



แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก-ข
ตอนที่ ๒ (ตรีโกณมิติ)
ประโยชน์ยวมศึกษาตอนปลาย

ของ

กระทรวงศึกษาธิการ

ตัวอย่างแบบเรียน

ของ

กองตำรา กรมวิชาการ

บ.
๕๑๕
ร.มค.ปลาย

ก ๐๑๘๙๑

๕๑๔
ธ. มค. ๒๔๖๖



แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก-ข
ตอนที่ ๒ (ตรีโกณมิติ)

ประโยชน์มัยมศึกษาตอนปลาย
ของ
กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๑๕,๐๐๐ เล่ม

พ.ศ. ๒๕๐๕

ปกกระดาษราคาเล่มละ ๘.๐๐ บาท

(ห้ามขายเกินกว่าราคาที่กำหนดไว้)

พิมพ์ที่โรงพิมพ์คุรุสภา

ปากคลองบางลำพูบน พระนคร

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ก ๐๑๘๙๑

กองตำรา ๕๕ กค.๑๕

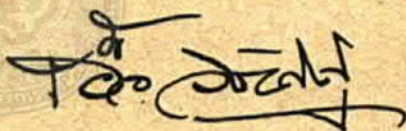
๕๕๘๕

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ

เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในโรงเรียน

ด้วยกรมวิชาการได้จัดทำแบบเรียนคณิตศาสตร์ ก.ช. ตอนที่ ๒ (ตรีโกณมิติ) เพื่อใช้สำหรับประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย. (ม.ศ. ๔-๕) แผนกวิทยาศาสตร์ แผนกศิลปะ และแผนกทั่วไปที่เรียนคณิตศาสตร์ต่ำกว่าระดับ ๖ ชั่วโมงขึ้น กระทรวงศึกษาธิการได้พิจารณาแล้วอนุญาตให้ใช้หนังสือนี้ในโรงเรียนได้.

ประกาศ ณ วันที่ ๒๗ มิถุนายน ๒๕๐๕



รองปลัดกระทรวงรักษาราชการแทน

ปลัดกระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบเรียนคณิตศาสตร์ ก. ข. ตอนที่ ๒ (ตรีโกณมิติ) นี้ กรมวิชาการ
ได้ขออนุมัติกระทรวงศึกษาธิการให้นายระบิล ตีตะสุวรรณ และนางสวดย
โรจนโรช เป็นผู้เรียบเรียงขึ้น และกระทรวงศึกษาธิการได้แต่งตั้งให้นายจรูญ
วงศ์สายัณห์ เป็นผู้ตรวจ

แบบเรียนเล่มนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สำหรับประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย
(ม. ศ. ๔ — ๕) แผนกวิทยาศาสตร์ แผนกศิลป์และแผนกทั่วไปที่เรียน
คณิตศาสตร์ระดับตาห้ละ ๖ ชั่วโมง หวังว่าแบบเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์
แก่การศึกษาในชั้นนี้ตามสมควร.



กรมวิชาการ

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 มาตรการของการวัดมุม	1
ความหมายของค่ามุม	1
ตัวอักษรที่ใช้แทนมุม มุมมาตรฐาน (Standard Angles)	3
มุมใช้แทนร่วม (Co-terminal Angles)	4
สูตรที่ใช้ในการเปลี่ยนค่ามุมระหว่างมาตราอังกฤษและฝรั่งเศส	5
แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ก.	6
การพิสูจน์อัตราส่วนของเส้นรอบวงและรัศมีมีค่าคงที่เสมอ	8
สูตรเส้นรอบวงของวงกลม, มุม 1 เรเดียนย่อมมีค่าคงที่เสมอ	9
การหาจำนวนองศาในมุม 1 เรเดียน	10
สูตรที่ใช้ในการเปลี่ยนค่าของมุมระหว่างมาตราอังกฤษ	
และมาตราเรเดียน	10
แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ข.	11
แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ค.	13
บทที่ 2 ตรีโกณมิติฟังก์ชันของมุมรอบจุด	15
การหาค่าแห่งของจุดหรือเส้นบนพื้นราบ มุมที่หมุนรอบจุด	
บนแกนราบ	15
ฟังก์ชันของมุม	16
ความหมายของ Co-functions ฟังก์ชันของมุมในควอดแดรนต์ที่ 2	17
ฟังก์ชันของมุมในควอดแดรนต์ที่ 3	18
ฟังก์ชันของมุมในควอดแดรนต์ที่ 4	19
สรุปผลเครื่องหมายของค่าของฟังก์ชันในควอดแดรนต์ต่าง ๆ	20
ค่าของฟังก์ชันของมุม 0°	21
ฟังก์ชันของมุม 90°	22
ฟังก์ชันของมุม 180°	23
ฟังก์ชันของมุม 270°	24
ตารางค่าของฟังก์ชัน ตั้งแต่ 0° - 360°	25

