$= \frac{15}{2} (4 + 42)$$

$$= 15 \times 23$$

$$= 345$$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าพจน์ n ของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิตเป็น $2n-3$ จงหาอนุกรม และผลบวกของอนุกรมจนถึงพจน์ที่ 25

$$\text{พจน์ที่ } n \text{ คือ } T_n = 2n - 3$$

$$\text{พจน์ที่ } 1 \text{ คือ } T_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$\text{พจน์ที่ } 2 \text{ คือ } T_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$\text{พจน์ที่ 8 คือ } T_8 = 2 \times 8 - 8 = 8$$

$$\text{พจน์ที่ 25 คือ } T_{25} = 2 \times 25 - 8 = 47$$

อนุกรมคือ $-1, 1, 8, \dots, 47, \dots$

$$\text{จากสูตร } S_n = \frac{n}{2} (a+1)$$

$$S_{25} = \frac{25}{2} (-1 + 47) = 25 \times 23 = 575$$

แบบฝึกหัดที่ 12 ข.

จงหา 8 พจน์แรก พจน์สุดท้าย และผลบวกของอนุกรมก้าวหน้า
เลขคณิต เมื่อกำหนดพจน์ที่ n ดังนี้

- 1) $3n - 4$ ถึง 10 พจน์
- 2) $4n - 3$ ถึง 12 พจน์
- 3) $\frac{n}{2} + 2$ ถึง 14 พจน์
- 4) $2n + 5$ ถึง 8 พจน์
- 5) $4n - 1$ ถึง 20 พจน์
- 6) $\frac{5}{2}n + 3$ ถึง 18 พจน์

จงหาผลบวกของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (A.P.) ต่อไปนี้

- 7) 11, 7, 3, 10 พจน์
- 8) 5, 8, 11, 14 พจน์
- 9) $\frac{4}{5}, 2, 3\frac{1}{5}, \dots$ 16 พจน์
- 10) 2.18, 3.08, 4.08, 10 พจน์
- 11) 6, 11, 16, 56 พจน์
- 12) 7, 4, 1, 12 พจน์

จงหาจำนวนพจน์ และผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

13) $6, 11, 16, \dots, 66$

14) $1, 3, 5, \dots, 49$

15) $35, 42, 49, \dots, 98$

16) $4, 3.9, 3.8, \dots, 2$

17) $50, 46, 42, \dots, -22$

18) $15, 11, 7, 3, \dots, -45$

19) ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรมเป็น $24 - 3n$ จงหาว่า

1. มีกี่พจน์ในอนุกรมนี้

2. พจน์ที่ 10 เป็นเท่าไร

3. ผลบวกของอนุกรมจนถึงสุดท้ายของอนุกรมนี้เป็นจำนวนบวกเป็นเท่าไร

20) อนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์ต้นเป็น 3 พจน์สุดท้ายเป็น 59 และผลบวกของอนุกรมเป็น 465 อนุกรมนี้มีพจน์กี่พจน์ จงเขียนอนุกรมนี้

2.4 การหาเฉลี่ยเลขคณิตของพจน์ของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (Arithmetic Means) ระหว่าง a และ b (ใช้ตัวย่อว่า A.M.)

สมมติให้อนุกรมเป็น a, A, b

ผลต่างร่วม

$$A - a = b - A$$

$$A = \frac{a + b}{2}$$

พจน์กลางระหว่าง a และ b คือ $A.M. = \frac{a + b}{2}$

การหามัชฌิมของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต n พจน์ (Arithmetic Means) ระหว่าง a และ b (ใช้ตัวย่อว่า A.Ms.)

ในอนุกรมมี $n+2$ พจน์

b เป็นพจน์ที่ $n+2$ ก็คือ $b = a + (n+1)d$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

อนุกรมนี้คือ $a, a + \frac{(b-a)}{n+1}, a + 2\frac{(b-a)}{n+1}, \dots, b$

3. พจน์กลางคือ $a + \frac{(b-a)}{n+1}, a + \frac{2(b-a)}{n+1}, a + \frac{3(b-a)}{n+1}$

ตัวอย่างที่ 6 หามัชฌิมพจน์เดียวของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (A.M.)

ระหว่าง 5.3 และ 9.1

$$\text{A.M.} = \frac{a+b}{2} \quad \text{เมื่อ } a = 5.3 \quad \text{และ } b = 9.1$$

$$= \frac{5.3 + 9.1}{2} = 7.2$$

ตัวอย่างที่ 7 หหาอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (A.P.) ซึ่งมีมัชฌิม 23 พจน์

ระหว่าง 1 และ 79

$$\text{ให้ } a \text{ เป็นพจน์ที่ } 1 = 1$$

$$b \text{ เป็นพจน์ที่ } 25 = 79$$

$$n \text{ เป็นจำนวนพจน์กลาง} = 23$$

และ d เป็นผลต่างร่วม

$$\text{ตามสูตร } d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{79-1}{24} = \frac{13}{4}$$

อนุกรมนี้คือ $1, 4\frac{1}{4}, 7\frac{1}{2}, 11\frac{3}{4}, \dots, 79$

แบบฝึกหัด 12 ค.

- 1) อนุกรมท้าวหน้าเลขคณิตอนันต์พจน์แรกเป็น 7 พจน์ที่ 16 เป็น 82 จงหาอนุกรม และจงหาผลบวกของอนุกรมดังกล่าวพจน์ที่ 16
- 2) ชายผู้หนึ่งทำการค้าขาย ปีแรกขาดทุน 2400 บาท ปีที่ 2 ขาดทุน 1600 บาท ปีที่ 3 ขาดทุน 800 บาท การค้าขายเช่นนี้เป็นอนุกรมในเวลา 12 ปี เขาจะทำการค้าขาดทุนหรือได้กำไรประการใด ถ้าขาดทุนจะขาดทุนเท่าไร ถ้าได้กำไรจะได้กำไรเท่าไร และในปีที่ 12 เขาจะได้กำไรหรือขาดทุนเท่าไร
- 3) นาย ก. จำลองจ้างมาคนหนึ่งสัญญาค่าจ้างปีละ 1200 บาท นาย ก. อนุญาตให้ลูกจ้างเลือกที่จะให้เงินเดือนเดือนละ 120 บาท หรือจะให้เงินเดือนเดือน 4 ครั้ง ๆ ละ 500 บาท ถ้าลูกจ้างทำงาน 17 ปี เขาควรจะเลือกการจ่ายเงินเดือนแบบไหน และเขาได้รับค่าจ้าง 17 ปี จะได้รับเงินทั้งหมดเท่าไร ถ้าเขาเลือกการจ่ายเงินเดือนทุกปี
- 4) ในห้องประชุมของโรงเรียน จัดเก้าอี้เป็นแถวโค้งวงเขาเวท แถวแรกมีเก้าอี้ 80 ตัว แถวที่ 2 มี 78 ตัว แถวที่ 3 มี 76 ตัว ทั้งหมดมี 10 แถวถึงแถวที่ 10 มีเก้าอี้กี่ตัว รวมแล้วห้องประชุมมีคนทั้งหมดกี่คน ถ้าการประชุมคราวหนึ่ง ๆ ผู้ประชุมนั่งเก้าอี้แยกกันคนละตัว
- 5) นาย ก. ทำงานปีแรกเก็บเงินเหลือใช้ไว้ได้ 1250 บาท ปีที่ 2 เก็บเงินเหลือใช้ไว้ได้ 2000 บาท ปีที่ 3 เก็บไว้ได้ 2750 บาท นาย ก.

ทำงานมาได้ 10 ปี เขาเก็บเงินทั้งหมดไว้ได้เท่าไร และในอีก 10
เขาเก็บเงินเหลือใช้ไว้ได้เท่าไร

- 6) ในอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิตอันดับหนึ่ง มีพจน์กลางระหว่าง $8.8x$ และ $-12.7x$ อยู่ 8 พจน์ จงหาอนุกรมอนันตน
- 7) จงหาผลต่างรวมเมื่อ
- พจน์กลางมี 8 พจน์ ระหว่าง p และ q
 - พจน์กลางมี 5 พจน์ ระหว่าง p และ q
 - พจน์กลางมี n พจน์ ระหว่าง p และ q
- 8) จงหาพจน์ที่ 15 ของอนุกรม A.P. น
- $$p + q, 2p + q, 3p + q$$
- 9) จงหาผลรวมของ A.P. ซึ่งมีพจน์ต้นเป็น $x + y$ พจน์ที่ 8 เป็น $3x - y$
- 10) ตั้งแต่ 1 ถึง 100 มีเลขคู่จำนวน และจำนวนเหล่านี้น รวมกันได้เท่าไร
- 11) รถยนต์คันโดยสารสองคันวิ่งระหว่าง เพชรบุรี—กรุงเทพ ส่วนทางกัน
คันหนึ่งออกจากกรุงเทพ ฯ ด้วยอัตราความเร็ว 24 กม. ใน ชม.
แรก ชม. ที่ 2 วิ่งอัตราเร็ว 28 กม. ชม. ที่ 3 วิ่ง 32 กม. ทวิ
ขนกันตามลำดับ คันที่สองออกจากเพชรบุรี วิ่งด้วยความเร็ว 40
กม. ใน ชม. แรก ชม. ที่ 2 วิ่งได้ 38 กม. ชม. ที่ 3 วิ่งได้
36 กม. สกกลงเป็นลำดับ เมื่อไรรถทั้งสองคันจึงจะสวนกัน ถ้าระยะ
ทางระหว่างกรุงเทพ ฯ และเพชรบุรียาว 198 กม. และรถทั้งสอง
ออกเดินทางพร้อมกัน

2.5 คุณสมบัติเพิ่มเติมเกี่ยวกับ A.P.

1. ถ้าเอาเลขจำนวนเดียวกันมาบวกหรือลบทุกพจน์ใน A.P. ผลยังเป็นอนุกรม A.P. และผลต่างร่วมเท่าเดิม
2. ถ้าเอาเลขจำนวนเดียวกันมาคูณหรือหารทุกพจน์ใน A.P. ผลยังเป็นอนุกรม A.P. และผลต่างร่วมเปลี่ยนไป

3 อนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิก

(Harmonic Progression)

เขียนย่อว่า H.P.

เลขหมู่หนึ่งมาจัดแยกเป็นพจน์เรียงกัน แต่ละพจน์เป็นส่วนกลับของแต่ละพจน์ในอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิตเช่น 3, 4, 5, เป็น A.P. ฉะนั้น $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ เป็นอนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิก (H.P.)

3.1. รูปทั่วไป (Standard form) เป็นส่วนกลับของแต่ละพจน์ใน A.P.

$$\text{คือ } \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \frac{1}{a+(n-1)d}$$

3.2 การหาเฉลี่ย 1 พจน์ ระหว่าง a และ b ในอนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิก (Harmonic Mean)

เขียนย่อว่า H.M.

ให้ H เป็นพจน์กลาง $\therefore$ อนุกรมคือ a, H, b

และ $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ เป็น A.P.

$$\text{A.M. คือ } \frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{a+b}{2ab}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์กลางของอนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิกพจน์เดียว
ระหว่าง $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{8}$

วิธีทำ ให้ $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{8}$ $H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{5}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์กลาง 8 พจน์ ของอนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิก
(H.P.) ซึ่งมีพจน์ต้น เป็น $\frac{1}{100}$ และพจน์ท้ายเป็น $\frac{1}{28}$

วิธีทำ พจน์ต้นใน เป็น $\frac{1}{100}$ ฉะนั้นใน A.P. เป็น 100
และพจน์ท้ายใน H.P. เป็น $\frac{1}{28}$ ใน A.P. เป็น 28 เป็น
พจน์ที่ 5

อนุกรมนี้มี 5 พจน์

ตามสูตร หา n พจน์กลางระหว่างเลข 2 จำนวน ใน A.P.

$$n = 3$$

$$\text{ผลต่างร่วม } d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{28-100}{4}$$

$$= \frac{-72}{4} = -18$$

อนุกรมก้าวหน้าเลขคณิตเป็น 100, 82, 64, 46, 28

อนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิกเป็น $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{82}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{46}$, $\frac{1}{28}$

มีทั้งหมด 3 พจน์คือ $\frac{1}{82}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{46}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 12 ง.

จงหาพจน์ที่เหลือของอนุกรมก้าวหน้าฮาร์โมนิก (H.P.) ต่อไปนี้

1) $\frac{1}{10}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \dots$ 8 พจน์

2) $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+2y}, \frac{1}{x+3y}, \dots$ 6 พจน์

3) $x+y, \frac{x^2-y^2}{x}, x-y, \dots$ 5 พจน์

4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \dots$ 7 พจน์

ใน (H.P.) มี 8 พจน์ จงหาพจน์กลางระหว่างเลขสองจำนวน

ดังต่อไปนี้

5) $\frac{1}{19}$ และ $\frac{1}{35}$

6) $\frac{0}{9}$ และ $\frac{2}{15}$

7) $\frac{1}{7}$ และ $-\frac{1}{21}$

8) $\frac{100}{408}$ และ $\frac{100}{316}$

9) $\frac{2}{21}$ และ $\frac{2}{27}$

10) 3 และ 15

4 อนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต

(Geometric Progression)

เขียนย่อว่า G.P.

เลขหมู่หนึ่งซึ่งเรียกเป็นพจน์เรียงลำดับกัน โดยพจน์หลังเกิดจาก

พจน์หน้าคูณด้วยค่าคงที่เรียกว่าอัตราส่วนคงที่หรือเรียกย่อว่า ร.ก. เช่น

1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ พจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าด้วยการ
คูณด้วย $\frac{1}{3}$

และ 1, 3, 9, 27 พจน์หลังเกิดจากพจน์หน้าด้วยการ
คูณด้วย 3

เป็นต้น จำนวนคงที่ ๆ เป็นตัวคูณ เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common Ratio)

4.1 รูปทั่วไป (Standard form)

เมื่อ a เป็นพจน์ต้น r เป็นอัตราส่วนร่วม และ n เป็นจำนวนพจน์
พจน์ที่ n คือ $T_n = ar^{n-1}$

4.2 รหัสอัตราส่วนร่วม $\frac{T_2}{T_1}$ หรือ $\frac{T_3}{T_2}$ คืออัตราส่วนร่วม r

4.3 การหาผลบวกถึง n พจน์ของอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต (S_n)

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$(1-r) S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

4.4 การหาผลบวกอนันต์ (S_∞) ทำได้เมื่อ r มีค่าตัวเลขน้อยกว่า 1
คือ $|r| < 1$ (อ่านว่า absolute r น้อยกว่า 1)

เมื่จำนวน n มากขึ้น r^n ก็จะมีค่าตัวเลขน้อยลง

เมื่อจำนวน n เป็นจำนวนมากใกล้ ∞ r^n ก็จะมีค่าตัวเลขน้อยลง

จนเป็น 0

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

4.5 การหาผลคูณ 1 พจน์ในอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต ระหว่าง a และ b
ให้ a, G, b เป็นอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต

$$\text{อัตราส่วนรวม } \frac{G}{a} = \frac{b}{a}$$

$$G^2 = ab$$

$$G = \sqrt{ab}$$

4.6 การหาผลคูณ n พจน์ในอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต ระหว่าง a และ b

ในอนุกรม $n+2$ พจน์ b เป็นพจน์ที่ $n+2 = ar^{n+1}$

$$b = ar^{n+1} \cdot r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

อนุกรมคือ $a, a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \dots, b$

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าอัตราส่วนรวม พจน์ที่ 10 และผลบวกของพจน์ที่ 10

ของอนุกรม 2, 4, 8

วิธีทำ อนุกรม 2, 4, 8,

อัตราส่วนรวมคือ $r = \frac{4}{2} = 2$

พจน์ต้นคือ $a = 2$

พจน์ที่ 10 $= ar^9 = 2 \times 2^9 = 1024$

$$\begin{aligned} \text{ผลบวกของอนุกรมอนันต์บนดงพจนท 10 คือ } S_{10} &= \frac{a(r-1)}{r-1} \\ &= \frac{2(2-1)}{2-1} \\ &= 2046 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอัตราส่วนร่วม และผลบวกอนันต์ของ $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

วิธีทำ $r = \frac{1}{2}$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาพจน์กลาง 5 พจน์ ของอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต
เมื่อพจน์คนเป็น $\frac{1}{5}$ และพจน์ท้ายเป็น $\frac{1}{405}$

วิธีทำ อนุกรมนมี 7 พจน์ $\frac{1}{405}$ เป็นพจน์ที่ 7

$$ar^6 = \frac{1}{405}$$

$$r^6 = \frac{1}{405} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{81 \times 9}$$

$$r^6 = \frac{1}{3^6}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

$$\text{อนุกรมนเป็น } \frac{9}{5}, \frac{5}{5}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{405}$$

$$\text{พจน์กลาง 5 พจน์ คือ } \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{45}, \frac{1}{135}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงทำ $.4\dot{3}\dot{5}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีทำ $.4\dot{3}\dot{5} = .435353535 \dots$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{10} + \frac{35}{1000} + \frac{35}{100000} + \frac{35}{10000000} \\
&\quad + \frac{35}{100000000} \dots\dots\dots \\
&= \frac{4}{10} + \frac{35}{1000} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1000000} \dots\dots\dots \right) \\
&= \frac{4}{10} + \frac{35}{1000} \left(\frac{1}{1-1/100} \right) \\
&= \frac{4}{10} + \frac{35}{1000} \times \frac{100}{99} \\
&= \frac{4}{10} + \frac{35}{990} \\
&= \frac{481}{990}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ ๑๒ จ.

จงหาอัตราส่วนร่วม พจน์สุดท้าย และผลบวกของพจน์สุดท้าย ของ
อนุกรมต่อไปนี้

- 1) $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \dots\dots\dots$ 10 พจน์
- 2) $2, 4, 8, 16 \dots\dots\dots$ 7 พจน์
- 3) $.5, .25, .125 \dots\dots\dots$ 8 พจน์
- 4) $64, 16, 4 \dots\dots\dots$ 6 พจน์
- 5) $1, .1, .01, .001 \dots\dots\dots$ 5 พจน์
- 6) $x^2 - y^2, x^3 - y^3, x^4 - y^4 \dots\dots\dots$ n พจน์

จงหาผลรวมอนันต์ ของอนุกรมต่อไปนี้

- 7) $.3, .03, .003, \dots$
- 8) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$
- 9) $\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots$
- 10) $\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, -\frac{1}{x^4}, \dots$
- 11) $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \dots$
- 12) $a, ab, ab^2, ab^3, \dots$
- 13) จงหา G.P. เมื่อ $S_\infty = 4$ และพจน์แรกเป็น 2
- 14) จงหา G.P. เมื่อพจน์แรกเป็น 2 เท่าของผลรวมอนันต์ ซึ่งนับตั้งแต่พจน์ที่ 2 ไป และพจน์ที่ 5 เป็น $\frac{1}{8}$
- 15) ในการเช่าซื้ออาคารสังเคราะห์ ชัยแรกเสียค่าเช่าเดือนละ 1000 บาท ปีที่ 2 เสียค่าเช่าลดลง 10% ปีที่ 3 เสียค่าเช่าลดลงอีก 10% ของปีที่ 2 กำหนดเวลา 5 ปี จะไม่คงเสียค่าเช่าซื้ออาคารสังเคราะห์ตลอดจนออกเมื่อรวมค่าแล้ว ผู้เช่าจะเช่าซื้ออาคารสังเคราะห์ลงนานเป็นเงินทั้งหมดเท่าไร
- 16) ในเมืองหนึ่งมีพลเมือง 100,000 คน ถ้าพลเมืองเพิ่มขึ้น 10% ทุก ๆ 4 ปี คงทนในเวลา 24 ปีต่อมา พลเมืองของเมืองนั้นจะรวมทั้งหมดเท่าไร
- 17) ทึกคนแห่งหนึ่งเมื่อ 24 ปีมาแล้ว ราคาไร่ละ 2000 บาท ต่อมาทุก 8 ปี ราคาเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของราคาของ 8 ปีที่ผ่านมาเสมอ ฉะนั้นขณะนี้คนรายนั้นเป็นเท่าไร

- 18) รังทำเลขต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วนสำเร้ง ก. .417 ข. .312 ค. .531
 ง. 2.145 จ. 1.23 ฉ. .0424

5. สหอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต

(Allied Series of A.P.)

พจน์ต่าง ๆ ในอนุกรม A.P. ตั้งแต่ 2 อนุกรมขึ้นไป คูณกัน พจน์
 ต่อพจน์ เกิดเป็นอนุกรมใหม่เรียกว่า สหอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต เช่น

$$1, 2, 3, 4, \dots \text{ เป็น A.P.}$$

$$3, 5, 7, 9, \dots \text{ เป็น A.P.}$$

$$2, 3, 4, 5, \dots \text{ เป็น A.P.}$$

$$1.3.2, 2.5.3, 3.7.4, 4.9.5, \dots \text{ เป็นสหอนุกรมของ A.P.}$$

5.1 การหาสูตรของ $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$

$\sum n$ (อ่านว่า Sigma n) คือ ผลรวมของ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ ถึง
 n พจน์ หรือ S_n

$$\sum n = S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n}{2} (n + 1)$$

$$\therefore \sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

$$\text{พิสูจน์ } n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$$

(แทนค่า n ด้วย $n-1$)

$$(n-2)^3 - (n-3)^3 = 3(n-2)^2 - 3(n-2) + 1$$

(แทนค่า n ด้วย $n-2$)

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$n^3 = 3En^2 - 3En + n$$

$$\begin{aligned} 3Mn^2 &= n^3 + 3En - n \\ &= n^3 + \frac{3n}{2}(n+1) - n \end{aligned}$$

$$Mn^2 = \frac{n}{6} [2n^2 + 3n + 3 - 2]$$

$$= \frac{n}{6} (2n+1)(n+1)$$

$$Mn^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$$

พิสูจน์ว่า Mn^3

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

$$\begin{aligned} (n-1)^4 - (n-2)^4 &= 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 \\ &\quad + 4(n-1) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n-2)^4 - (n-3)^4 &= 4(n-2)^3 - 6(n-2)^2 \\ &\quad + 4(n-2) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n-3)^4 - (n-4)^4 &= 4(n-3)^3 - 6(n-3)^2 \\ &\quad + 4(n-3) - 1 \end{aligned}$$

$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 1$$

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$$

$$1^4 - 0^4 = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$$

$$n^4 = 4En^3 - 6En^2 + 4En - n$$

$$4En^3 = n^4 + 6En^2 - 4En + n$$

$$= n^4 + \frac{6n}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{4n}{2}(n+1) + n$$

$$= n[n^3 + 2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1]$$

$$En^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{2}$$

แบบฝึกหัดข้อที่ 12 ฉ.

กำหนดพจน์ที่ n ให้ดังต่อไปนี้ จงหาผลบวกของ n พจน์

1) $2n - 3$

2) $n^2 + 2n - 5$

3) $n(n+1)(2n-1)$

4) $n - 3^n$

5) $\frac{n(2n-1)(n+2)}{2}$

6) $(n-4)(n+1)$

7) $(3n-2)(n+1)$

8) $n^3 - 3n - 2$

9) $2^n - 3n - 5$

10) $4^n - 3n^2 - 2n + 3$

จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้ถึง n พจน์

11) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 5 + \dots$

12) $3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + 7 \cdot 9 \cdot 11 + \dots$

13) $1 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 10 + 5 \cdot 7 \cdot 12 + \dots$

$$14) \quad 2, 3, 4 + 3, 4, 5 + 4, 5, 6 + \dots$$

6. Arithmetico Geometric Series (A.G.P.)

พจน์ในอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต และพจน์ในอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต มาคูณกันพจน์ต่อพจน์ เกิดเป็นพจน์ในอนุกรมใหม่ เรียกว่า Arithmetico Geometric Series

1, 2, 3, 4, เป็นอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต

$\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ เป็นอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต

$\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \dots$ เป็นอนุกรม (Arithmetico Geometric Series)

6.1 รูปทั่วไป (Standard form)

$a, (a + d)r, (a + 2d)r^2, (a + 3d)r^3, \dots, [a + (n + 1)d]r^{n-1}$
 เมื่อ a เป็นพจน์ต้น d เป็นผลต่างร่วม r เป็นอัตราส่วนร่วม

6.2 การหาผลบวกถึง n พจน์ของ A.G.P.

$$S_n = a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + \dots + [a + (n - 2)d]r^{n-2} + [a + (n - 1)d]r^{n-1}$$

$$rS_n = ar + (a + d)r^2 + \dots + [a + (n - 2)d]r^{n-1} + [a + (n - 1)d]r^n$$

$$(1 - r)S_n = a + dr + dr^2 + \dots + dr^{n-1} - [a + (n - 1)d]r^n$$

$$= a + dr \left[\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} \right] - [a + (n - 1)d]r^n$$

$$S_n = \frac{a}{1 - r} + dr \left[\frac{1 - r^{n-1}}{(1 - r)^2} \right] - \frac{[a + (n - 1)d]r^n}{1 - r}$$

6.3 การหาผลรวมอนันต์ หาได้เมื่อ $|r| < 1$

เมื่อ n มีจำนวนมากขึ้น r^n มีค่าเข้าใกล้ 0 และเมื่อ n มีจำนวนมากขึ้นใกล้ 0 รวมค่าตัวเลขเข้าใกล้ 0

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลรวมอนันต์ของ

$$1 + 3a + 5a^2 + 7a^3 + \dots$$

วิธีทำ $S_n = 1 + 3a + 5a^2 + 7a^3 + \dots + (2n-1)a^{n-1}$

$$aS_n = a + 3a^2 + 5a^3 + \dots + (2n-3)a^{n-1} + (2n-1)a^n$$

$$(1-a)S_n = 1 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + \dots + 2a^{n-1} - (2n-1)a^n$$

$$(1-a)S_n = 1 + \frac{2a(1-a^{n-1})}{1-a} - (2n-1)a^n$$

$$S_n = \frac{1}{1-a} + \frac{2a(1-a)^{n-1}}{(1-a)^2} - \frac{(2n-1)a^n}{(1-a)}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลรวมอนันต์ของ $1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{11}{27} + \dots$

วิธีทำ พจน์ต้นคือ $a = 1$ $d = (4-1) = 3$ $r = \frac{1}{3}$

$$S = 1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{11}{27} + \dots$$

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{27} + \dots$$

$$\frac{2}{3}S = 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{9} + \frac{3}{27} + \dots$$

$$\frac{2}{3} S_{\infty} = 1 + \frac{1}{\frac{1-1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore S_{\infty} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 2 ข.

จงหาผลรวมอนันต์ของอนุกรมต่อไปนี้

1) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

2) $1 + \frac{5}{3} + \frac{9}{3^2} + \frac{13}{3^3} + \dots$

3) $1 + \frac{3}{5} + \frac{5}{25} + \frac{7}{125} + \dots$

4) $a + (2a + 1)x + (3a + 2)x^2 + (4a + 3)x^3 + \dots$

5) $p + \frac{2p}{q} + \frac{3p}{q^2} + \dots$

จงหาผลรวมถึง n พจน์ เมื่อกำหนดพจน์ที่ n ดังต่อไปนี้

6) $(2n + 3) 2^n - 1$

7) $(n + 1) 3^n$

8) $n 2^n$

9) $(n + 2) \frac{1}{2^n}$

10) $\frac{(2n + 1)}{9^n}$

วิธีตรวจอนุกรม

สมมติ a, b, c เป็นอนุกรมหนึ่ง

ถ้า $\frac{a-b}{b-c} = 1$ ทราบว่า a, b, c เป็น A.P.

ถ้า $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ ทราบว่า a, b, c เป็น G.P.

ถ้า $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ ทราบว่า a, b, c เป็น H.P.

แบบฝึกหัดระดับคน

- 1) จงหาผลรวมถึง n พจน์ของอนุกรม $1 + (1+a)r + (1+a+a^2)r^2 + (1+a+a^2+a^3)r^3 + \dots$
- 2) จงหาผลรวมถึง n พจน์ เมื่อพจน์ที่ p เป็น $(2p+1)$
- 3) ถ้า A.M. ระหว่าง p และ q เป็น 2 เท่าของ G.M. ระหว่าง p และ q จงพิสูจน์ว่า $p:q = 2 + \sqrt{3} : 2 - \sqrt{3}$
- 4) ถ้า m เป็น H.M. ระหว่าง k และ n จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{m-k} + \frac{1}{m-n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$
- 5) ถ้า 4, 8, 16 เป็น G.P. จงพิสูจน์ว่า ในอนุกรม A.P. ซึ่งมีพจน์ที่ 4 พจน์ที่ 8 พจน์ที่ 16 เป็น H.P. จะมีพจน์แรกและผลต่างร่วมเป็น อัตราส่วนเท่ากับ $\frac{9}{1}$
- 6) ถ้าพจน์ที่ $(k+1)$, $(m+1)$ และ $(n+1)$ ของ A.P. เป็น G.P. k, m, n เป็น H.P. จงพิสูจน์ว่าอัตราส่วนของผลต่างร่วมและพจน์แรกของ A.P. เป็น $-\frac{2}{m}$
- 7) จงหาผลรวมของอนุกรมต่อไปนี้ถึง 10 พจน์ เมื่อพจน์ที่ P เป็น $4p(p^2+1) - (6p^3+1)$
- 8) ถ้า p, q, r เป็น H.P. จงพิสูจน์ว่า $\frac{p}{p-q} = \frac{p+r}{p-r}$

- 9) เมื่อนายศักดิ์อายุ 16 ปี เขามีรายได้ปีละ 1500 บาท และทุก ๆ ปี เขามีรายได้เพิ่มจากปีก่อนหน้านั้น ปีละ 1000 บาท ดังนั้น
- ก. เมื่อนายศักดิ์อายุ 25 ปี เขามีรายได้ปีละเท่าไร
- ข. ถ้าเขามีรายได้ปีละ 25500 บาท เขามีอายุเท่าไร
- ค. ถ้าเมื่ออายุเขาได้ 16 ปี เขาเก็บเงินได้ปีละ 100 บาท และเมื่อรายได้ของเขาเพิ่มขึ้น เขาเก็บเงินไว้ได้เพิ่มขึ้นจากปีก่อนหน้านั้น 10% ทุกปี เขามีรายได้เก็บไว้เท่าไรเมื่อเขาอายุ 20 ปี
- 10) อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมอะไร
- ก. 1.10, 1.85, 1.60
- ข. 6, 9, 18
- ค. 1, (1+2), (1+2+2²), (1+2+2²+2³),
- 11) จงหาผลรวมของข้อ 10 ถึง n พจน์ (ถ้าเฉพาะข้อ 10 ก. และ 10 ค.)
- 12) จงหาผลบวกถึง n พจน์ ของอนุกรม 5, 55, 555, 5555,

แบบฝึกหัดระดับบุคคลที่ 1

1. พหุคูณสามเหลี่ยมแปรผันตรงตามความยาวของฐาน เมื่อส่วนสูงคงที่ และแปรผันตรงตามส่วนสูง เมื่อฐานคงที่ ถ้าพหุคูณสามเหลี่ยมเป็น

180 ตารางเมตร เมื่อดึง 12 เมตร ข้างยาว 80 เมตร จงหาความ
ยาวของฐาน เมื่อดึง 120 ตารางเมตร สูง 10 เมตร และหา
ส่วนสูงเมื่อฐานยาว 16 เมตร

2. จงแก้สมการ $x^3 - 8x^2 - 55x + 350 = 0$

3. จงแก้สมการ $\frac{2a-8b}{5} = 1, 15a-2b = 17$

4. จงหาค่าของ $\left(\frac{51.0087}{.00078}\right)^{\frac{2}{5}}$

5. จงหาค่าของ $x^2 - 2x \quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

6. จงทำให้สำเร็จ ก. $\sqrt{14-6\sqrt{5}} \div (\sqrt{5}+1)$

ข. $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{250} - 7\sqrt[3]{248} - 3\sqrt[3]{54}$

7. จงหาค่าของ $(x+y) \div \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)$

8. จงแก้สมการ $x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 2x} - 2 = 0$

9. ถ้า x แปรผันตาม y และ $z^{\frac{1}{2}}$ และ $x = 220, y = 24, z = 4$

หา x เมื่อ $y = 27, z = 16$

10. จงแก้สมการ $x^{\frac{4}{3}} + 14 = 9x^{\frac{2}{3}}$

11. จงหา x ถ้า $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5} = \sqrt{5x-6}$

12. จงหาค่าของ $2x+1 - 2\sqrt{x^2+x-2}$

13. จงหาค่าของ ก. $\log \left(\frac{98}{34} \div \frac{62}{265}\right)$

ข. $(11 \times 87)^{\frac{7}{10}}$

$$ก. \sqrt[3]{\frac{6.58 \times 8.01}{.0034}}$$

$$ง. (1552)^{\frac{1}{5}}$$

14. จงหา x จากสมการ $3^{x+1} = 20^{x-2}$

15. จงทำให้สำเร็จ $\left(\frac{x^{\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{2}}}{x^4 b^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} b}{x^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}}\right)^2$

16. จงหาค่าของ $\frac{8^{n+2} - 8 \cdot 8^{n-1}}{8^{n+1} \times 9}$

17. จงแก้สมการต่อไปนี้จนกว่าจะพบคำตอบ

1. $3x - y = 6, x + 2y = 5$

2. $2x + y = 5, 6x - 5y = 1$

18. จงแก้สมการ $\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{3}{x}} = \sqrt{\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{2}}$

19. จากตาราง logarithm จงหาค่าของ

I. $(29)^{\frac{10}{11}}$ II. $(287.1)^{\frac{7}{9}}$

20. จงหากรณพหุคูณของ $5a + x + 2 \sqrt{6a^2 + 5ax - 6x^2}$

21. จงแก้สมการ I. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = 0$

II. $18x^3 + 25x^2 - 3x = 0$

22. ค่าใช้จ่ายของโรงเรียนแห่งหนึ่งแบ่งเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่งคงที่
ส่วนหนึ่งแปรผันตามจำนวนนักเรียน ถ้ามีนักเรียน 500 คน สิ้นค่า
ใช้จ่าย 450 บาท ถ้ามีนักเรียน 700 คน สิ้นค่าใช้จ่าย 510 บาท ถ้า

๕
 สิ้นค่าใช้จ่าย 600 บาท จะมกเรียนกคน และถามนกรเรียน 1500 คน
 ๕
 จะสิ้นค่าใช้จ่ายเท่าไร

23. จงหากรณค่าทั้งสองของ I. $20 - 6\sqrt{11}$

II. $14 - 5\sqrt{3}$

24. จงแก้สมการ $1 + a = (1 + ab) \frac{1 + px}{1 + qx}$

25. จงพิสูจน์โดยไม่ว่าต้องใช้ตาราง logarithm ว่า

$$2(\log \sqrt{125} + \log 27 - \log \sqrt{1000}) = 3(2 \log 3 - \log 2)$$

26. จงแก้สมการ I. $x^3 - 7x - 6 = 0$

II. $2x + 3y - z + 14 = 0$

$$3x + 2y + 2z - 7 = 0$$

$$x + 5y - 3z + 15 = 0$$

27. กำหนด $\log 5 = 0.6990$, $\log 7 = 0.8451$ จงหาค่าต่อไปนี้
 โดยไม่ว่าต้องใช้ตาราง logarithm I. $\log 2$ II. $\log 280$

28. จงแก้สมการ I. $3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right) - 4\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) = 5\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\right)$

II. $\frac{3x + 2y}{2x + 3y} = \frac{59}{71}$, $3x - y = 2$

29. จงหาค่าของ $\frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$ ถ้า $\frac{x^2}{y^2} = \frac{27.45}{7.69}$

30. จงเขียนตามแบบพหุนาม y แปรผันตรงตาม x และแปรผกผันกับ z^2
 ถ้า $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ หาค่าคงที่ และหา x เมื่อ $y = 4$, $z = 3$

31. จงเขียนกราฟของ $y = x^2$ จากกราฟ

I. หาค่าของ $(1.2)^2$, $(1.6)^2$ $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$

II. แก้สมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$

32. I. จงพิสูจน์ว่า $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

II. ถ้า $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ จงหาค่าของ $\log 5$, $\log 6$, $\log 12$
ในเทอมของ a และ b โดยไม่ต้องใช้ตาราง $\log$

33. จงหาค่าของ $(\sqrt{2^3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}})(\sqrt{2^3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}})$

34. จงหากรณาคาทศสองของ $x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 9 - 12x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-1}$

35. จงแยกตัวประกอบ I. $x^8 - 1$

II. $x^6 + 8x^4 - x^3 - 8$

36. จงแก้สมการ I. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 11$, $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1$

II. $x^3 + y^3 = 152$

$x^2y + xy^2 = 120$

37. จงพิสูจน์ว่า $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

หาค่าของ $\sqrt[3]{a^3x^2} \times \sqrt[3]{2ax^3} \times \sqrt[3]{4a^2x}$

หาค่า $\sqrt[3]{2744}$

38. จงหาค่าของ $\sqrt{27} + \sqrt{8} - 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{10+\sqrt{84}}$

39. จงหาค่า I. $(1 - 27a^{-6}) \div (1 - 3a^{-2})$

II. $\frac{x^{\frac{3}{2}} + xy}{xy - y^3} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$

40. ถ้า y แปรผันตรงกับ $A+B$ และ A แปรผันตรงกับ x^2 B แปร
ผกผันกับ z ถ้า $y = 16$ เมื่อ $x = 2$, $z = 1$ ถ้า $y = 5$ เมื่อ
 $x = 1$, $z = 2$ จงหา y เมื่อ $x = 3$ และ $z = 2$.