	หน้า
บทที่ 3	
ตรีโกณมิติฟังก์ชันของมุมแหลม	26
แบบฝึกหัดชุดที่ 3 ก.	28
แบบฝึกหัดชุดที่ 3 ข.	31
บทที่ 4	
ฟังก์ชันของมุมบางมุม	32
ฟังก์ชันของมุม 45° หรือ $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน	32
ฟังก์ชันของมุม 30° และ 60° หรือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน	33
แบบฝึกหัดชุดที่ 4 ก.	35
ฟังก์ชันของมุมประกอบ 1 มุมฉาก	36
แบบฝึกหัดชุดที่ 4 ข.	37
บทที่ 5	
ความสัมพันธ์ของตรีโกณมิติฟังก์ชันต่าง ๆ	38
เอกลักษณ์ของไพธากอรัส	39
การทำตรีโกณมิติฟังก์ชันหนึ่งให้เป็นเทอมของฟังก์ชันอื่น	40
แบบฝึกหัดชุดที่ 5 ก.	42
แบบฝึกหัดชุดที่ 5 ข.	44
แบบฝึกหัดชุดที่ 5 ค.	47
บทที่ 6	
ฟังก์ชันของมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม (Circular Function)	49
ฟังก์ชันของมุม $90^\circ - A$	49
ฟังก์ชันของมุม $90^\circ + A$	50
ฟังก์ชันของมุม $180^\circ - A$, ฟังก์ชันของมุม $180^\circ + A$	51
ฟังก์ชันของมุม $270^\circ - A$, ฟังก์ชันของมุม $270^\circ + A$	
ฟังก์ชันของมุม $-A$	52
แบบฝึกหัดชุดที่ 6 ก.	53
แบบฝึกหัดชุดที่ 6 ข.	54
บทที่ 7	
วิธีใช้ตารางค่าของตรีโกณมิติฟังก์ชันของมุมต่าง ๆ	56
แบบฝึกหัดชุดที่ 7 ก.	60
การถอดสมการในวิชาตรีโกณมิติ	60
แบบฝึกหัดชุดที่ 7 ข.	61

	หน้า
บทที่ 8 กราฟของตรีโกณมิติฟังก์ชัน	62
แบบฝึกหัดชุดที่ 8	66
บทที่ 9 ฟังก์ชันของมุมประกอบ (Compound Angles) ✓	67
วิธีพิสูจน์สูตร	68
วิธีลากเส้นเพื่อการพิสูจน์	69
การพิสูจน์สูตร	72
แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ก.	75
แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ข.	79
แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ค.	82
บทที่ 10 ฟังก์ชันของมุมทวีคูณ	84
แบบฝึกหัดชุดที่ 10	86
บทที่ 11 ฟังก์ชันของมุม 3A	89
แบบฝึกหัดชุดที่ 11 ก.	91
แบบฝึกหัดชุดที่ 11 ข.	93
บทที่ 12 การแก้สมการที่ไม่จำกัดขนาดของมุม	96
ค่าของมุมที่ออกจาก $\sin A$ หรือ $\operatorname{cosec} A$	96
ค่าของมุมที่ออกจาก $\cos A$ หรือ $\sec A$	96
ค่าของมุมที่ออกจาก $\tan A$ หรือ $\cot A$	96
แบบฝึกหัดชุดที่ 12	97
บทที่ 13 ฟังก์ชันผกผัน	98
แบบฝึกหัดชุดที่ 13	99
บทที่ 14 การแปลงสูตรจากผลคูณเป็นผลบวกหรือผลลบ ✓	100
แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ก.	102
การแปลงสูตรจากผลบวกหรือผลลบเป็นผลคูณ	103

	หน้า
แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ข.	108
แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ค.	112
แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ง.	117
แบบฝึกหัดชุดที่ 14 จ.	120
บทที่ 15 ลอการิทึม (Logarithms)	122
นิยาม	122
แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ก.	124
สูตรของ logarithms	124
วิธีหาแคแรคเตอริสติกของ log สามัญ	127
วิธีหา Mantissa	128
การใช้ตาราง logarithm	129
การเปลี่ยนฐาน log จากฐานเดิมให้เป็นฐานอื่น	132
แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ข.	133
สมการซึ่งมีจำนวนตัวแปรค่าเป็นกำลัง (Exponential Equations)	134
แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ค.	137
แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ง.	142
บทที่ 16 การหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม	144
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ก.	148
การเกี่ยวข้องระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม ✓	150
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ข.	157
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ค.	162
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ง.	167
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 จ.	171
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ฉ.	176
แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ช.	180