41. ชายผู้หนึ่งซื้อสต็อกชนิด 8% 6500 บาท ราคา 97 กึ่งนั้น เขาจะ
ต้องจ่ายเงินซื้อสต็อกจำนวนเท่าไร และ เขาจะได้รับเงินปันผลยี่สิบ
เท่าไร
42. คนมีเงินอยู่ 5625 บาท ingsลงทุนซื้อสต็อกชนิด $4\frac{1}{2}\%$ สต็อกราคา
125 คนจะได้รับเงินปันผลยี่สิบเท่าไร
43. คนมีสต็อกชนิด 8% อยู่จำนวนหนึ่ง คนต้องการจะขายมันหลังหนึ่ง
ราคา 68000 บาท คนจะต้องขายสต็อกคนราคา 90 ขยาก็ทราบว่า
คนจะต้องขายสต็อกออกเป็นจำนวนเท่าไร
44. ราคาพันธบัตรของรัฐบาลที่คืนเงินแล้วขายออกเป็นราคา 94 ใน
พันธบัตรใบละ 100 บาท ปรากฏว่า นายแกลงซื้อไปจากคน พันธบัตร
รัฐบาลนี้ เงินปันผล 8% นายแกลงได้รับเงินปันผลยี่สิบเท่าไร
4000 บาท ขยาก็ทราบว่า คนขายพันธบัตรแก่นายแกลงไปเป็นจำนวน
เงินในพันธบัตรเท่าไร และได้รับเงินจริงเท่าไร
45. คนซื้อหุ้นของบริษัทรถยนต์แห่งหนึ่งราคามูลค่าหุ้น ๆ ละ 50 บาท แต่
ราคาขายของบริษัทนี้นั้น 20% ของราคามูลค่าหุ้น ฉะนั้น ถ้าคนซื้อ
หุ้นบริษัทนี้ 200 หุ้น คนจะต้องเสียเงินแก่บริษัทไปเท่าไร และคนจะ
ได้รับเงินปันผลเท่าไร ถ้าบริษัทนี้ปันผล 8%
46. บริษัท ก. วัตถุประสงค์ 500000 บาท แบ่งออกเป็น 1000 หุ้น มูลค่า
หุ้น ๆ ละ 500 บาท ปรากฏว่า บริษัทเรียกเงินหุ้นเพียง 25% ของ
มูลค่าหุ้น และในบริษัท

1) นาย ข. ช้อหุ้น 200 หุ้น นาย ข. จะต้องคืนเงินช้อหุ้น
เท่าไร และถ้าสินบย บริษัทยายเงินปันผล 15% นาย ข. จะไ้รับเงิน
ปันผลเท่าไร

2) นายปรีชา ช้อ 500 หุ้น จะต้องคืนเงินเท่าไร ถ้ายทนาย
ปรีชาช้อ บริษัทยายเงินปันผลเพียง 10% นายปรีชา จะไ้รับเงินปันผล
เท่าไร

3) บริษัท ก. เกิดขาดทุน จะต้องเรียกค่าหุ้นเพิ่มเติม สมมติ
ว่า บริษัท เรียกอก 5% ทงนายปรีชา และนาย ข. จะต้องเสีเงินให้
แก่บริษัทเพิ่มขนอีกคนละเท่าไร

4) นาย ข. ขายหุ้นให้แก่นายปรีชา ก่อนทจะถูกเรียกค่าหุ้น
เพิ่มจาก 25% ทขายไปแล้วเพียงหุ้นละ 24% ของมูลค่าหุ้น อยาก
ทราบว่า นาย ข. ขายหุ้นไปเท่าไร และถ้านาย ข. นำเงินทขายไ้ไป
ช้อสต็อคชนค 5% ราคา 80 อยากทราบว่านาย ข. จะไ้รับเงินปันผล
แตกต่างจากเมอริบในข้อ 1) เท่าไร

แบบฝึกหัดระคนชุดที่ 2

1. ้งหาตัวประกอบของ $15x^2 + 4xy - 3y^2 + 31x - y + 14$
2. ถ้า $x^4 + ax^3 + 5x^2 + bx + 6$ ทารก้วย $x - 2$ และ $x + 1$ ไ้ถึง
ทัวพอท ้งหาค่าของ a และ b
3. ักววยกราฟ้งหาค่าของ x และ y ททำให้ $2x + 3y + 1 = 0$ และ
 $3x + y - 1 = 0$

4. งามหาตัวประกอบของ

1. $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$

2. $24x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

3. $105x^3 + 41x^2 - x - 1$

4. $8x^4 - 28x^3 - 62x^2 + 7x + 15$

5. $x^3 - x^2(a - b + c) - x(ab - ac + bc) + abc$

5. งามแก้สมการ $6y^2 + 5xy - 299 = 0$, $5x + 4y = -3$

6. ถ้าเทอมที่ n ของอนุกรมทวินามเท่ากับ $3n + 4$ งามหาผลบวกถึง n เทอมของอนุกรม

7. งามหารากกำลังที่สองของ $14 - 5\sqrt{3}$

8. งามแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $9x^2 - 25y^2$

2. $x^2 - 2x - 63$

3. $a^2 + 2bc - ab - 2ac$

4. $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz$

9. ถ้า $x = 4a^2 + 3ab + b^2$ และ $y = 2(a^2 - 2ab - b^2)$ งามแยกตัวประกอบของ $x^2 - y^2$ เป็น 4 แฟกเตอร์

10. ค่าอัตราการลดฮกการทมหาคำของ w เมื่อ $w = CR + \frac{t^2}{R}$ เมื่อ

$R = .044$, $C = 41.1$ และ $t = 1.8$

11. งามหาคำของ $\sqrt{\frac{x^2 - 4y^2}{xy}}$ ถ้า $x = 48.79$, $y = 17.16$

12. จงเขียนกราฟของ $y = \frac{7}{4} - x - x^2$ เมื่อ มีค่าระหว่าง -8 และ

2 จากกราฟ

1. x มีค่าเท่าไรเมื่อฟังก์ชันเป็นบวก

2. จงหารากของสมการ $4x^2 + 6x - 1 = 0$

18. จงแก้สมการ

1. $\frac{2x+y}{x+3y} = -\frac{4}{3}$, $7x+36y = -8\frac{1}{2}$

2. ถ้า $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ หาค่าของ $\frac{3x-2y}{3x+2y}$

14. จงพิสูจน์ว่า $(x^2 - 7x + 12)(x^2 + 7x + 12) = (x^2 - 16)(x^2 - 9)$

15. จงพิสูจน์ว่า $2x + 3a$ เป็นตัวประกอบของ $4x^3 + 4ax^2 - 15a^2x - 18a^3$
หาตัวประกอบอื่น ๆ

16. 1. หาผลบวกถึง 27 เทอมของอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต ถ้าเทอม
ที่สามเท่ากับ 27 และเทอมที่สิบสี่เป็น 9

2. ผลบวกของอนุกรมก้าวหน้าเรขาคณิต 8 เทอม ทัดต่อกันเป็น 52
และกำลังสองของเทอมกลางเป็น 4 เท่าของเทอมท้าย จงหาค่าของ
8 เทอม

17. จงหาค่าของ x จากสมการ

1. $12x^3 - 20x^2 - x + 6 = 0$

2. $3(x-3)^2 - 16(x-3) - 35 = 0$

18. จงเขียนกราฟของ $y = x^3$ จากกราฟ

1. จงอ่านค่าของ $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{12}$

2. จงแก้สมการ $x^3 - x^2 - 6x = 0$

19. ถ้า $\frac{3x+2}{(x-1)^2(2x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2x-3}$

จงหา A, B, C

20. ถ้า α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จงพิสูจน์ว่า
 $(a\alpha + b)(a\beta + b) = -ac$ จงหาสมการที่มีรากเท่ากับ $a\alpha + b$

และ $a\beta + b$

21. ถ้า $x^2 + ax + b = 0$ และ $x^2 + mx + n = 0$ มีรากหนึ่งร่วมกัน
 จงพิสูจน์ว่ารากนอกเท่ากับ $\sqrt{\frac{an-bm}{m-a}}$ หรือเท่ากับ $\frac{b-n}{m-a}$

22. จงแยกตัวประกอบ $12x^2 + 7xy - 12y^2 - 23x + 61y - 77$

23. จงเขียนกราฟของ $x^2 + 2x - 8$ จากกราฟจงหาว่า

1. เมื่อไรฟังก์ชัน $x^2 + 2x - 8$ เป็นบวกเมื่อไรเป็นลบ

2. หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

3. หาค่า x เมื่อฟังก์ชันน้อยกว่าศูนย์ และ 2 (ตอบทั้งนิยาม
 2 ตำแหน่ง)

24. คุณมีเงิน 100,000 บาท คุณไปซื้อพันธบัตรรัฐบาล ได้เงินปันผลใน
 อัตรา 8% ในระยะแรก แล้วคุณขายออกเสียครึ่งหนึ่งของจำนวน
 พันธบัตรหมดอายุ ด้วยราคา 90 ต่อพันธบัตรใบละร้อยบาท แล้วนำเงินไป
 ซื้อหุ้นสต็อกของบริษัทซีเมนต์ ชนิด 4% ราคา 110 อีกครึ่งหนึ่งของ
 พันธบัตร คุณขายออกด้วยราคาเท่าทุน แล้วนำไปซื้อหุ้นบริษัทยาง
 หินละ 1000 บาท ในอัตรา 90% ของราคามูลค่าหุ้น แต่คุณได้รับ
 เงินปันผล 8% อยากทราบว่า คุณได้เงินปันผลเพิ่มขึ้นหรือลดลง
 กว่าเมื่อคุณได้รบจากการซื้อพันธบัตรเท่าไร

25. เมื่อฉันไปฟิลิปปินส์ ฉันซื้อสต็อกของบริษัท มาริทิมา เป็นราคา 120 เปโซ ฉันอยากทราบว่าอัตราปันผลที่ฉันได้รับจากสต็อกของบริษัทนั้นเป็นเท่าไร เมื่อฉันซื้อสต็อกไว้ 500 เปโซสต็อก พอลงบริษัทแจ้งมาให้ฉันทราบว่า ฉันได้รับเงินปันผล 15 เปโซ และฉันได้รับเงินปันผลเป็นเปอร์เซ็นต์เท่าไรในเงินที่ฉันลงทุนไป
26. จงคำนวณหาว่า ฉันลงทุนซื้อพันธบัตรของรัฐบาล อัตราดอกเบี้ย 8% ใต้พันธบัตร 75000 บาท ฉันจะได้อะไรเงินปันผลปีละเท่าไร
27. ฉันมีหุ้นบริษัทของบริษัทยาพลาสติกแห่งหนึ่ง เป็นจำนวนเงิน 14500 บาท อัตราปันผล $2\frac{3}{4}\%$ ฉันจะได้อะไรรายได้เท่าไรจากหุ้นนี้
28. ฉันลงทุนซื้อสต็อก ราคาตลาด 91 ไปเป็นเงินทั้งหมด 8800 บาท อัตราปันผล $9\frac{1}{4}\%$ ฉันได้รับเงินปันผลทุกครึ่งปี ริงอยากทราบว่าเงินปันผลคราวหนึ่ง ๆ นั้น เป็นเท่าไร
29. ฉันลงทุน 8940 บาทซื้อหุ้นบริษัททำเครื่องอุปโภคไฟฟ้า อัตราปันผล $2\frac{3}{4}\%$ ราคาตลาดซื้อขายหุ้นเป็น $111\frac{8}{4}$ รวมทั้งค่านายหน้าในการซื้อขายด้วย
จงหา

1) จำนวนหุ้นที่เขาจะได้

2) จำนวนเงินรายได้ที่ได้รับจากการปันผล

30. ในวันที่ 1 มกราคม 2504 ราคาหุ้นของบริษัททำเครื่องอุปโภคไฟฟ้าเป็น $94\frac{1}{8}$ อัตราปันผล $2\frac{1}{2}\%$ และราคาหุ้นของบริษัททำเครื่องใช้พลาสติก

เป็น 96 อัตราปันผล $2\frac{1}{2}\%$ ฉันมีเงินอยู่ 16000 บาท อยากจะลงทุน
ซื้อหุ้นเหล่านี้ แต่ยังไม่สามารถตัดสินใจได้ว่า จะซื้อหุ้นของบริษัท
อะไรจึงจะได้เงินปันผลมากกว่ากัน ฉะนั้น นักเรียนจึงช่วยคำนวณดูว่า
ฉันควรจะซื้อหุ้นของบริษัทอะไรดี เพราะเหตุไร

31. ถ้า ก. ลงทุน 12000 บาท ซื้อหุ้นของบริษัทแห่งหนึ่ง เมื่อราคาตลาด
ของหุ้นนั้น เป็น 90 และ ข. ก็ลงทุนด้วยจำนวนเงินเท่ากัน ซื้อหุ้นของ
บริษัทเดียวกัน ด้วยราคาตลาด 96 ถ้าอัตราเงินปันผล $1\frac{1}{2}\%$ จงหา
อัตราส่วนของรายได้ของ ก. และ ข. และรายได้ของทั้งสองข้างกัน
อยู่เท่าไร

32. ฉันมีสต็อกของบริษัทขายยาแห่งหนึ่งด้วยจำนวนหนึ่ง ฉันนำออกขาย
ราคาตลาด 89¢ อัตราปันผล 3% แล้วนำมาซื้อสต็อกของบริษัทใหม่อีก
แห่งหนึ่ง ราคาตลาด 91¢ อัตราปันผล 4% ฉันจะได้รับรายได้จาก
เงินปันผลเพิ่มขึ้นกว่าเดิม 120 บาท อยากทราบว่า ฉันมีสต็อกเดิมอยู่
เป็นจำนวนเท่าไร และในการซื้อขายนี้ ฉันเสียค่านายหน้า 1%

33. ฉันขายสต็อกจำนวน 3200 บาท ออกไปด้วยราคาตลาด 108 อัตรา
ปันผล $2\frac{1}{2}\%$ แล้วลงทุนซื้อสต็อกอีกบริษัทหนึ่งด้วยราคา 87 อัตราปันผล
 $2\frac{1}{2}\%$ เป็นจำนวนครึ่งหนึ่ง ส่วนเงินอีกครึ่งหนึ่งฉันซื้อสต็อกของบริษัท
อีกบริษัทหนึ่ง ด้วยราคา 116 อัตราปันผล 4% ดังนั้น รายได้จากเงิน
ปันผลของฉัน จะเพิ่มขึ้นกว่าเดิมเท่าไร

84. ชายคนหนึ่งลงทุน 99000 บาท ซื้อพันธบัตรรถไฟของรัฐบาล ด้วย
 ราคาตลาด 198 อัตราปันผล 5% แต่ราคาตกลงไป เขาจึงขายออก
 ด้วยราคา 99 แล้วนำไปซื้อพันธบัตรรัฐบาล ด้วยราคาตลาด 100
 บาท ดอกเบี้ย 6% เขาก็คงว่า รายได้ของเขาจะเพิ่มขึ้นหรือลดลง
 ประการใด



วิชาสถิติเบื้องต้น

บทนำ

ข้อความเบื้องต้น

ความหมายของคำว่าสถิติ

ตามความเข้าใจของคนทั่วไป หมายถึงตัวเลขต่าง ๆ ที่นำมาแสดง เป็น
ข้อเท็จจริงประกอบบรรยายการเรียงไต่เรียงหนึ่ง ถ้าแสดงเป็นรูปตาราง
ก็เรียกตารางสถิติ สิ่งที่คนทั่วไปเข้าใจว่าเป็นสถิติ ในทางวิชาสถิติไม่ถือ
ว่าจะต้องเป็นสถิติตามความหมายที่แท้จริงเสมอไป ส่วนมากจะเป็นเพียง
ข้อมูลในทางสถิติเท่านั้น แตกกันอยู่อย่างเหมือนกัน ที่ตัวเลขต่าง ๆ ที่นำ
มาแสดงออกนั้น เป็นสถิติที่แท้จริง ตามความหมายทางหลักวิชา

เมื่อใช้คำว่า สถิติ ในความหมายว่าเป็นวิทยาการแขนงหนึ่ง อาจกล่าว
ได้ว่าวิชาสถิติ เป็นระเบียบวิธีอันหนึ่ง ในทางวิทยาศาสตร์ ที่หาความหมาย
จากข้อมูลที่ได้จากปรากฏการณ์ต่าง ๆ โดยวิธีลดข้อมูลอันมีอยู่เป็นจำนวน
มากมายนั้น ลงเป็นเลขจำนวนใดจำนวนหนึ่งที่มีความหมายอันเด่นชัด มี
ลักษณะเฉพาะซึ่งจะทำให้ความหมายในทางใดทางหนึ่งได้ ตามวัตถุประสงค์
ที่ใดทางใด

เมื่อใช้คำสถิติ ในความหมายที่เป็นเลขจำนวนแล้ว จะต้องเป็นเลข
จำนวนหนึ่ง ซึ่งเกิดขึ้นจากเลขจำนวนอันหลายจำนวน หมายความว่าเลข
จำนวนอันหลาย ๆ จำนวน ก็ให้เกิดขึ้นสถิติอันหนึ่งขึ้น

เพื่อให้เข้าใจความหมายของคำว่าสถิติคงกล่าวแล้ว ให้พิจารณา

ตัวอย่างต่อไปนี้

จากผลของการสำรวจสำมะโนครัว ปี พ.ศ. 2490

พลเมืองทั้งสิ้น 17,442,689 คน

ในจำนวนนั้นเป็นผู้อยู่ 10 ปีขึ้นไป 12,827,886 คน

ในจำนวนผู้อยู่ 10 ปีขึ้นไป มีผู้หนึ่งคือ 6,662,115 คน

ตัวเลขที่แสดงทั้งหมดนี้ยังไม่ใช่ สถิติ ตามความหมายอันแท้จริง ยังเป็น
แต่เพียงข้อมูลในทางสถิติเท่านั้น ถ้าเรานำตัวเลขเหล่านี้มาคำนวณแล้วแสดงว่า

ในจำนวนผู้อยู่ 10 ปีขึ้นไป มีผู้หนึ่งคือ 58.8

ตัวเลขร้อยละ 58.8 นั้นถือว่าเป็น สถิติ ตามความหมายอันแท้จริง

เพราะเป็นเลขจำนวนที่บอกคนจากเลขจำนวนอื่นมากกว่าจำนวนหนึ่ง

เราทราบจำนวนประชากรของประเทศไทยในปี พ.ศ. 2490 เราทราบ

เนื้อที่ของประเทศไทย ตัวเลขทั้งสองจำนวนนี้ยังไม่เป็นสถิติ แต่ถ้าเราเอา

เนื้อที่ไปหารจำนวนประชากรแล้วได้ผลออกมาว่า ความหนาแน่นของ

ประชากรไทยในปี พ.ศ. 2490 เฉลี่ยได้ 34 คนต่อหนึ่งตารางกิโลเมตร

ตัวเลขนี้เฉลี่ยเป็นสถิติอันหนึ่ง

เราทราบว่าไฟ ยอก 1 สัปดาห์อยู่ 52 โย ในจำนวน 52 โยนั้นมียอกอยู่

4 โย ถ้าเราคำนวณว่าเมื่อสัปดาห์หนึ่งแล้วชักออกมาจากสัปดาห์หนึ่ง

โอกาสที่ระโศกหนึ่งออกมาหนึ่งอยู่ 1 ต่อ 18 หมายความว่าถ้าชักออกมา

18 โยโดยไม่เจาะจงอะไรก็ได้ 1 ออกมา 1 โย สักส่วน 1 ต่อ 18 น

ถือว่าเป็น สถิติ อันหนึ่ง

นักเรียนในชั้นหนึ่ง ๆ ย่อมมีอายุแตกต่างกัน รายละเอียดว่าเด็กคน
ไหนมีอายุเท่าไรเป็นข้อมูลในทางสถิติ ถ้าเรารวมอายุของเด็กเหล่านั้นเข้า
ด้วยกันหมดแล้วหารด้วยจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผลที่ได้จะเป็นค่าเฉลี่ยแล้ว
นักเรียนชั้นนั้นมียุขเท่าใด เป็นตัวเลขจำนวนเพียง สี่หมื่นห้าพัน 15 ปี
8 เดือน 15 ปี 8 เดือน ถือเป็นสถิติจำนวนหนึ่ง เพราะเกิดขึ้นจากข้อมูล
อันมีเป็นจำนวนมาก

จากตัวอย่างต่าง ๆ ที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า คำว่า สถิติ และข้อมูลใน
ทางสถิติมีความหมายต่างกัน ตัวเลขที่เก็บมาไว้ในชั้นต้นนั้นเป็นเพียง
ข้อมูลซึ่งจะก่อให้เกิด สถิติ ต่อภายหลัง ถ้าเราทำตัววลีใดวลีหนึ่งที่จะลด
ข้อมูลเหล่านั้นให้เป็นเลขจำนวนใหม่ ซึ่งรวมข้อมูลหลาย ๆ อันเข้าด้วยกัน
ผลที่ได้นั้นจะเรียกว่าเป็น สถิติ ตามความหมายที่แท้จริง

ระเบียบวิธีทางสถิติ

การดำเนินงานในทางสถิติในฐานะที่เขย่าวทวยการอื่นหนึ่ง มีขั้นตอนของ
การปฏิบัติแบ่งได้เป็นขั้นใหญ่ ๆ 4 ขั้น ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 การรวบรวมข้อมูล

เมื่อประสงค์จะศึกษาในเรื่องใด งานขั้นแรกก็คือการรวบรวมตัวเลข
ต่าง ๆ เกี่ยวกับเรื่องนั้นตามสภาพที่เป็นจริง วิธีการรวบรวมข้อมูลเพื่อให้ได้
ถูกต้องและตรงตามความประสงค์นั้น อาจมีวิธีการสลับซับซ้อนอย่างใดก็ได้
หรือประสงค์ก็เพื่อให้ได้ข้อเท็จจริงอันถูกต้องถ่องถ้วน แน่นนอน เชื่อถือได้
ด้วยเหตุนี้ข้อมูลจึงมักมีลักษณะเป็นจำนวนเลขโดด ๆ เพราะเป็นวิธีการที่
กำหนดได้โดยแน่นอนยิ่งกว่าบรรยายการใด ๆ เรื่องการรวบรวมข้อมูลนี้มี
ปัญหาที่จะต้องพิจารณาอีกมาก จะได้นำกล่าวถึงในตอนต่อไป

๕.๑ ขนท ๒ การนำเสนอข้อมูล

เมื่อได้ข้อมูลมาแล้ว งานขั้นตอนต่อไปก็นำเสนอข้อมูลเหล่านั้นในรูปที่
จะเห็นได้โดยสะดวก กล่าวคือรวบรวมเข้าเป็นหมวดหมู่ตามความเกี่ยวข้อง
ซึ่งกันและกัน นำเสนอในรูปตารางเพื่อให้เห็นง่าย หรืออาจแสดงเป็น
รูปเพื่อความเข้าใจที่ชัดเจน วิธีการนำเสนอข้อมูลอาจทำได้ต่าง ๆ กัน จะ
ได้กล่าวละเอียดอีกในตอนต่อไป

๕.๑ ขนท ๓ การวิเคราะห์

จากข้อมูลที่น่าเสนอเหล่านั้น นักสถิติอาจนำมาพิจารณาเปรียบเทียบเพื่อ
ได้ความหมายที่เด่นชัดยิ่งขึ้น ในการนำเอาวิธีการในการคำนวณต่าง ๆ ซึ่ง
ถือว่าเป็นเทคนิคในทางสถิติ วิธีการวิเคราะห์เหล่านั้นอาจเป็นเพียงการรวบรวม
คุณหาอย่างง่าย ๆ หรืออาจเป็นวิธีการที่ยากสลับซับซ้อน ต้องการความ
รอบรู้สูงในทางคณิตศาสตร์ก็เป็นได้ ในบทเรียนวิชาสถิติเบื้องต้นจะเป็น
แต่เพียงการวิเคราะห์อย่างง่าย ๆ เท่านั้น

๕.๑ ขนท ๔ การตีความ

คำว่า การตีความในที่นี้ หมายถึงการหาคำความหมาย หรือ ความ
พยายามที่จะอธิบายว่า เรื่องที่ศึกษาอยู่นั้น มีความจริงเท็จสิ่งใดเกิดขึ้นโดยอยู่
จะถือว่าเป็นสรุปความของการดำเนินการในทางสถิติก็ได้ ตัวอย่าง เช่น
นักเศรษฐศาสตร์ศึกษารายได้ของประชากร ก็รวบรวมข้อมูล คือ การ
ผลิตต่าง ๆ นำเสนอข้อมูลเหล่านั้นในรูปตาราง แสดงตัวเลขกระประมาณ
ของตนของค่าผลิตภัณฑ์ทางมวล แล้วทำการวิเคราะห์อย่างง่าย ๆ โดยการ
ลดตัวเลขเหล่านั้นเป็นร้อยละ แยกแต่ละสาขา ศึกษารวมเมื่อเปรียบเทียบ

บทแล้วมา ก็อาจหาความหมายได้ว่าความแข็งแกร่งของการผลิตโดยทางเทคโนโลยี
ทรงอยู่ หรือมีปริมาณการผลิตสูงขึ้นกว่าบทแล้วมา และอาจสืบสาวไปถึง
มูลเหตุของความเปลี่ยนแปลงเหล่านั้น ข้อสรุปเหล่านั้นคือการตีความทางสถิติ

ข้อมูลในทางสถิติ

ตามที่ได้อธิบายมาแล้วในตอนต้น ข้อมูลในทางสถิติหมายถึงข้อเท็จจริง
ที่เก็บมาได้จากเรื่องที่อยู่ในวงเขตการศึกษา ซึ่งอาจจะมีลักษณะแตกต่างกัน
ได้มาก แล้วแต่ว่าจะศึกษาในเรื่องใด เราอาจจำแนกข้อมูลในทางสถิติออก
ได้เป็น

- ก. ข้อมูลทางฝ่ายคุณภาพ เช่น เพศ ฐานะ ทัศนคติ
- ข. ทางฝ่ายปริมาณ เช่น จำนวนพลเมือง จำนวนเงิน อายุ
ราคา ความสูง น้ำหนัก เป็นต้น
- ค. ความสำคัญกาล เช่น การขึ้นลงของผลิตภัณฑ์ อุตสาหกรรม ปริมาณ
น้ำฝน ราคายา ทั้งนี้ในระยะเวลาที่กำหนดไว้
- ง. ความสภาพภูมิศาสตร์ เช่น จำนวนพลเมืองในท้องที่ต่าง ๆ
เขตของเขตปกครอง

ก. ข้อมูลทางฝ่ายคุณภาพ

หมายความว่า เป็นข้อมูล ซึ่งความแตกต่างของแต่ละรายการนั้น ไม่ใช่
เป็นเรื่องปริมาณมากนัก แต่เป็นเรื่องทางฝ่ายคุณภาพ เช่น รวบรวมข้อมูล
ว่าในโรงเรียนนี้มีครูเป็นหญิงกี่คน ชายกี่คน สำนวนว่าครูแต่ละคนนั้นยึด
ศาสนาอะไร เป็นสมาชิกของสมาคมไหน สมาคมนั้นบางหรือเปล่า มีความ

เห็นในเรื่องนั้น เรืองนอบอย่างไร ชอบหรือไม่ชอบ ซึ่งเป็นเรื่องความแตกต่างในส่วนทัศนคติ หรืออาจจะสำรวจความผูกพันกับแต่เท่านั้นเองเท่านั้น ก็ถือว่าเป็นข้อมูลทางฝ่ายคุณภาพเหมือนกัน เพราะหลักในการแบ่งแยกกัน จำแนกเป็นประเภทตามฐานะ

ตัวอย่างข้อมูลทางฝ่ายคุณภาพ

ชนต่าง ศาสนา เชื้อชาติ มา ณ กรุงเทพมหานคร แยกตามสัญชาติ และ เพศ

พ.ศ. 2482

เพศ	จีน	แขกอินเดีย	แขกมลายู	ญี่ปุ่น	ชาวเอเชียอื่นๆ
ชาย	1254	21	—	6	1
หญิง	778	12	—	6	2
ชาย	1891	32	—	2	1
หญิง	776	12	2	1	2
ชาย	2488	50	—	23	8
หญิง	1068	15	—	23	2
ชาย	8120	82	2	56	12
หญิง	1605	10	1	19	6
ชาย	2287	44	8	44	24
หญิง	729	13	—	5	6
ชาย	992	33	1	16	8
หญิง	270	4	—	1	—

เพศ	จีน	แขกอินเดีย	แขกมลายู	ญี่ปุ่น	ชาวเอเชียอื่นๆ
ชาย	824	16	—	1	1
หญิง	109	—	—	1	—
ชาย	91	2	—	—	8
หญิง	99	—	—	1	—

ข. ข้อมูลทางฝ่ายปริมาณ

เมื่อรวบรวมการหนึ่งของข้อมูลแตกต่างจากอีกรายการหนึ่งด้วยปริมาณมากน้อยเป็นสำคัญ เราถือว่าข้อมูลนั้นเป็นข้อมูลทางฝ่ายปริมาณ ดังตัวอย่าง

ประชากรอายุ 14 ขึ้นไป แยกประเภทตามรายได้จากการประกอบกิจการในท้องถิ่นแห่งหนึ่ง

รายได้ต่อปี	จำนวนประชากร (พันคน)
2000—3000 บาท	7,624
3000—4000 บาท	5
4000—5000 บาท	196
5000—6000 บาท	8
6000—7000 บาท	2
7000—8000 บาท	66
8000—9000 บาท	707
9000—10000 บาท	274
สูงกว่า 10000	111

ก. ข้อมูลตามลำดับกาล

เป็นข้อมูลแสดงถึงความเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่าง ๆ ตามระยะเวลา
ที่ล่วงไป ทั้งตัวอย่างต่อไปนี้

ยอดเงินอุดหนุนโรงเรียนราษฎร์ประจำปี 2480—2490

พ.ศ.	จำนวนเงิน
2480	8,100
2481	4,050
2482	5,684
2483	6,465
2484	15,284
2485	8,600
2486	108,650
2487	359,650
2488	218,266
2489	526,882
2490	4,000,000

ง. ข้อมูลตามสภาพภูมิศาสตร์

ข้อมูลตามสภาพภูมิศาสตร์ก็แยกตามท้องถิ่น ที่จริงก็เป็นข้อมูล
ทางฝ่ายปริมาณอย่างหนึ่ง แต่อาศัยข้อให้เห็นความแตกต่างตามสภาพของ
ท้องถิ่น จึงแยกประเภทไว้ต่างหาก ทั้งตัวอย่างต่อไปนี้

จำนวนโรงเรียนและจำนวนครูในจังหวัดต่าง ๆ พ.ศ. 2497

จังหวัด	จำนวนโรงเรียน	จำนวนครู
อยุธยา	460	2260
ชัยภูมิ	410	1680
นครราชสีมา	878	9082
เพชรบูรณ์	286	928
สุพรรณบุรี	379	9825
กำแพงเพชร	127	492
ลำปาง	377	1575
นครปฐม	278	1582

การรวบรวมข้อมูลสถิติ

ได้กล่าวแล้ววาระเขียนวิธีในทางสถิติเริ่มด้วยการรวบรวมข้อมูล ใน
ตอนแรกจะกล่าวถึงรายละเอียดของประการของการรวบรวมข้อมูลทางสถิติ
เท่าที่จำเป็น

วิธีการรวบรวมข้อมูลในทางสถิติ อาจแยกออกเป็นวิธีใหญ่ ๆ ได้ 2
วิธี คือ

- ก. รวบรวมจากเอกสาร หรือ ระเบียนทมิถอยแล้วตามหน่วยงานต่าง ๆ
 - ข. ทำเนิการสำรวจเองตามความประสงค์ของการทราบ
 - ก. รวบรวมจากเอกสาร หรือระเบียนทมิถอยแล้วตามหน่วยงานต่าง ๆ
- ข้อมูลในทางสถิติส่วนมากมักได้มาด้วยวิธีนี้ เพราะเป็นวิธีที่ประหยัด
เงินและแรงงานทุกสถิติ หน่วยงานต่าง ๆ เช่น สถานศึกษาการของรัฐบาล
ห้างร้าน บริษัท หรือโรงงานอุตสาหกรรมต่าง ๆ ย่อมมีข้อมูลต่าง ๆ เกยว

กฤษฎการของตนปรากฏเป็นหลักฐานอยู่ในบัญชีหรือทะเบียนประจำสำนักงาน
นั้น ข้อมูลเหล่านั้นทางการนั้น ๆ อาจพิมพ์เผยแพร่ออกเป็นเอกสารทยอยคัดลอก
จะนำไปใช้อ้างอิงหรือประกอบใด บางทีอาจไม่ได้นำไปพิมพ์เผยแพร่ แต่ถ้าผู้ใด
ถามมา ก็อาจจะให้ข้อมูลเหล่านั้นได้ตามที่ต้องการ แต่ทั้งนี้หมายความว่า
ข้อมูลเหล่านั้นจะต้องตรงกับข้อถาม ถ้าลักษณะของข้อถามผิดแปลกไปจาก
ข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ก็อาจตอบไม่ได้ ตัวอย่างเช่นถ้ายังไม่มียอดข้อมูลทางสถิติใน
เรื่องนั้นอยู่ จึงเกิดความจำเป็นที่จะต้องดำเนินการสำรวจใหม่

ตัวอย่าง เช่น ด้านทะเบียนทองถิ่นของมมข้อมูลเกี่ยวกับประชากรใน
เขตนั้น ถ้าเราต้องการทราบจำนวนประชากรแยกเป็นหญิง ชาย หรือจำนวน
คนเกิด คนตาย การสมรส การหย่าร้าง ก็อาจเก็บข้อมูลเหล่านั้นจากสำนักงาน
นั้นได้

ตัวอย่างอีกอันหนึ่ง เช่น ในโรงเรียนโรงเรียนหนึ่งมีมัธยมศึกษา
จำนวนนักเรียนทั้งโรงเรียน จำนวนที่แยกเป็นรายชั้น การกระจายของอายุ
ของนักเรียนในชั้นต่าง ๆ ถ้าเรามีความประสงค์ที่จะข้อมูลเหล่านั้น เช่น
ถามไปหรือขอจากทะเบียนที่โรงเรียนมีอยู่ก็ย่อมจะได้ข้อมูลตามความ
ประสงค์

ข. กำหนดการสำรวจเองตามความประสงค์ของการทราบ

เมื่อปรากฏว่าข้อมูลที่ต้องการทราบ ยังมีไม่พิมพ์เผยแพร่ในเอกสาร
ใด หรือไม่มีแหล่งที่จะเก็บได้ทันที ก็จำเป็นต้องดำเนินการสำรวจเอง การ
สำรวจนี้อาจต้องออกเคาะสำรวจ คือไปลงแหล่งที่ต้องการตัวเลข หรืออาจ
ใช้วิธีส่งข้อถามไปขอให้หน่วยงานนั้น ๆ ตอบข้อถามตามที่เรากำลังจะ

ทราบ สันนิษฐานว่าเราต้องการจะทราบว่าในท้องที่ภาคกลางปลูกข้าวไผ่ผล
 มากน้อยเพียงไร เมื่อคำนึงถึงเนื่อที่ที่ใช้ไปในการเพาะปลูกประเภทนี้ ก็
 เป็นความจำเป็นที่จะต้องเก็บตัวเลขจากเจ้าของที่นาเป็นราย ๆ ไป จะใช้ส่ง
 ขัอดามย่อมไม่สะดวก แต่ถ้าเราประสงค์จะทราบว่าเด็กนักเรียนในโรงเรียน
 ประจำจังหวัดต่าง ๆ เป็นสหภูมิกล้านาอยู่ในเขตเทศบาลเมืองนั้นมากน้อย
 เท่าใด อยู่นอกเขตหรือมาจากอำเภออื่นมากน้อยเพียงไร ในกรณีการทำ
 ขัอดามส่งออกไปให้โรงเรียนแต่ละโรงเรียนกรอกส่งกลับคืนมาให้เราได้

ในการสำรวจสำมะโนครัว เราเห็นว่าเราหนาทะออกเค้นสำรวจไป
 ยังทุก ๆ บ้าน เราจำนวนและข้อความต่าง ๆ ที่ต้องการทราบ ซึ่งสิ้นเปลือง
 มาก แต่ก็มีความจำเป็นที่จะต้องทำเช่นนั้น ในงานบางอย่างไม่มีความ
 จำเป็นต้องสำรวจทุกแห่ง เช่นถ้าเราอยากทราบว่าอาหารการรับประทานของ
 คนในภาคกลางของประเทศไทยมีคุณค่าในทางโภชนาการมากน้อยเพียงไร
 เราไม่จำเป็นต้องไปสำรวจทุกครัวเรือน เราอาจเลือกเอาตัวอย่างมาจำนวน
 หนึ่ง ซึ่งอาจอนุมานได้ว่าเป็นตัวอย่างของครัวเรือนโดยทั่ว ๆ ไป ศึกษาหรือ
 รวบรวมข้อมูลจากตัวอย่างนั้น แล้วถือเอาเป็นสภาพโดยทั่วไปของประชากร
 ส่วนใหญ่ วิธีการสำรวจจึงอาจแยกได้เป็น 2 วิธี

1. สำรวจประชากรทั้งส่วนที่อยู่ในวงเรอองศาของศึกษา
2. สำรวจตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรที่อยู่ในวงเขตการศึกษา

1. สำรวจประชากรทั้งส่วน

การสำรวจสำมะโนครัว หรือสำมะโนเกษตร จำเป็นต้องใช้วิธี
 สำรวจทั่วถึงทุกครัวเรือน ทั้งนี้เพราะต้องการปริมาณรวมทั้งหมดทุกข้อ

แน่นอน งานอื่น ๆ ที่อยู่ในโลกขณะเดียวกันนั้นก็เป็นของทำควยววิเศษด้วยกัน
 เช่นในการสำรวจสถิติการศึกษา เราต้องการทราบจำนวนนักเรียน จำนวนครู
 จำนวนนักเรียนที่มียศทางสัน ึ่งจำเป็นจะต้องส่งชื่อตามไปยังโรงเรียนทุกแห่ง
 อาจจะส่งผ่านแหล่งกลาง เช่น อำเภอ หรือ จังหวัดให้ช่วยส่งต่อไปก็ได้ แต่
 อย่างไรก็ดี โรงเรียนทุกโรงเรียนจะต้องให้ข้อมูลว่าในโรงเรียนนั้นมีจำนวน
 นักเรียนและครูอยู่เท่าใด รวมทั้งรายละเอียดอื่น ๆ ที่อาจจะต้องการทราบ
 หรือถ้าเราต้องการทราบจำนวนเหมืองแร่ จำนวนกรรมกรขุดแร่ และแรงม้า
 ของเครื่องจักรขุดแร่ ก็เป็นความจำเป็นที่จะต้องส่งชื่อตามไปยังเหมืองทุกเหมือง
 ให้ให้รายการต่าง ๆ ดังกล่าวแล้วนั้นมา

2. สำรวจตัวอย่างที่เหลื่อมมา

งานเกี่ยวกับการวิจัยปัญหาต่าง ๆ มักใช้วิธีสำรวจเพียงจากตัวอย่าง
 จำนวนหนึ่งทีเลือกมาจากระชากรทั้งสัน เช่น ในการสังคมสำรวจ ต้องการ
 ทราบสภาพความเป็นอยู่ของประชากรในภาคใดภาคหนึ่ง อาจจะเลือกตัวอย่าง
 ในภาคคนนั้นมาเพียง 4 หรือ 5 ตำบล สำรวจอยู่เฉพาะเพียง 4—5 ตำบลเท่านั้น
 ความจริงใด ๆ ที่ได้จากท้องถิ่นเหล่านี้ ถือเป็นลักษณะทั่วไปของภาคคนนั้นทั้ง
 ภาค การกระทำใดเช่นนี้ ต้องมีวิธีการคัดเลือกตัวอย่าง และมีวิธีการ
 ประมาณค่าสถิติจากตัวอย่าง เป็นเทคนิคอันหนึ่งในวิชาสถิติที่เรียกว่า
 วิธีแบบวิธีการสุ่มตัวอย่าง ถ้าได้ปฏิบัติตามระเบียบวิธีดังกล่าวแล้ว ผลของ
 การสำรวจที่ได้อาจเท่าความไปถึงประชากรทั้งสันได้

ในบางครั้ง เราใช้การสำรวจตัวอย่างที่เลือกมาเพราะความจำเป็น
 บังคับ คือไม่สามารถจะสำรวจประชากรทั้งสันได้ เช่นในการผลิตสินค้า

ออกเป็นจำนวนมาก และประสงค์จะควบคุมคุณภาพของสินค้าเหล่านั้นให้
 อยู่ในมาตรฐานที่กำหนดไว้ จะตรวจสินค้าทุกชนิดที่ผลิตออกนั้นย่อมเป็นไปได้
 ไม่ได้ ยกตัวอย่าง เช่นการผลิตยี่ห้อออกจำหน่ายชนิดหนึ่ง ๆ เป็นจำนวนมาก
 มาก จะตรวจทุก ๆ ชนิดนั้นย่อมไม่ได้ ในกรณีเช่นเราใช้วิธีคัดเลือกตัว
 อย่างจำนวนหนึ่งมาจากจำนวนที่ผลิตออกมากมาขาย และตรวจสอบคุณภาพ
 เพียงจากตัวอย่างเท่านั้น ถ้าจะทราบได้ว่า การผลิตในร้านนั้นทางร้านจะมี
 คุณภาพเป็นอย่างไร



บทที่ 1

การนำเสนอข้อมูล

การนำเสนอข้อมูลในทางสถิติอาจทำได้ต่าง ๆ กันเป็น 4 วิธี คือ

- ก. บรรยายลงในบทความเรียงน
- ข. ทำเป็นตาราง
- ค. ทำเป็นลักษณะทางตารางบรรยายความ
- ง. แสดงเป็นกราฟรูปต่าง ๆ

ก. การบรรยายข้อมูลทางสถิติลงในบทความ

ถ้าข้อมูลทางสถิติมีอยู่เป็นจำนวนน้อย มักกล่าวอ้างลงในบทความ
สั้น ๆ เพื่อประกอบการบรรยายภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

“ถั่ว อ้อยและยาสูบมีปริมาณการผลิตเพิ่มขึ้นใน พ.ศ. 2496 สูงกว่า
ปีใด ๆ ในระยะหลังสงคราม เนื่องจากมาราคาของพืชผลเหล่านี้ยังอยู่ใน
ระดับพอสมควร การที่รัฐผลิตพืชผลเหล่านี้เพิ่มขึ้นเป็นลำดับ ใน พ.ศ. 2496
มีปริมาณถั่วลิสงผลิตได้ 78,000 เมตริกตัน ถั่วเหลือง 20,000 เมตริกตัน
ถั่วเขียว 26,000 เมตริกตัน อ้อย 1,820,000 เมตริกตัน และยาสูบ
50,000 เมตริกตัน และใน พ.ศ. 2496 ปริมาณผ้าฝ้ายผลิตได้ก็เพิ่มขึ้นจาก
23,800 เมตริกตันใน พ.ศ. 2495 เป็น 25,900 เมตริกตัน”

ในรายงานทางสถิติต่าง ๆ ย่อมต้องมีสรุปผลของการสำรวจ ในการ
สรุปผลนั้นเป็นความจำเป็นที่จะต้องอ้างอิงข้อมูลทางสถิติที่มีความสำคัญต่อ
เรื่องนั้นลงด้วยเสมอ ในการบรรยายความเช่นนี้ ไม่แต่เพียงข้อมูลสถิติ
เท่านั้น แม้จำนวนที่ไต่ถามหาเป็นสถิติจนแท้จริงแล้ว ก็อาจนำไปอ้างอิงไว้ใน
บรรยายการด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

“เมื่อเทียบจำนวนประชากรกับเนื้อที่ของประเทศไทยใน พ.ศ. 2490
ปรากฏว่าความหนาแน่นของประชากรเฉลี่ยได้ 84 คน ต่อหนึ่งตาราง
กิโลเมตร ใน พ.ศ. 2495 เฉลี่ยได้ 87 คนต่อหนึ่งตารางกิโลเมตร และ
ใน พ.ศ. 2496 เฉลี่ยได้ 88 คนต่อหนึ่งตารางกิโลเมตร จะเห็นได้ว่า
ประชากรของประเทศไทยมีความหนาแน่นต่ำกว่าระดับความหนาแน่นของ
ประชากรในเอเชียตะวันออกไกล ซึ่งเฉลี่ยได้ 68 คนต่อหนึ่งตารางกิโลเมตร
ใน พ.ศ. 2492”

การบรรยายข้อมูลทางสถิติลงในบรรยายความด้วยนั้น ถ้ามีการ
มาก หรือมีตัวเลขสูงย่อมเป็นการยากแก่ผู้อ่าน เพราะบุคคลทั่วไปนั้น ไม่
อาจจะนึกเห็นตัวเลขออกเป็นปริมาณมากนักเลย เปรียบเทียบกันก็สะดวกนัก
นอกจากนั้นตัวเลขจะกระจายอยู่ในส่วนต่าง ๆ ของบรรยายการ จำเป็น
ผู้อ่านจะต้องจำจากตอนหนึ่งมาเทียบ ในทางปฏิบัติจึงไม่นิยมบรรยายข้อมูล
หรือสถิติขยาวต่าง ๆ ลงในบรรยายการด้วย มักจะต้องแสดงเป็นตาราง
หรือรูปภาพซึ่งจะไต่ถามลงในตอนต่อไป ถ้าจะนำลงในบรรยายการด้วยก็จะ
ต้องเป็นข้อมูลหรือสถิติที่มีความสำคัญจริง ๆ และเป็นข้อมูลหรือสถิติที่
บรรยายมีความประสงค์จะเน้นหรือขอให้เห็นโดยเด่นชัด

ข. การนำเสนอข้อมูลเป็นรูปตาราง

การนำเสนอข้อมูลทางสถิติโดยมากจะทำตามวิธีที่เราเรียกกันว่า ตารางสถิติก็คือ การนำเสนอข้อมูลทางสถิติที่กล่าวถึง การทำเป็นตาราง ช่วยย่อไม่ให้เกิดข้อผิดพลาดขึ้น เช่น ที่ใช้ในการบรรยายการ เพราะ หัวข้อของแต่ละช่องในตารางย่อมอธิบายอยู่ในตัวแล้ว นอกจากนั้นการทำเป็น ตารางยังช่วยให้ข้อมูลต่าง ๆ เข้ารูปเป็นระเบียบตามลำดับ ตามความสัมพันธ์ เกียวข้องซึ่งกันและกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ผลิตภัณฑ์ขี้เถ้าไม้ พ.ศ. 2494—2496

ชนิดของไม้		ปริมาณ	(พัน ต.บ.ม.)
	2494	2495	2496
ไม้สัก	274	261	328
ไม้เต็งและไม้รัง	221	882	341
ไม้ยาง	228	258	245
ไม้ตะเคียน	36	160	64
ไม้แดง	51	55	54
ไม้ประดู่	48	26	22
ไม้ตะแบก	20	25	33
ไม้ชนิดอื่น ๆ	562	510	495

พึงสังเกตว่าถ้าจะใช้บรรยายการเพื่อให้ได้ความถี่ที่ตารางนั้นแสดงจะ ต้องเขียนบอกยาวเพียงไร เมื่อตัวเลขอยู่ในช่องก็ย่อมใช้ความหมายของ หัวเรื่องในช่องนั้น เช่น ปริมาณของไม้สักเป็นลูกบาศก์เมตร ใน พ.ศ. ต่าง ๆ

ไม่จำเป็นต้องเขียนต่อท้ายข้อมูลทุกอัน ในปี พ.ศ. ใดก็ไม่จำเป็นต้องเขียน
รายการ เพราะจำนวนอยู่ในช่องใดก็เห็นได้ชัดอยู่แล้ว

การทำตารางอย่างนี้ จำเป็นต้องบอชอตาราง ชอนนตองบอชชกเจนว
การางนแนตงอะไร อย่างไร คอแบ่งโคยถอหลักอะไร หรือแนตงในชอง
เวลาโคย่าง

ในทวการางเองการแบ่งออกโคยเ็น ๘ ส่วน ส่วนหนงคอหวชอของ
ชองหวเรตง ชงจะบอโกทรายวาสงชงจะเรยงลาทยไปข้างลางนแนตงอะไร
และจะเ็นเหมอนๆ กันตลอดทงชอง อีกส่วนหนงคอรายการในทวอย่างท
แลวมานกคอชอไมชนคทางๆ ส่วนลุดโคแกทวชอมูลหมาย (ผกชก) ทวเลข
ของแตละรายทนามาแตคองไว

การนำเสนอข้อมูลเ็นรูปการางน การทำโคแตกต่างกันมากมา
อย่างทกสยชบชอนจนยากแกการค เชนนถอวาเ็นการางทไมค ดงแมจะ
บรรจชอมูลโคมากกตาม ทงนเพราะถอวาการนำเสนอชอมูลนจะตองโก
สควกแกการพจารณาทวช ชอมูลบางอย่างมีการบรรยายการ่ง่ายๆ การไม
คเ็นการางแตแนตงเ็นลักษณะถงบรรยายการ่งการางทงจะโคกล่าวในทอน
กอไป

การางชอมูลทางสคทน การมคาคอชบายประกอชบายความชอการาง
ทวช หรือโกคาคอชบายเ็นหมายเหตุไวทวชการางกมณนยมาทกน ทงน
หมายความวาชอการางหรือหวเรตง จะยงไมโกความเขาใจชกเจนเพยงพอ
หรือทวเลขเหลานนการมคลักษณะหรือเจอนไซพเคยเ็นตน

ค. การนำเสนอข้อมูลเป็นลักษณะการวางกองบรรยายความ

ถ้าข้อมูลมีอยู่เป็นจำนวนมากน้อย ไม่มีความจำเป็นคงทำเป็นตารางตามแบบที่กล่าวแล้ว อาจแสดงข้อมูลนั้นเป็นรูปการวางกองตัวอย่างต่อไปนี้

“ในปี พ.ศ. 2492 ได้สำรวจเด็ก 592 คน อายุระหว่าง 10 ถึง 14 ปี และปรากฏว่าเป็นโรคต่อไปนี้

โรคสัทวาทา	400 คน
พณ	316 คน
ทอนซิลโต	217 คน
อกน้อย	112 คน
ต่อมทอนซิลโต	118 คน
ช่องเหงือกเป็นหนอง	46 คน
เหา	147 คน
หิด	10 คน
โรคผิวหนัง	178 คน
ขาโก่ง	132 คน
การพิการหรือโรค	
ของกระดูก	20 คน
สายตาสั้น	36 คน
น้ำหนัก	22 คน

งานที่จะต้องทำเกี่ยวกับการตรวจอนามัยโรงเรียน และการส่งเสริม

สุขภาพเด็กนั้นมีมากมายนัก โดยเฉพาะอย่างยิ่งตามต่างจังหวัด และในสถานทททางไกลออกไป”

พงศ์สังเกตว่าการเสนอข้อมูลในลักษณะการวางนัยตรงกันคือเป็นข้อมูล
 ที่ไม่จำเป็นต้องแบ่งเป็นหลายช่องนั่นเอง คือเป็นตารางอย่างง่าย ไม่จำเป็นต้อง
 ซัดเส้นแบ่งแยกตัวเลขเป็นหมู่เป็นพวก เหมือนตารางทศนิยมของข้อมูล
 ขยายหลายชุด มีลักษณะหรือข้อกำหนดแตกต่างกัน ความลักษณะของบรรยาย
 การนั้น ก็เพราะว่าเป็นส่วนหนึ่งของบรรยายการที่เราอ่านคดคองกันเป็นเรื่อง
 รววนกันโดยตลอด พงศ์สังเกตว่าการนำเสนอข้อมูลด้วยวิธีนี้ เราไม่มี
 ข้อตารางหรือหัวเรื่องอะไรทั้งสิ้น สิ่งเหล่านี้จะมีอยู่แล้วในบรรยายการ

การนำเสนอข้อมูลด้วยวิธีนี้ไม่สู้จะเป็นที่นิยมกันนัก จะมีประโยชน์ก็
 ต่อเมื่อข้อมูลมีอยู่เป็นจำนวนน้อย เราประสงค์แสดงเพื่อประกอบบรรยายการ
 ึ่งแทรกเข้าไปในระหว่างบรรยายการเพื่อให้ตัวเลขเหล่านั้นชัดเจนเข้าเท่านั้น
 ในทางปฏิบัติเท่าที่ปรากฏในเอกสารทางราชการต่าง ๆ จึงมักไม่ค่อยพบ ส่วน
 มากมักจะทำเป็นรูปตารางเสียเลย ที่เป็นดังนี้เพราะส่วนมากของข้อมูล
 แสดงก็มาในรูปของตารางแบบต่าง ๆ อยู่แล้ว บางแห่งก็ใช้วิธีบรรยายลงใน
 บทความของเรื่องนั้นคดคองกันไปเลย ซึ่งว่าเป็นวิธีที่ไม่ดี เพราะไม่ทำให้
 เห็นชัดเจนเท่าที่ควรกับทศนิยมของลักษณะการวางนัยตรงกันแสดงแล้ว ข้อ
 แนะนำจึงมีว่า ถ้าข้อมูลที่น่าสนใจส่วนมากมีลักษณะเป็นตารางอยู่แล้ว และ
 เรามีความประสงค์จะให้ข้อมูลที่ไม่ซับซ้อนนั้นแยกออกมาโดยเด่นชัด ง่าย
 ควรแสดงเป็นลักษณะการวางนัยตรงกันหรือแสดงเป็นรูปตารางเลย
 ที่เดียว การแสดงเป็นรูปตารางเลยถึงแม้รูปของข้อมูลจะไม่ซับซ้อนพอที่จะ
 ต้องตาราง แต่ก็ควรจะแสดงในการกล่าวอ้างถึงว่าเป็นตารางที่แน่นอนเท่านั้น

จ. การนำเสนอข้อมูลเป็นกราฟรูปต่าง ๆ

การนำเสนอข้อมูลเป็นตารางกันไว้ทำให้ความชัดเจนและความสะดวกในการพิจารณาข้อมูลชั้นหนึ่งแล้ว แต่จะเห็นว่าสมบูรณ์แล้วยังไม่ได้ เพราะการที่จะเปรียบเทียบเลขจำนวนหนึ่งกับอีกจำนวนหนึ่งว่ามากน้อยกว่ากันเพียงไร หรือการพิจารณาการขึ้นลงของตัวเลขต่าง ๆ นั้น บุคคลโดยทั่วไปไม่อาจทำได้สะดวกนัก ถ้าจะให้ง่ายแก่การเปรียบเทียบจำต้องนำข้อมูลโดยแปลงตัวเลขเหล่านั้นให้เป็นรูปต่าง ๆ ที่ขนาดจะเป็นเครื่องบอกให้ทันทีว่ามากน้อยกว่ากันเพียงไร การนำเสนอข้อมูลเพื่อให้ประชาชนทั่วไปเข้าใจจึงมักนิยมทำเป็นกราฟรูปต่าง ๆ

การนำเสนอข้อมูลเป็นกราฟรูปต่าง ๆ นั้น อาจทำได้หลายวิธี วิธีที่นิยมใช้กันมาก มักต้องไป

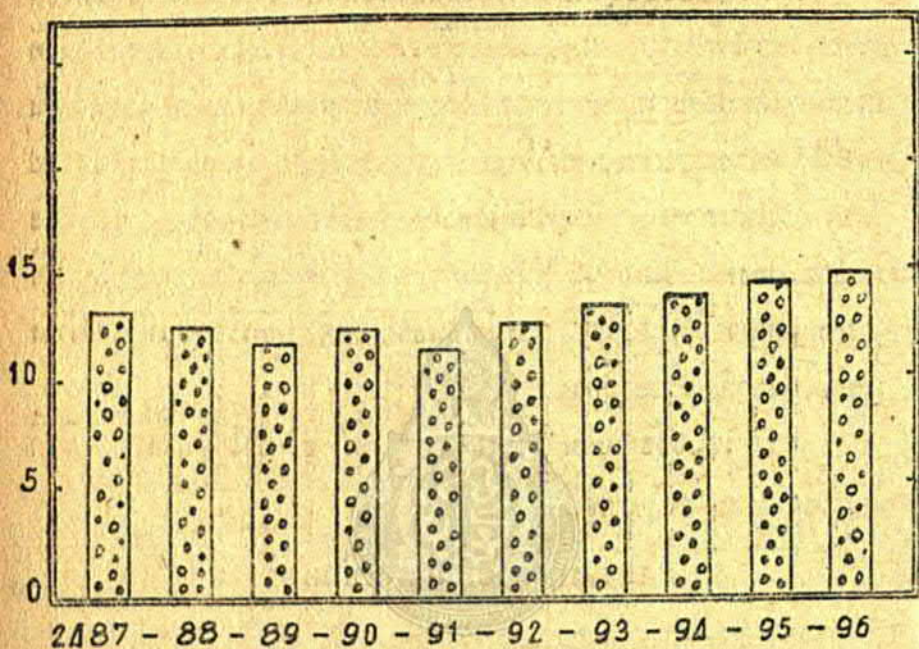
1. แสดงด้วยแผนภูมิแบบแท่ง

ในรูปที่ 1 นำเสนอข้อมูลทางการศึกษา คือแสดงจำนวนโรงเรียนชั้นมัธยมศึกษาทั่วราชอาณาจักร ระหว่าง พ.ศ. 2487 ถึง 2496 ด้วยแผนภูมิแบบแท่ง

พึงสังเกตว่าควยวอเปลี่ยนเป็นภาพเส้น ผู้ที่จะรู้ให้ทันทีว่าในช่วง พ.ศ. 2487 ถึง พ.ศ. 2496 นี้ จำนวนโรงเรียนเปลี่ยนแปลงขึ้นลงอย่างไร และถ้าประสงค์จะทราบจำนวนอย่างหยาบ ๆ ก็อาจจะดูได้จากแกนตั้ง เป็นธรรมดาของแผนภูมิเช่นนี้ย่อมไม่อาจให้ตัวเลขใดละเอียดเช่นเดียวกับตารางสถิติ แต่มีประโยชน์ในการแสดงการเปรียบเทียบให้เห็นโดยเด่นชัด

โรงเรียน

หน่วยละ 100



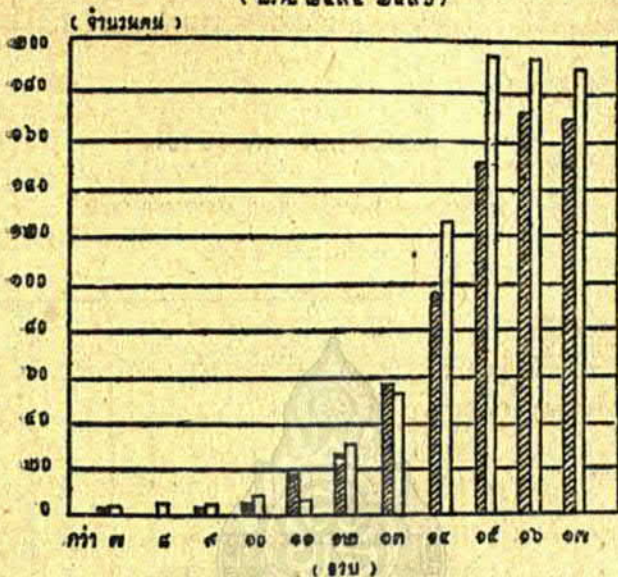
รูปที่ 1

การแสดงด้วยแผนภูมิเป็นแท่งน การแสดงด้วยกันไว้เป็นคู่ ๆ ก็ได้ ดัง
รูปที่ 2 แสดงอายุเด็กและเยาวชนที่ถูกฟ้องบังคับศาลคดีเด็ก พ.ศ. 2495 และ
2496 เปรียบเทียบกัน

จากแผนภูมิแนวนอนอายุได้ 2 อย่างพร้อมกันทันที คือจำนวนเด็กแต่ละ
ประเภทอายุที่ถูกฟ้องบังคับศาลคดีเด็ก เปรียบเทียบกันอายุน้อยกว่ากันอย่างไร
และในเวลาเดียวกันได้เปรียบเทียบด้วยว่าในระหว่าง 2 ปีที่กล่าวถึง จำนวน
เด็กในเกณฑ์ไหนมากกว่าหรือลดลงอย่างไร

อายุเด็กและเบาหวานที่ทุกปีของยี่สิบสามปีได้

(พ.ศ. ๒๔๙๕ - ๒๔๙๖)



พ.ศ. ๒๔๙๕
พ.ศ. ๒๔๙๖

รูปที่ ๒

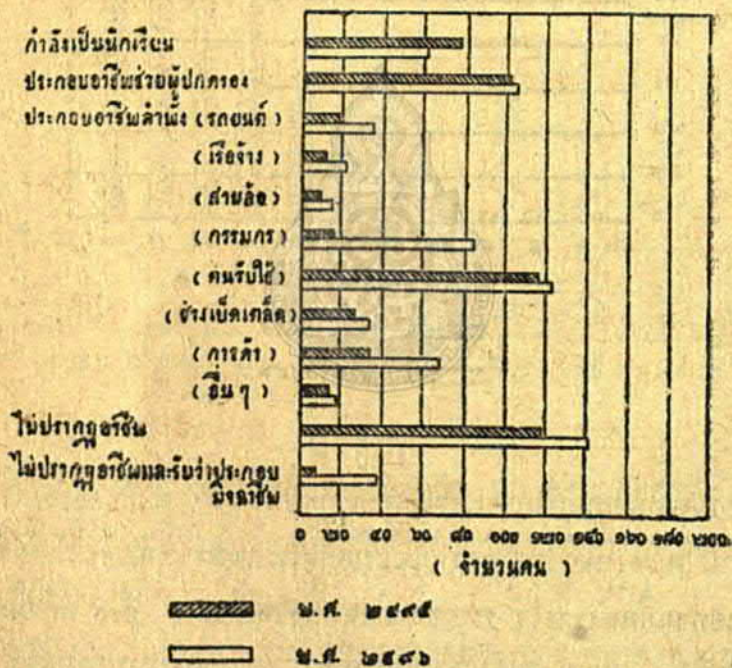
เมื่อมีแผนภูมิแบบแท่งเปรียบเทียบกันเช่นนี้ จำเป็นต้องพิจารณา
 พยายามให้แท่งทอโย โกลเคียงกันบนมตลยณะแตกตางกันเห็นโคชคางอา
 จะปล่อยทอนททงว่างไว้ ระบายออกทอนทงให้เป็นลาย หรือให้คามากหมค
 ก้อาททำโค แมแต่แผนภูมิแบบแท่งเคียว ข้างท้ออาจะระบายสีคาสัยให้
 มคหมค หรือท้อเป็นรคเป็นชคอะไรก็ได้ คามแต่จะเห็นงาม
 แผนภูมิแบบแท่งทตคองนไม่จำเป็นจะต้องทงชนในแกนคังเสมอไป จะ
 ขาวออกไปทงแกนชนก็ได้ ในกรณเช่นน้นแกนชนก็จะแสดงทวลคความ

มากนักย่อยของปริมาณที่เปรียบเทียบกัน กรุปที่ 8 ซึ่งแสดงสิ่งแวดล้อม—การ
 ราชพของเท็กและเขาวชนที่ศาลคดีเท็กพพากษาว่ามีความผิด พ.ศ. 2495, และ
 2496 เปรียบเทียบกัน

สิ่งแวดล้อม - การอาชีพ

ของเด็กและเยาวชนที่ศาลคดีเท็กพพากษาว่ามีความผิด

• พ.ศ. ๒๔๙๕-๒๔๙๖



รูปที่ 3

การรวบรวมข้อมูลทางสถิติลงเป็นแผนภูมิประเภทนี้ ไม่มีความยุ่งยาก
 มากนัก ในชั้นคนให้เลือกว่าจะใส่แกนไหนแสดงปริมาณมากนัก เมื่อนั้น

เนอทอย์เท่าใดก็พยายามกำหนดสเกลให้พอเหมาะ ถัดความงามเป็นสำคัญ
 แล้วจึงสร้างรูปแท่งขึ้นจากอกแกนหนึ่งให้ขนานกันไปกับแกนที่แสดงปริมาณ
 มากน้อยยาวเท่าที่ข้อมูลกำหนดไว้ พังสังเกตว่าความกว้างของแท่งนั้นไม่
 สำคัญ ไม่ได้แสดงความแตกต่างอะไร ด้วยเหตุนี้ต้องให้เท่ากันทั้งต้น ถ้า
 ไปทำให้ความกว้างของแต่ละแท่งผิดแปลกกัน ผู้กระส้างจะคิดว่าความกว้างแคบ
 นั้นอาจเกี่ยวกับความแตกต่างอะไรอีกได้ ถ้าต้องการจะให้อ่านละเอียด
 ถัดลงขน อาจใช้กระดาษกราฟขึงแบ่งส่วนสเกลใหญ่ ๆ นั้นย่อยลงไป หรือ
 ในบางคราวนิยมเขียนตัวเลขข้อมูลของแต่ละรายการประกอบแต่ละแท่งไว้
 ด้วย ถ้าผู้ใดประสงค์จะทราบจำนวนที่แน่นอนก็อาจจะอ่านเอาได้

การวางแผนและระยะของแท่งนั้นมีข้อควรสังเกตคือ แท่งหนึ่ง ๆ นั้น
 ไม่ควรให้กว้างหรือแคบ หรือยาวสั้นเกินไป ระยะห่างระหว่างแท่งหนึ่ง ๆ
 นั้น ไม่ควรน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของความกว้างของแท่งความสัมพันธ์ ระหว่าง
 แท่งทั้งหมดที่แสดงกับเนอททอมือพึงสังเกตว่าควรพยายามใช้เนอทให้เป็น
 ประโยชน์ อย่าให้แท่งเหล่านั้นเป็นเพียงส่วนนัยยะของเนอททั้งหมด ควร
 ให้แท่งที่สั้นหรือยาวที่สุดเกือบหมดสเกลของแกนใดแกนหนึ่ง ที่แสดงปริมาณ
 ส่วนทางอกแกนหนึ่งนั้นควรพยายามขยายออกไปให้ใกล้สัดส่วนพองาม อย่า
 ให้แผนภูมิของตนนั้นคลุมมิดสูงหรือแบนราบจนเกินไป ส่วนมากถ้ามีลักษณะ
 โกลรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วจะใคร่ปฏิบัติงาน

พังสังเกตว่าในการแสดงข้อมูลด้วยรูปแท่งนี้ เราใช้เพียงความสูง
 หรือความยาวเพียงมิติเดียวเป็นเครื่องเปรียบเทียบความแตกต่าง บางทีผู้

แสดงเปรียบเทียบโดยใช้ 2 หรือ 3 มิติ เช่นทำเป็นวงกลมหลาย ๆ วง ให้
 มีขนาดแตกต่างกันตามความมากน้อยของข้อมูล หรือทำเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 ที่มีขนาดกว้างของด้านต่าง ๆ กัน หรือบางครั้งอาจเขียนเป็นภาพของสิ่งของสิ่ง
 ใด ๆ กัน แต่ให้มีขนาดใหญ่น้อยตามส่วน วิธีการเช่นนี้จึงถือว่าไม่ดี เพราะ
 การที่คนดูจะเปรียบเทียบความมากน้อยของเนื้อที่นั้นทำได้ยากกว่าการเปรียบเทียบ
 ความยาวหรือความสูงซึ่งมีเพียงมิติเดียว ออกข้อหนึ่งก็คือผู้ดูอาจสงสัย
 ว่าจะเปรียบเทียบด้วยเนื้อที่หรือเปรียบเทียบด้วยความสูงของรูปเหล่านั้น เป็นสิ่ง
 ที่ไม่ควรใช้

แต่ทั้งนี้มิได้หมายความว่าเราจะไม่ใช้การเปรียบเทียบโดยเนื้อที่เลย ในตอนต่อไปจะเห็นว่าเรามีความจำเป็นจะต้องใช้เนื้อที่เป็นหลักในการ
 เปรียบเทียบ เพราะเหตุว่าข้อมูลหรือสถิติที่แสดงไม่อาจแสดงเป็นรูปแท่ง
 ได้สะดวกหรือเห็นได้ชัดเจน

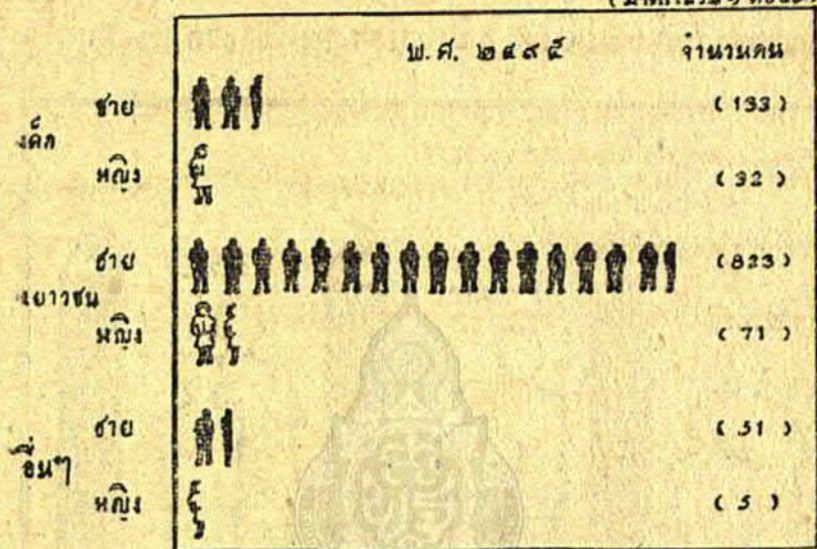
2. แสดงด้วยรูปภาพ

การแสดงด้วยรูปภาพนั้น แท้จริงก็คือการแสดงด้วยรูปแท่ง แต่แทน
 ที่จะเป็นสัญลักษณ์ที่ไม่มีมีความหมาย เราเขียนรูปลงแทน ถ้ามีปริมาณ
 มากก็เขียนรูปเช่นนั้นหลาย ๆ รูปต่อกันไปให้ยาวขึ้นอีก ถ้าวัดขึ้นผู้ดูว่าเป็น
 เรียงอะไรพร้อม ๆ กันไปกับการเปรียบเทียบปริมาณมากน้อย

จำนวนเด็กและเยาวชนที่สถานพินิจฯ รับผิดชอบส่วนตลอดปี

พ. ศ. ๒๔๙๕ - ๒๔๙๖

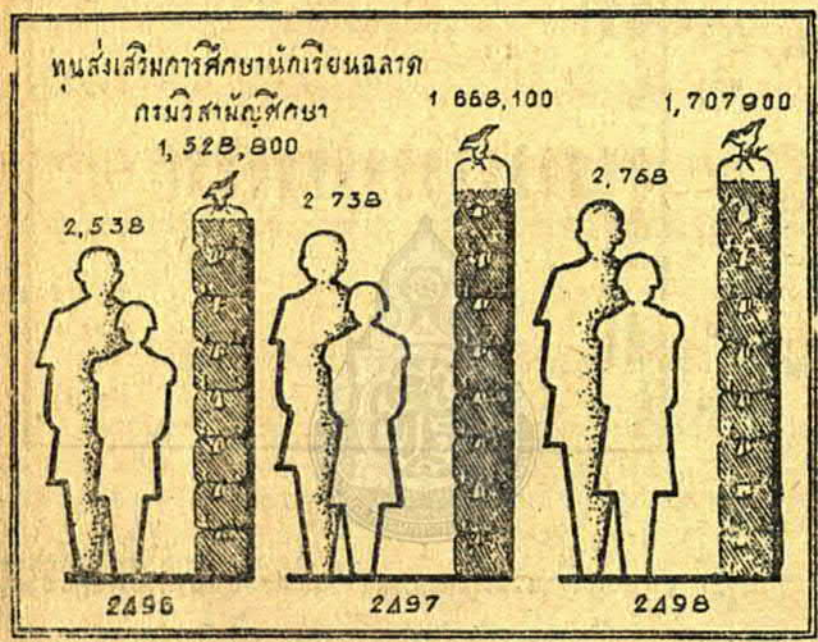
(มาตราส่วน ๑ ต่อ ๕๐)



รูปที่ 4

ในรูปที่ 4 แสดงจำนวนเด็กและเยาวชนที่สถานพินิจและคุ้มครองเด็ก
 รับผิดชอบในรอบปี ๒๔๙๕ เพื่อให้เห็นว่าในจำนวนนี้เป็นเด็ก เป็นเยาวชน
 หรืออื่นๆ มากน้อยแตกต่างกันอย่างไร และในเวลาเดียวกันก็เปรียบเทียบว่า
 ในพวกหนึ่งนั้นเป็นหญิงหรือชายมากน้อยแตกต่างกันอย่างไร กว้างเหตการณ์การ
 แสดงเป็นรูปเช่นนั้น รูปหนึ่ง ๆ เป็นหน่วยหนึ่งอยู่ในตัวแล้ว สเกลที่แกนจึง
 ไม่มีความจำเป็น อาจใช้วิธีบอกไว้ว่า รูป 1 รูปแทนปริมาณมากน้อยเท่าไร
 หรือไม่เขียนจำนวนเลขบอกกำกับไว้เลยก็ได้

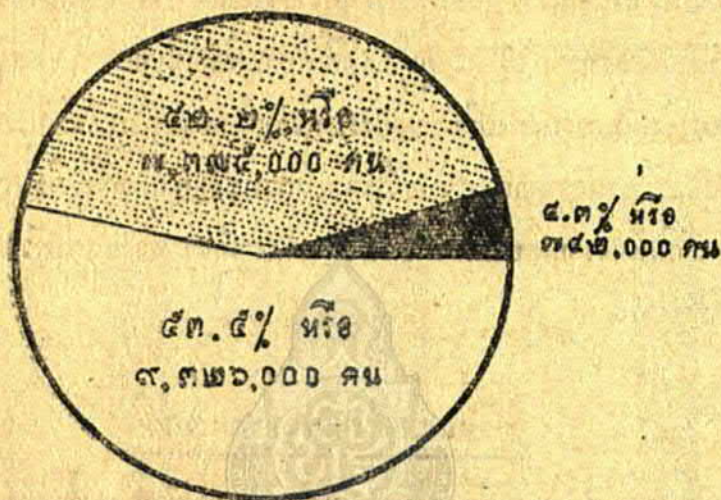
เช่นเกี่ยวกับการแสดงเป็นแท่ง การแสดงด้วยรูปภาพนระทำทางแถบ
 ดงหรือแถบนอนก็ได้ ดังรูปที่ ๕ ซึ่งแสดงเปรียบเทียบทุนส่งเสริมการศึกษานักเรียน
 วิทยาลัยการศึกษามัธยมศึกษา ๘ ปี เปรียบเทียบกัน แสดงเป็นรูปลงเงิน



รูปที่ ๕

การแสดงความรู้นจะเป็นรูปอะไรก็ได้ทั้งนั้น มีหลักอยู่ว่ารูปนั้นจะต้อง
 อธิบายตัวของมัน คือเห็นแล้วรู้ทันทีว่าเป็นเรื่องอะไร เช่น ถ้าจะแสดง
 ปริมาณรถยนต์ ก็เขียนเป็นรูปรถยนต์ เรืองไฟฟ้าก็เขียนเป็นรูปสายไฟฟ้า
 หรือเครื่องกำเนิดไฟฟ้า เรืองสัตว์ชนิดใดก็เขียนเป็นรูปสัตว์ชนิดนั้นเป็น

จำนวนประชากรของประเทศไทย พ.ศ. ๒๔๙๐
แยกประเภทตามอายุ



จำนวนรวม ๑๙,๔๔๓,๐๐๐ คน

อายุในตำแหน่งกลาง ๑๘.๕ ปี

-  ต่ำกว่า ๑๕ ปี
-  ๑๕ - ๕๙ ปี
-  ๖๐ ปีขึ้นไป

รูปที่ ๖

ละพวกเป็นกเปอรเซนต์ของทั้งหมด แบ่งส่วนของวงกลมออกไปมากน้อยตาม
 เพอรเซนต์ของส่วนย่อยทั้ง 8 นั้น เมื่อถูกทราบได้ทันทีว่าเด็กที่มีอายุต่ำกว่า
 15 ปีนั้น มีจำนวนเกือบจะเท่ากับเด็กที่มีอายุระหว่าง 15 ถึง 59 ปี แปลว่ามี
 เด็กมาก

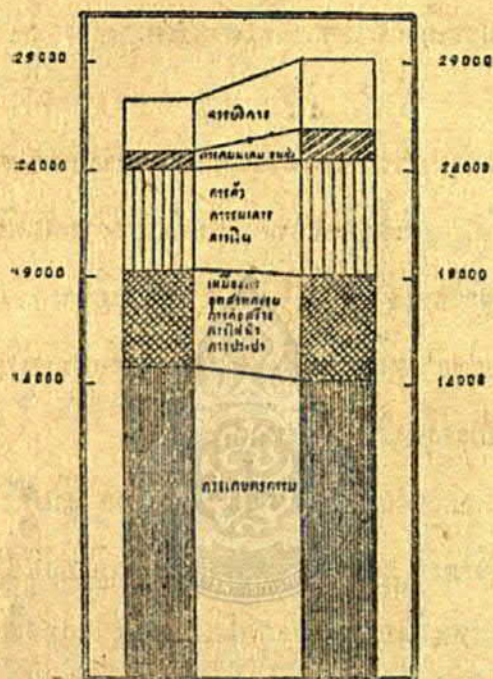
พึงสังเกตว่า การแบ่งส่วนในวงกลมนี้แม้จะเป็นการเปรียบเทียบเนือท
 ซึ่งมี 2 มติการจริง แต่เนือทที่แตกต่างกันนั้นเป็นส่วนสัมพันธ์กับมติดังกล่าว
 กลางหรือความยาวของอาร์ค จึงไม่เป็นการยากแต่การดู การแบ่งส่วนลงใน
 วงกลมนี้มักจะอยู่อย่างหนึ่งคือเปรียบส่วนที่เป็นครึ่งหนึ่งหรือ 1 ใน 2 เห็นได้
 ชัดเจนดีกว่าการบรรจุลงในแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า

รูปที่ 7 แสดงตัวเลขประมาณเบื้องต้นของผลิตภัณฑ์จากมวลในภาค
 พนธนากร สำหรับ 2494 และ 2495 เปรียบเทียบกัน

ในรูปนี้เราจะเห็นว่าเขาวรรจุข้อมูลแบ่งส่วนลงในแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดย
 ไม่ลดละเป็นเปอร์เซนต์เสียก่อน แต่ใช้ตัวเลขร่วมกัน จะเห็นได้ทันทีว่าการ
 เกษตรกรรมเป็นแหล่งผลิตภัณฑ์ส่วนใหญ่ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบในระหว่าง
 สองปีก็กล่าวถึงในปริมาณคือเป็นมูลค่าลดลง และรายการอื่น ๆ ก็อาจจะ
 เปรียบเทียบกันได้โดยง่าย

การแบ่งส่วนลงในแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าใช้มีดเคียว คือ ความสูงแทน
 ความกว้างของแท่งรักษาเท่ากันเสมอ จึงไม่ยากแก่การเปรียบเทียบ ควร

ถ้าละครประมาณเบื้องต้นของผลิตภัณฑ์ทั้งหมดในภาคนี้ในอัตราใด
สำหรับปี ๒๕๕๕ และ ๒๕๕๕
(ล้านบาท)



รูปที่ 7

สังเกตว่าถ้าเป็นการเปรียบเทียบส่วนน้อยกับส่วนใหญ่เพียงชกเดียว การบรรจุ
ลงในรูปวงกลมดีกว่าบรรจุลงในแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้ามีข้อมูลมากกว่าชก
หนึ่งขึ้นไป และประสงค์จะเปรียบเทียบทั้งในระหว่างชก และในชกเดียวกัน
บรรจุลงในแท่งสี่เหลี่ยมดีกว่า

4. การแสดงด้วยแผนที่สถิติ

การแสดงด้วยแผนที่สถิติ ได้แก่การนำเอาข้อมูลในทางสถิติบรรจุลงไป
ลงในแผนที่ทางภูมิศาสตร์ แต่ไม่ใช่ให้นำเอาตัวเลขที่เป็นข้อมูลนั้นเขียน
ลงไป เราใช้เครื่องหมายอื่นแทน เช่นระยะยาวสั้นให้เห็นต่างกัน ถ้าสีเข้มมาก
แสดงว่ามีปริมาณมาก เช่นแสดงความสูงจากระดับทะเล ถ้าระยะยาว
น้ำตาลแก่สูงมาก แล้วให้สีอ่อนลงเรื่อย ๆ มีข้ออธิบายไว้ว่าถ้าสีนั้นหมายถึง
ความสูงจากระดับทะเลเท่าไรเช่นนั้น เป็นต้น

การแสดงด้วยวงกลมวงกลม อาจแสดงอะไรก็ได้ที่มีปริมาณมากน้อย
แตกต่างกันในภูมิภาคต่างกัน เช่นปริมาณฝนตก ปริมาณการผลิตพืชผล
ต่าง ๆ ความหนาแน่นของพลเมือง วงกลมแสดงนั้นก็อาจทำได้แตกต่างกัน
ถ้าไม่ใช่สถิติความหนาแน่นแตกต่างกัน อาจใช้ลายเส้นต่าง หรือ
ทแยงในรูปแปลก ๆ หรือไม้กั้นซี่ ๆ ถ้าจุดมากก็จะเห็นเด่นแทนปริมาณ
หนาแน่น ถ้าจุดให้ห่างจากกันมากเขาก็จะเห็นโปร่งบางแทนปริมาณที่น้อยลง
ถ้าจะไม่เขียนลงในแผนที่ แต่จะให้เข็มหมุดปักลงแทนจุดก็ได้ คือ ใช้เข็ม
หมุดทิ่มหัวเป็นสัญลักษณ์ต่างจุด ถ้าหนาแน่นก็แสดงปริมาณมาก ข้างน้อย
แทนปริมาณน้อย เมื่อเลือกแสดงแล้วอาจออกเข็มออก แผนที่นั้นก็ไม่เสีย

ความแผนที่กลวงนั้นก็ไม่มีข้อจำกัด อาจเป็นแผนที่โลก แผนที่ประเทศ
ประเทศหนึ่ง หรือบางภาค อาจแสดงเพียงในท้องที่จังหวัดใดจังหวัดหนึ่งก็ได้

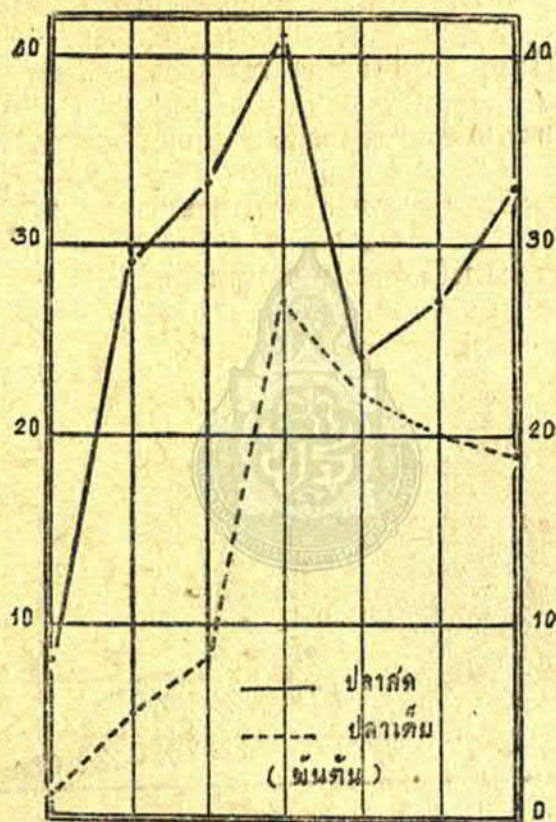
หรืออย่างแคบที่สุดอาจแสดงเพียงในเขตเมืองใดเมืองหนึ่ง เช่นทำแผนที่แสดงสถิติความคึกคักของการจราจรในเขตเทศบาลนครกรุงเทพ ฯ เป็นต้น

5. การแสดงด้วยเส้นโค้ง

ข้อมูลสถิติต่อเนื่องกันไปตามลำดับเวลา จะเปรียบเทียบความชันลงด้วยวิธีอื่นไม่สะดวก นิยมเขียนกราฟเป็นเส้นโค้งชันลงตามลักษณะของข้อมูล เช่นในรูปที่ 8 แสดงปริมาณสัตว์นาทชนสู่แพปลากรุงเทพฯ ฯ ตั้งแต่ พ.ศ. 2490 ถึง 2496 แสดงปลาสดและปลาเค็ม ทำให้เห็นได้ทันทีว่าปริมาณซึ่งเคยตกต่ำอยู่ในปี พ.ศ. 2490 นั้น ได้ขยับขึ้นสูงสุดในปี พ.ศ. 2493 และลดลงในปีต่อมา ในปี 2495 และ 2496 ปลาสดมีปริมาณสูงชันแต่ปลาเค็มลดลง

การบรรจุข้อมูลสถิติลงเป็นเส้นโค้งเช่นนั้น อาศัยความรู้ในการเขียนกราฟ ซึ่งมีแกนตั้งและแกนนอน โดยมากนิยมกำหนดแกนนอนเป็นระยะเวลาที่แตกต่างกัน เช่น ปี เดือน ส่วนแกนตั้งแบ่งสเกลตามปริมาณมากน้อยของข้อมูล ในทางจำเป็นต้องเริ่มด้วยปฏิบัตินิยมใช้เนื้อที่ในแผ่นกราฟนั้นให้มากที่สุด คือแกนตั้งไม่ปริมาณเป็น 0 เริ่มด้วยจำนวนเท่าใดก็ได้ ซึ่งเป็นจำนวนต่ำกว่าจำนวนค่าที่สุดของข้อมูลชุดนั้น ส่วนสูงสุดของแกนตั้งกำหนดให้มากกว่าปริมาณสูงสุดของข้อมูลสถิติชุดนั้นเล็กน้อย เมื่อรู้อย่างกว้างระหว่าง

ปริมาณสัณฐานน้ำขึ้นสู่แนวปลากรุงเทพฯ
ตั้งแต่ 2490-2496

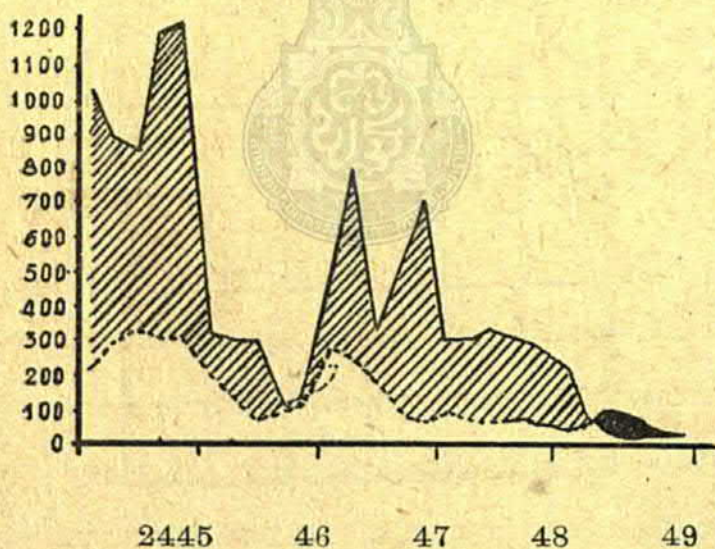


รูปที่ 8

ค่าสูงสัณณภาพการศึกษาค้นคว้าข้อมูลคนแล้ว การที่จะแบ่งสเกลของความยาวใน
แกนตั้งอาจทำได้ง่าย

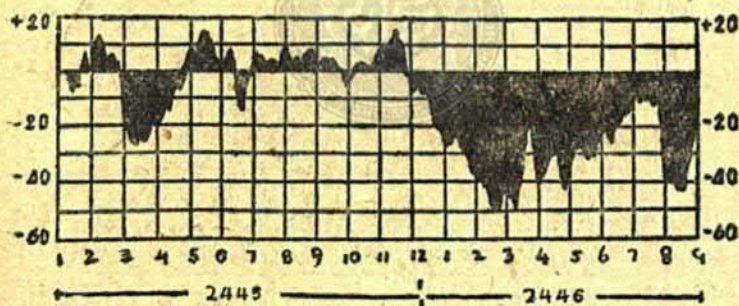
ตามปกติ ถ้าเส้นโค้งที่แสดงเพียงเส้นเดียว นิยมใช้เส้นทึบหนา
ถ้ามากกว่าเส้นหนึ่งขึ้นไปอาจใช้เป็นจุด หรือเป็นขีด เพื่อให้ดูแตกต่างกัน

การแสดงด้วยเส้นโค้งมีแบบที่พลกพลางแสดงลักษณะเฉพาะ ของข้อ
มูลแต่ละอย่างไว้ชัด ในรูปที่ 9 แสดงรายรับและรายจ่ายของบริษัทการค้า
แห่งหนึ่ง และด้วยวิธีระบายส่วนที่แตกต่างกัน เราสามารถเห็นได้ทันที
ที่เคียวว่าในช่วงเวลาใด บริษัทได้กำไรหรือขาดทุน ส่วนที่ขีดเส้นไปรั้ง
เป็นผลกำไร ส่วนที่ระบายดำทึบ คือส่วนที่ขาดทุน



รูปที่ 9

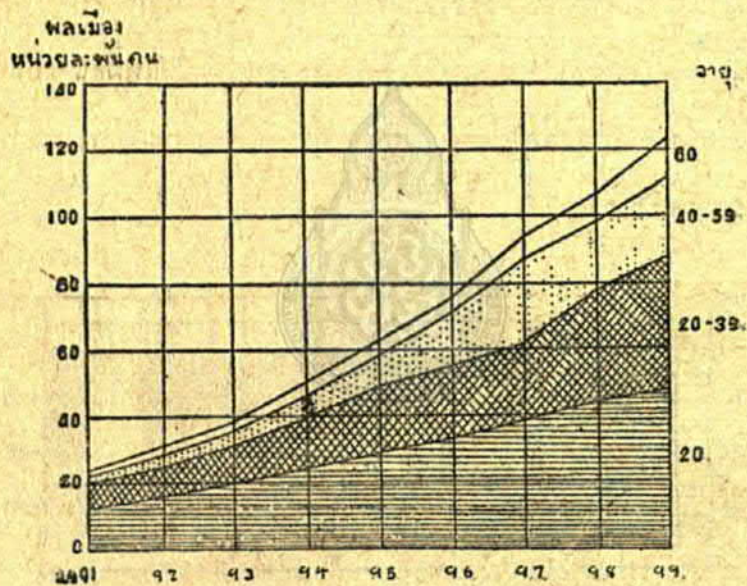
นอกจากนี้ยังอาจแสดงการเปลี่ยนแปลงของกิจการต่าง ๆ ที่ผิดปกติ
ออกไปจากเกณฑ์ปกติได้อีกด้วย ดังรูปที่ 10 แสดงสถิติการจำหน่ายสินค้า
ชนิดหนึ่ง ซึ่งมีเกณฑ์เฉลี่ยว่าในหนึ่งเดือน เกณฑ์หนึ่ง ๆ ควรจะขายได้
เท่าใด แล้วแสดงว่าการขายที่เป็นอยู่จริง ๆ นั้น ในเดือนไหนสูงหรือต่ำกว่า
เกณฑ์ปกติสักกี่เปอร์เซ็นต์ ซึ่งอาจจะช่วยให้สืบสาวถึงมูลเหตุของความแปร
ปรวนเช่นนั้น และถ้าทราบว่าการเปลี่ยนแปลงเช่นนั้นเป็นไปเหมือน ๆ กันทุกปี
ก็จะช่วยให้เตรียมการผลิตได้ง่าย และสามารถประมาณได้ล่วงหน้าว่าจะ
มีรายได้สักเพียงไร



รูปที่ 10

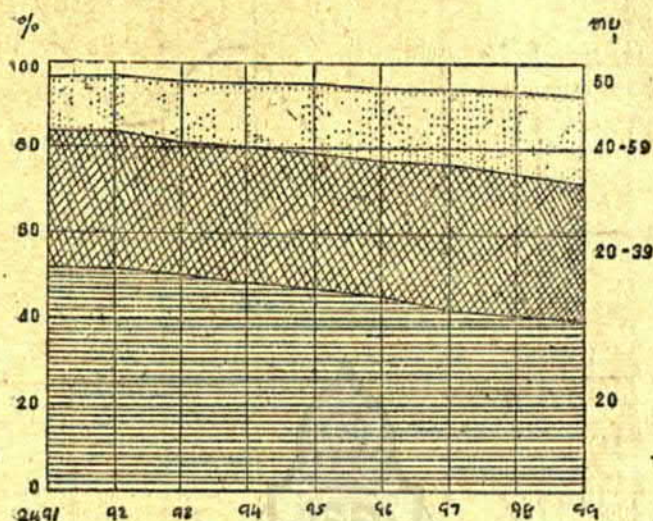
การแสดงส่วนย่อยต่าง ๆ เช่นที่เราเคยบรรจุลงในรูปกลมหรือแท่ง
เหลี่ยมนั้นอาจแสดงเป็นเส้นโค้งได้ ดังรูปที่ 11 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าในเขต
เทศบาลแห่งหนึ่งจำนวนคนที่มาอยู่ต่าง ๆ กัน เปลี่ยนแปลงไปมากน้อย

เพียงไรในระยะ ๑ ปี เราอาจใช้วิธีลดจำนวนคนในเกณฑ์อายุต่าง ๆ ลง
เป็นเปอร์เซ็นต์เสียก่อนแล้วจึงบรรจลง ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 12 ซึ่งจะเห็น
ได้ว่าเหมือนกับการบรรจลงในแท่งเหลี่ยมที่เคยทำมาแล้ว ต่างแต่ว่า เรา
เอาแท่งเหลี่ยมหลาย ๆ แท่งรวมกันเข้าเท่านั้น



รูปที่ 11

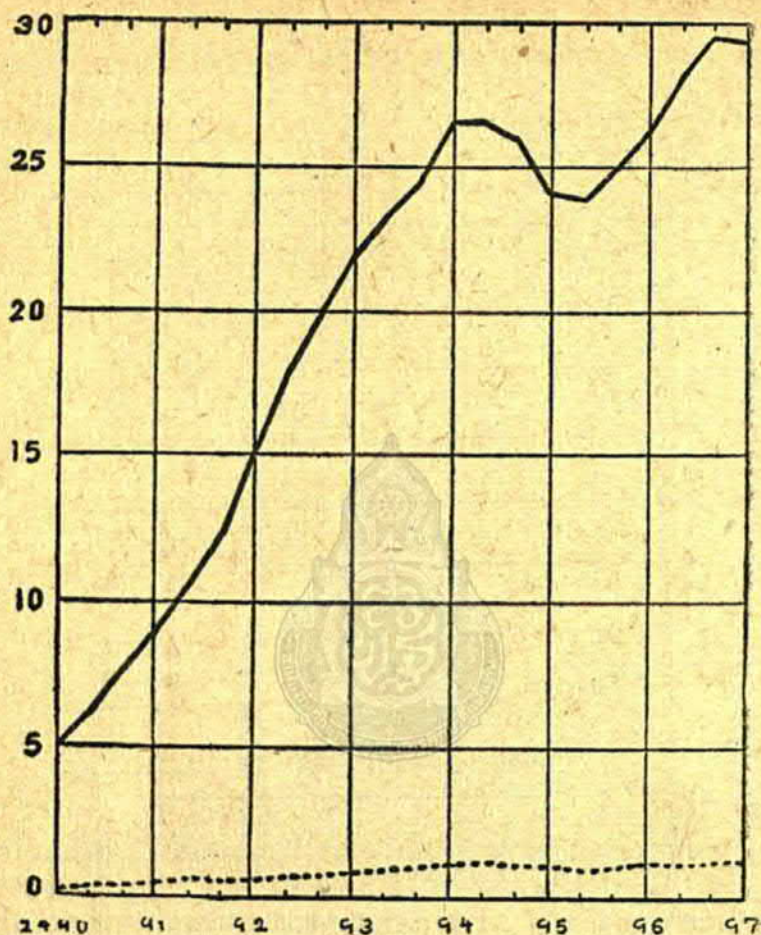
การแลงค้วยเส้นโค้ง นอกจากจะบรรจลงได้หลาย ๆ เส้นแล้ว อาจ
ใช้แกนซ้อนกันก็ได้ คือให้แกนตั้งหรือแกนนอนแกนใดแกนหนึ่งมีหลายเส้น
ใช้สเกลต่าง ๆ กัน



รูปที่ 12

6. การแสดงด้วยแผนภูมิอัตราส่วน

การเปรียบเทียบความเปลี่ยนแปลงของข้อมูล 2 ชุด ด้วยเส้นโค้งลงในแผนภูมิอันเดียวกัน เราอาจเปรียบเทียบปริมาณมากขึ้นหรือเปลี่ยนแปลงไปได้ แต่ถ้าประสงค์จะเปรียบเทียบอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงว่าไหนจะมากกว่ากันแล้ว แผนภูมิเส้นโค้งธรรมดาจะไม่ช่วยให้เห็นได้ ดังรูปที่ 18 ซึ่งแสดงการเพิ่มปริมาณพลเมืองในเขตเทศบาล 2 แห่งในระยะ 8 ปี ด้วยเหตุที่เทศบาลทั้งสองแห่งมีขนาดต่างกัน จำนวนพลเมืองเมื่อเริ่มสำรวจจึงแตกต่างกัน

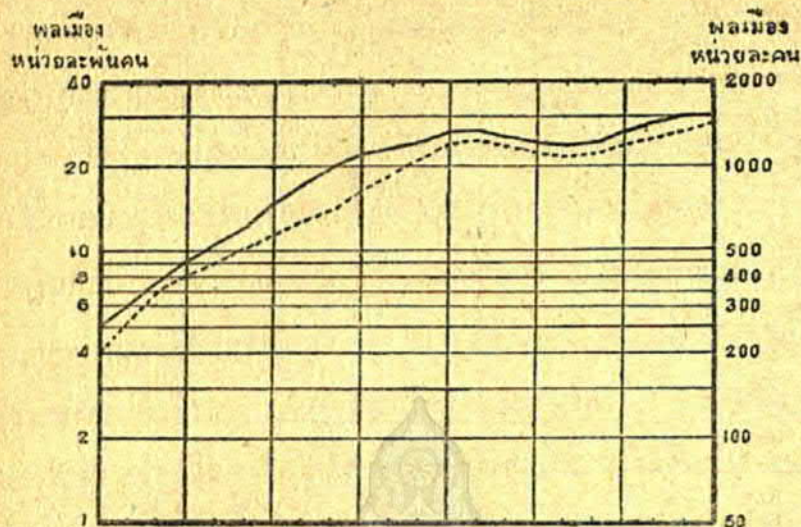


รูปที่ 18

ทางถนนอยู่แล้ว เมื่อแห่งหนึ่งเริ่มทวยจำนวนที่มากกว่า จำนวนพลเมืองที่
เพิ่มข้อมมากกว่าความไปทวย ระบุเหมือนกี่ยว เมืองใหญ่นมอชตราการ

เพลิดเพลินมองสิ่ง ซึ่งอันไม่เป็นความจริง เพราะถ้าเราคิดหาว่าพลเมือง
 เพลิดเพลินเฝ้าดูเช่นตเปรียบเทียบกันทุก ๆ จะเห็นไม่แตกต่างกันมากนัก วัตถุ
 จะให้ใกล้เคียงกับอัตราส่วนของการรอกเงย หรือเสื่อมคลายได้ทันที โดย
 ไม่ต้องไปคิดคำนวณนั้น อาจทำได้โดยวัตถุแทนที่จะแสดงข้อมูลเหล่านั้นไป
 ตรง ๆ เช่นทาทาน เราใช้ลอการิทึมของข้อมูลนั้นแทนที่จะทำให้เห็นอัตรา
 ส่วนที่กล่าวถึงนั้นเปรียบเทียบกับกันโดยทันที ที่เป็นดังนี้เพราะอัตราการรอกเงย
 หรือเสื่อมคลาย โดยมากเป็นอนุกรมเรขาคณิต ลอการิทึมของอนุกรม
 เรขาคณิตเป็นเส้นตรง แต่ในทางปฏิบัติจริง ๆ ถ้าจะต้องเข้คตารางค่าของ
 ลอการิทึมของข้อมูลทุกรายการไปย่อมเสียเวลามาก มวลที่สะดวกกว่านั้น
 คือใช้บันทึกข้อมูลนั้นลงบนสเกลของลอการิทึม ทว่าถ่วงลอการิทึมนั้นเพราะ
 แกนหนึ่งจะเป็นสเกลธรรมดา อีกแกนหนึ่งเป็นสเกลลอการิทึม ดังรูปที่ 14
 จะเห็นว่า การแบ่งสเกลทางแกนหนึ่งไม่เท่ากันเหมือนแกนอื่น ทางแกนหนึ่ง
 เป็นสเกลลอการิทึม ซึ่งถ้าปริมาณเบี่ยงมากเข้า ช่วงจะยิ่งแคบลง

ถ้านำเอาข้อมูลในรูปที่ 18 มาบรรจุลงในสเกลของลอการิทึมโดยใช้
 แกนซ้อน คือ แกนตั้งซ้ายเป็นปริมาณพลเมืองในเขตเทศบาลขนาดเล็ก
 แกนตั้งขวาเป็นปริมาณพลเมืองในเขตเทศบาลขนาดใหญ่ จะได้เส้นโค้ง
 ที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน และเปรียบเทียบกับกันโดยสะดวก ดังในรูปที่ 14 นั้น
 ซึ่งจะทำให้เราเห็นได้ทันทีว่าอัตราส่วนการเพิ่มพลเมือง ในทั้งสองเขตนั้น
 แท้จริงใกล้เคียงกันมาก ถ้าดูจากรูปที่ 18 จะไม่เห็นถูกต้องคงวานเลย



รูปที่ 14

สเกลดังกล่าวมีเป็นแบบสำหรับเขาทำไว้อย่างคล้ายกระดากกราฟ
 อรรถาธิบาย สเกลนี้จะแบ่งออกเป็นตอน ๆ ตอนหนึ่งมีค่าเป็น 10 เท่าของ
 ตอนล่าง และเราจะเริ่มต้นด้วยจำนวนเท่าใดก็ได้ แม้เราจะตนเองก็อาจทำ
 ได้ไม่ยากนัก หากเราสังเกตของเรองนี้

แบบฝึกหัดที่ ๑

๑. จากตารางข้อมูลต่อไปนี้ จงนำเสนอเป็นรูปแท่งเปรียบเทียบกันให้เห็นชัด
ปริมาณสัดส่วนน้ำหนักมาชนแปปลากรุงเทพ ฯ

พ.ศ. ๒๔๙๒-๒๔๙๖

(พันเมตริกตัน)

พ.ศ.	สัดส่วน	สัดส่วนแปรรูป (ทำเต็ม)
๒๔๙๒	๓๘.๐	๘.๑
๒๔๙๓	๔๐.๘	๒๗.๘
๒๔๙๔	๒๘.๙	๒๒.๗
๒๔๙๕	๒๖.๖	๒๐.๘
๒๔๙๖	๓๒.๙	๑๙.๐

๒. จงนำเสนอข้อมูลสถิติระยะทางของสายโทรเลขที่เพิ่มขึ้นโดยใช้รูปภาพ
สถิติระยะทางของสายโทรเลข
ระยะทางยาวของสายโทรเลขเป็นกิโลเมตร

๒๔๙๐	๑๘,๔๙๒,๐๐๐
๒๔๙๑	๑๘,๔๙๒,๐๐๐
๒๔๙๒	๒๑,๙๕๕,๔๒๑
๒๔๙๓	๒๒,๙๘๙,๙๒๗
๒๔๙๔	๒๔,๔๗๒,๕๘๘

๔
ป

ระบบทางขาวของสายโทรเลขเป็นกิโลเมตร

2495 25,006,806

2496 27,997,479

8. งบรายข้อมูล สถิติ เปรียบเทียบจำนวนหนังสือในห้องสมุดโรงเรียน
ประเภทต่าง ๆ ลงในวงกลม

จำนวนหนังสือในห้องสมุดโรงเรียน

พ.ศ. 2487

ประเภทโรงเรียน	จำนวนหนังสือ
รัฐบาล	160,582
ประชาบาล	65,912
เทศบาล	715
ราษฎร	71,001

4. งบรายข้อมูลสถิติจำนวนหนังสือในข้อ 8 เปรียบเทียบกับข้อมูลต่อไปนี้
ให้เห็นความเปลี่ยนแปลง ทั้งนี้โดยบรรจุลงในแผนภูมิรูปแท่งแบ่งส่วน
จำนวนหนังสือในห้องสมุดโรงเรียน

พ.ศ. 2498

ประเภทโรงเรียน	จำนวนหนังสือ
รัฐบาล	210,848
ประชาบาล	228,019
เทศบาล	26,807
ราษฎร	225,987

๕. รงแสดงความหนาแน่นของพลเมืองในภาคต่าง ๆ ของประเทศไทยจากสถิติต่อไปนี้ ทั้งนี้โดยจำลองของแผนที่ประเทศไทยแบ่งเขตเป็นภาคล่วงหน้า

ความหนาแน่นของประชากรในภาคต่าง ๆ

พ.ศ. 2490

ภาค	จำนวนประชากรต่อ 1 ตารางกิโลเมตร
กลาง	88
ตะวันออก	86
ตะวันออกเฉียงเหนือ	87
เหนือ	21
ใต้	29

๖. รงเขียนแผนภูมิเป็นเส้นโค้ง แสดงความเปลี่ยนแปลงของรายได้อัตราของ
องค์การ ร.ส.พ. ตามข้อมูลต่อไปนี้

ปี	รายได้เป็นบาท
2490	16,107.26
2491	98,642.29
2492	748,806.24
2498	896,919.58
2494	1,520,069.99
2496	1,286,905.18

7. งบประมาณภูมิ แสดงการขาดทุนกำไรขององค์การค่าแห่งหนึ่ง ซึ่ง
มีบัญชีรายจ่ายดังต่อไปนี้

ปี	รายรับ	รายจ่าย
2490	8,467,482	267,859
2491	465,767	425,986
2492	567,854	562,675
2493	560,548	567,528
2494	487,889	446,776
2495	382,665	428,978
2496	548,657	542,554
2497	657,997	756,989
2498	786,442	745,556

8. อดุลย์เฉลยของทองทแห่งหนึ่งเป็น 28 องค์าเซนติเกรก งบประมาณ
แสดงให้เห็นว่าความเปลี่ยนแปลงของ อดุลย์ในเคอนต่าง ๆ
ที่ใดใดใดต่อไปนี้หรือต่ำกว่าอดุลย์เฉลี่ยเพียงใด

เคอน อดุลย์คิกเป็นองค์าเซนติเกรก

เมษายน	80.2
พฤษภาคม	80.0
มิถุนายน	29.6
กรกฎาคม	29.8
สิงหาคม	28.9

เดือน	อุณหภูมิเฉลี่ยเป็นองศาเซนติเกรด
กันยายน	27.6
ตุลาคม	27.4
พฤศจิกายน	26.9
ธันวาคม	22.8
มกราคม	18.5
กุมภาพันธ์	19.7
มีนาคม	25.7

9. รวบรวมให้เห็นความเปลี่ยนแปลงของปริมาณแร่บางชนิดที่ผลิตได้ใน
ระยะ 5 ปี ตามข้อมูลต่อไปนี้ ให้แสดงเปรียบเทียบแร่แต่ละชนิดกับ
ปริมาณของแร่ทั้งหมดด้วย

พ.ศ.	สินแร่ขี้เหล็ก	วุลแฟรม	พลวง	ตะกั่ว
2492	11,028	658	464	856
2498	14,625	1,148	178	1,855
2494	18,410	1,842	129	2,600
2495	14,628	1,779	152	2,460
2496	15,627	1,772	100	7,960

หมายเหตุ หน่วยที่ใช้เป็นเมตริกตัน

10. จากข้อมูลสถิติในข้อ 9 ให้แสดงด้วยแผนภูมิอัตราส่วนโดยใช้ลวด
ดัดการทอม แสดงให้เห็นว่าอัตราของการเพิ่มปริมาณผลผลิตของแร่
เหล่านี้แตกต่างกันอย่างไรบ้างหรือไม่

สัดส่วนและเปอร์เซ็นต์

การถวเฉลี่ยและการลดทอนลงเป็นเปอร์เซ็นต์หรือร้อยละ หรือใน
 ทางการเขียนสัดส่วนนั้น จักว่าเป็นวิธีการหาสัดส่วนทศนิยม ประโยชน์
 ที่เห็นได้ชัดคือสามารถจะเปรียบเทียบกันได้ทันที ตัวอย่างเช่นเราทราบว่าใน
 ระยะเวลา 10 ปีระหว่าง พ.ศ. 2462 ถึง พ.ศ. 2472 ประเทศไทยมีประชากรเพิ่มขึ้น
 จาก 9 ล้าน 2 แสนคนเป็น 11 ล้าน 5 แสนคน ข้อมูลเหล่านี้ยังไม่ช่วยให้
 เราเห็นได้ชัดนักว่าการเพิ่มประชากรนั้นมากน้อยเพียงไร แต่ถ้าเรากล่าวว่า
 ประชากรเพิ่มขึ้นประมาณร้อยละ 25 โดยคิดจำนวนที่เพิ่มว่าเป็นร้อยละเท่าไร
 ของประชากรเดิมในปี พ.ศ. 2462 ก็ระพอมองเห็นได้ทันทีว่าการเพิ่มนั้นมาก
 น้อยเพียงไร

ในรายงานทางสถิติเกี่ยวกับกิจการต่าง ๆ จะได้พบการแสดงสถิติเป็น
 เปอร์เซนต์มากกว่าอย่างอื่น การคิดลดทอนลงเป็นเปอร์เซ็นต์นั้นแม้จะเป็น
 วิธีเลขทศนิยม ๆ แตกกันก็มีข้อบกพร่องอยู่เสมอ ในบทนี้จะกล่าวถึงการ
 ใช้เปอร์เซ็นต์และสัดส่วนในทางสถิติ

อัตราส่วน สัดส่วน และเปอร์เซ็นต์

เมื่อเราจะเปรียบเทียบตัวเลข 2 จำนวน เช่น 251 กับ 758 เราอาจทำได้
 โดยใช้อัตราส่วน คือเอา เช่น 251 ไปหาร 758 ได้ 8 เราจึงอาจกล่าวได้ว่า
 อัตราส่วนระหว่าง 251 กับ 758 เป็น 1 ต่อ 8 อัตราส่วนจึงเป็นการลดทอน
 ลงเป็นรูปที่เปรียบเทียบกันได้ง่าย แต่อัตราส่วนนั้นอาจจะเป็นตัวเลขต่าง ๆ กัน

ไว้ เช่น 1 ต่อ 8 เราอาจใช้เป็น 8 ต่อ 9 หรือ 10 ต่อ 80 ก็ได้ ทางที่สะดวกจึงควรกำหนดจำนวนใดจำนวนหนึ่งให้ตายตัวเสียเป็นหลักทั่วไป

ถ้าเรากำหนดว่า 251 กับ 758 เป็นอัตรา ส่วน 100 ต่อ 800 โดยกำหนดให้จำนวนแรกเป็น 100 เราอาจกล่าวได้ว่า 758 เป็น 800 เปอร์เซ็นต์ของ 251 หรือในอีกทางหนึ่งเรากำหนดจำนวนหลังเป็น 100 อัตราส่วน 251 ต่อ 758 ก็จะเป็น 33.33 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งเราอาจพูดได้ว่า 251 เป็นร้อยละ 33.33 ของ 758 หรือว่าเป็น 33.33 เปอร์เซ็นต์ของ 758 ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์จึงเป็นรูปหนึ่งของอัตราส่วน คืออัตราเป็นส่วนที่มีฐานเป็น 100 คำว่าฐานหมายความว่าจำนวนที่เป็นหลักสำหรับเราเอาเลขจำนวนอื่นไปเทียบ

ในตัวอย่างข้างบนเมื่อเรากล่าวว่า 758 เป็น 800 เปอร์เซ็นต์ของ 251 251 เป็นฐานที่เราจะเอา 758 ไปเปรียบ ในทางตรงกันข้ามเมื่อเราพูดว่า 251 เป็น 33.33 เปอร์เซ็นต์ของ 758 หมายความว่า 758 เป็นฐานที่เราจะเอา 251 ไปเทียบ ฟังสังเกตว่าการเปรียบเทียบเลขคู่เดียวกัน ถ้าเปลี่ยนฐานแล้ว ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ที่ได้ออกมาก็จะเปลี่ยนไปด้วย การใช้เปอร์เซ็นต์ในทางสถิติจึงมีข้อที่ระมัดระวังมากที่สุดคืออย่าหลงข้อเรื่องฐาน

การกำหนดปริมาณของส่วนย่อยจากส่วนใหญ่นั้นมักนิยมกำหนดเป็นเปอร์เซ็นต์ เช่น กล่าวว่าประชากรไทยทั้งหมดอายุ 60 ปีขึ้นไป มีเป็น 4.8 เปอร์เซ็นต์ของประชากรไทยทั้งหมด หมายความว่าถ้าประชากรไทยทั้งหมดเป็น 100 คนจะมีคนที่มีอายุ 60 ปีขึ้นไป 4.8 คน ประชากรไทยทั้งหมดเป็นฐานสำหรับเปรียบเทียบ และเรากำหนดให้ฐานนี้เป็น 100 เพื่อให้ได้ผลออกมาเป็นร้อยละ ในบางคราวเรานิยมกำหนดฐานเป็น 1 และก็ใช้จำนวนที่เอา

มาเทียบกันลงเป็นทศนิยม ผลที่ได้นั้นเรียกว่า สัดส่วน เช่นในตัวอย่างที่ว่า
 ประชากรไทยที่มีอายุกว่า 60 ปี เป็น 4.8 เปอร์เซ็นต์ของประชากรทั้งสิ้น
 เราอาจพูดได้ว่า ประชากรในเกณฑ์นั้น เป็น .048 ของประชากรทั้งหมดโดย
 สัดส่วน หมายความว่าถ้าจำนวนประชากรทั้งหมดเป็น 1 จะมีที่มีอายุ 60 ปี
 ขึ้นไป .048 การลดลงเป็นสัดส่วนเช่นนี้ ก็เช่น ๆ จะเห็นว่าไม่สะดวกเท่า
 การใช้เปอร์เซ็นต์ แต่ในงานทางสถิติสูง ๆ ขึ้นไป จะนิยมใช้สัดส่วนมาก
 กว่าเปอร์เซ็นต์ เพราะเหตุผลหลายประการ ในขั้นนี้พอถึงคำว่า สัดส่วน
 กับเปอร์เซ็นต์นั้นก็ไม่แตกต่างกันมากนัก เราจะเห็นจำนวนเปอร์เซ็นต์ถ้า
 ระบุเป็นสัดส่วนก็ง่าย ๆ และในทำนองเดียวกันถ้าแปลงสัดส่วนให้เป็น
 เปอร์เซ็นต์ก็ง่ายเช่นเดียวกัน คือ เมื่อเราเอา 100 ไปหารเปอร์เซ็นต์อะไร
 เป็นสัดส่วน และถ้าเอา 100 ไปคูณสัดส่วนก็จะได้เป็นเปอร์เซ็นต์ ที่ทำ
 เช่นนี้ เพราะเปอร์เซ็นต์นั้นมีฐานเป็น 100 แต่สัดส่วนมีฐานเป็น 1 มาก
 กว่ากัน 10 เท่า

ด้วยเหตุนี้ทั้งนี้ การคิดเปอร์เซ็นต์ หรือสัดส่วนจึงมีหลักอันเดียวกัน
 ข้อควรระวังในการใช้เปอร์เซ็นต์ที่กล่าวถึงต่อไปนี้ จึงใช้รวมถึงสัดส่วน
 ไปด้วย เพื่อประโยชน์ในการใช้งานทั่วไปในเบื้องต้นนี้ จึงจะยกตัวอย่าง
 เฉพาะแต่เปอร์เซ็นต์เท่านั้น

การคำนวณเปอร์เซ็นต์

ในทางปฏิบัติ การศึกษาคำนวณเปอร์เซ็นต์ เรามักคิดเปอร์เซ็นต์ของเลข
 หลาย ๆ จำนวน โดยเปรียบเทียบกับฐานอันเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

รายไคของบริษัทรการคทาเหมงนมีปรมาณคงน

พ.ศ.	2490	821,607
	2491	869,644
	2492	427,249
	2498	832,204
	2494	840,572
	2495	884,125

ถ้าจะให้หาว่ารายไคของบค่าง ๆ เป็นร้อยละเท่าไรของรายไคในปี 2490 เราถอเขารายไคของบ 2490 คอ 821,607 เป็นฐานหารจำนวนค่าง ๆ แล้วคูณด้วย 100 ออกผลเป็นเปอร์เซนต์ ถ้าจะถามว่ารายไคของบแต่ละบเพิ่มขนจากรายไคในปี 2490 ร้อยละเท่าไร เราไม่จำเป็นต้องทกลบส่วนทมาทขนเสียก่อน ใช้ผลทไคในคอนทแล้ว แตททกลออกเสีย 100 เปอร์เซนต์ ทงผลคอไปน ร้อยละของรายไคในปี 2490 ร้อยละทเพิ่มขนจากปี 2490

พ.ศ.	2490	100	
	2491	114.9	14.9
	2492	122.8	22.8
	2498	108.8	8.8
	2494	105.9	5.9
	2495	119.4	19.4

แต่ถ้าให้หาว่าเป็นร้อยละเท่าไรของบคแล้วมา ทกะไคเปอร์เซนต์ท แตกค่างออกไป ทล่าวคอเราะบครายไคในปี 2490 เป็นฐานอยู่เรอขไปไม่

ใต้ จะต้องใส่รายใต้ในปีหนึ่งเป็นฐานของรายใต้ในปีต่อไปตามที่เรากำลังการ
ทราบ จะใ้เป็นตัวเลขในตารางแถวแรก และถ้าเราประสงค์จะทราบว่า
ในปีหนึ่ง ๆ นั้นมีรายใต้เพิ่มขึ้นเป็นร้อยละเท่าไรของปีที่แล้วไป เราอาจใช้
ร้อยละเปอร์เซ็นต์ที่หักลบออกจากผลที่ได้นั้น ตามวิธีที่เคยใช้อยู่เดิม ได้ผลเป็น
ตารางแถวที่ 2 ดังต่อไปนี้

ร้อยละของปีที่แล้วมา ร้อยละที่เพิ่มขึ้นจากปีที่แล้วมา

พ.ศ.	2490		
	2491	114.9	14.9
	2492	115.6	15.6
	2493	77.8	-22.2
	2494	102.5	2.5
	2495	112.8	12.8

พึงสังเกตร้อยละที่เป็นจำนวนลบ ซึ่งหมายความว่าลดลง แทนที่จะ
เพิ่มขึ้น การหักลบนั้นเราควรกลับไปตามพีชคณิต คือ เอา 100 ไปลบ ผลที่ได้
ก็จะออกมาเป็นลบ แปลว่า ลดลง

ในการคำนวณข้อมูลบางอย่าง อาจต้องเปลี่ยนฐานสำหรับคำนวณ
เปอร์เซ็นต์ที่อยู่เรื่อยไปก็ได้ เช่นตัวอย่างต่อไปนี้

รายใต้จากการขายสินค้าชนิดต่าง ๆ ในระยะ 2 ปี

	พ.ศ. 2496	พ.ศ. 2497	ร้อยละที่เพิ่มขึ้น
เสื้อผ้า	1,507,089	2,644,995	74.1
เครื่องเหล็ก	785,506	1,146,258	39.1
เมล็ดพืช	626,766	873,993	6.2

	พ.ศ. 2496	พ.ศ. 2497	ร้อยละเพิ่มขึ้น
เครื่องใช้	147,475	219,685	25.6
เครื่องสำอาง	55,079	97,097	65.0
นิตยสารหนังสือพิมพ์	49,002	58,004	4.2
อาหารแห้ง	25,819	49,449	41.8
เบกเคตล	6,285	6,777	5.4

ในตารางนี้เนื่องจากการเปรียบเทียบแต่ละรายการไป เราจึงต้องใช้ปริมาณในใบแรกเป็นฐานเปลี่ยนไปทกรายการ ในการคำนวณเราไม่คงใช้จำนวนที่เพิ่มขึ้นเสียก่อน ใช้จำนวนในใบหลังคงหารด้วยจำนวนในใบแรก คูณด้วย 100 ได้ผลเท่าใดเอา 100 ไปลบ ออกมาเป็นร้อยละเพิ่มขึ้น ถึงแม้จำนวนที่เปลี่ยนยกเช่นเดียวกัน ก็เมื่อเราทำตามสูตรดังกล่าวแล้วจะได้ผลออกมาน้อยกว่า 100 เมื่อเอา 100 ไปลบก็จะได้ผลเป็นลบ แปลว่าปริมาณที่ขายได้นั้นลดลงร้อยละเท่าใด

การทบทวนสถิตินี้มีหลายจำนวนเลขที่เป็นขมวด แทนที่จะหลีกเลี่ยงตามวิธีเลขเดียวกันนั้นเป็นเพราะว่า การศึกษาคำนวณเลขมาก ๆ เช่นนี้ จะใช้ขมวดเลขหรือตัวเลขที่ขมวดเลขทุกในกระดวยขมวดเสียเวลามาก นิยมใช้เครื่องคิดเลข ซึ่งจำนวนมากน้อยของเลขจำนวนนั้นไม่สำคัญ แต่จำนวนครั้งที่ขมวดขมวดเลขหรือเลขนั้นสำคัญกว่า เพราะทำให้เสียเวลา จึงหาวิธีทำให้เลขหรือเลขน้อยครั้งที่สัก แม้บางครั้งหนึ่ง ๆ จะมีตัวเลขเป็นจำนวนมากก็ไม่เป็นไร แต่ถาเราไม่ใช้เครื่องคิดเลข จะกลับไปทำตามวิธีเลข ก็หลีกเลี่ยงจำนวนที่เพิ่มขึ้นเสียก่อน แล้วจึงมาหักหารร้อยละเพิ่มขึ้นก็ได้ผลเช่นเดียวกัน มีงานที่จะคงหารเลขจำนวนน้อยลง

ผลของการเปลี่ยนฐาน

สมมติว่าเราลดเงินเคอนคนงานลง 15 เปอร์เซ็นต์ ของเงินเคอนที่เขา
ไคร้อยู่ และต่อมาเราเพิ่มให้เขาคราวละ 5 เปอร์เซ็นต์ ของเงินเคอน
ที่เขาไคร้อยู่ในขณะหนึ่ง ๆ ที่เราเพิ่ม สมมติว่าเราเพิ่มเช่น 8 ครั้ง
พิจารณาเพียงเฉิน ๆ อารมณ์ว่าคนงานเหล่านั้นจะกลับ ได้เงินเคอนเท่าเดิม
เพราะว่าเพิ่ม 8 ครั้ง ๆ ละ 5 เปอร์เซ็นต์ ก็ควรจะเป็น 15 เปอร์เซ็นต์ เท่า
ที่เราลดครั้งแรก ถ้าคิดให้ละเอียดและถูกต้องตามวิธีคิดเปอร์เซ็นต์จะเห็น
ว่า แท้จริงคนงานจะได้เงินเคอนไม่เท่าเดิม แต่จะได้เพียง 98.4% ของ
รายไคร่ที่เคยได้ก่อนลดค่าเท่านั้น ถึงแม้จะสั่งเพิ่มทีละ 15 เปอร์เซ็นต์
ก็จะยังไม่ได้เงินเคอนเท่าเดิมของตนเอง ก็จะได้เพียง 97.75%

ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น นี่เป็นผลของการเปลี่ยนฐาน เมื่อเราสั่งลดเงินเคอน
ลง 15 เปอร์เซ็นต์นั้น หมายความว่าเงิน 15 เปอร์เซ็นต์ของเงินเคอนที่เขา
ไคร้อยู่ในขณะนั้น เมื่อลดแล้วเงินเคอนที่เขาไคร่ก็น้อยกว่าเดิม ถ้าเราสั่ง
เพิ่ม 15% หมายความว่า 15% ของเงินเคอน ที่ไคร่อยู่ในขณะนั้น ซึ่ง
น้อยกว่าเงินเคอนก่อนลด แปลว่าเราเปลี่ยนฐานน้อยลง จำนวนที่จะไคร่
จึงไม่เท่าเดิม แม้ว่าจำนวนเปอร์เซ็นต์จะเท่ากันก็ตาม ถ้าฐานน้อยลง จำนวน
ที่ไคร่ก็น้อยลง จึงเป็นเพียง 97.75% ของเงินเคอนเดิมคงกล่าวได้ว่า ถ้า
เราสั่งเพิ่มเช่น 8 ครั้ง ๆ ละ 5% ให้สังเกตว่า 5% แรกเราก็คิดจากฐานที่
น้อยที่สุด คือเงินเคอนที่ถูกลดแล้ว ต่อมาเมื่อเพิ่มอีก 5% ฐานจะสูงขึ้น
เล็กน้อย เพราะผลของการขึ้น 5% แรก ในการเพิ่มครั้งสุดท้ายอีก 5%

ฐานมากจนเกินไป เพราะการเพิ่มครั้งที่สอง ภัยการที่ฐานค่อย ๆ เพิ่มขึ้น
ออกทีละน้อย ๆ น้อย ผลของการเพิ่มทั้งหมดจึงมากกว่าเพิ่มครั้งแรก 15%
คือเงินก่อนเป็น 98.4% ของเงินก่อนเดิม การเพิ่มเป็นคราวน้อย ๆ
เช่นนี้เปรียบเหมือนเป็นดอกเบญจพัตน์ ย่อมต้องมากกว่าดอกเบญจพัตน์เป็น
ธรรมดา

การเพิ่มแล้วลดก็เช่นเดียวกัน จำนวนเปอร์เซ็นต์จะเปลี่ยนแปลงไป
ถ้าหากประสงค์จะให้ตัวเลขเท่าเดิม ตารางต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าเลข
จำนวนหนึ่งถ้าเพิ่มเปอร์เซ็นต์ขึ้นจำนวนหนึ่งแล้ว จะต้องลดเปอร์เซ็นต์ลง
เท่าไรจึงจะได้จำนวนเดิม

จำนวนเลข	เพิ่มขึ้นร้อยละ	ให้เป็น	ต้องลดลงร้อยละ
10	100	20	50
10	50	15	33.33
10	33.33	13.33	25.00
10	25.00	12.50	20.00
10	10.00	11.00	9.00
10	5.00	10.50	4.76

ความผิดพลาดในการใช้เปอร์เซ็นต์

การใช้เปอร์เซ็นต์ เป็นสถิติแสดงข้อเท็จจริงบางประการนั้น ความ
ผิดพลาดมักจะมีเสมอ ๆ และเป็นข้อบกพร่องที่ควรระวัง

1. ปัญหาเกี่ยวกับฐานที่ต่างกัน

2. การคำนวณเปอร์เซ็นต์จากเลขจำนวนน้อยเกินไป
 8. การใช้บุคคลนิยมผิดพลาด
 4. ความผิดพลาดในการขวกลยเลข
 5. วิชาเฉลยเปอร์เซ็นต์ที่ไม่ถูกต้อง
 6. การใช้เปอร์เซ็นต์ที่เป็นจำนวนสูงเกินไป
- จะได้แยกกล่าวเป็นข้อ ๆ ต่อไปดังนี้

1. ปัญหาเกี่ยวกับฐานทศางดง

ได้กล่าวไว้แล้วในตอนก่อนว่าเปอร์เซ็นต์ที่เราใช้นั้น บ่อมีความหมายสัมพันธ์กับฐานทศางดง ถ้าเปลี่ยนฐานหรือใช้ฐานผิดจากที่ควร จะได้ตัวเลขที่มีความหมายแตกต่างกันไปไ้มาก ๆ สมมติว่าเดิมเรามีรายไ้เดือนละ 8160 บาท ต่อมารายไ้ของเราลดลงเป็น 641 บาท จะพบว่ารายไ้ของเราลดลงกเปอร์เซ็นต์ ถ้าใช้รายไ้ข้เป็นฐาน เราอาจจะต้องพูดว่ารายไ้ลดลงเกือบ 400 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งไม่มีความหมายและไม่เป็นวิธศกที่ถูกต้อง ที่ว่าลดลงต้องหมายความว่าลดลงจากรายไ้เดิม ต้องเอารายไ้เดิมเป็นฐาน หาจำนวนที่ลดลงแล้วคูณด้วย 100 ได้ผลเป็น 79.7%

ในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง ได้สำรวจการตายของคนไข้เนื่องจากการคลอดบุตร เลือกลเฉพาะรายที่ไม่ควรจะตาย คอยงมีทางที่จะเยียวยารไ้แต่ด้วยควมบกพร่องบางประการจึงเกิดตายขึ้น และพิมพ์เผยแพร่ว่าในจำนวนการตายของคนไข้ที่ไม่ควรจะตายนั้น เป็นความผิดของแพทย์ 61.1% เป็นความผิดของคนไข้เอง 36.7% และเป็นความผิดของนางพยาบาล 2.2% สถิตเช่นนี้ทำให้เป็นความบกพร่องของนายแพทย์ และทำให้รู้สึกว่ นาง

พยายามค้นคว้าความสามารถ เพราะมีข้อบกพร่องน้อย เรืองนเมือไคตรวจ
สอบวิธีการคัดค้านจนได้แล้ว ปรากฏว่าไคใช้จำนวนคนใช้ทนายทั้งหมดเป็น
ฐานของเปอร์เซ็นต์จากจำนวนที่แสดงนั้นโดยทมิไคคำนึงว่าตามปกติคนนั้น นาง
พยายามใช้โอกาสรับผลชอยบรุษาคนไคน้อยกว่านายแพทย์ จึงมีโอกาสผล
พลาคนน้อยกว่า การใช้จำนวนคนทนายทั้งหมดเป็นฐานสำหรับคำนวณความ
รับผลชอยของนางพยายาม จึงเป็นการใช้ฐานที่ไม่ถูกต้อง ทดการของ
คิกจากจำนวนคนใช้ทนายพยายามหันมาทรวผลชอย กว่าคนทนายไปเท่าไค
แล้วคิกออกมาเป็นเปอร์เซ็นต์ เมื่อคิกตามวณ ปรากฏว่าสถิติที่แสดงนั้น
ต้องเปลี่ยนไปเป็นดังนี้ เป็นความผิดของนายแพทย์เพียง 47% เท่านั้น และ
เป็นของนางพยายามถึง 60.4% ตัวอย่างนี้เป็นเครื่องแสดงว่าการใช้เปอร์เซ็นต์
แสดงสถิติไค ๆ นั้น ถ้ามิไคเลือกฐานที่ถูกต้องแล้ว จะทำให้ไคความ
เข้าใจผิดพลาดจากความเ็นจริงไปไคมาก ๆ

2. การคำนวณเปอร์เซ็นต์จากเลขจำนวนที่น้อยเกินไป

การคำนวณเปอร์เซ็นต์นั้น ไม่ควรใช้กับข้อมูลที่เป็นจำนวนน้อย ไค
เฉพาะถ้าจำนวนที่เป็นฐานต่ำกว่า 100 เปอร์เซ็นต์ จะขยายความทำให้เห็น
ผิดพลาดจากความเ็นจริง ไคเคยมีผลแสดงสถิติคนหนึ่งว่า ในวิทยาลัยแห่งหนึ่ง
นักเรียนสาวแต่งงานกับอาจารย์ในวิทยาลัยนั้น 88.8% ของจำนวนนักเรียน
สาวทั้งสิ้น สถิตินี้ทำให้คนเ็นมาก แต่ทจริงในวิทยาลัยนั้นมีนักเรียนสาว
อยู่เพียง 8 คน และคนหนึ่งแต่งงานกับอาจารย์ในวิทยาลัยนั้น ซึ่ง
ไม่ควรถือเป็นเรื่องน่าประหลาดอะไร แต่เมื่อเปลี่ยนเป็นเปอร์เซ็นต์แล้วผล
ทำให้รู้สึกว่าเป็นเรื่องใหญ่ ในกรณีเช่นนี้จึงไม่ควรใช้เปอร์เซ็นต์เลย

3. การใช้ทัศนนิยมผิดพลาด

การแสดงสถิติเป็นเปอร์เซ็นต์นั้น เรานิยมใช้ทัศนนิยม 2 ตำแหน่ง เช่น 82.56% หรือในบางครั้งก็ใช้เพียงตำแหน่งเดียว การใช้ทัศนนิยมมากกว่ำ ไม่ช่วยให้ความหมายอะไรมากนัก การวางทัศนนิยมบนจริงมีโอกาสผิดพลาดได้ เป็นข้อเท็จจริง เพราะถ้าเลื่อนผลไปเพียงตำแหน่งเดียว ความหมายก็จะเปลี่ยนไปมาก

4. ความผิดพลาดในการบวกเลข

สมมติว่าเราเห็นสถิติคนหนึ่งกล่าวว่า บริษัทแห่งหนึ่งเพิ่มคนงานขึ้นจากเดิม 82% และเรารู้ว่าความประสงค์จะอธิบายขยายความให้ง่าย ๆ และพูดว่าบริษัทนั้นถ้าเดิมมีคนงานอยู่ 2 คน แล้วบริษัทเพิ่มคนงานอีก 1 คน โดยประมาณว่าเพิ่มคนงานเป็น $1/8$ ถ้ากล่าวถึงนั้นถือว่าเป็นความผิดพลาด เพราะ 82% ของจำนวนเดิมนั้น หมายความว่าถ้าเดิมอยู่ 8 จะเพิ่มคนอีก 1 ไม่ใช่เพิ่มคนเป็น 8 ความผิดพลาดเช่นนี้แม้เป็นเรื่องเล็กน้อย แต่ก็มีอยู่เสมอ และทำให้ความหมายผิดไปไต่มา ๆ

5. วิถีเฉลยเปอร์เซ็นต์ที่ไม่ถูกต้อง

ถ้ามีกรณีคนมากที่สถิติในการใช้เปอร์เซ็นต์คือ การทนายเอาเปอร์เซ็นต์ที่ฐานต่างกันมาบวกลบหรือหารเฉลี่ย เปอร์เซ็นต์ที่ฐานต่างกันนั้นถ้าเอามาบวกหรือลบกันไม่ได้ ตัวอย่างเช่น คนหนึ่งใช้เงินไป 10 บาท จากจำนวน 100 บาท ที่เขามีอยู่ เราพบได้ว่าเขาใช้เงินไป 10% ของเงินทั้งหมด อีกคนหนึ่งใช้เงินไป 10 บาท เหมือนกัน แต่จากจำนวน 1000 บาท ที่เขามีอยู่ เราจึงถือว่าเขาใช้เงินไป 1% ของเงินที่เขาอยู่ ถ้าจะเอา

เปอร์เซ็นต์ทั้งสองนำมาบวกกันแล้วกล่าวว่า เขาใช้เงินไป 11% ของเงินที่เขา
ทั้งสองมีอยู่รวมกัน ก็จะเห็นได้ว่าไม่ตรงกับความเป็นจริง เพราะ 20 บาท
จากจำนวน 1100 บาทนั้น เป็น 1.82% เท่านั้น

สมมติว่าในโรงเรียนแห่งหนึ่ง ที่มีนักเรียนมัธยมศึกษาแบ่งเป็น 2

แผนก ผลของการสอบหนึ่งปรากฏว่า แผนกวิทยาศาสตร์ส่งเข้าสอบ 42 คน
ได้ 30 คน แผนกอักษรศาสตร์ ส่งเข้าสอบ 20 คน ได้ 8 คน เราคิดเป็น
เปอร์เซ็นต์ว่า นักเรียนแผนกวิทยาศาสตร์สอบได้ 71.40% นักเรียนอักษร-
ศาสตร์สอบได้ 40 เปอร์เซ็นต์ นับว่าถูกต้อง แต่ถ้าวัดว่าทั้งโรงเรียน
นักเรียนเตรียมสอบได้กี่เปอร์เซ็นต์ โดยเอาเปอร์เซ็นต์ทั้งสองนำมาบวกกัน
แล้วเฉลี่ยเป็น 55.79% นั้นไม่ได้ เราต้องเอาจำนวนนักเรียนที่สอบได้ได้
ทั้งสองแผนกรวมกัน คือกจากฐานคือยอดนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมด จะได้เป็น
61.22% ถ้าเรากิจจากเปอร์เซ็นต์จะต้องเอาฐานของเปอร์เซ็นต์นั้นแต่ละอัน
คูณเสียก่อน แล้วบวกกันหารด้วยผลบวกของฐานทั้งหมดจึงจะได้เปอร์เซ็นต์
ที่ถูกต้อง วิเคราะห์เช่นนี้ทรงกติกการกลับไปหาจำนวนเดิมตนเอง อาจจะมี
ผิดพลาดด้วยซ้ำ เพราะการทำให้เป็นเปอร์เซ็นต์นั้น เราอาจจะไปประมาณ
ทศนิยมของเปอร์เซ็นต์ไว้อย่าง ในทางปฏิบัติจึงไม่ควรทำ แต่แสดงนเพื่อให้
เห็นว่า ถ้าเราทำจากเปอร์เซ็นต์ตามฐานต่างกันนั้นจะทำให้ได้อย่างไร

หลักที่ควรยึดถือเป็นข้อ เปอร์เซ็นต์หรือสัดส่วนนั้นถือเป็นสัดส่วนแล้ว
หมดความหมายเฉพาะสำหรับเรื่อง จะนำมาบวกลดคูณหารกันไม่ได้ เว้นไว้
แต่เป็นการกิจจากฐานอันเดียวกัน คือเป็นเรื่องเดียวกันโดยตลอด

6. การใช้เปอร์เซ็นต์เป็นจำนวนสูงเกินไป

ถึงแม้ตามหลักในการคำนวณ เราจะใช้เปอร์เซ็นต์เป็นจำนวนสูงเท่าใดก็ได้ แต่ในทางปฏิบัติไม่ควรใช้ เพราะไม่ทำให้เปรียบเทียบกันได้ชัดเจนตามที่เรามุ่งหมาย เช่นบริษัทแห่งหนึ่งประกาศว่ามียาโคเพิ่มขึ้น 280% เปอร์เซนต์เช่นนั้น นับว่าเป็นการใช้เปอร์เซ็นต์เป็นจำนวนสูงเกินไป แทนที่จะประกาศเช่นนั้น เราประกาศว่า มียาโคเพิ่มขึ้น 2.8 เท่า จะทำให้มีความหมายในการเปรียบเทียบดีกว่า

หลักที่ควรยึดถือคือ ไม่ควรใช้เปอร์เซ็นต์แสดงเป็นสถิติสูงกว่า 100 ถ้าสูงกว่านั้นควรแสดงเป็นจำนวนเท่า คือเป็นอัตราส่วนไป จะทำให้มีความหมายในการเปรียบเทียบเห็นได้ชัดเจน

พึงสังเกตว่าเรื่องของการเปรียบเทียบเหล่านี้ ที่จริงเป็นเรื่องการใช้อัตราส่วน ถ้าจำนวนที่เอามาเปรียบเทียบกับฐาน เราใช้เป็นอัตราส่วนจำนวนเท่า แสดงว่าจำนวนนั้นเป็นกี่เท่าของฐาน แต่ถ้าเป็นจำนวนน้อยกว่าฐาน และเราจะยังคงใช้เป็นจำนวนอยู่ จำนวนเท่านั้นจะมีรูปเป็นทศนิยม ที่เรียกว่าสัดส่วน บุคคลธรรมดาทั่วไปจะตีความหมายได้ยาก เช่นกล่าวว่ายาโคเพิ่มขึ้น .82 ย่อมยากกว่าที่เราจะพูดว่ายาโคเพิ่มขึ้น 82% ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปเมื่อจำนวนที่เอามาเปรียบน้อยกว่าฐาน เรานิยมแสดงเป็นเปอร์เซ็นต์ การเปรียบเทียบโดยใช้สัดส่วนนั้นจะใช้ในงานสถิติที่สูงขึ้นไป และใช้เป็นทศนิยมอยู่ในวงกลมหน้าทางสถิติเท่านั้น ไม่นำเสนอแก่ประชาชนทั่วไปเช่นเดียวกับเปอร์เซ็นต์

แบบฝึกหัดที่ 2

1) จากสถิติรายไค้ของบริษัทแห่งหนึ่งดังต่อไปนี้

พ.ศ. 2490	มีรายไค้คิดเป็นบาท	876,425
2491		842,806
2492		406,105
2493		386,380
2494		381,918
2495		391,159

ก. ให้คำนวณและแสดงว่ารายไค้แต่ละปีเป็นร้อยละเท่าไค้ของรายไค้ในปี

2490

ข. ให้แสดงว่ารายไค้เพิ่มขึ้นจากปี 2490 ร้อยละเท่าไค้

ค. ให้แสดงว่ารายไค้เพิ่มจากปีที่แล้วร้อยละเท่าไค้

ง. ให้แสดงว่ารายไค้แต่ละปีเป็นร้อยละเท่าไค้ของปีที่แล้วไป

2) ชายคนหนึ่งถูกตัดเงินเดือน 15% แล้วต่อมา เขาไค้เงินเดือน
ขึ้น 2 ครั้ง ครั้งแรกไค้ 10% ครั้งที่สองไค้เพิ่ม 5% เงินเดือนที่เขาไค้
ครบหลังนี้เป็นกเปอร์เซ็นต์ ของเงินเดือนที่เขาไค้รับอยู่ก่อนถูกตัดเงินเดือน

3) ในการค้าคราวหนึ่ง ได้กำไร 24% นำเอาผลกำไรนั้นรวมเข้า
กับทุนไปทำการค้าคราวหนึ่ง ปรากฏว่าขาดทุน 24% เขาจะเหลือเงินเท่า
กี่เปอร์เซ็นต์การค้าคราวแรกหรือไม่ ถ้าไม่เท่า มากกว่าหรือน้อยกว่าที่มียุ่เดิม
กี่เปอร์เซ็นต์

4) ในโรงเรียนแห่งหนึ่งที่เป็นสหศึกษา มีนักเรียนชาย 286 คน
 สอนไล่ตก 28 คน มีนักเรียนหญิง 176 คน สอนไล่ตกเสีย 54 คน จึง
 แสดงสถิติเป็นเปอร์เซ็นต์ให้เห็นปริมาณนักเรียนที่สอบไล่ได้ เฉพาะหญิง
 เฉพาะชาย และรวมทั้งโรงเรียน

5) โรงเรียนแห่งหนึ่ง ส่งนักเรียนเข้าสอบไล่เตรียมอุดมศึกษา ส่ง
 เข้าสอบ 2 คน ได้ 1 คน อีกโรงเรียนหนึ่งส่งเข้าสอบ 78 คน ได้ 60 คน
 อีกโรงเรียนหนึ่งส่งเข้าสอบ 1 คน สอบได้ 1 คน จะแสดงสถิติเปรียบเทียบ
 ผลของการสอบของโรงเรียนทั้ง 3 นั้นอย่างไร จึงจะทำให้เห็นและได้ความ
 หมายตรงกับความเป็นจริง จะใช้แสดงเป็นเปอร์เซ็นต์จะได้หรือไม่ เพราะ
 เหตุใด



บทที่ 3

การแจกแจงความถี่

ข้อมูลทางสถิติขั้นต้นหนึ่ง ซึ่งเราจะได้พบมากในงานเกี่ยวกับการ
สถิติ เป็นข้อมูลซึ่งระบุค่าเสนอควรวัดการต่าง ๆ ที่กล่าวแล้วในบทที่ 1 ไม่ได้
จำเป็นจะต้องมีวิธีใหม่ ข้อมูลขั้นต้นคือข้อมูลที่มีตัวเลข ๆ หรือใกล้เคียง
กันพอที่จะรวมกันเป็นพวก ๆ และค่าพวกหนึ่ง ๆ นั้นมีค่ากันมากน้อยเพียงไร
การทวนจำนวนซ้ำ ๆ กันนี้ เราเรียกความถี่ ความถี่มาก ๆ ก็ถือว่า
มีความถี่สูง การวัดแยกค่าพวกไหนมีความถี่มากน้อยเพียงไรนั่นเองที่เราเรียก
ว่าการแจกแจงความถี่ ตามที่กล่าวไว้เป็นหัวข้อในบทนี้

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของข้อมูลขั้นต้นที่หากระแจกแจงความถี่ได้ ข้อมูล
ต่อไปนี้เป็นคะแนนของการสอบไล่วิชาหมวดหนึ่งในโรงเรียนแห่งหนึ่ง มี
นักเรียน 100 คน ได้คะแนนแตกต่างกันดังนี้

182	126	87	94	107	191	174	105	188	129
171	98	112	128	106	85	105	80	98	69
128	179	105	127	88	112	170	87	154	120
56	82	181	126	141	89	92	109	188	121
164	156	111	89	146	146	163	121	76	115
147	146	56	104	102	100	71	110	184	150
159	102	65	79	126	158	112	159	182	86

139	120	147	68	102	101	96	148	108	152
153	138	98	118	92	98	108	112	67	68
145	86	112	83	103	76	157	96	184	106

จากข้อมูลเหล่านี้จะเห็นว่า นักเรียนบางคนได้คะแนนเท่ากันหรือไม่
ก็ใกล้เคียงกัน เราจะมาจัดกลุ่มข้อมูลลงอย่างไร จึงจะเห็นลักษณะโดยทั่วไป
ของนักเรียนพวกนี้ ว่าผลของการสอบเป็นอย่างไร ในขั้นต้นเราหาว่าคะแนน
สูงสุดเป็นเท่าไร และต่ำสุดเป็นเท่าไร จะได้ว่าคะแนนสูงสุดเป็น 191 คะแนน
ต่ำสุดเป็น 56 เราจะลองเขียนคะแนนจาก 191 เรื่อยลงมาจนถึง 56 และหา
ดูว่า จะมีเด็กที่ได้คะแนนต่าง ๆ กันคะแนนละกี่คน จะได้ผลดังนี้
คะแนน ความถี่ คะแนน ความถี่ คะแนน ความถี่ คะแนน ความถี่

191	1	184		177		177	1
190		183		176		169	
189		182		175		168	
188		181		174	1	167	
187		180		173		166	
186		179	1	172		165	
185		178		171	1	164	1
163	1	187	1	111	1	85	1
162		136		110	1	84	
161		135		109	1	83	1
160		134	1	108	2	82	1

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
159	1	188	1	107	1	81	
158		182	2	106	2	80	1
157	1	181	1	105	3	79	1
156	1	180		104	1	78	
155		129	1	103	1	77	
154	1	128	1	102	3	76	1
153	2	127	1	101	1	75	1
152	1	126	3	100	1	74	
151		125		99		73	
150	1	124		98	1	72	
149		123	1	97		71	1
148	1	122		96	2	70	
147	1	121	2	95		69	
146	3	120	2	94	1	68	2
145	1	119		93	3	67	1
144	1	118	1	92	2	66	
143		117		91		65	2
142		116		90		64	
141	1	115	1	89	2	63	1

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
140		114		88	1	62	
139	1	118		87	2	61	
138	2	112	5	86	1	60	
						59	
						58	
						57	
						56	2

จากการเรียงลำดับขึ้นจะเห็นว่า ข้างคะแนนไม่มีคนใดเลย การที่เรา
กำหนดคะแนนเรียงไปทุกจำนวนโดยไม่คำนึงว่าจะมีคนใดคะแนนนั้นบ้าง
หรือไม่นั้น จึงทำให้เปลืองที่และเวลาไปเปล่า ๆ และยังไม่ช่วยให้เราเห็น
อะไรมากนัก เราจึงจะต้องทำใหม่ คราวนี้ไม่เรียงทุกคะแนน แต่จะแบ่ง
เป็นช่วง ๆ ว่าระหว่างคะแนนเท่านั้นถึงเท่านั้น ในขั้นต้นจะใช้ช่วงละ ๑
คะแนน บันทึกความถี่ของแต่ละช่วงลงไว้ จะได้ดังต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
191—198	1	122—124	1
188—190		119—121	4
185—187		116—118	1
182—184		113—115	1
179—181	1	110—112	7

กระแสน	ความถี่	กระแสน	ความถี่
178—178	1	107—109	6
178—175			
170—172	2	101—103	5
167—169		98—100	2
164—166	1	95—97	2
161—163	1	92—94	6
158—160	2	89—91	2
155—157	2	86—88	4
152—154	4	83—85	2
149—151	1	80—82	2
146—148	5	77—79	1
143—145	1	74—76	2
140—142	1	71—73	1
137—139	4	68—70	2
134—136	2	65—67	3
131—133	4	62—64	1
128—130	2	59—61	
125—127	4	56—58	2

จากตารางนี้ จะเห็นว่ามลัษณะคชนกกว่าตารางแรก คือช่วงที่ไม่มี
ใครได้คะแนนน้อยลง และเราเริ่มมองเห็นการกระจายของคะแนนว่า
ส่วนมากอยู่ที่ไหน จากตัวอย่าง เราพอจะอนุมานได้ว่าถ้าเรารวบรวมคะแนน
เข้าเป็นช่วงใดเข้า การกระจายของคะแนนต่าง ๆ ก็ระอ่กแน่นเข้า ทำให้
เราเห็นภาพการกระจายของคะแนนชัดขึ้น ในตารางต่อไปนี้จะรวบรวม
คะแนนให้อ่กแน่นเข้าทุกที เริ่มด้วยใช้ช่วงละ 5 คะแนน แล้วเพิ่มขึ้นเป็น
ช่วงละ 10 คะแนน ช่วงละ 20 คะแนน และตารางสุดท้ายจะใช้ช่วงละ
50 คะแนน เพื่อให้เปรียบเทียบว่า เราจะแบ่งช่วงละเท่าไร หรือทั้งหมด
จะแบ่งเป็นสักกี่ช่วงจึงจะดีที่สุด ข้อควรสังเกตในของแรกน่กคือว่า ถ้าเรา
แบ่งช่วงคะแนนมากเกินไป เราจะไม่อาเห็นการกระจายของคะแนนได้ชัดเจน
เพราะรายละเอียดต่าง ๆ ไปรวมกันอยู่เสียหมด คือมีความไม่ชัดเจนเกี่ยวกับ
การที่เรากระจายทุกคะแนน ทำให้ไปร่งเกินไป มีช่วงที่ไม่มีใครได้คะแนน
มาก และไม่ช่วยให้เราเห็นว่าคะแนนส่วนใหญ่ันั้นไปรวมกันอยู่ที่ช่วงไหน
มากที่สุด

ใช้ช่วงละ 5 คะแนน		ใช้ช่วงละ 10 คะแนน		ใช้ช่วงละ 20 คะแนน	
คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
188—192	1	190—199	1	180—199	1
188—187		180—189		150—169	6
178—182	1	170—179	4	140—159	16
178—177	1	160—169	2	120—139	21
168—172	2	150—159	9	100—119	25
168—167					

ใช้ช่วงละ 5 คะแนน		ใช้ช่วงละ 10 คะแนน		ใช้ช่วงละ 20 คะแนน	
คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
158—162	2	140—149	7	80—99	19
153—157	5	130—139	10	60—79	10
148—152	8	120—129	11	40—59	2
143—147	5	110—119	9		
138—142	4	100—109	16		
133—137	4	90—99	9	ใช้ช่วงละ 50 คะแนน	
128—132	5	80—89	10	คะแนน	ความถี่
123—127	5	70—79	4	150—199	16
118—122	5	60—69	6	100—149	53
113—117	1	50—59	2	50—99	32
108—112	10				
103—107	8				
98—102	6				
93—97	6				
88—92	5				
83—87	5				
78—82	3				
73—77	2				
68—72	3				
63—67	4				

ใช้ช่วงละ 5 คะแนน	ใช้ช่วงละ 10 คะแนน	ใช้ช่วงละ 20 คะแนน
คะแนน ความถนัด	คะแนน ความถนัด	คะแนน ความถนัด

58-62

59-57 2

จากตารางเหล่านี้จะเห็นได้ว่า การใช้ช่วงละ 5 คะแนนก็ยังไม่ค่อยกระชับกันเท่าที่ควรเกินไป ในทำนองเดียวกันเมื่อเราใช้ช่วงละ 50 คะแนนก็จะเห็นว่า คะแนนอัดแน่นกันมากเกินไป มีที่เปรียบเทียบกันอยู่ระหว่างช่วงละ 10 คะแนนและ 20 คะแนน ว่าอันไหนจะดีกว่ากัน ทั้งนี้แล้วแต่เราต้องการในแง่ใด เพราะเหตุว่าการเลือกช่วงยิ่งกว้างมาก คะแนนจึงจะเป็นเท่าไรเราไม่ทราบ เพราะไปรวมอยู่ในช่วงนั้น ความถนัดแน่นจนก็ยอมเสียไปบ้าง เห็นอันว่าเราใช้ข้อ 2 ตารางตามแต่จะเลือก

ในทางปฏิบัติจริง ๆ ไม่ถือช่วงคะแนนเป็นสำคัญ มักถือจำนวนของข้อที่แบ่ง มักใช้กันอยู่ระหว่าง 10 ข้อถึง 15 ข้อ จำนวนที่พอเหมาะถ้าสามารถทำได้ควรเป็น 12

ในการจัดทำตารางการกระจายความถนัด มีขั้นตอนควรปฏิบัติตามลำดับดังนี้

1. ทำตารางเป็น 8 ช่อง ช่องแรกเป็นคะแนน ช่องที่สองให้วางหน่วยเป็นการบันทึกคะแนน ช่องที่สามเป็นความถนัด ช่องความถนัดนี้ตรงกับการรวบรวมผลของการบันทึกคะแนนนั่นเอง

2. ดูจากข้อมูลที่ได้มาว่าคะแนนสูงสุดเป็นเท่าไร ค่าสุดเป็นเท่าไร ความแตกต่างระหว่างคะแนนทั้งสองนั้นถ้าวางเป็นช่วงกว้างของคะแนนทั้งหมด

3. ทหารช่วงกว้างที่หาได้ในข้อ 2 คูณ 15 หรือ 12 แล้วแล้วจำนวนไหนจะใกล้เคียงพอควร ทั้งนี้เพื่อหาช่วงของแต่ละชั้น ค่าเลขที่ใดก็ตามไม่

ลงตัว ให้ประมาณเป็นจำนวนเต็ม เช่น 2, 3, 5, 7, 10, 15 หรือทศนิยม
ของ 5

4. กำหนดช่วงของแต่ละชั้นว่า จะเป็นคะแนนจากเท่าไรถึงเท่าไร
จากสูงลงมาต่ำ มีข้อควรสังเกตดังนี้ ถ้าช่วงของแต่ละชั้นที่เราหาได้ใน
ข้อ 3 เป็นจำนวนคี่ ให้หาทศนิยมของจำนวนนั้นจนใกล้คะแนนที่สูงที่สุด
แล้วกำหนดช่วงของแต่ละชั้นสูงส่งขึ้นไปให้หาทศนิยมที่หาได้อยู่ระหว่างกลางของช่วงนั้น
ถ้าช่วงของแต่ละชั้นเป็นจำนวนคู่ ให้หาทศนิยมของจำนวนนั้นจนใกล้คะแนน
ที่ต่ำที่สุด แล้วใช้เป็นตัวเลขที่กำหนดช่วงนั้นโดยให้อยู่ประมาณกึ่งกลาง
ของแต่ละชั้น

5. บันทึกคะแนนในช่องบันทึก วิชบันทึก ได้คะแนนไปแต่ละคะแนน
กว่าจะตกอยู่ในชั้นไหน ชกเครื่องหมายลงในชั้นนั้น 1 ชก แปลว่าเป็นความถ
1 ครั้ง ถ้ามีมากในชั้นนั้น ชกออก 1 ชก เมื่อมี 4 ชกแล้ว จะชนชกที่ 5
แทนที่เราจะชกเป็น 5 ชก เราชกครบ 4 ชกนั้นเป็นเครื่องหมายว่าเกิน 5
การทำเช่นนี้จะช่วยในการนับภายหลังให้สะดวกขึ้น

6. เมื่อนับทุกคะแนนลงหมดแล้ว รวมจำนวนที่บันทึกไว้โดยออกเป็น
ความถี่ลงในตาราง และเพื่อเป็นการทดสอบ ให้ลองรวมความถี่เหล่านั้น
ทั้งหมด จะต้องตรงกับยอดจำนวนคะแนนทั้งหมดที่อยู่ในข้อมูล ทั้งนี้
เพราะว่าเราจะต้องบันทึกคะแนนทุกคะแนนลงเป็นความถี่ จะขาดหายไป
ไม่ได้

เพื่อเป็นตัวอย่าง จะใช้แสดงตารางที่หาสำหรับความถี่ที่กล่าวแล้ว
และอธิบายวิธีที่ประกอบภายหลัง ข้อมูลที่นำมาทำ เป็นข้อมูลคะแนน
แสดงไว้ในตอนแรกนั่นเอง

ตารางแสดงการแจกแจงความถี่ของคะแนน

คะแนน	บันทึกคะแนน	ความถี่
190-199	/	1
180-189		
170-179	////	4
160-169	//	2
150-159	+++ ////	9
140-149	+++ //	7
130-139	+++ +++	10
120-129	+++ +++ /	11
110-119	+++ ////	9
100-109	+++ +++ +++ /	16
90-99	+++ ////	9
80-89	+++ +++	10
70-79	////	4
60-69	+++ /	6
50-59	//	2

1. ในขั้นตอนเราทำตารางเป็น 8 ช่อง กึ่งทศเลขน
2. ตรวจสอบคะแนนต่าง ๆ ปรากฏว่าคะแนนสูงสุดเป็น 191 คะแนนต่ำสุดเป็น 56

8. ช่วงของคะแนน คือกิตทางกันเป็น 185 ทารควัย 15 (เรา
จะใช้ 15 ชน) ใ้ 9

4. เลขจำนวนเต็มทีใกล้เคียง 9 ทศก ตามที่แนะไว้ว่า ให้เขียนทวิ
คูณของ 5 นน คอ 10 กงนเราจงกให้ชนหนึ่ง ๆ มีวง
10 คะแนน

5. ให้ชนสูงสุดมีช่วงคะแนน จาก 190 ถึง 199 กงนเพอรรวม
คะแนนสูงสุด คอ 191 เข้าไว้ควย แล้วให้ชนถัดลงมาขึ้นละ
10 ตามลำดับ จนชนสุดท้ายเป็น 50 ถึง 59 ซึ่งรวมคะแนนค่า
ทศกคอ 56 เข้าไว้

6. ขนทุกคะแนนแต่ละคะแนนลงในช่อง ขนทุกคะแนนควยวิรัชคตาม
ทกลาวแล้ว

7. รวมคะแนนขนทุกไว้ใ้คอกเป็นความฉในช่องสุดท้ายของตาราง
จากตารางการแจกแจงความฉ เราเห็นลักษณะบางประการของ

คะแนนการสอบควรวน คอคะแนนส่วนใหญ่จะอยู่ระหว่าง 150 ถึง 80
ส่วนทอยสูงหรือต่ำกว่านั้นมอยเป็นจำนวนน้อย และจากตัวเลขเหล่านี้เราขม
วิธีการที่จะลดลงเป็นสถิติขมประโยชน์อย่างอนใ้คอก ซึ่งระใ้กล่าวในคอน
ต่อไป

อย่างไรก การแสดงการแจกแจงความฉขตารางนถขมลักษณะ
เป็นตัวเลขยากแก่การเข้าใ้ช้อย น้จะมอวิธระแสดงตัวเลขเหล่านี้เป็นกราฟ
เช่นเคยวกับที่เราเคยใ้ช้ในการนำเสนอข้อมูลขมขอน ๆ ในบทที่ 1

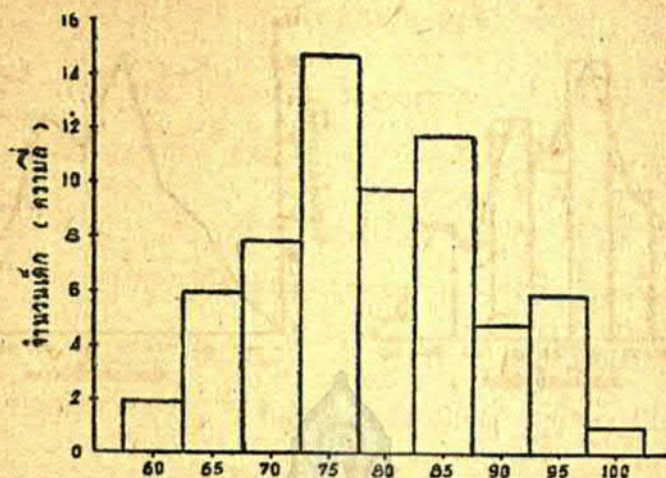
การแสดงการแจกแจงความถี่ด้วยกราฟ

วิธีหนึ่งที่จะแสดงการแจกแจงความถี่ คือทำเป็น ฮิสโตแกรม ฮิสโต-
แกรม ก็คือ การแสดงเป็นแท่งหลาย ๆ แท่ง ที่ก่อกำหนดบนแกนนอนอนเดียว
กันนั่นเอง เราใช้แกนตั้งแสดงปริมาณความถี่ แกนนอนแทนคะแนน แต่
คะแนนต้องแบ่งเป็นช่วง และการบันทึกก็ต้องบันทึกทั้งช่วง จึงมีสภาพ
เป็นแท่งดังกล่าวแล้ว

ในรูปต่อไปนี้ เรามีการวางการแจกแจงความถี่ของน้ำหนักเด็ก 65 คน
ทั้งแสดงไว้ทางขวามือของฮิสโตแกรม จากตารางนี้เราสร้างฮิสโตแกรมขึ้น
โดยใช้แกนตั้งเป็นความถี่ คือจำนวนนักเรียนที่มีน้ำหนักอยู่ในชั้นต่าง ๆ
ที่กำหนด เนื่องจากความถี่สูงสุดในการวางนี้เป็นเพียง 15 เราจึงกำหนด
สเกลสูงสุดเป็น 18 ทางแกนนอน น้ำหนักกำลัง 28 สูงสุด 102 เราจึง
แบ่งแกนนอนจาก 60 ถึง 100 แล้วบรรจบความถี่ของแต่ละชั้นลงไป

ฮิสโตแกรมช่วยให้เราเห็นได้ทันทีว่า การแจกแจงความถี่นั้น คะแนน
ที่มีคนมีกระโดดมากที่สุดอยู่ในช่วงไหนบ้าง ในฮิสโตแกรมนี้เราจะเห็นได้ว่า
เด็กส่วนมากจะมีน้ำหนักอยู่ราว ๆ 75 ปอนด์ ถึง 85 ปอนด์ ส่วนน้อยจึง
จะสูงหรือต่ำกว่านั้น

จากฮิสโตแกรม เราอาจแปลลงเป็นรูปหลายเหลี่ยมแห่งความถี่ได้
รูปหลายเหลี่ยมแห่งความถี่จริงก็คือการถ่วงเฉลี่ย ฮิสโตแกรมให้เป็นเส้น
โค้งนั่นเอง คือเหมือนฮิสโตแกรมแล้ว เราหาจุดกึ่งกลางของแต่ละแท่งมา

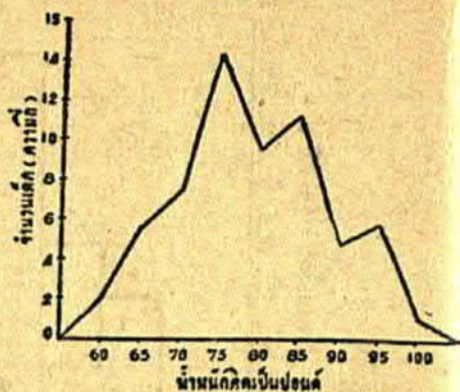
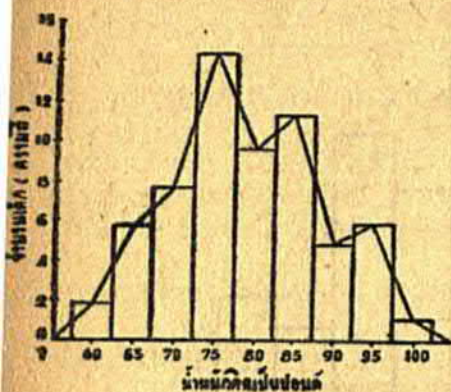


น้ำหนักเกิดเป็นปอนด์

รูปที่ 15

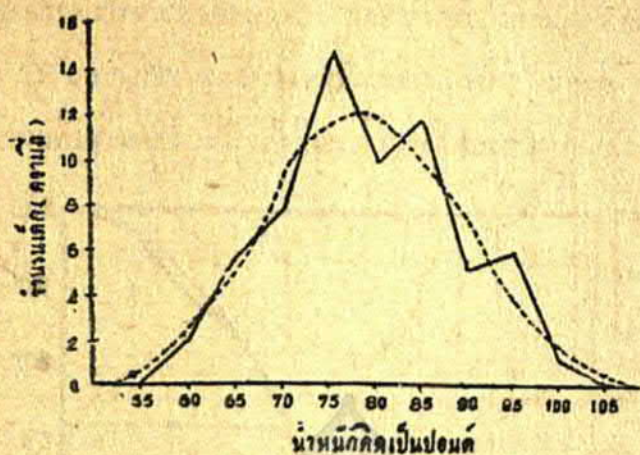
จากแท่ง ลากเส้นผ่านจุดเหล่านั้น แล้วลบขีดโตแกรมทิ้งเสีย ก็รูปที่ 16
ซึ่งแสดงถึงทฤษฎีของมัสโลว์ และที่เราลบขีดโตแกรมทิ้งไปแล้ว
เหลือแต่รูปหลายเหลี่ยมแห่งความดี

รูปหลายเหลี่ยมแห่งความดี ช่วยให้เราได้เห็นลักษณะการกระจายได้
ชัดเจนดีกว่าขีดโตแกรม เพราะด้วยวิธีเฉลี่ยทางลงเป็นจุด เราจะสามารถ
ได้เห็นจุดยอดสูงสุดได้ทันที ถ้าในรูปหลายเหลี่ยมแห่งความดีนั้นจะเห็นยอด
สูงสุดอยู่ก่อนหน้า 75 ยอดถัดมาก็คือก่อนหน้า 85 ตรงกับที่เราดูได้จาก
ขีดโตแกรม



รูปที่ 16

เพื่อให้เห็นลักษณะการกระจายโดยทั่วไปของเด็กทั้งหมด เราอาจทำให้
 ตารางเหล่านี้กลายเป็นเส้นโค้งทแยงมุมได้ โดยวิธีการเฉลี่ย ดังรูปที่ 17
 วิธีการปรับให้เป็นโค้งทแยงมุม เราใช้วิธีแบ่งครึ่งตารางทุก ๆ ตาราง
 อยู่ในรูปตารางเหลื่อมกันแห่งความถี่ แล้วลากเส้นผ่านจุดกึ่งกลางของแต่ละ
 ตารางให้เป็นเส้นโค้งที่ตัดกันเรียบ วิธีนี้ใช้ในการกระจายหรือประมาณ ซึ่ง
 ทำให้ผลเพี้ยนจากความจริงไปเล็กน้อย ดังนั้นตามปกติจะไม่ปรับให้เป็น
 โค้งทแยงมุม เว้นแต่ข้อมูลที่มีความถี่เป็นตัวเลขจำนวนน้อยของข้อมูลซึ่ง
 มีอยู่ชุกมากมา การกระจายเช่นนี้แม้จะผลจากตัวอย่างที่ใดมา แต่ก็จะ
 จะใกล้เคียงลักษณะที่แท้จริงของส่วนใหญ่ ถ้าข้อมูลทางสถิติใดมีความถี่เป็น
 ข้อมูลที่มีจำนวนจำกัด ไม่มากแล้ว ควรแสดงเป็นเพียงตารางเหลื่อมกันแห่ง
 ความถี่

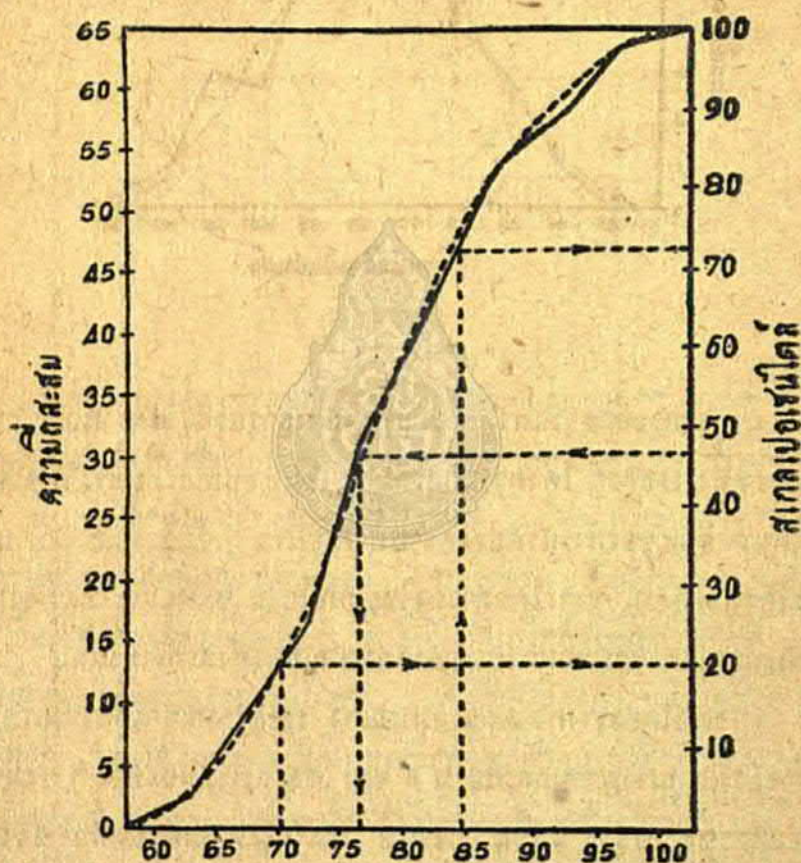


รูปที่ 17

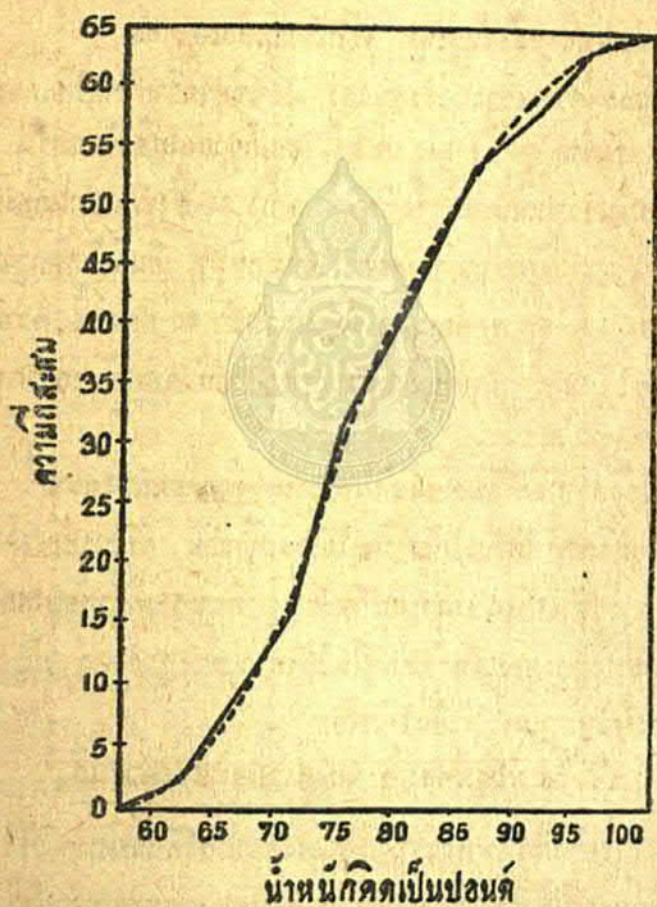
นอกจากวัดทุกตัวแล้ว เราหาแสดงการแจกแจงความถี่เป็นกราฟ
 อีกชนิดหนึ่ง เรียกว่า โค้งความถี่สะสม โค้งความถี่สะสมจะไม่ช่วยให้
 เราเห็นลักษณะของการแจกแจงความถี่ชัดเจน เช่นวัดแล้วมา แคม
 ประโยชน์อย่างอื่น ซึ่งจะใกล้เคียงถึงในบทต่อไป ในขั้นตอนนี้ให้ทราบเพียง
 วิธีการที่จะแสดงข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่เป็นโค้งสะสมเท่านั้น

เมื่อเราได้ตารางความถี่สะสมมาแล้ว เราสร้างตารางขึ้นใหม่เรียกว่า
 ตารางการแจกแจงความถี่สะสม มี 8 ช่อง ช่องแรกเป็นชั้นต่าง ๆ ซึ่งมีช่วง
 ของแต่ละชั้น ช่องที่ 2 เป็น ความถี่ ซึ่งได้มาจากการบันทึก ช่องที่ 3
 เป็นช่องความถี่สะสม ความถี่สะสมนั้นคือเรานำความถี่ของชั้นที่ต่ำลงไป
 ทั้งหมดมาบวกเข้ากับความถี่ของชั้นที่สูงที่สุด จึงมาหาพื้นที่ทุกขยกรวม
 ของความถี่ทั้งหมด ดังในรูปที่ 18

ในตารางแสดงไว้ทางซ้ายมือ เราแสดงการแจกแจงความถี่ของ
 นานักเทก 65 คน ซึ่งความถี่นี้เป็นตารางอันเคยยกยทเคยใช้มาแล้วใน
 การสร้างฮิสโตแกรม หรือหลายเหลี่ยมแห่งความถี่ ซึ่งความถี่สะสมนั้นได้



จากการคำนวณใหม่ จะเห็นว่าความถดถอยของชั้นสูงที่สุด คือนานก
ระหว่าง 98 ถึง 102 ปอนด์นั้น มี 65 เท่าของรวมของความถดถอยทั้งหมด
การคำนวณใหม่นี้มาจากชั้นค่าที่ถูกต้อง ความถดถอยของชั้นค่าที่ถูกต้องจะเท่า



กขความถของชนนเอง เพราะไมมีอะไรกระทำไปกวาน ถคนมา
ความถของมนเอง 6 รวมกขชนทากว คอ 2 เป็น 8 ถคนมาถกชนทง
เราเอา 8 ไปรวมกข 8 ซึ่งเป็นความถของชนนเป็น 16 บันทกลงเป็น
ความถสะสม เอา 16 รวมกข 15 เป็น 31 เป็นความถสะสมของชนถ
ชนไป ทำเช่นจนถงชนถงสค จะได้ความถสะสม 65

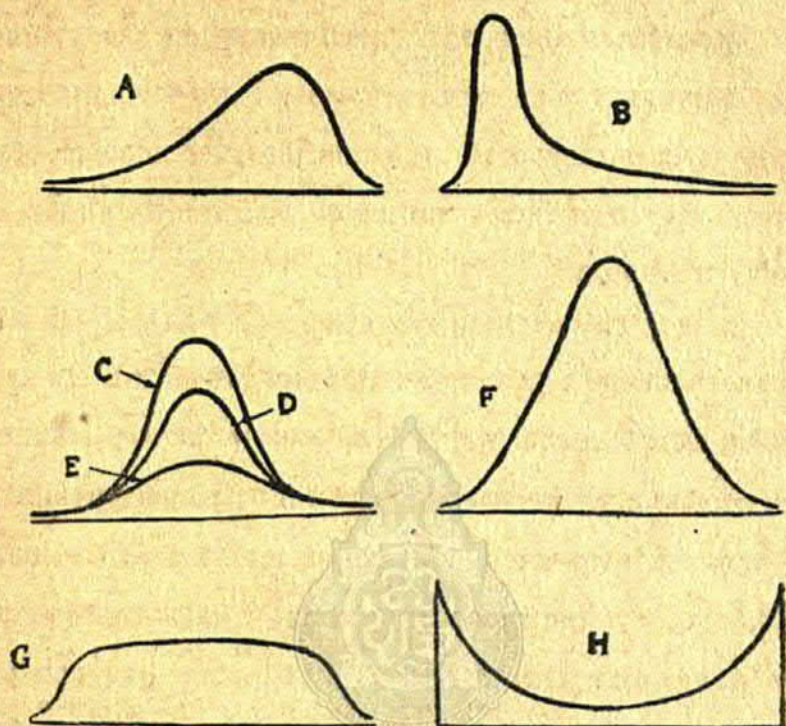
เมื่อได้ตารางความถสะสมแล้ว เราเขียนกราฟโดยให้แกนอนแทน
น้ำหนัก เริ่มจาก 60 ถึง 100 ปอนด์ เช่นเดียวกับในชีสโตแกรม แต่แกน
ตั้งนให้เป็นความถสะสม จึงเริ่มจาก 0 ถึง 65 ซึ่งเป็นความถสะสมถงสค
การเขียนกราฟให้จุดกึ่งกลางของช่วงในชนทง ๆ เป็นทขนทกความถสะสม
เช่นในชน 58—62 จุดกึ่งกลางคือ 60 ถน้ำหนัก 60 ปอนด์ ความถสะสม
เป็น 2 จุดไว้ และหาจุดเช่นนสำหรับทุกชน แล้วลากเส้นต่อจากทุกเหล่าน
เป็นโค้งความถสะสม

โค้งความถสะสมกเช่นเดียวกับรปหลายเหลี่ยมแห่งความถ คอเรา
อาจเฉลี่ยหรือปรับให้เป็นโค้งทเรียบโคเช่นเคียวกัน ถงในรปท 19

การปรับโค้งความถสะสมให้เรียบ ก็ทำเช่นเคียวกับรปหลายเหลี่ยม
คือหาจุดกึ่งกลางของเส้น ทคอกันใน โค้งความถสะสมทุก ๆ เส้น ลากเส้น
โค้งผ่านทุกเหล่านจะได้เป็นโค้งเรียบ

แบบรูปต่าง ๆ ของการแจกแจงความถ

ข้อมูลที่เราจะนำมาแจกแจงความถไก้นมีมาก เช่น ความสูง
น้ำหนัก ขนาดของร่างกายส่วนต่าง ๆ ของคน กระแนจากการสอย ปริมาณ
การผลตพษผลจากเนอทเพราะปลูกต่าง ๆ กัน เขาวนของเค็ก หรือแม่คุณภาพ



รูปที่ 20

ของสินค้าที่ผลิตออกมาแตกต่างกันเหล่านั้นเป็นต้น เมื่อเราได้ตารางการแจก
 แรงความถี่และนำมาเขียนเป็นเส้นโค้ง เราจะได้ลักษณะของการแจกแรง
 ความถี่แตกต่างกัน ดังรูปที่ 20

การแจกแรงความถี่อาจมีลักษณะซ้ายขวาเหมือนกัน คือหมายความว่า
 ว่ารูปของการแจกแรงนั้นอาจพบกลางแล้ว ส่วนที่อยู่ทางซ้ายและขวาระดับ
 กันสนิท รูปต่าง ๆ 4 รูปข้างล่างในรูปที่ 20 นั้น ถือได้ว่ามีความถี่ลักษณะ ซ้ายขวา
 เหมือนกัน

แบบฝึกหัดที่ 3

จากข้อมูลชุดต่าง ๆ ต่อไปนี้ ให้ทำ

1. ตารางการแจกแจงความถี่ และ ความถี่สะสม
2. เขียนฮิสโตแกรมแสดงการแจกแจงความถี่
3. แปลงฮิสโตแกรมเป็นรูปหลายเหลี่ยมแห่งความถี่
4. ปรับรูปหลายเหลี่ยมแห่งความถี่นั้นให้เป็นโค้งเรียบ
5. เขียนโค้งความถี่สะสมจากตารางต่าง ๆ แล้วปรับให้เป็นโค้งเรียบ
6. ให้บรรยายโค้งความถี่ในข้อ 4 ว่าเป็นแบบรูปชนิดใดของโค้งความถี่

ชุดที่ 1

ข้อมูลต่อไปนี้ เป็นคะแนนจากการสอบเด็ก 50 คน

171	169	128	141	106	146	87	114	187	188
151	180	150	118	142	166	158	101	159	126
186	187	152	187	182	188	151	145	152	157
144	140	111	150	152	187	146	128	144	158
149	114	185	181	161	95	184	124	125	167

ชุดที่ 2

ข้อมูลต่อไปนี้ เป็นผลของการวัดเขวาวนของเด็กจำนวน 100 คน

85	95	69	96	99	100	78	102	99	88
----	----	----	----	----	-----	----	-----	----	----

117	105	81	99	119	92	94	91	79	106
108	85	76	98	89	104	95	91	78	106
110	93	105	106	89	75	112	97	110	84
85	114	91	93	86	188	117	82	88	125
104	126	76	104	111	102	100	108	100	95
108	101	98	107	105	87	96	98	80	114
89	90	60	75	81	103	120	90	110	95
105	126	111	110	110	90	76	129	90	111
115	78	105	119	106	79	125	70	58	109

๑
ชุดที่ 3

ข้อมูลต่อไปนี้ เป็นผลของการวัดความสูงของเท้า 50 คน กิโลกรัม

เป็นนิ้ว

50.0	51.8	52.5	51.5	52.6	49.5	50.3	50.2	51.7	49.4
49.2	48.0	55.5	58.2	51.3	50.5	50.3	49.4	50.0	50.9
77.4	49.2	53.2	50.8	49.3	49.9	53.7	53.9	53.9	62.8
51.6	49.7	52.2	52.6	51.6	52.9	53.8	53.2	53.1	53.8
53.1	53.3	55.2	56.3	49.2	48.6	52.2	52.8	54.4	53.2

๑
ชุดที่ 4

ข้อมูลต่อไปนี้ เป็นผลการวัดความสูงของปลายเท้า กิโลกรัม เป็นลูกบาศก์นิ้ว จาก
การวัดเท้า 115 คน

80	122	104	184	110	92	85	85	85	85	98	85
122	64	98	85	122	64	98	85	92	110	98	86
85	80	110	104	92	90	98	116	104	116	122	85
98	116	92	110	110	122	182	92	122	104	116	112
98	92	79	78	148	110	110	79	110	158	145	85
85	110	110	110	128	110	128	128	140	110	104	128
184	184	120	150	177	122	120	184	116	85	120	184
111	85	120	184	116	85	120	140	110	122	122	184
98	110	122	122	128	184	92	118	146	146	158	180
184	98	140	128	120	184	121					

๕
ชุดที่ 5

ข้อมูลต่อไปนี้เป็นผลของการวัดอัตราส่วนการแข่งตัวของกระดูกใน
เด็กนักเรียนจำนวน 140 คน

.61	.52	.48	.48	.76	.86	.62	.58	.42	.42	.59	.92	.54
.56	.44	.48	.59	.44	.54	.42	.50	.60	.46	.42	.56	.49
.66	.65	.61	.70	.62	.56	.61	.60	.45	.70	.58	.75	.68
.40	.68	.62	.54	.59	.52	.40	.55	.40	.61	.65	.61	.41
.58	.50	.58	.67	.55	.65	.66	.78	.82	.70	.75	.68	.68

352.

.68	.60	.68	.67	.80	.81	.81	.70	.68	.71	.61	.77	.65
.67	.60	.67	.56	.78	.58	.78	.70	.68	.62	.69	.60	.71
.78	.75	.76	.79	.91	.87	.78	.80	.76	.85	.70	.80	.67
.68	.64	.98	.88	.85	.72	.65	.68	.64	.98	.88	.85	.71
.85	.68	.61	.70	.61	.61	.68	.98	.78	.90	.71	.89	.78
.81	.88	.75	.68	.79	.80	.88	.85	1.00	.85			



การกำหนดตำแหน่งด้วยเปอร์เซ็นต์

ข้อมูลที่เรานำมาแจกแจงความถื่น จะเห็นว่าเราได้มาเป็นกลุ่ม ๆ

ในกลุ่มหนึ่งนั้นย่อมประกอบด้วยสมาชิกเป็นจำนวนมาก คะแนนหรือผลการ
วัดต่าง ๆ ของสมาชิกแต่ละคนย่อมแตกต่างกัน เราจะบอกได้อย่างไรว่า
คะแนนหรือผลของการวัดของสมาชิกแต่ละคนนั้นลักษณะเป็นอย่างไร เมื่อ
เปรียบเทียบกันกลุ่มหนึ่งกับกลุ่มอื่นกันว่าอยู่สูงหรืออยู่ต่ำเพียงใด วัดทางสถิติ
วิธีหนึ่งก็คือเราเรียงลำดับท เหมื่อนการเอาคะแนนสอบไล่นักเรียนมาเรียง
จากสูงไปต่ำ ใครอยู่สูงที่สุดก็เป็นที่ 1 แล้วเรียงกันลงมาตามลำดับ วัน
นั้นจะใช้ใดก็ตามมีความหมายแคบ เพราะว่าเด็กคนหนึ่งบอกว่าสอบได้ 28
กว่า 28 น จะมีความหมายแน่ชัดก็ต่อเมื่อเราทราบว่าในการสอบนั้นมี
นักเรียนกี่คน 28 จากนักเรียน 50 คนก็ค่อนข้างจะอยู่ในเกณฑ์ปานกลาง
แต่ถ้าเป็น 28 จากนักเรียน 25 คนก็ถือว่าเป็นนักเรียนแล้ว คนที่สอบได้ 9
จากนักเรียน 20 คน ย่อมดีกว่ากว่าคนที่ 12 จากนักเรียน 50 คนไม่ได้
ด้วยเหตุนี้เองการลำดับทจึงจะถือว่าเป็นวิธีการกำหนดตำแหน่งที่ไม่ได้

ถ้าสมมติว่าเราจะมิวัดบอกตำแหน่งไว้ว่า สมาชิกหนึ่งในหมู่นั้นมี

สมาชิกอื่น ๆ อยู่ต่ำกว่าเขา หรือได้คะแนนต่ำกว่าเขาสักร้อยละเท่าใดหรือ
สักกี่เปอร์เซ็นต์ ถ้าเราจะหาปัญหาเรื่องจำนวนมาคน้อยของสมาชิกในหมู่นั้น
ได้ ก็คือสมาชิกทั้งหมดของกลุ่มจะมีอยู่มาคน้อยเท่าใดก็ได้แล้วแต่เราเทียบลง
หา 100 ให้หมด แล้วหาว่าคนหนึ่งนั้นเขาได้คะแนนสูงกว่าคนอื่น ๆ ร้อยละ

เท่าใด สมมติว่ามีอยู่ร้อยละ 80 ท้ายต่ำกว่าเขา เราจะทำหนดตำแหน่ง
ของเขาว่าใด 80 เปอร์เซนต์ใด ที่เราจะต้องใช้คำว่าเปอร์เซนต์ใดเป็นคำ
ใหม่เพราะเหตุว่า คำว่าเปอร์เซนต์นั้นเราได้อธิบายมาแล้วมีความหมายเฉพาะ
อย่างหนึ่งไม่ตรงกับที่เราหมายความว่า

สมมติว่าคนหนึ่งใดหรืออยู่ในลำดับที่ 80 เปอร์เซนต์ใด หมายความว่า
ว่ามีคนอยู่ 80 เปอร์เซนต์ในกลุ่มของเขานั้นอยู่ในลำดับต่ำกว่าหรือใดคะแนน
ต่ำกว่าเขา จำนวนคนทั้งหมดคนอาจจะมากน้อยเท่าใดเราไม่ทราบ แต่เราทราบ
ว่าทั้งหมดมีอยู่ 100 คน จะมีคนที่ต่ำกว่าเขาอยู่ 80 คนซึ่งย่อมหมายความว่า
ต่อไปได้ว่า ถ้ามีอยู่ทั้งหมดเพียง 50 คน ก็จะมีต่ำกว่าเขาอยู่ 40 คน หรือ
ถ้ามีทั้งหมด 200 คน ก็จะมีต่ำกว่าเขา 160 คน

วิธีการที่เราหาว่าสมาชิกของกลุ่มร้อยละเท่าใด ท้ายต่ำกว่าคะแนน
ใดคะแนนหนึ่ง หรือว่าคะแนนใดคะแนนหนึ่งในการแจกแจงนั้นอยู่สูงกว่า
ร้อยละเท่าใดซึ่งจำนวนสมาชิกที่มีคะแนนต่ำกว่านั้นเองที่เราเรียกว่า การ
กำหนดตำแหน่งด้วยเปอร์เซนต์ใด

สมมติว่าในการสอบคราวหนึ่ง เด็กคนหนึ่งใดคะแนนรวมทั้งสิ้น 188
คะแนน และปรากฏว่ามีอยู่ 70 เปอร์เซนต์ของผู้เข้าสอบทั้งหมดก็ใดคะแนน
ไม่ถึง 188 เราพบว่าตำแหน่งเปอร์เซนต์ใดของคะแนน 188 นั้นเป็น 70
และคะแนนที่จะเป็น 70 เปอร์เซนต์ใด ในกลุ่มนั้นต้องใดถึง 188 คะแนน
ให้สังเกตคำว่า เปอร์เซนต์ใด และตำแหน่งเปอร์เซนต์ใดนั้นมีความหมาย
ต่างกัน ตัวเปอร์เซนต์ใดคือคะแนนหรือข้อมูลใดใดจากการวัด ส่วนตำแหน่ง

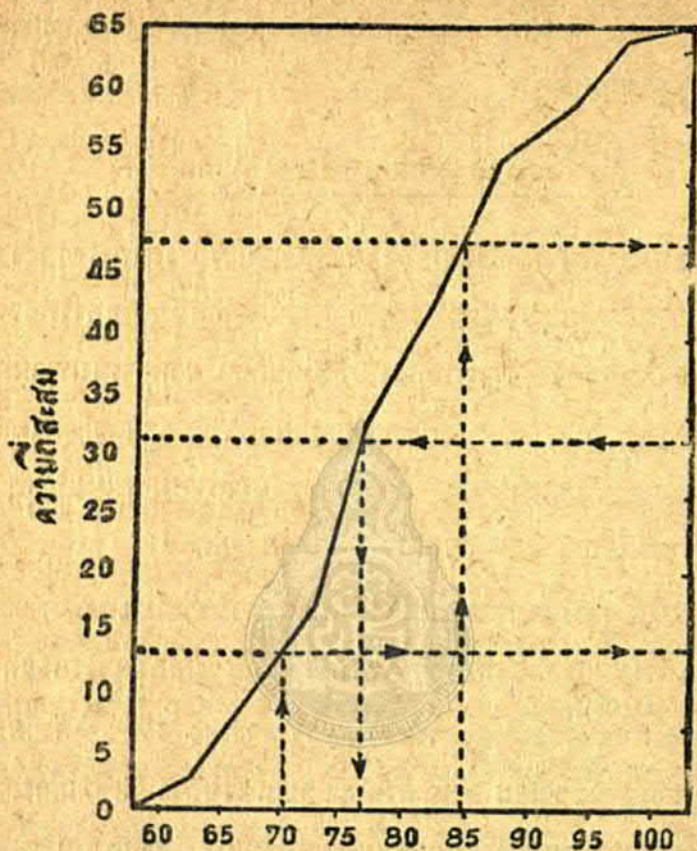
เปอร์เซ็นต์ใดคนหนึ่ง คือ ตัวเลขที่แสดงเปอร์เซ็นต์ความถี่เปอร์เซ็นต์ ที่อยู่ต่ำกว่า
คะแนนหรือข้อมูลนั้น

วิธีหาคำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

เมื่อเราได้ข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่ และประสงค์จะทราบว่าข้อมูล
แต่ละอันมีตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์เป็นเท่าใด วิธีที่ง่ายที่สุด คือหาโดยวิธีการ

ในขั้นตอนการทำตารางความถี่สะสมเสียก่อน จากตารางความถี่สะสม
เขียนกราฟแสดงความถี่สะสมเช่นเคยจนกระทั่งทำในบทที่แล้ว แล้วสร้าง
สเกลทางแกนตั้งขึ้นอีกหนึ่งอัน ให้ความสูงเท่าความถี่สะสมสูงสุด แล้ว
แบ่งระยะนั้นออกไปเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 21

พึงสังเกตว่า ในกราฟรูปที่ 21 แกนตั้งทางซ้ายมือเริ่มจาก 0 ถึง 65
65 นั้นเป็นความถี่สะสมสูงสุดจากตารางความถี่สะสมที่แสดงไว้ด้วยทางซ้าย
มือ เราคงแกนขึ้นอีกหนึ่งทางขวา สูงเท่าระยะ 65 ของความถี่สะสม
แล้วแบ่งความสูงนั้นออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน เรียกว่า สเกลเปอร์เซ็นต์ไทล์
แกนบนซึ่งแสดงน้ำหนักเป็นปอนด์นั้น คือ ข้อมูล หรือคะแนนที่เราจะหา
ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ สมมติว่าเราอยากทราบว่า น้ำหนัก 85 ปอนด์ จะมี
ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์เป็นเท่าใด ลากเส้นจากจุด 85 ปอนด์ขึ้นไปเป็นแนว
ตั้ง จนพบเส้นโค้งความถี่สะสม แล้วเขียนเส้นนอนจากจุดที่พบนั้นไปตัด
สเกลเปอร์เซ็นต์ไทล์ จะเห็นว่าตัดที่ประมาณ 78 เราบอกได้ว่าตำแหน่ง
เปอร์เซ็นต์ไทล์ของ 85 ปอนด์นั้นเป็น 78 หรือพูดว่า น้ำหนัก 85 ปอนด์เป็น
78 เปอร์เซ็นต์ไทล์ ในทำนองเดียวกันถ้าอยากทราบว่า น้ำหนักสักเท่าไร



รูปที่ 21

จึงจะมำตำแหน่งเปอร์เซนต์ไคเอน 20 เราลากเส้นจากสเกลเปอร์เซนต์ไคเอน 20
 ขนานกัแกนนอนมาตักเส้นโค้งความถี่สะสม แล้วลากเส้นตั้งจากจุดที่
 นนลงมาหาแกนนอน จะคักทราว ๆ 70 ปอนต์ เราจึงบอกไควว่าทจะเป็น
 20 เปอร์เซนต์ไคเอนนต้องมำหนัก 70 ปอนต์ ด้วยกราฟนี้ เราอาจหา
 เปอร์เซนต์ไคเอนหรือตำแหน่งเปอร์เซนต์ไคเอนใด ๆ ก็ได้

อย่างไรก็ดี กราฟฟิกที่ใช้โดยเฉพาะการวางความถี่สมมติหนึ่งเท่านั้น
ถ้าเปลี่ยนข้อมลเป็นการแจกแจงความถี่กลุ่มอื่น ก็ต้องสร้างกราฟขึ้นใหม่จาก
การวางความถี่สมมติของกลุ่มนั้น กราฟการวางความถี่สมมติ และการเขียน
โค้งความถี่สมมติทั้งหลายไว้ในยัติก่อน ก็เพื่อประโยชน์ในการหาเปอร์เซ็นต์ไทล์
หรือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์นั่นเอง

ข้อบกพร่องของการหาโดยวิธีกราฟก็คือ ไม่สู้มีความถี่แน่นอน
เหมือนการหาคำนวณซึ่งจะได้ออกค่าต่อไป ทั้งนี้เพราะการอ่านจากสเกลนั้น
เราใช้การประมาณด้วยตา ถ้าสเกลนั้นไม่แบ่งย่อยละเอียดพอก็อาจผิดพลาด
ไปบ้าง บางทีอาจเป็นเพราะว่าโค้งความถี่สมมติเองก็เป็นการประมาณมา
ขึ้นหนึ่งแล้ว เมื่อมาประมาณอีก โอกาสที่จะผิดจากความจริงมากขึ้น แต่
อย่างไรก็ดี สำหรับความมุ่งหมายในทางปฏิบัติให้ใกล้เคียงเร็วและสะดวกโดย
ไม่คำนึงถึงความละเอียดถี่ถ้วนมากนัก วิธีกราฟนี้ก็ดี ข้อเสียข้อหนึ่ง
คือ ถ้าเราต้องหาเปอร์เซ็นต์ไทล์เพียงอันเดียว หรือหาตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์
เพียงอันเดียว จะต้องสร้างกราฟขึ้นเช่นนี้บ่อยเสียเวลามาก ในกรณีเช่นนี้
เราใช้วิธีคำนวณจะเร็วกว่า

การหาเปอร์เซ็นต์ไทล์หรือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์โดยวิธีคำนวณนั้นเรา
ทำจากการวางความถี่สมมติเหมือนกัน สมมติว่าจากการวางความถี่สมมติต่อไป
นี้เราจะหาเปอร์เซ็นต์ไทล์ หรือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์อย่างอื่น

การวางความถี่ย่อม

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
160—169	8	80
150—159	5	77
140—149	2	72
130—139	8	70
120—129	8	62
110—119	5	54
100—109	8	49
90—99	11	46
80—89	8	35
70—79	8	27
60—69	8	19
50—59	5	11
40—49	2	1
30—39	1	4
20—29	8	8

สมมติว่าเราอยากทราบว่า คะแนน 95 จะมิตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ใดเป็น
 เท่าใด เราจะต้องทราบเสียก่อนว่า มีคะแนนที่อยู่ต่ำกว่า 95 ทั้งหมด
 เท่าใดเสียก่อน จากการวางความถี่สะสมจะเห็นว่าคะแนน 95 นั้นอยู่ในชั้น
 90—99 คะแนนที่อยู่ในชั้นต่ำลงมาขี้นมต่ำกว่า 95 ทั้งหมด แต่คะแนนที่

อยู่ในชั้น 90—99 นั่นเอง ถ้าเราสมมติว่าเหมือนกันที่อยู่ต่ำกว่า 95 กันนั้น
จำนวนคะแนนที่อยู่ต่ำกว่า 95 จริง ๆ ก็จะต้องเป็นคะแนนที่อยู่ในชั้นตั้งแต่
80—89 ลงมาทั้งหมด บวกด้วยบางส่วนของคะแนนที่อยู่ในชั้น 90—99
คะแนนที่อยู่ในชั้นตั้งแต่ 80—89 ลงมานั้น เราจะทราบได้ทันทีว่าเป็น 85
ทันทีโดยดูจากช่องความถี่สะสม และในเวลาเดียวกันเราก็ทราบว่าในชั้น
90—99 นั้นมีความถี่อยู่ 11 ใน 11 น่ะมากกว่า 95 สักเท่าใดเราไม่ทราบ
แน่ แต่เราประมาณเอาว่า 11 คะแนนในชั้นนั้นคงลกดกลืนกันมาตามลำดับ

เมื่อรับหลักในการประมาณเช่นนั้น เราก็คิดต่อไปว่า คะแนน 95 น้อย
สูงกว่าเบี่ยงเบนค่าของชั้น 90—99 สักเท่าใด เบี่ยงเบนจะใช่ 90 ไม่ใช่ เพราะ
ถกลงไปเป็น 89 จะให้เป็นเบี่ยงเบนค่าจริง ๆ จะต้องใช้ 89.5 คือกึ่งกลางระหว่าง
89 กับ 90 95 ลบด้วย 89.5 ได้ 5.5 แล้วเราก็คงเดาว่าทั้งชั้นซึ่งมีช่วง 10
คะแนนนั้นมียุ 11 ราย ถ้า 5.5 คะแนนจะมีอยู่ก็ราย ตามบัญญัติใดอย่างก็
จะได้ $\frac{5.5}{10} \times 11$ ได้ 6.05 เราจึงอาจกล่าวได้ว่าคะแนนทั้งหมดที่อยู่ต่ำกว่า
95 มี $85 + 6.05$ เป็น 41.05

จากความถี่ทั้งหมด 80 เราจะมี 41.05 ทั้งหมดคะแนนต่ำกว่า 95 เรา
จึงเทียบบัญญัติใดอย่างก็ว่า ถ้าทั้งหมดมียุ 100 จะมีคะแนนต่ำกว่า 95
สักกี่ราย จะได้ $\frac{41.05}{80} \times 100$ คือ 51 51 นี้คือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์
ของคะแนน 95

จากวิธีคิดทั้งหมดนี้ เราอาจวางหลักการหาดำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ของ
คะแนนใด ๆ ได้ดังนี้

1. จะใช้คะแนนของค่าทดสอบของชั้นที่คะแนนน้อยลบออกจาก
คะแนน

2. หาค่าผลที่ได้จากข้อ 1 คูณช่วง คือจำนวนคะแนนในชั้นหนึ่ง ๆ

3. คำนวณผลที่ได้จากข้อ 2 คูณความถี่ของชั้นนั้น

4. นำเอาผลจากข้อ 3 ไปบวกความถี่สะสมต่ำกว่าชั้นนั้น

5. เอาผลที่ได้ในข้อ 4 คูณด้วย 100 หาค่าความถี่รวมความถี่ทั้งหมด
ออกผลเป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ต้องการ

ในทางที่ตรงกันข้าม หากเราประสงค์จะหาเปอร์เซ็นต์ไทล์ใดเปอร์เซ็นต์-
ไทล์หนึ่งว่าจะเป็นคะแนนสักเท่าไร ก็นำวิธีข้างบนนี้

สมมติว่าเราอยากจะทราบว่า เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ของตารางที่แล่วมา
นั้นจะมีค่าเป็นคะแนนเท่าใด ในชั้นต้นเราตรวจดูของ ความถี่สะสม จะ
เห็นว่า ความถี่รวมทั้งหมดคือ 80—50% ของ 80 ก็คือ 40 หมายความว่า
จะต้องมีคะแนนต่ำกว่าคะแนนน้อย 40 ราย เราดูของ ความถี่สะสมออกคร
องเห็นว่าชั้นไหนที่มีค่าความถี่สะสมใกล้ 40 ที่สุด จะเห็นว่าชั้น 90 ถึง 99 มี
ความถี่สะสม 46 แปลว่าคะแนนที่เรามีคะแนนน้อยกว่า 40 รายนั้น
จะต้องอยู่ในชั้นนี้ แต่ในชั้นที่ต่ำกว่าไปนั้นมีความถี่สะสมแล้ว 35 จึงมี
เหลือที่เราจะต้องหาในชั้นนี้อีก 40—35 คือ 5 ในชั้นนี้ความถี่ทั้งหมด 11
เราต้องการเพียง 5 จะเป็นคะแนนเท่าใด เราเทียบบัญญัติไตรยางค์ว่า
ถ้าความถี่ทั้งหมดเป็น 11 จะเป็นช่วงคะแนน 10 ถ้ามีความถี่เพียง 5
จะมีช่วงคะแนนเพียง $\frac{10}{11} \times 5$ คือ 4.54 คะแนน คือหมายความว่า 4.54

คะแนนเหินจากเบี่ยงค่าแท้จริงของชนน เบี่ยงค่าแท้จริงคือ 89.5 เราจึง
ทราบว่าคะแนนที่ของการนับต้องเป็น $89.5 + 4.54$ คือ 94.04

เปอร์เซ็นต์ใดที่ 50 ของการแจกแจงคะแนน 94.4 หมายความว่า
ว่าใครก็ตามที่ได้คะแนน 94.04 จะมีคนอยู่ 50% ที่จะได้คะแนนต่ำกว่า
เขาหรือว่าถ้าใครได้คะแนน 94.04 จะมีคนอื่น ๆ ในกลุ่มของเขานับครึ่ง
หนึ่ง หรือ 50% ที่จะได้คะแนนต่ำกว่าเขา

จากวิธีคิดดังกล่าวนี้เราอาจหาหลักการหาคะแนนที่จะเป็นเปอร์-
เซ็นต์ใดก็ตามที่กำหนดไว้ได้ดังนี้

1. เมื่อรู้เปอร์เซ็นต์ใดของการ ทราบว่าแทนเปอร์เซ็นต์ของความถี่
ทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด

2. เราความถี่สะสมที่ต่ำกว่าจำนวนนี้ หักลบออกจากผลที่ได้ในข้อ 1

3. ทหารผลในข้อ 2 ด้วยความถี่ของชั้นที่เข้าไว้จะมีเปอร์เซ็นต์ใดที่
ของการ

4. คูณผลที่ได้ในข้อ 3 ด้วยช่วงหรือจำนวนคะแนนในชั้นหนึ่ง ๆ

5. เราผลจากข้อ 4 บวกด้วยเบี่ยงค่าที่สุกของชนนนั้นออกเป็นคะแนน

ตอบ

ประโยชน์ของการใช้เปอร์เซ็นต์ใด

การใช้เปอร์เซ็นต์ใด มีประโยชน์ในการเปรียบเทียบให้มีความหมาย
แก่ช้อยชน สมมติว่าเราทราบว่าเด็กคนหนึ่งสูง 52.1 นิ้ว ยังไม่มีความ

หมายในการเปรียบเทียบ คือเราก็ไม่ทราบว่าเขาเป็นคนที่สูงมากหรือน้อยเมื่อ
 เปรียบเทียบกับเด็กในรุ่นราวคราวเดียวกัน ถ้าเราบอกว่าความสูงของเด็กคนหนึ่ง
 มีตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 65 เราเข้าใจทันทีว่าเขาสูงกว่าเกณฑ์ธรรมดา
 เด็กน้อย เพราะในเด็กรุ่นราวคราวเดียวกันเขาจะมีอยู่ร้อยละ 65 ที่ต่ำกว่า
 เขา เป็นตัวเลขที่ให้ความหมายในการเปรียบเทียบได้ทันที

เมื่อคนหนึ่งสอบไล่ได้ 65% เราอาจคิดว่าเขาสอบได้พอใช้ เพราะ
 ว่าเกินกว่าครึ่งแล้ว แต่คนเป็นความเข้าใจผิด เพราะอาจเป็นไปได้ว่าในการ
 สอบคราวนั้นเด็กที่ได้อันดับที่ 60% และคนที่ได้คะแนนสูงสุดได้
 95% เปอร์เซ็นต์ของการสอบจะมีความหมายอยู่บ้างก็เมื่อเราทราบคะแนน
 สูงสุดหรือต่ำสุดของการสอบคราวนั้น ถ้าฟังเปอร์เซ็นต์เฉย ๆ จึงยังไม่ให้ความ
 หมายในการเปรียบเทียบได้เพียงพอ

การบอกลำดับที่ เช่นบอกว่าคนที่ 14 ก็ก็ได้แล้วในตอนต้นว่าเรามี
 ความหมายบอกเมื่อเราว่า เด็กที่เขาสอบทั้งหมดคนนั้นมีจำนวนเป็นเท่าใด
 ถ้าเราบอกว่าเขาสอบได้ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 65 เช่นนี้ แม้ว่ามันจะบอก
 เขาสอบจะมากน้อยอย่างไร คนที่สอบได้สูงสุดหรือต่ำสุด จะได้อันดับมาก
 น้อยเท่าไรก็ไม่สำคัญ เราควรทราบดีว่าในพวกที่เขาสอบพร้อมกันกับเขาในการ
 สอบคราวนั้นจะมีอยู่ร้อยละ 65 ที่ได้อันดับต่ำกว่าเขา จึงให้ความหมายใน
 การเปรียบเทียบที่แน่ชัด

มีข้อควรสังเกต คือ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์สำหรับกลุ่มหนึ่งนั้นจะนำ
 ไปเปรียบเทียบกับตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ของกลุ่มหนึ่งไม่ได้ มีความหมาย
 อยู่แต่เฉพาะในกลุ่มของตัวเท่านั้น ซึ่งอาจจะสูงหรือต่ำกว่ากลุ่มอื่นแต่ตำแหน่ง

เปอร์เซนไทล์ที่เท่ากัน ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัยคนหนึ่ง สอบได้ตำแหน่งเปอร์เซนไทล์ที่ 50 เด็กอีกคนหนึ่งอยู่ในโรงเรียนราษฎร์ที่ยังไม่ได้รับรองวิทยฐานะ สอบได้ตำแหน่งเปอร์เซนไทล์ที่ 65 เราจะเปรียบเทียบและถือว่าเด็กคนหลังนี้สอบได้ดีกว่าเด็กคนแรกนั้นไม่ได้ เพราะเด็กที่เข้าเรียนโรงเรียนสวนกุหลาบนี้นั้น จะต้องผ่านการสอบคัดเลือก การแข่งขันกันมาก เด็กที่เข้าไปได้ส่วนมากจะมีเขาวสูง เว้นหนึ่งสองโอกาส การที่เด็กคนหนึ่งในกลุ่มนี้สอบได้คะแนน ซึ่งมีคนออกครึ่งหนึ่งของนักเรียน ที่ล้วนแต่เรียนหนังสือได้คะแนนต่ำกว่าเขานั้น แปลว่าต้องเป็นนักเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ดีมากทีเดียว ในเวลาเดียวกันเด็กในโรงเรียนราษฎร์ที่ยังไม่ได้รับรองวิทยฐานะอาจประกอบด้วยเด็กที่อยู่ในเกณฑ์ปานกลาง การเข้าได้ก็สอบแข่งขันกัน การที่เด็กคนหนึ่งจะสอบได้ตำแหน่งซึ่งนักเรียนอื่น ๆ ที่ไม่สู้จะเก่งนัก ได้คะแนนต่ำกว่าเขาแม้ถึง 65% ก็ยังไม่หมายความว่าเขาจะสอบได้ดีกว่า

การเปรียบเทียบเปอร์เซนไทล์ จึงเปรียบกันได้เฉพาะในกลุ่มเดียวกัน หรือต่างกลุ่มที่มีมาตรฐานถ่วงเฉลี่ยเท่าเทียมกัน ถ้าอยู่ในลักษณะเช่นนั้น การเปรียบเทียบย่อมทำได้ เช่น เด็กคนหนึ่งได้คะแนนเลข 70 จาก 100 คะแนน และได้คะแนนวิทยาศาสตร์ 70 จาก 100 คะแนนเหมือนกัน ไม่หมายความว่าเขาเรียนเลขได้ดีกว่าวิทยาศาสตร์ ถ้าหาว่าคะแนนเหล่านี้เป็นตำแหน่งเปอร์เซนไทล์ที่เท่าไรแล้วอาจเห็นแตกต่างกัน

ถ้าเกิดส่วนมากเฉลี่ยได้คะแนนเลขควรวนสูง อาจเป็นเพราะข้อสอบ
 ง่ายไปหรือเพราะเหตุหนึ่งเหตุใดก็ตาม คนที่ได้ 70 คะแนนนั้น เมื่อคิด
 ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ได้แล้วอาจเป็นเพียงที่ 45 คือหมายความว่า มีคนเพียง
 ร้อยละ 45 เท่านั้น ที่ได้คะแนนต่ำกว่า 70 ในเวลาเดียวกันการสอบ
 วิทยาศาสตร์อาจมีคนน้อยกว่าที่ได้คะแนนสูงถึง 70 เมื่อคิดหาตำแหน่ง
 เปอร์เซ็นต์ได้แล้วก็แล้ว อาจได้สูงถึง 85 คะแนน สองวิชาที่ใกล้เคียงกัน
 แตกต่างกันในส่วนตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ได้ ในการเปรียบเทียบเราอาจพูด
 ได้ว่า เกณฑ์คะแนนวิทยาศาสตร์ได้ต่ำกว่าเรียนเลข เพราะในการเรียน
 วิทยาศาสตร์นั้นเขาเรียนได้ต่ำกว่าร้อยละ 85 ของเด็กอื่น ๆ แต่ในการเรียน
 เลข เขาเรียนได้สูงกว่าเด็กอื่น ๆ เพียงร้อยละ 45 เท่านั้น

ควอไทล์ และ เดซิล์

ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ได้ 75, 50 และ 25 เป็นจุดที่แบ่งการแจกแจง
 ออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนจะมีสมาชิกของหมู่หรือกลุ่มนั้นอยู่ร้อยละ 25
 เท่า ๆ กัน ช่วงหนึ่ง ๆ ใน 4 ช่วงนี้เราเรียกว่า ควอไทล์ ตำแหน่ง
 เปอร์เซ็นต์ได้ 75 เราเรียกว่า ควอไทล์บน ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ได้ 50
 เราเรียกว่า ควอไทล์กลาง หรือมีนฐาน เพราะว่าอยู่กึ่งกลางพอดี ส่วน
 ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ได้ 25 นั้น เราเรียกว่า ควอไทล์ล่าง

การแบ่งเป็นควอไทล์นั้น แปลว่าแบ่งการแจกแจงทั้งหมดเป็นหน่วยละ
 25% ings ได้ 4 ส่วน มีวิธีแบ่งอีกอย่างหนึ่ง คือแบ่งการแจกแจงทั้งหมดออก

เป็น 10 ส่วน ส่วนหนึ่ง ๆ จึงมี 10% เรียกว่าเคโซล ตำแหน่งเปอร์เซนโตล
 10 เราเรียกว่าเป็นเคโซล 1 ตำแหน่งเปอร์เซนโตล 80 เราเรียกว่า
 เป็นเคโซล 8 คิววอน ควอโตลกลางหรือมัชฐาน จึงเป็นเคโซล 5
 ตำแหน่งเปอร์เซนโตล 90 จึงเป็นเคโซล 9



แบบฝึกหัดที่ 4

จากตารางความถ่วงสัมพัทธ์ต่อไปนี้ในแบบฝึกหัดที่ 8 จงเขียน
เปอร์เซ็นต์ไทล์สเกลประกอบเข้าด้วยกันเรียบร้อยแล้ว

1. เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 และ 25 ของข้อมูลทุกชุดคนมีค่าเป็นข้อมูล
เท่าใด

2. หาค่ามัธยฐาน หรือเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ของข้อมูลทุกชุด

3. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และที่ 6 ของข้อมูลแต่ละชุดมีค่าเป็นคะแนน
เท่าใด

4. ให้อ่านจากกราฟต่อไปนี้ว่า ข้อมูลต่อไปนี้จะมีค่าแห่งเปอร์เซ็นต์ไทล์
เป็นเท่าใด

ชุดที่ 1

186 187 152 145 144

ชุดที่ 2

81 108 120 90 110

ชุดที่ 3

52.6 51.6 53.3 49.2 54.4

ชุดที่ 4

104 116 122 98 92

ชุดที่ 5

.81 .78 .80 .63 1.00

5. ให้ใช้วิธีคำนวณหาค่าต่าง ๆ ในข้อ 1 ถึงข้อ 4 ข้างบนนี้ เปรียบ
เทียบดูกับที่หาได้โดยวิธีกราฟ

บทที่ 5

การวัดแนวนาวเข้าสู่ส่วนกลาง

ในความเข้าใจตามธรรมดา เราคุ้นกับคำว่า ถัดเฉลี่ยกันอยู่แล้ว เช่น เมื่อเรากล่าวว่ ถัดเฉลี่ยแล้วคนไทยสูงประมาณเท่านั้นเท่านี้เมตร เราหมายความว่า คนไทยนั้นอาวสูงต่ำต่าง ๆ กัน แต่ถ้าวพิจารณาจากคนส่วนมากจะเห็นว่ามักจะอยู่ในเกณฑ์คงกล่าวแล้ว คำว่าถัดเฉลี่ยจึงเป็นการบรรยายลักษณะปานกลางของกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง คือเราพยายามหาว่าส่วนมากนั้นเป็นอย่างไร ความพยายามที่จะกำหนดคนยปริมาณใด ๆ เพื่อทราบลักษณะของส่วนมากของสมาชิกในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งในทางสถิตินี้เรียกว่า การวัดแนวนาวเข้าสู่ส่วนกลาง

เมื่อเราได้ข้อมูลจากการแจกแจงความถัดคงกล่าวแล้วในบทก่อนมาชกหนึ่งเราอาจทราบว่าค่าสูงสัดและค่าสัดของหมั้นนั้นเป็นเท่าใด เราอาจหาได้ว่าสมาชิกแต่ละหน่วยของกลุ่มนั้นอยู่สูงหรือต่ำเพียงใดในหมู่ของตัว แต่ถ้าเราจะนำเอากลุ่มหนึ่งกลุ่มไปเปรียบเทียบกับกลุ่มอื่น รายละเอียดของสมาชิกแต่ละหน่วยของกลุ่มนั้นจะไม่ช่วยให้เราสามารถเปรียบเทียบได้ เราจำเป็นจะต้องใช้การวัดซึ่งแสดงให้เห็นลักษณะร่วมกันของกลุ่มนั้นทั้งกลุ่ม เช่นสมมติว่าเราอยากทราบว่าคนไทยกับคนญวน ถ้าวเปรียบเทียบในเรื่องความสูงของร่างกายจะเป็นอย่างไร เราจำเป็นจะต้องใช้ส่วนถัดเฉลี่ยความสูงของคนไทยและส่วนถัดเฉลี่ยของความสูงของคนญวนมา จึงจะอาจเปรียบเทียบกันได้ เราอาจจะอยากทราบว่า รายได้ของกรรมกรสามล้อและกรรมกรแจวเรือจ้าง

พวกไหนจะมีรายไ้มากน้อยกว่ากันอย่างไร เราจำเป็นต้องใช้ส่วนเฉลี่ย
ของรายไค้ของบุคคลทั้งสองจำพวกนี้มา จึงจะเปรียบเทียบกันได้ การวัด
แนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางจึงช่วยให้เราใกล้ชิดกับลักษณะหนึ่งซึ่งมีประโยชน์ใน
การเปรียบเทียบ

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางนี้ ในทางสถิติมีวิธีวัดได้หลายอย่าง
แต่ละอย่างมีประโยชน์สำหรับสถานการณ์อย่างหนึ่ง ๆ จะเลือกบรรยายเฉพาะ
บทที่สาม

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางด้วย “ตัวกลางเลขคณิต”

ที่เราเรียกว่า เฉลี่ยในภาษามนุษย์ส่วนมากเราหมายถึงที่ใช้
ทางสถิติเรียกว่า ตัวกลางเลขคณิตนั่นเอง ตัวกลางเลขคณิตเราหาได้จาก
การหาค่าเฉลี่ยของทุกค่าด้วยกัน แล้วหารด้วยจำนวนของข้อมูลนั้น สมมติ
ว่าเราวัดความสูงของเด็ก 100 คน ให้ความสูงแตกต่างกัน เรารวมความ
สูงเหล่านั้นเข้าด้วยกันหมดแล้ว หารด้วย 100 ผลที่ออกมาเป็นตัวกลางเลข
คณิตของความสูงของเด็ก 100 คนนั้น

สมมติให้ X เป็นผลของการวัดที่ได้จากข้อมูลแต่ละอัน

N เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมดที่วัด

Σ เป็นเครื่องหมายแทนผลบวกทั้งหมด

$\bar{X}$ เป็น ตัวกลาง เลขคณิต

ถ้าจากข้อความ ตัวกลางเลขคณิตเป็นสูตรได้ว่า

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

การวัดแนวน้ำเข้าสู่ส่วนกลางด้วย มัธยฐาน

เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 หรือมัธยฐาน ที่กล่าวไว้ในบทก่อน เป็นสถิติที่
 ใช้อธิบายแนวน้ำเข้าสู่ส่วนกลางได้เป็นอย่างดี ทั้งนี้เพราะมัธยฐานเป็น
 ตำแหน่งที่อยู่กึ่งกลาง มีคะแนนหรือการวัดที่น้อยกว่าอยู่สูงและค่าที่น้อยกว่าอย่างอะ
 เท่า ๆ กัน หมายความว่าได้อย่างหยาบ ๆ ว่า 50% ของคะแนน อยู่สูงกว่า
 มัธยฐาน และอีก 50% อยู่ต่ำกว่ามัธยฐาน

การหามัธยฐานของข้อมูลกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งก็โดยการหาเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่
 50 นั่นเอง จึงจำเป็นต้องเริ่มด้วยการแจกแจงความถี่ ทำตารางความถี่สะสม
 แล้วคำนวณหาเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ตามวิธีที่กล่าวไว้แล้วในบทก่อน

มัธยฐานเป็นสถิติบรรยายแนวน้ำเข้าสู่ส่วนกลางที่ไม่อาจแสดงเป็น
 สูตรในทางคณิตศาสตร์ได้สะดวกนัก และไม่สะดวกที่จะใช้มากนัก มีประโยชน์
 เฉพาะในบางกรณีเท่านั้น เมื่อกล่าวถึงข้อควรระวังต่าง ๆ หมดแล้ว จะใช้
 ให้เห็นว่า สถิติอย่างไหนเหมาะจะใช้ในสถานการณ์เช่นไร

การวัดแนวน้ำเข้าสู่ส่วนกลางด้วย Mode

เมื่อพิจารณาตารางความถี่หรือโค้งความถี่ จะเห็นว่าส่วนมากในการ
 แจกแจงนั้นจะมีส่วนของโค้งที่เด่นโหนกขึ้นไป คือมีความถี่สูงกว่าช่วงอื่น ๆ
 เราอาจใช้ค่าของคะแนน หรือการวัดทางเกณฑ์อื่น ณ จุดที่มีความถี่สูงที่สุดกล่าว
 แล้ว เป็นการบรรยายแนวน้ำเข้าสู่ส่วนกลางได้เป็นอย่างดี แต่เป็นการ

วัตถุไม่กระทบกัน คืออาจเปลี่ยนแปลงได้ง่ายและไม่แสดงลักษณะอันแท้จริงของกลุ่มเช่นตัวกลางเลขคณิต หรือมัชฌิม

เราอาจจากข้อความได้ว่า Mode เป็นค่าของคะแนน หรือการวัดอย่างอื่นทางแกนอนทึมความถี่สูงที่สุดในการแจกแจงนั้น การหาใช้วิธีตรวจดูอย่างหยาบ ๆ คือดูจากตารางความถี่ว่าชนใดมีความถี่สูงที่สุด ใช้ค่าทางกลางของชนนั้นเป็น Mode หรือถ้าจะหาจากโค้งความถี่ ก็ดูว่าโหนดของโค้งที่สูงที่สุดนั้นตรงกับแกนอนทึมไหน อ่านค่าทางแกนอนทึมออกมาเป็น Mode

ในบางคราวจะเห็นว่า การแจกแจงความถี่ของกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งมีส่วนเป็นโหนดขึ้นไปมากกว่า 1 แห่ง ในกรณีเช่นนั้นจะใช้ Mode เป็นการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางย่อมไม่ได้ เว้นไว้แต่จะเห็นว่าโหนดเหล่านั้นอยู่ในระยะใกล้เคียงกันและเราใช้วิธีประมาณเฉลี่ยโหนดเหล่านั้นให้เป็นอันเดียวจนเสียการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางด้วยวิธีนี้ไม่สมทใช้มากนัก

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางด้วย ตัวกลางเรขาคณิต

ตัวกลางเรขาคณิตเป็นสถิติที่ใช้วัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางได้ก็อย่างหนึ่ง มีค่าจากข้อความว่า ถ้าข้อมูลนั้นมีอยู่ N จำนวน ผลคูณของ N จำนวนนั้น ถอยรท N จะได้ผลเป็นตัวกลางเรขาคณิตของข้อมูลชุดนั้น อาจเขียนเป็นรูปสมการได้ดังนี้

เมื่อข้อมูลเป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$

ตัวกลางเรขาคณิต ย่อด้วย G จะเท่ากับ $\sqrt[N]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_N}$

ตัวกลางเรขาคณิตสำหรับในการเบ่งตนจะไม่มทใช้มากนัก

การวัดแนวนำเข้าสู่ส่วนกลางด้วย ตัวกลางฮาโมนิค

มีสถิติใช้แนวนำเข้าสู่ส่วนกลางใดอย่างหนึ่ง คือแทนที่จะใช้
 คะแนนหรือการวัดอย่างอื่นที่ได้จากข้อมูลโดยตรง เราใช้ส่วนกลับของ
 คะแนนหรือตัวเลขเหล่านั้นเอามารวมกันเสียก่อน ได้ผลเท่าใดก็หาค่าส่วน
 กลับออกมาเป็น ตัวกลาง ฮาโมนิค

สมมติว่าข้อมูลเป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$

ตัวกลางฮาโมนิคคือ H เท่ากับ

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_N}} = \frac{1}{\frac{N}{\bar{X}}} = \frac{N}{\bar{X}}$$

เมื่อไรจะใช้สถิติใดวัดแนวนำเข้าสู่ส่วนกลาง

เรามีสถิติที่จะใช้วัดแนวนำเข้าสู่ส่วนกลางเรียงลำดับตามความสำคัญ

มากน้อยดังนี้

1. ตัวกลางเลขคณิต
2. มัธยฐาน
3. Mode
4. ตัวกลางเรขาคณิต
5. ตัวกลางฮาโมนิค

ตัวกลางเลขคณิตเป็นอันที่ใช่มากที่สุดและมีประโยชน์ที่สุดในงานทาง
 สถิติที่สูงขึ้นไปจะใช้ตัวกลางเลขคณิตมากที่สุด ที่เป็นดังนี้เพราะเหตุว่า
 ตัวกลางเลขคณิตเป็นสถิติที่มาจากความเป็นรูปสูตรทางคณิตศาสตร์ได้ง่าย
 เหมาะที่จะนำไปใช้ในการผสมการอื่น ๆ ต่อไป ยิ่งไปกว่านั้น ตัวกลางเลข
 คณิตยังมีสมบัติพิเศษอยู่ข้อหนึ่ง คือผลบวกพหุคูณของความแตกต่าง
 ระหว่างคะแนนแต่ละอันกับตัวกลางเลขคณิตนั้นจะมีค่าเท่ากับ 0 ตัวกลางเลข
 คณิตจึงเป็นจุดที่กระจายรอบ ๆ ผลรวมในทางกลศาสตร์ คือเป็นจุดที่น้ำหนัก
 ของคะแนนทางซ้ายและขวาดวงเท่ากันพอดี อยู่ในสภาพสมดุล ด้วยคุณสมบัติ
 ของตัวกลางเลขคณิตจึงได้ข้อเท็จจริงว่า คือหมายความว่า ถ้าคะแนน
 ของข้อมูลเปลี่ยนไปจากเดิมแต่เพียงเล็กน้อย ตัวกลางเลขคณิตก็จะเปลี่ยน
 ไป มีสมบัติข้อหนึ่งของตัวกลางเลขคณิต คือผลบวกของกำลังสอง
 ของผลต่างของคะแนนและตัวกลางเลขคณิตนั้น จะเป็นจำนวนที่แน่นอน
 สุด และเราใช้สมบัติข้อนี้ในการวัดความแปรปรวนซึ่งจะได้กล่าวละเอียดใน
 บทต่อไป

ตัวกลางเลขคณิต จะใช้วัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางได้ก็ที่สุด คือเมื่อการ
 แปรเจนนับลักษณะที่เรียกว่าซ้ายขวาเหมือนกัน คือไม่มีความเบ้ แต่ถึง
 แม้ว่าจะมีความเบ้บ้างแต่ไม่มากนัก ตัวกลางเลขคณิตก็ยังใช้ได้ ถ้าการ
 แปรเจนนับความเบ้มาก จะไปทางซ้ายหรือขวาก็ตาม ตัวกลางเลขคณิตจะไม่
 สามารถแสดงแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่แท้จริงได้ ในกรณีเช่นนั้น มีวิธีอื่น
 มีประโยชน์ดีกว่า

คงได้กล่าวแล้วว่า มัชฌิมนนเนกาทอชยงกลาง คอมนะแนท
 อัยสังหรือต่ำกว่าเป็นจำนวนเท่ากัน ความเปลี่ยนแปลงในเรื่องค่าของคะแนน
 แต่ละอันดับนั้นไม่ส่งผลกระทบกระเทือนกับมัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางไม่ไหวตัว
 ง่ายเหมือนทอชยงกลางเลขคณิต ยกตัวอย่างเช่นจากข้อมูลจำนวนหนึ่ง ซึ่งมี
 การแจกแจงความถี่เป็นรูปประฆังทอชยงกลางเหมือนกัน ค่าของทอชยงกลางเลข
 คณิตและมัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางจะเป็นค่าเดียวกัน สมมติว่าเป็นคะแนน 46 ถ้าคะแนน
 นอกอันดับหนึ่งทอชยงกลางคะแนนนี้ เปลี่ยนค่าไปไม่ว่าจะมากน้อยเท่าใดก็ตาม
 จะผลทำให้ค่าของทอชยงกลางเลขคณิตเปลี่ยนไปจากเดิมทันที แต่มัชฌิมนนเนกาทอชยง
 กลางจะไม่เปลี่ยน เว้นไว้เสียแต่ว่าคะแนนนั้นมีความต่ำลงมากต่ำกว่าค่าของมัชฌิมนนเนกาทอชยง
 กลางเปรียบเทียบกับในทางกลศาสตร์ได้ว่ามัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางมีความคงที่กว่าทอชยง
 กลางเลขคณิต คือไม่ไหวตัวได้ง่าย แม้ว่าจะมีความเปลี่ยนแปลงอะไรไป
 ย่างในส่วนค่าของข้อมูล

ในทางปฏิบัติ เมื่อพบว่าการแจกแจงความถี่อื่นใดมีลักษณะเบ้มาก
 มักจะไม่ใช้ทอชยงกลางเลขคณิตวัดแนวโน้ม แต่จะใช้มัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางแทน นอกจากนั้น
 จะมียกข้อยกเว้นหนึ่งที่มีความจำเป็นต้องใช้มัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางเลขคณิต
 คือในกรณีของการแจกแจงความถี่ไม่เบ้ แต่มีข้อมูลบางอันดับมีความสูงมากหรือ
 ต่ำมากผิดปกติผิดปกติ ถ้าเราใช้ทอชยงกลางเลขคณิตซึ่งไหวตัวได้ง่ายก็กล่าว
 แล้ว จะโก่งค่าทอชยงกลางเลขคณิต ที่แสดงแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่แท้จริง
 จำเป็นต้องใช้มัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางเพราะค่าที่สูงต่ำมากหรือต่ำมากเหล่านี้จะไม่กระทบ
 กระเทือนมัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางเลย ยกตัวอย่างหนึ่งก็คือถ้าเป็นสิ่งที่สงสัยว่าข้อมูลใดมา
 นั้นอาจปะปนกันไม่สิ้นระแนงอันดับ ทอชยงกลางมัชฌิมนนเนกาทอชยงกลางเข้าสู่ส่วนกลาง

การใช้ Mode นั้น จะเหมาะที่สุดเมื่อการแจกแจงความถี่เข้มมาก ๆ แต่อย่างไรก็ตามต้องมีข้อมูลมากพอที่จะทำให้เห็นว่า คะแนนส่วนใหญ่ไม่รวมกันอยู่กันจริง ๆ ถ้าข้อมูลมีอยู่เป็นจำนวนน้อย การใช้ Mode จะไม่เป็นสถิติที่ดีในการแจกแจงจะเข้มมากก็ตาม ส่วนการแจกแจง ชำยขวา เหมือนกันนั้น จะใช้ตัวกลางเลขคณิต มีอยู่ฐาน หรือ Mode ก็ย่อมจะได้ค่าเท่ากันทั้งสิ้น

ตัวกลางเลขคณิตนั้น มีข้อความควรสังเกต คือสำหรับข้อมูลที่มีค่าเป็นบวก ตัวกลางเรขาคณิตจะมีค่าน้อยกว่าตัวกลางเลขคณิตเสมอ ยกตัวอย่างเช่น ข้อมูลของเรา 5 8 10 12 หาตัวกลางเลขคณิตโดยรวมค่าเหล่านี้เข้าด้วยกันทั้งหมดแล้วหารด้วย 4 จะได้ 8.75 ถ้าหาตัวกลางเรขาคณิต โดยคูณเลขทั้ง 4 ตัวแล้วถอดศรุต 4 จะได้ 8.8 เป็นจำนวนที่น้อยกว่าตัวกลางเลขคณิตที่กล่าวแล้ว อย่างไรก็ตามถ้าข้อมูลมีค่าเป็น 0 หรือลบ ค่าของตัวกลางเรขาคณิตก็คำนวณได้จะไม่มีความหมาย การใช้จึงต้องระวังว่าไม่มีข้อมูลที่มีลักษณะดังกล่าวแล้ว ตัวกลางเรขาคณิตมีประโยชน์ใช้ใดก็ เมื่อเราประสงค์จะวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางของอัตราส่วนต่าง ๆ และอัตราของการเปลี่ยนแปลง เช่นในการหาเฉลี่ยของอัตราการเพิ่มผลเมือง เป็นต้น

ตัวกลางฮาร์โมนิคนั้น เมื่อเทียบกับตัวกลางอื่นก่อนที่กล่าวมาแล้ว จะมีประโยชน์ สมัยข้อหนึ่ง คือตัวกลางของเลขจำนวนชุดหนึ่งที่ไม่ใช่ค่าเดียวกัน หรือมีค่าเป็น 0 ตัวกลางฮาร์โมนิคจะมีค่าต่ำที่สุด กล่าวคือตัวกลางเลขคณิตจะมีค่าสูงสุด รองลงไปเป็นตัวกลางเรขาคณิต ตัวกลางฮาร์โมนิคมีค่าต่ำสุด ตัวกลางฮาร์โมนิคมีประโยชน์ในการหาเฉลี่ยของข้อมูลต่าง ๆ ที่มีหน่วยของการวัดเป็นระยะทางต่อเวลา หรือปริมาณกำลังต่อชั่วโมง หรือ

หน่วยของสินค้าต่อจำนวนเงินเป็นต้น นอกจากนั้นถ้ามีค่าใช้จ่ายในการพิจารณา
 ปัญหาพิเศษ เฉพาะเรื่องทั่วกลางชนชั้นก่อนไม่สามารถจะใช้ได้ เช่นในการ
 ศึกษาถึงเรื่องราคาของพืชผลที่ออกเป็นฤดูกาล ราคาสินค้าในท้องตลาด
 ผลที่ผลออกมาจะมากมาย แต่ก็จะโคกทดแทนเมื่อสินค้าขึ้นราคาเพราะ
 ราคาขายจะสูงขึ้น ดังนั้นเป็นต้น แต่ก็เป็นเรื่องที่ยากเกินความจำเป็น
 ในสถิติ ในตอนต่อไปนี้จะกล่าวเฉพาะทั่วกลางเลขคณิตอย่างเดียว

การคำนวณหาค่า ทั่วกลางเลขคณิต

เราทราบแล้วว่า การหาทั่วกลางเลขคณิตตามวิธีตรงไปตรงมานั้น ก็คือ
 เอาข้อมูลรวมกันเข้าหมด แล้วหารด้วยจำนวนของข้อมูลนั้น วิธีที่เช่น
 นี้ถ้าข้อมูลมาก ๆ จะเสียเวลาที่สุด วิธีหนึ่งแก้แรงความถนัดโดยการเรียงลำดับ
 กันตัวอย่างต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่	ความถี่คูณด้วยคะแนน
x	f	$f \times x$
19	1	19
18	1	18
17	8	51
16	8	128
15	17	255
14	18	182
13	10	180
12	4	48
11	1	11
10	2	20

$$N = 60$$

$$862 = \sum f \times x$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f \times x}{N} = \frac{862}{60} = 14.37$$

เวลานี้ก็ทันเวลาเขา คือแทนที่จะบอกข้าฯ กัน เราหาความถี่ของ
คะแนนที่ขาดกันเสียก่อน แล้วจึงคูณกันเสีย แต่พอถึงเลขที่ในทางปฏิบัติ
จริง ๆ เราไม่สามารถจะหาคะแนนทุกคะแนนได้ ต้องรวมช่วงของความถี่
เขาเป็นชั้นคงที่ไว้แล้วในการหาความถี่ ดังนั้นการใช้ช่วงของความถี่
ความถี่ จึงเป็นวิธีประมาณ แต่ก็ไม่ผิดมากนัก คือเราใช้ค่ากลางใน
ช่วงของชั้นหนึ่ง ๆ และสมมติว่าความถี่ทั้งหมดเป็นคะแนนทั้งหมด ซึ่ง
ความเป็นจริงบางอันก็สูงกว่าบางอันก็ต่ำกว่า ความถี่สูงกวากันเองที่จะเฉลี่ย
ไปทำให้เราผิดน้อยเข้า เป็นวิธีประมาณซึ่งในสถิติยอมให้ใช้ได้ ดังตัวอย่าง
ต่อไปนี้

ช่วงคะแนน	จุดกลาง	ความถี่	ความถี่คูณด้วยจุดกลาง
	x	f	f × x
98—97	95	1	95
88—92	90	3	270
88—87	85	2	170
78—82	80	7	560
78—77	75	12	900

ช่วงคะแนน	จุดกลาง	ความถี่	ความถี่คูณด้วยจุดกลาง
68—72	70	10	700
63—67	65	9	585
58—62	60	5	300
53—57	55	8	165
48—52	50	2	100
	$N = 54$		$3845 = \sum f \times x$

$$\bar{x} = \frac{\sum f \times x}{N} = \frac{3845}{54} = 71.20$$

วิธีนี้จะช่วยประหยัดเวลาลงได้บ้างก็ตาม แต่ยังคงว่าเป็นวิธีที่ยาวและ
 เหนื่อย เราจึงขอเสนอวิธีที่ง่ายกว่า นั่นคือการใช้วิธีที่เรียกว่า "วิธีของชวชิต" ไป
 เพื่อให้ได้ผลที่ใกล้เคียงกัน

สมมติว่า เรามีข้อมูลเป็นดังนี้

217,011

217,009

217,006

217,012

217,005

ถ้าเราหาตัวกลางเลขคณิตแทนที่เรารวมทั้งหมด ให้สังเกตว่าจำนวน
 เหล่านี้จะชนกันที่ 217 เหมือนกัน เราจึงคิดเฉพาะส่วนมากกว่า
 217,000 แล้วถวเฉลี่ยเฉพาะส่วนที่เกินนั้นเข้ามาบวกกับ 217,000 ก็จะได้

ไว้ท้วงกลางเลขคณิตเร็วเข้า จำนวนที่เกินไปนั้น คือ 11 9 6 12 5 รวม
เป็น 43 ทารกวัย 5 ไร่ 8.6 เราจึงอาจตอบได้ว่า ท้วงกลางเลขคณิตเป็น
217,008.6

หลักอนันต์ คงจะพอให้แนวคิดที่ว่าตารางความถื่น เราอาจใช้หลัก
คำนวณหาท้วงกลางเลขคณิตได้ คือเราเลือกค่าใดค่าหนึ่งเป็นหลัก แล้วหาว่า
คะแนนต่าง ๆ นั้น มากกว่าหรือน้อยกว่าหลักที่เราสมมติขึ้นเท่าใด รวมส่วนที่
มากกว่าหรือน้อยกว่าตามข้อพิชคณิต แล้วเฉลี่ยหาส่วนที่มากน้อยเกินไป แล้ว
เอาไปรวมกับค่าสมมติที่ออกมาเป็นท้วงกลางเลขคณิตที่แท้จริง การ ท้วงตัวอย่าง

คะแนน	ความถี่ f	ความแตกต่าง d	ความถี่คูณด้วยความแตกต่าง f d.
19	1	5	5
18	1	4	4
17	3	3	9
16	8	2	16
15	17	1	17
14	18	0	0
13	10	-1	-10
12	4	-2	-8
11	1	-3	-3
10	2	-4	-8

ในตัวอย่าง เราสมมติว่า 14 เป็นตัวกลาง จึงกำหนดช่องความแตกต่าง
 ต่างกันเป็น 0 พวกที่อยู่เหนืออีกแตกต่างเป็นบวก 1 2 3 4 5 ตามลำดับ พวก
 ที่อยู่ต่ำกว่ามีความแตกต่างเป็นลบ เมื่อได้ผลคูณของความถี่และความ
 แตกต่างแล้ว จะเห็นว่าพวกหนึ่งเป็นบวก รวมแล้วได้ 51 อีกพวกหนึ่งเป็น
 ลบ รวมแล้วได้ -29 ผลบวกพิสัยคือ 22 เราเอา 22 นั้นมาเฉลี่ย
 ด้วยจำนวนคะแนนทั้งหมดซึ่งมีรวม 60 ทหารแล้วได้ .87 แปลว่าทหารสมมติ
 ว่าตัวกลางอยู่ที่ 14 นั้นผิดไป .87 จึงเอามารวมเข้าได้เป็นค่าตอบคือ 14.87

พึงสังเกตว่าตัวอย่างที่เราใช้คะแนนจริง ๆ และคะแนนเรียงกันมีทศ
 คะแนน ในทางปฏิบัติจริง ๆ เราใช้ช่วงคะแนนแบ่งออกเป็นชั้น ๆ ปัญหาข้อ
 แก้ไขง่าย คือเราใช้จุดกลางของช่วงคะแนนเสีย และเมื่อได้เฉลี่ยได้ส่วน
 ที่ผิดไปจากตัวกลางสมมติแล้วเราเอาช่วงคะแนนไปคูณเพื่อแก้การที่เราจะใช้
 เพียงจุดกลางนั้นเสีย ก็จะได้ผลถูกต้อง ถึงตัวอย่างต่อไปนี้

ช่วงคะแนน	จุดกลาง	ความถี่	ความแตกต่าง	ผลคูณของความถี่และความแตกต่าง
98—97	95	1	4	4
88—92	90	3	3	9
88—87	85	2	2	4
78—82	80	7	1	7
78—77	75	12	0	0
				รวมได้ 24

ช่วงคะแนน	จุดกลาง	ความถี่	ความแตกต่าง	ผลคูณของความถี่และความแตกต่าง
68—72	70	10	—1	—10
63—67	65	9	—2	—18
58—62	60	5	—3	—15
53—57	55	8	—4	—12
48—52	50	2	—5	—10
		54 = N		รวมได้ —65

ผลบวกพีชคณิตของความแตกต่าง คือ 24 กับ —65 จะได้ —41
ถวลเฉลี่ยของ 54 คือความถี่ทั้งหมด ได้ —.759 ก่อนเราจะเอาไปใช้ก็
ไม่ได้ เพราะเราละไว้ในฐานที่เข้าใจว่าช่วงหนึ่งนั้นเป็นจุด ในช่วงหนึ่งนั้น
มี 5 คะแนน จึงคูณ —.759 ด้วย 5 ได้ —3.80 เมื่อดูในตารางที่ทำจะ
เห็นกำหนด ความแตกต่าง 0 อยู่ตรงกลาง 75 แปลว่าเราสมมติว่า 75 เป็น
ตัวกลางแท้ไป —3.80 ตัวกลางเลขคณิตถูกต้องจริงเป็น 75—3.80 ได้
71.20

การหาตัวกลางเลขคณิตโดยวิธีลทการสรุปขึ้นต่าง ๆ ในการคำนวณ
ได้ดังนี้

1. ในตารางความถี่เลือกจุดกลางใดจุดกลางหนึ่งเป็นหลัก พยายาม
เลือกจนพบประมาณว่าจะใกล้ตัวกลางที่แท้จริง ที่จริงจะเลือกที่ไหนก็ได้ แต่
ถ้าเลือกให้ใกล้จะคูณหารเลขน้อย

2. เติมช่องความแตกต่างลงในตารางนั้น โดยให้ชั้นที่เราเลือกแล้ว
มีความแตกต่างเป็น 0 ที่เห็นขึ้นไปเป็นบวก 1 2 3 ต่อไปตามลำดับ ส่วน
ที่ข้อยต่ำกว่าให้เป็น ลบ คือ -1 -2 -3 ต่อไปจนหมด

3. คุณความดีของแต่ละชั้นกับความแตกต่างที่เรากำหนดไว้ใน
ข้อ 2 ได้ผลลงตารางไว้ก่อนตามชั้นจะเห็นว่าพวกบนเป็นบวก พวกล่าง
เป็นลบ

4. หาผลบวกพีชคณิตของค่าต่าง ๆ ในข้อ 3 โดยบวกค่าบวกเข้า
ด้วยกันก่อน แล้วรวมพวกค่าลบเข้าด้วยกัน แล้วจึงเอามาหักลบกันที่หลัง
ออกเป็นผลบวกพีชคณิตของความแตกต่าง

5. หาผลบวกพีชคณิตของความแตกต่างในข้อ 4 ด้วยจำนวนความ
ถี่ทั้งหมด

6. เอาผลในข้อ 5 คูณด้วยจำนวนคะแนนในช่วงหนึ่ง ๆ แล้วเอาไป
รวมกับทุกกลางที่เลือกในข้อ 1 ออกรวมเป็นตัวเลขกลางเลขคณิตที่ได้จากการ
คำนวณโดยวิธีนี้

แบบฝึกหัดที่ 5

จากตารางการแจกแจงความถี่ที่หาได้ในแบบฝึกหัดที่ 3 ทุกชุดให้หา
ตัวกลางเลขคณิตโดยวิธีลัด บนทศค่าของตัวกลางเลขคณิตของข้อมูลแต่ละ
ชุดไว้

นำเอาผลที่ได้จากแบบฝึกหัดที่ 4 ข้อ 2 ที่ให้ค่าของมัธยฐานของข้อมูลทุกชุดไว้นั้น นำมาเปรียบเทียบกับตัวกลางเลขคณิตที่หาได้ในแบบฝึกหัด
นี้เปรียบเทียบกับเป็นคู่ ๆ เพื่อให้เห็นว่าแต่ละชุดค่าของมัธยฐานและตัวกลาง
เลขคณิต ไหนจะมีค่าสูงต่ำกว่ากันอย่างไร

จากแบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 4 ที่ปรับรูปหลายเหลี่ยมแห่งความถี่เป็นโค้ง
เรียบแล้วนั้นให้อ่านค่าของ Mode ของการแจกแจงความถี่แต่ละชุด แล้ว
นำไปเปรียบเทียบกับค่าของตัวกลางเลขคณิตและมัธยฐานว่าสูงต่ำกว่ากันอย่างไร
มีผลแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวกลางเลขคณิต มัธยฐานและ Mode
ไว้ว่า

Mode จะเท่ากับ ตัวกลางเลขคณิตลบด้วยสามเท่าของผลต่างระหว่าง
ตัวกลางเลขคณิตกับมัธยฐาน

ให้นำเอาผลที่ได้ข้างบนมาทดสอบดูว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นจริง
เพียงไร

การวัดความแปรปรวน

ในบทที่แล้ว เราได้ทราบวิธีการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางเพื่อได้สถิติต่าง ๆ ที่แสดงลักษณะของกลุ่ม และมีประโยชน์ในการเปรียบเทียบ แต่การสรุปของการแจกแจงความถี่ที่เราเห็นมาแล้วนั้น จะเห็นได้ว่า ถ้าเพียงแต่เพียงแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางอย่างเคี้ยวเท่านั้นจะยังไม่เป็นสถิติเพียงพอสำหรับการบรรยายลักษณะเฉพาะของกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งใดหมด การแจกแจงความถี่ของกลุ่มต่าง ๆ 2 กลุ่ม อาจมีตัวกลางเลขคณิตเท่ากัน แต่รูปของการแจกแจงความถี่อาจแตกต่างกันมาก เช่นกลุ่มหนึ่งคะแนนกระจายห่างออกไปจากตัวกลางมาก แต่อีกกลุ่มหนึ่งคะแนนส่วนใหญ่จะออกกันอยู่ใกล้ๆ ตัวกลาง รูปของการแจกแจงความถี่ของกลุ่มทั้งสองนั้น จึงน่าจะแตกต่างกันอยู่ด้วยประการที่สำคัญอย่างน้อยก็ประการหนึ่ง ซึ่งเราอาจเรียกหรือตั้งให้สถิติใหม่ออกอย่างหนึ่งเพื่อวัดความแตกต่างขึ้น ซึ่งเราเรียกว่า การวัดความแปรปรวน หมายความว่าความที่คะแนนต่างๆ แปรปรวนไปจากแนวโน้มของส่วนกลาง

ที่เรียกว่าความแปรปรวนนี้ การวัดค่าที่บรรยายลักษณะซึ่งมีความหมายอย่างเดียวกันได้หลายอย่าง คือ เราหมายถึงการที่คะแนนส่วนมากกระจายออกไปจากตัวกลาง หรือการที่คะแนนเหล่านั้นค้อย ๆ แผ่กว้างออกไปตามแกนตอนที่ใช้ในการแจกแจงความถี่ หรือจะถือว่าเป็นการวัดความถี่

คะแนนต่าง ๆ ข่ายเขนออกไปจากตัวกลางก็ได้ คำบรรยายเหล่านี้นั้นมีความ
หมายอันเกี่ยวข้องกับสิ่ง ปัญหาที่ว่าเราจะมีวิธีวัดคุณสมบัติของไข้อย่างไร

วิธีทางสถิติ ก็คือ เราดูว่าคะแนนสูงสุดและต่ำสุดของการแจกแจง
ความถี่ย่อยเท่าใด ถัดความแตกต่างของคะแนนในช่วงที่จะใช้บรรยาย
ความแปรปรวน เช่นในการวัดเชาวน์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งปรากฏว่าเด็กที่มี
เชาวน์สูงสุดวัดได้ 140 เด็กที่มีเชาวน์ต่ำสุดวัดได้ 78 เราว่าความแปรปรวน
ของเด็กกลุ่มนี้ในช่วงของเชาวน์ถึง 67 จุด สถิติในช่วงเป็นการวัดความ
แปรปรวนคงที่ถาวร ถ้าพิจารณาให้ละเอียดจะเห็นว่าไม่สู้มีความหมายนัก
ก็เช่นกรณีเพราะเหตุว่าเรามีค่าคงที่คะแนนย่อย ๆ ว่าแปรปรวนไป
ประการใดบ้าง ถ้าในการแจกแจงความถี่ย่อยมีคะแนนที่สูงมาก หรือต่ำ
มากผิดปกติก็หมายความว่าช่วงที่ใดมาขึ้นน้อยไม่มีความหมายแสดงลักษณะของหมู่ที่
แท้จริงได้

อีกวิธีหนึ่ง คือใช้ช่วงระหว่างเปอร์เซ็นต์ไทล์บน และเปอร์เซ็นต์ไทล์ล่าง
เราทราบแล้วว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์บน คือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 เปอร์เซ็นต์ไทล์ล่าง
คือเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 หากค่าของคะแนนที่เป็นเปอร์เซ็นต์ไทล์ทั้งสองนี้ใกล้เคียง
กัน เป็นช่วงที่นำไปใช้ แต่มักไม่นิยมใช้ทั้งหมด ใช้แต่เพียง
ครึ่งเดียว คือ เอา 2 ทารช่วงนอกผลเป็น กึ่งช่วงระหว่างควอไทล์ ใช้
เป็นสถิติวัดความแปรปรวนได้ก็อย่างหนึ่ง แต่สถิติอันนี้มีความบกพร่อง
เช่นเกี่ยวข้องกับช่วงสูงสุดและต่ำสุดที่กล่าวมาแล้วในตอนก่อน คือมีค่าคงที่
ความแปรปรวนของคะแนนแต่ละคะแนน กลุ่มที่มีกึ่งช่วงระหว่างควอไทล์

เท่ากันอาจมีลักษณะความแปรปรวนแตกต่างกันมากก็ได้ สถิติที่ใช้ช่วงทั้งสอง
แบบนี้จึงนับว่าเป็นสถิติที่ไม่ดี

หากทบทวนข้างบนจะเห็นว่า สถิติที่ทดสอบที่เรานำมาใช้ในการวัดความ
แปรปรวนนั้นจะเป็นสถิติอะไรก็ได้ แต่จะต้องคำนึงถึงความอิสระแต่ละ
คะแนนแปรปรวนไปจากตัวกลางที่เป็นหลักยึด คือ จะต้องนำเอาส่วนที่ขยับ
เบนออกไปของแต่ละคะแนนเข้าไปคำนวณด้วยจึงจะนับได้ว่าเป็นสถิติที่ใช้วัด
ความแปรปรวนที่มีความหมายที่แท้จริง

ความขยับเบนมีชัยฐาน

วิธีหนึ่งที่จะให้โคสถิติ วัดความแปรปรวนตรงกับหลักทฤษฎี คือ ใช้
ความขยับเบนมีชัยฐาน ในการกระจายตัวกลางเลขคณิตเป็นหลัก เพราะว่า
คะแนนแต่ละคะแนนห่างจากตัวกลางเท่าใด ทั้งนี้ไม่คำนึงว่ามากหรือน้อย
ก็ไม่ได้ถือเครื่องหมายเป็นสำคัญ เมื่อใดที่ส่วนที่ขยับเบนออกไปจากตัวกลาง
ของคะแนนทุกคะแนนมาแล้ว หว่ามมีชัยฐานของความขยับเบนเป็นเท่าใด
ใช้ค่าเป็น ความขยับเบนมีชัยฐาน ซึ่งหมายความว่า เป็นมีชัยฐานของ
ความขยับเบนจากตัวกลางเลขคณิต ความหมายของความขยับเบนมีชัยฐาน
นั้นพอที่จะเข้าใจได้ง่าย ๆ ว่า คะแนนแต่ละคะแนนขยับแปรปรวนไปจากตัว
กลางเลขคณิตมากน้อยเพียงใด แต่ 50% ของคะแนนเหล่านั้น จะขยับเบน
ไปจากตัวกลางเท่ากับ ความขยับเบนมีชัยฐาน สมมติว่า ในการวัดความสูง
ของเด็กกลุ่มหนึ่ง หาได้ว่า ความขยับเบนมีชัยฐานเป็น 2 นิ้ว หมายความว่า
ความแปรปรวนในเรื่องความสูงของเด็กกลุ่มนั้น จะมีอยู่ 50% หรือครึ่งหนึ่ง
ของทั้งหมดที่สูงหรือต่ำกว่าเฉลย 2 นิ้ว

ความย้ายเบนมีฐานทุกด้านไม่สูงเท่ากันนัก แต่ประโยชน์
 โดยเฉพาะในการล้มตัวอย่าง คือเมื่อล้มแล้วโคนด้านหนึ่งแต่เพียงตัวอย่าง
 ของล้มอย่างอื่นจะมีโคนมากกว่า ช่วยให้เราประมาณได้ว่าถ้าเราไปเก็บ
 ล้มตัวอย่าง ความแปรปรวนนั้นอาจมีโคนน้อยเพียงไร เพื่อประโยชน์
 ในข้อนี้ ความย้ายเบนมีฐานจึงมีชื่อเรียกอย่างหนึ่งว่า ความย้ายเบน
ที่จะเป็นไปได้ หรือ ความคลอนคลาที่จะเป็นไปได้ คือสมมติว่าเรา
 ล้มตัวอย่างได้มากล้มหนึ่ง แล้ววัดความสูงโคนตัวกลางแล้ว และคำนวณ
 คำนวณความย้ายเบนมีฐานเป็น ๒ นิ้ว อาจช่วยให้เรามั่นใจได้ว่า ถ้าเรา
 จะวัดความสูงของโคนอื่น ๆ ที่อยู่ใกล้เคียงกับที่เราล้มตัวอย่างมาแล้ว
 นั้น ๕๐ ในร้อยคน ที่เราวัดคงจะไม่สูงหรือต่ำกว่าตัวกลางที่เราได้วัดแล้วเกิน
 ๒ นิ้ว เป็นเรื่องของการประมาณค่าซึ่งมีความประโยชน์อย่าง แต่อย่างไร
 ก็ว่าการประมาณค่าที่ดีจากตัวอย่างย่อมมีการสลับซับซ้อน และจะทำให้ได้
 ความแน่นอนมากกว่าอย่างอื่น ๆ ทุกด้าน

ความย้ายเบนตัวเฉลี่ย

อีกวิธีหนึ่ง ที่เราจะใช้วัดความแปรปรวนตามหลัก คือใช้ความ
 ย้ายเบนตัวเฉลี่ย ความย้ายเบนตัวเฉลี่ยนั้นหลักคล้าย ๆ กับความย้ายเบน
 มีฐาน คือเราวัดตัวกลางเลขคณิตเป็นหลักก่อน หาค่าแต่ละคะแนนย้าย
 เบนไปจากตัวกลางเลขคณิตเท่าใด ทั้งนี้โดยไม่คำนึงถึงเครื่องหมาย
 เมื่อได้ส่วนที่ย้ายเบนออกไปจากตัวกลางทุกคะแนนแล้วแทนที่เราระหามียุทธ
 ของส่วนย้ายเบนเหล่านั้น เราเฉลี่ยหาตัวกลางเลขคณิตอีกครั้งหนึ่ง ได้

ผลเป็นความย้ายเบนถั่วเฉลี่ย คือส่วนถั่วเฉลี่ยของความย้ายเบนจากตัวกลาง
เลขคณิตนั่นเอง อาจผูกเป็นรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

ให้ x เป็นความย้ายเบนของคะแนนแต่ละคะแนนจากตัวกลางเลขคณิต

N เป็นจำนวนคะแนนทั้งหมด

$$\text{ความย้ายเบนถั่วเฉลี่ย} = \frac{\sum X}{N} = \left[\sum X \ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \right]$$

สำหรับข้อมูลที่เกี่ยวข้องกัน ความย้ายเบนถั่วเฉลี่ยจะมีค่าสูงกว่าความ
ย้ายเบนมีอยู่ฐานเล็กน้อย อย่างไรก็ตาม ความย้ายเบนถั่วเฉลี่ยนั้นก็ไม่มีใคร
นิยมใช้

ความย้ายเบนมาตรฐาน

สาเหตุที่ไม่นิยมใช้ ความย้ายเบนถั่วเฉลี่ย ก็เพราะในการคำนวณ
ความย้ายเบนถั่วเฉลี่ยนั้น เราได้คำนึงถึงเครื่องหมายของความย้าย
เบนนั้นด้วย ที่เราไม่คำนึงถึงเพราะถ้าเราใช้เครื่องหมายด้วย ผลบวกของความ
ย้ายเบนทั้งหมดจะเท่ากับ 0 นั่นก็จะเป็นไปตามสมบัติของตัวกลางเลขคณิต
ที่กล่าวไว้แล้วในตอนต้นนั่นว่า ผลบวกพหุคูณของส่วนที่ย้ายเบนไปจาก
ตัวกลางเลขคณิตจะเท่ากับ 0 เสมอ การที่ไม่คิดเครื่องหมายก็เป็นความ
พยายามที่จะหลีกเลี่ยงการที่ผลบวกจะเป็น 0 และทำให้เราไม่สามารถจะทำ
อะไรต่อไปได้อีกนั่นเอง

สถิติที่นิยมใช้มากในการวัดความแปรปรวนและปราศจากความ
บกพร่องต่าง ๆ ดังกล่าวมาแล้ว คือ ความย้ายเบนมาตรฐาน ความย้ายเบน
มาตรฐานเราก็ค้นหาตัวกลางเลขคณิตเป็นหลักเช่นเดียวกัน และเราหาส่วน

ทนายเบนออกไปจากตัวกลางน ทนายของทุกคนนโดยคำนึงถึงเครื่องหมาย
 กวบ แต่เราน่าเอาส่วนทนายเบนไปยกกำลังสองขึ้นเสียก่อน แล้วจึงถว
 เฉลย เมื่อถวเฉลยแล้วจึงจะกลับเอามาถอดครุฑสองออกเป็น ความย้ายเบน
 มาตรฐาน

การที่เราเอาความย้ายเบนจากตัวกลางของทุกคนมายกกำลังสอง
 เสียก่อนนนั้น ช่วยแก้ปัญหาร่องเครื่องหมายลบไปได้ เพราะส่วนที่สูงกว่า
 ตัวกลางย่อมเป็นบวก ส่วนที่ต่ำกว่าย่อมติดลบ จะบวกหรือลบก็ตาม เมื่อยก
 กำลังสองแล้ว ก็จะมีผลเป็นบวกทั้งนั้น แต่หาเหตุผลที่เรายกกำลังสองมีเพียง
 เพื่อแก้ปัญหาร่องเครื่องหมายเท่านั้นก็ดูจะไม่น่าเป็นสถิติสัก มเหตุผล
 สำคัญกว่าคงที่โลกลาวไว้อย่างแล้วในตอนว่าถึงตัวกลางเลขคณิตว่า มีคุณ
 สมบัติสำคัญของ ตัวกลางเลขคณิตอยู่ก่อนหนึ่ง คือยกที่เป็นตัวกลางเลข
 คณิตนั้นเป็นจุดที่เราจะหาถวเฉลยของกำลังสองของส่วนทนายเบนไปจากทุก
 ไก ๆ แล้ว จุดที่เป็นตัวกลางเลขคณิตนั้นระไกรค่าน้อยหรือค่าตัก ยิ่งกว่า
 ที่เราคิดจากทุกอัน ๆ กวบคุณสมบัติข้อนี้เราจึงยกกำลังสองเสียก่อน

ความย้ายเบนมาตรฐานนี้อาจแสดงเป็นรูปสมการในทางคณิตศาสตร์
 ได้ดังต่อไปนี้

ให้ x เป็นส่วนที่ย้ายเบนไปจากตัวกลางเลขคณิตของแต่ละคน
 N เป็นจำนวนคะแนนที่มีอยู่ทั้งหมด
 S เป็นความย้ายเบนมาตรฐาน

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

สูตรหาเขียนย้อนกลับไปหาคะแนนเดิม และตัวกลางเลขคณิตได้

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$$

ในเมื่อ $\bar{X}$ เป็นตัวกลางเลขคณิต และ X เป็นคะแนนแต่ละคะแนน

ตัวกลางเลขคณิต เป็นตัวกลางที่ใช้มากในทางสถิติอันใด ความ

ย้ายเบนมาตรฐาน ก็เป็นสถิติที่ใช้วัดความแปรปรวนในทางสถิติมากที่สุด

ในตอนที่ต่อไปนี้จะกล่าวถึงวิธีการคำนวณสถิติที่ใช้วัดความแปรปรวนที่

มีความสำคัญมากหรือที่ควรรู้ ได้แก่ความย้ายเบนมาตรฐานและความ

ย้ายเบนเฉลย

วิธีการวัดความย้ายเบนเฉลย

วิธีการวัดความย้ายเบนเฉลยที่แสดงต่อไปนี้ไม่มีประโยชน์ในทาง

ใช้งานจริง ๆ ถึงแม้ว่ากล่าวแล้วว่ายกมาในงานทางสถิติ เราไม่นิยมใช้

ความย้ายเบนเฉลย เป็นมาตรฐานการวัดความแปรปรวน แต่ทว่ามาแสดง

ไว้เป็นประโยชน์ในทางที่จะให้เห็นหลักการคำนวณโดยวิธีลัด ซึ่งเราจะใช้

ในการคำนวณความย้ายเบนมาตรฐาน

วิธีตรงไปตรงมา คือหาความย้ายเบนของคะแนนแต่ละคะแนนจากตัว

กลางแล้วเฉลยนั้นไม่มีปัญหาอะไร แต่เสียเวลามาก ถ้าไม่มีเครื่อง

คิดเลข เกือบจะเป็นสิ่งพ้นวิสัยที่เราจะยอมเสียเวลามาก ๆ เช่นนั้นได้ จึง

จำเป็นต้องหาวิธีลัดขึ้น จึงที่จะแสดงต่อไปนี้

๔๔๐.๐.๔

ตารางความถนัดทำเพื่อหาความย้ายเบนถ่วงเฉลี่ย

ช่วงคะแนน	ความถี่	ความแตกต่าง	ความถนัดคูณด้วยความแตกต่าง
	f	d	fd
98—97	1	5	5
88—92	8	4	12
88—87	2	8	6
78—82	7	2	14
78—77	12	1	12
68—72	10	0	0
68—67	9	—1	—9
58—62	5	—2	—10
58—57	8	—8	—9
48—52	2	—4	—8
N = 45			$\Sigma fd = 85$

ตารางความถนัดนำมาหาความย้ายเบนถ่วงเฉลี่ยนั้น จะต้องหาตัวกลางเลขคณิตเสียก่อน ตารางนี้เราให้หาแล้วว่าตัวกลางเลขคณิตเท่ากับ 71.20 ในการหาตัวกลางเลขคณิตนั้นเราจะกำหนดให้ชั้นไหนเป็นหลักตัวกลางสมมติก็ได้ แต่ในการหาความย้ายเบนถ่วงเฉลี่ย เราต้องกำหนดชั้นทอมตัวกลางเลขคณิตอยู่เป็นหลัก ก็จะทำให้เห็นว่าเราให้ความแตกต่างในชั้นทอมช่วงคะแนน 68—72 เป็น 0 เพราะว่าในชั้นนั้นจะมีตัวกลาง คือ 71.20 รวมอยู่ด้วย

ความถ้อยเห็นชอบที่กำหนดให้เป็นหลัก 0 มีย 12 7 2 8 1 รวม

เป็น 25 ส่วนท่อยต่ำกว่าหลัก 0 มี 10 9 5 3 2 ทเวาค 10 ค้วยเพราะ
 ถ้อยเห็นชอบกลางของชนเป็นสำคัญ รุกกลางของชนทวมชว 68—72 นนค 70
 ช่งต่ำกว่า 71.20

หาความแตกต่างของความถ้อยเห็นชอบความถ้อยต่ำกว่าหลักเป็นลยความ
 ถ้อยเห็นชอบเป็นลย ผลงัก — 4 ทวกลางเลขคณิตถ้อยต่ำกว่าทวกลางของ
 ชนทเป็นลยอยู่ 70—71.20 คอ — 1.20 ทงหมกิงถ้อยสูงกว่าทวกลางอยู่
 — 4 คณก้วย — 1.20 คอ 4.80 นคจนวนทระนำไปนในการคำนวณ
 ความย้ายเป็นลยเฉลี่ย

หาผลบวกของ id ไค 85 แต่ในชั้นหนึ่ง ๆ ของรามีชวงคะแนน
 5 คะแนน ความย้ายเป็นลยจาก 0 ังเป็น 5 คณก้วย 85 เทากัย 425 แต่
 425 นเป็นค่าที่เราคคจากคคสมมติ ช่งไคแสดงแลววียงต่ำกว่าทวกลาง
 ังอยู่ 4.80 ังคองถ้อย 4.80 มารวมกัย 425 แลวจึงลยเฉลี่ยก้วยความถ
 ังหมก คอ 54 ไค 7.96

ความย้ายเป็นลยเฉลี่ยของการแจกแจงความถ้อยไค 7.96

วิหาคความย้ายเป็นลยเฉลี่ยธำกำหนดเป็นชั้นต่าง ๆ ไคทงน

1. เมื่อไคตารางความถ้อยมาแลว หาทวกลางเลขคณิตก้วยวิธีลย

ก่อน ถ้อยปรากฏวาทวกลางไม่อยู่ในชนทเราคคสมมติให้เป็นหลัก 0 ถ้อย
 ทงหลัก 0 เสียใหม่ ไซ้ชนททวกลางเลขคณิตถ้อยก้วยจริง ๆ เป็นหลัก แลว
 กำหนดความแตกต่าง หาผลคณิตของความถ้อยและความแตกต่างเช่นเคยก้วย
 ทเคยทำในการหาทวกลางเลขคณิต

2. หาผลบวกของความถี่ในชั้นต่าง ๆ ที่จุดกลางอยู่สูงกว่าตัวกลาง
เลขคณิต

3. หาผลบวกของความถี่ในชั้นต่าง ๆ ที่จุดกลางอยู่ต่ำกว่าตัวกลาง
เลขคณิต

4. หาผลต่างของค่าในข้อ 8 และข้อ 2 คือถือว่าสูงกว่าเป็นบวก ต่ำกว่าเป็นลบ

5. หาผลต่างของตัวกลางเลขคณิตตอนแรกจริง กับตัวกลางที่เราสมมติ
คือจุดกลางของชั้นที่กำหนดเป็นหลัก 0

6. หาผลคูณของ ข้อ 4 และข้อ 5 เก็บไว้เป็นจำนวนสำหรับแก้

7. หาผลบวกของช่วงความถี่คูณความแตกต่างของนัยไม่ว่าจะถึง
เครื่องหมาย เพราะในการหาความขยับเป็นเฉลยนั้น เราไม่คำนึงถึง
เครื่องหมาย

8. คูณผลที่ได้ในข้อ 7 ด้วยจำนวนคะแนนในชั้นหนึ่ง ๆ

9. นำเอาผลในข้อ 8 มาแก้จำนวนที่ได้ในข้อ 8

10. เฉลยด้วยจำนวนความถี่ทั้งหมด ผลคือผลเป็นความขยับเป็นเฉลย

พึงสังเกตว่า หลักในการหาค่ากลางแล้วมีอยู่อย่างไร ในชั้นต้นเรา
สมมติว่าตัวกลางเลขคณิตคือจุดกลางของชั้นใดชั้นหนึ่ง ชั้นใดชั้นหนึ่ง
เราเลือกให้เป็นชั้นที่มีตัวกลางเลขคณิตจริง ๆ อยู่ เพื่อตัวเลขจะนำไปแก้
นั้นจะได้ออช้ เราหาส่วนที่ขยับเป็นออกจากจุดสมมติโดยไม่คำนึงถึง
เครื่องหมาย ความประสงค์เพื่อเอาไปเฉลย แต่เราจะเฉลยทันที

ไม่ได้ เพราะจากกลางของชนที่เราถือเป็นหลักนั้น เราสมมติขึ้น ยังไม่เห็นว่า
กลางที่แท้จริง ระบุของมตวเลขมาแกเสียก่อน จึงระบุเฉลี่ย ตัวเลขที่เขา
มาเกินเราก็คงไต่อย่างไร เราก็คงโดยหาว่าจำนวนที่เราประมาณเกินกว่าความ
เป็นจริงไปเป็นเท่าใด จำนวนที่เราประมาณต่ำกว่าความเป็นจริงไปเท่าใด
รวมจำนวนทั้งสองนั้นตามหลักพีชคณิต เพราะส่วนที่ส่งหรือค่าไปหักลบกัน
เอง เหลือเป็นจำนวนที่ระบุของเขาไปแก้เพียงผลต่างของส่วนที่ประมาณสูง
หรือค่าไปเท่านั้น เมื่อได้ไซ้จำนวนนั้นแล้ว ก็เฉลี่ยได้

วิธีการหาค่ากลางอาทิเช่นนี้เป็นรูปสมการสำหรับใช้แทนค่าก็ได้ แต่
ในทางปฏิบัติจริง ๆ จะเป็นสมการที่คล้ายซับซ้อนเกินไป การแทนค่าอาทิ
โค้งงาย ทางที่ถูกต้องคือพยายามเข้าใจในทาง ๆ ของการทำว่า ทำไมจึงต้อง
ทำเช่นนั้น เมื่อทราบเหตุผลของแกแล้วก็สามารถเข้าใจในทาง ๆ ของการทำ
ได้โดยแม่นยำ เวลาทำการพยายามหาตัวเลขสำหรับชนต่าง ๆ ตามความจำเป็น
ที่ระบุไว้ไม่ต้องจำสูตรที่ยาก

หลักในการหาข้อบกพร่องกลางแล้ว เป็นเบื้องต้นของการคิดคำนวณ
ความแม่นยำแบบมาตรฐานในตอนต่อไป การหาความแม่นยำแบบมาตรฐานที่แท้จริงก็
ใช้วิธีคล้ายกับเคยยกตัวอย่างแล้ว ต่างแต่เราต้องยกกำลังสองส่วนที่แม่นยำ
เสียก่อนเท่านั้น

ในการให้ตัวอย่างการคำนวณความแม่นยำแบบมาตรฐานนี้ จะใช้ตัวอย่าง
การวางความถี่ได้เคยใช้แล้วในการคำนวณความแม่นยำแบบเฉลี่ย แต่แทน
ที่จะแสดงช่วงคะแนน จะแสดงเฉพาะแต่ที่กลางของชนเท่านั้น เพราะได้
เห็นมาแล้วว่าเราใช้ทุกกลางเป็นสำคัญ

วิธีคำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ทุกกลาง	ความถี่ f	ความแตกต่าง d	ความถี่คูณด้วยความแตกต่าง fd^2	
			fd	fd^2
95	1	4	4	16
90	3	8	9	27
85	2	2	4	8
80	7	1	7	7
75	12	0	0	
70	10	-1	-10	10
65	9	-2	-18	36
60	5	-3	-15	45
55	8	-4	-12	48
50	2	-5	-10	50
$54=N$			$\Sigma fd = -41$	$\Sigma fd^2 = 247$

พจน์ที่ 2 แถวแรกของตารางคือสิ่งที่เราเคยใช้มาแล้วในข้อ
ที่ 8 ซึ่งเป็นช่องแตกต่างจากทุกที่เราได้สมมติขึ้น ในการหาความเบี่ยงเบน
มาตรฐาน เราได้สมมติขึ้นใหม่ไว้ที่ 75 ผลของการหาความเบี่ยงเบนเฉลี่ย
ในตารางสมมติให้ชนททุกกลางเป็น 75 ตัวกลางในข้อที่ 4 หาผลคูณของ
ความถี่และความแตกต่างในการรวมกันนั้นเราคำนึงถึงเครื่องหมายด้วย

จึงได้ผลบวกพหุคูณเป็น 41 เราสมมติข้อหนึ่งเป็นผลคูณของความถี่ความ
แตกต่างกำลังสอง ด้วยเหตุที่เป็นกำลังสองจึงเป็นบวกหมด ผลบวกของทั้ง
สองจึงไม่มีปัญหาเรื่องเครื่องหมายรวมแล้วได้ 247

ถ้าการสมมติตัวกลางของเราถูกต้องก็จะเอา 247 นี้ ไปถวเฉลี่ยเสร็จ
แล้วถอยถดถอยออกเป็นความขยับเป็นมาตรฐาน แต่เนื่องจากจุดกลางที่เรา
ใช้มันเราสมมติขึ้น อาจสูงหรือต่ำกว่าจุดกลางจริงก็ได้ เราจึงจำเป็นต้อง
แก้เสียก่อน

วิธีแก้ที่เราทำกัน ผลบวกพหุคูณของความถี่คูณความแตกต่างนั้น
จะหักลบกันไปในตัว เราจึงเอาผลที่ได้มันมาถวเฉลี่ยเสียก่อน คือ $\frac{-41}{54}$

ได้ - .759 เรายกกำลังสองส่วนนั้นขึ้นเป็น .576 เอาไว้เป็นตัวแก้

ผลบวกของกำลังสองของความขยับเป็นจากจุดสมมติเราได้ 247 ถว
เฉลี่ยเสียก่อนคือ $\frac{247}{54}$ ได้ 4.574 แต่จำนวนที่เราต้องแก้คงกล่าวแล้วจึง
นำเอา .576 มาลบเหลือ 8.998 ถอดที่รที่สองของเลขจำนวนนี้ได้ 1.99

เราต้องไม่ลืมว่าในการคำนวณเราวางช่วงคะแนน 5 คะแนนมาเป็น
คะแนนเดี่ยว จึงต้องขยายออกไปเป็นไปตามที่เป็นจริง คือ เอาช่วงคะแนน
ในชั้นหนึ่งคือ 5 คะแนนมาคูณ 1.99 ได้ 9.95 เลขจำนวนนี้คือความขยับ
เป็นมาตรฐานที่ของการ

การคำนวณความขยับเป็นมาตรฐานด้วยวิธีที่กล่าวมานี้เป็นรูปสมการ
ให้ใช้แทนค่าได้ ดังนั้นในการสรุปขั้นต่าง ๆ ของการคำนวณจะได้ไม่ต้อง
สูตรในตอนต่าง ๆ และสูตรเต็มรูปที่อาจใช้แทนค่าได้ไว้ด้วยในตอนสุดท้าย

1. หากตารางความถี่เลือกชั้นใดชั้นหนึ่งเป็นตัวอย่างสมมติกำหนดให้ ความแตกต่างของชั้นนั้นเป็น 0 ชั้นที่ส่งขึ้นไปเป็นบวก ชั้นที่ต่ำลงมาเป็นลบ เช่นที่เคยทำมาแล้ว

2. หาผลคูณของความแตกต่างและความถี่ ของหนึ่ง ผลคูณของความถี่และความแตกต่างกำลังสอง อีกของหนึ่ง

3. หาผลบวกพีชคณิตของ ผลคูณของความแตกต่างและความถี่แล้ว จานเฉลี่ยด้วยจำนวนทั้งหมด ซึ่งหาแทนโดยสูตรดังนี้ $\frac{\sum fd}{N}$

4. ยกกำลังสองของผลในข้อ 3 คือ $(\frac{\sum fd}{N})^2$

5. หาผลบวกของ ผลคูณของความถี่และความแตกต่างกำลังสอง แล้วลดเฉลี่ยด้วยจำนวนความถี่ทั้งหมด ซึ่งหาแทนโดยสูตรดังนี้ $\frac{\sum fd^2}{N}$

6. นำเอาผลในข้อ 4 มาลบในข้อ 5 เป็นสูตร คือ $\sum fd^2 - (\frac{\sum fd}{N})^2$

7. ถอยรากที่สองของผลที่ได้ในข้อ 6 เป็นสูตรคือ $\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - (\frac{\sum fd}{N})^2}$

8. คูณผลที่ได้ในข้อ 7 ด้วยจำนวนคะแนนในช่วง สมมติว่าเป็น i ได้ผลเป็นความขยับเบี่ยงมาตรฐาน s ซึ่งหาเขียนเป็นสูตรเต็มรูปได้ดังต่อไปนี้

$$s = i \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - (\frac{\sum fd}{N})^2}$$

เมื่อสูตรสำเร็จในรูปต่างๆ เช่นนี้ อาจไม่ต้องทำตามขั้นตอนต่างๆ ที่กล่าวแล้วก็ได้ คือหากตารางความถี่ หาช่องต่างๆ ให้ได้ค่าตามทศของการ แล้วนำมาแทนค่าในสูตรอันสุดท้ายนี้

สูตรที่ใช้หาพิสัยแทนค่าโดยทางพีชคณิต โดยเริ่มกันจากค่าจำกัด ความของ ความขยับเบี่ยงมาตรฐาน คือสูตรที่ว่า $s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$

โดยการกระจายสูตรทกล้วนแล้ว

เราจะใช้สูตรสำหรับคำนวณ

ความขยับเบนมาตรฐานจากคะแนนต่าง ๆ ทุกคะแนน โดยไม่ต้องทำการ

แจกแจงเสียก่อนก็ได้ สูตรนั้นมกดังนี้

$$s = \frac{1}{N} \sqrt{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

x คือคะแนนย่อย ๆ แต่ละคะแนน N คือจำนวนคะแนนทั้งหมด

ให้สังเกตความคล้ายคลึงกันระหว่างสูตรที่ใช้คำนวณความขยับเบน

มาตรฐานจากคะแนนจริง ๆ แต่ละคะแนน กับที่เราคำนวณจากการแจกแจง

แจกแจงความถี่ ทนเห็นคงเพราะกระจายมาจากสูตรเดิมอันเดียวกัน อย่างไรก็ตาม

ก็ สูตรที่ใช้คำนวณจากคะแนนจริง ๆ แต่ละคะแนนนั้นจะต้องมีเครื่องหมาย

จึงจะทำให้สะดวก และให้สังเกตว่าสูตรนั้นจัดไว้ให้สะดวกกับการใช้ด้วย

เครื่องหมาย คือในขั้นตอนรวมคะแนนทุกคะแนนเข้าด้วยกันหมด ยกกำลัง

สองจากไว้ ยกกำลังสองแต่ละคะแนนรวมเข้าด้วยกัน ซึ่งเครื่องหมายทำให้

เอง แล้วคูณด้วยจำนวนความถี่ ได้ผลเท่าใดหักลบออกเสียด้วยจำนวนแรก

จากไว้ แล้วถอดรูทที่สอง ได้ผลเท่าใดหารด้วยจำนวนความถี่ทั้งหมด

ออกผล เป็นความขยับเบนมาตรฐาน

ประโยชน์ของความขยับเบนมาตรฐาน

ความขยับเบนมาตรฐาน เป็นสถิติที่ใช้วัดความแปรปรวนทุกทิศทางและ

มักใช้มากในงานสถิติต่อไป ประโยชน์ที่สามารถจะสังเกตเห็นได้ในเบื้องต้น

ก็คือ ความแตกต่างระหว่างกลุ่มหนึ่งกับอีกกลุ่มหนึ่งนั้นจะเปรียบเทียบกันแต่เพียง

จำนวนค่าเฉลี่ยส่วนกลางเพียงอย่างเดียวไม่ได้ จะต้องรู้ถึงความแปรปรวนใน

ระหว่างหมู่ด้วยกันเองนั้นน้อยกว่ากันหรือไม่ เช่นสมมติว่าในการสอบ
 คราวหนึ่ง นักเรียนห้อง ก. และห้อง ข. ได้เฉลี่ยแล้วได้ตัวกลางเลขคณิตเท่า
 กัน สมมติว่า 105 คะแนน แต่เมื่อพิจารณาแปรปรวนปรากฏว่าห้อง ก. มีความ
 ย่ำเบนมาตรฐาน 12 คะแนน แต่ห้อง ข. มีความย่ำเบนมาตรฐาน 15 คะแนน
 เช่นนี้ เราอาจกล่าวได้ว่านักเรียนในห้อง ก. แตกต่างจากนักเรียนในห้อง ข.
 ในข้อที่ว่า ความแตกต่างระหว่างกันเองในพวกนักเรียนห้อง ข. นั้น มากกว่า
 นักเรียนในห้อง ก. จะแตกต่างกันเอง พกง่าย ๆ ก็คือว่า เกิดผลลาคามาก
 หรือไ้มากแตกต่างจากพวกกลาง ๆ นั้นมอยู่มากในห้อง ข. ส่วนพวกห้อง ก.
 นั้นมีความไ้ความผลลาคใกล้เคียงกันมากกว่า

นอกจากนี้ ความย่ำเบนมาตรฐานยังช่วยให้เรากำหนดตำแหน่งของ
 สมาชิกในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งได้แน่นอน และมีความหมายในการเปรียบเทียบ
 เช่นเคยยกยทเรากำหนดตำแหน่งด้วยเปอร์เซ็นต์ใด ๆ ฉะนั้นเราทราบแล้วว่า
 คะแนนดิบ คือคะแนนที่เป็นข้อมูลเดิมนั้น จะเปรียบเทียบกันโดยที่ไม่ได้
 เราเอาคะแนนเดิมนั้นมาแปลงเป็นคะแนนใหม่ เรียกว่า คะแนนมาตรฐาน
 ทั้งนี้โดยถือว่าคะแนนนั้นสูงหรือต่ำกว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มมากน้อย
 เป็นเท่าใดเสียก่อน แล้วหาว่าส่วนที่สูงหรือต่ำไปนั้นเป็นกี่เท่าของความย่ำ
 เบนมาตรฐาน อัตราส่วนนี้เรียกว่า คะแนนมาตรฐาน อาจผู้เป็นสมการ
 ได้ดังนี้

$$\text{คะแนนมาตรฐาน} = \frac{X - \bar{X}}{s}$$

ในเมื่อ X เป็นคะแนนที่ทดสอบการหาคะแนนมาตรฐาน

$\bar{X}$ เป็นตัวกลางของเลขคณิตของกลุ่มคะแนน

s เป็นความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่ม

ในตัวอย่างที่ยกข้างต้น สมมติว่านักเรียนห้อง ก. คนหนึ่งสอบได้

120 คะแนน เท่ากับนักเรียนคนอื่นในห้อง ข. ถึงแม้ว่าตัวกลางเลขคณิตของทั้งสองห้องนี้จะเท่ากัน เด็กทั้งสองนั้นก็ยังมีตำแหน่งในกลุ่มของตนไม่เท่ากัน เพราะเหตุว่าถ้าเราคิดหาคะแนนมาตรฐานของเด็กห้อง ก.

คนนี้จะได้ $\frac{120-105}{12}$ เท่ากับ 1.25 แต่คะแนนมาตรฐานของเด็กห้อง ข.

ซึ่งได้คะแนนเท่ากันนั้นจะได้ $\frac{120-105}{15}$ เท่ากับ 1.0 . เด็กที่ได้คะแนน

มาตรฐานสูงกว่าแปลว่าดีกว่า คะแนนมาตรฐานอาจออกมาเป็นลบก็ได้ ถ้าคะแนนต่ำกว่าตัวกลางเลขคณิต

ในการแจกแจงความถี่ลักษณะคล้ายระฆัง ค่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐานจะสูงกว่าความเบี่ยงเบนเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนเฉลี่ยก็จะมีความสูงกว่าความเบี่ยงเบนมัธยฐาน และในลักษณะของการแจกแจงความถี่ เช่นว่า ความเบี่ยงเบนมาตรฐานช่วยให้เรารู้ชนอกว่าประมาณ $2/3$ ของคะแนนทั้งหมด จะไม่สูงหรือต่ำกว่าตัวกลางเลขคณิตเกิน 1 เท่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และประมาณ 95% ของคะแนนทั้งหมด จะไม่สูงหรือต่ำกว่าเกิน 2 เท่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะมีอยู่เป็นจำนวนน้อยที่พอจะทิ้งไว้ที่ประมาณหรือเกินกว่า 8 เท่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

แบบฝึกหัดที่ 6

จากตารางการแจกแจงความถี่ทำไว้ในแบบฝึกหัดที่ 8 ทุกชุดให้หา

1. กึ่งช่วงระหว่างควอไทล์
2. ความยาวเบนมัธยฐาน
3. ความยาวเบนจลเฉลี่ย
4. ความยาวเบนมาตรฐาน
5. ให้คำนวณว่าข้อมูลต่อไปนี้จะมีค่าเป็นคะแนนมาตรฐานเท่าใด

ชุดที่ 1

186 152 144

ชุดที่ 2

81 108 120

ชุดที่ 8

52.6 49.2 54.4

ชุดที่ 4

104 122 92

ชุดที่ 5

.81 .78 .68

7. จงหาว่า คะแนนมาตรฐาน 1.4 ของข้อมูลแต่ละชุด จะมีค่าเป็นคะแนนดิบเท่าใด

LOGARITHMS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITHMS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	4	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	4	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	4	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	4	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	4	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	4	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	4	4	5	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	4	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	4	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	4	4	5	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	4	4	5	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	4	4	5	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	4	4	5	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	4	4	5	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	4	4	5	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	4	4	5	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	4	4	5	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	4	4	5	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	4	4	5	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ANTILOGARITHMS

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	2	2	2	3
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	2	2	2	2	2	3
Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ANTILOGARITHMS

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5688	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9225	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

๗. 19



องค์การค้ำของครูสภา

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ตรา

นายนางร สัตถกุล ผู้พิมพ์และโฆษณา

๓๑ มกราคม ๒๕๐๖

พิมพ์ครั้งที่ ๑ พ.ศ. ๒๕๐๕