บทที่ 17	การวัดความสูงและระยะทางบนพื้นราบ	183
	แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ก.	186
	แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ข.	193
	แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ค.	197
	การวัดระยะทางและความสูงบนพื้นราบหลายระนาบ	207
	แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ง.	208
	โจทย์ระคน หมวด 1	210
	โจทย์ระคน หมวด 2	213
	โจทย์ระคน หมวด 3	216



บทที่ 1

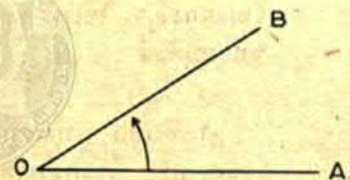
มาตราของการวัดมุม

1. ความหมายของค่ามุม

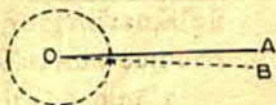
ในวิชาเรขาคณิต เส้นตรงสองเส้นมาตัดกันหรือพบกันทำให้เกิดมุมที่จุดตัดหรือจุดพบนั้น เช่นเส้นตรง OA และ OB มาพบกันที่จุด O เกิดเป็นมุม AOB ในวิชาเรขาคณิต



แต่ในวิชาตรีโกณมิติ ความหมายของมุนนั้นกว้างไปกว่าในเรขาคณิต คือเมื่อเส้นตรง OB หมุนไปจากเส้นตรง OA ซึ่งเป็นเส้นระดับ จะทำให้เกิดมุม AOB ดังในรูป



ถ้าแขน OB หมุนจาก OA ไปทางซ้ายคือทวนเข็มนาฬิกา มุม AOB ที่เกิดขึ้นเป็นมุมที่มีค่าเป็นบวก และเมื่อ OB หมุนได้ 1 รอบแขน OB จะกลับมามี OA อีกครั้ง มุมที่เกิดจากเส้น OB เြียนไป 1 รอบนี้ เรียกว่ามุม 360 องศา หรือ 4 มุมจาก



เส้น OB จะหมุนไปรอบจุด O ก็รอบก็ได้ จุด O ซึ่งเป็นศูนย์ของการหมุนมุมนี้เรียกว่า จุดต้นกำเนิด (Origin) และเส้น OA นี้เป็นเส้นกำเนิด (initial line) เส้น OB เรียกว่าเส้นเวียน (terminal line) หรือ (Radius Vector)

ถ้าปรากฏว่า เส้น OB หมุน
ออกจากเส้น OA ตามเข็มนาฬิกา



มุมที่เกิดขึ้นมีค่าเป็นลบ และถ้า OB หมุนตามเข็มนาฬิกาจาก OA ไป
1 รอบ แล้วกลับมาทับเส้น OA อีกครั้งหนึ่ง เรียกมุมที่ได้จากการหมุน
1 รอบนี้ว่า มุม -360 องศา หรือ -4 มุมฉาก

2. มาตราของการวัดมุม

ในปัจจุบันนี้มาตราของการวัดมุมมีอยู่ 3 มาตราด้วยกันคือ

1. มาตราอังกฤษ (Sexagesimal Measure) แบ่งหน่วยมาตรา
ดังนี้คือ

1 มุมฉากแบ่งออกเป็น 90 ส่วน แต่ละส่วนเรียก 1 องศา
(degree) ใช้เครื่องหมาย "°" ไว้เหนือตัวเลขแสดงความกว้าง
ของมุมดังนี้

$$1 \text{ มุมฉาก} = 90^\circ$$

1 องศา แบ่งออกเป็น 60 ส่วนย่อย แต่ละส่วนเรียก 1 ลิบตา
(minute) ใช้เครื่องหมาย "'" ไว้เหนือตัวเลขแสดงความกว้าง
ของมุมดังนี้

$$1^\circ = 60'$$

1 ลิบตา แบ่งออกเป็น 60 ส่วนย่อย แต่ละส่วนเรียก 1 วิลิปตา
(second) ใช้เครื่องหมาย "''" ไว้เหนือตัวเลขแสดงความกว้าง
ของมุมดังนี้

$$1' = 60''$$

ตัวอย่าง มุม 70 องศา 23 ลิบตา 15 วิลิปตา เขียน $70^\circ 23' 15''$

2. มาตราฝรั่งเศส (Centesimal Measure) มาตรานี้เป็นมาตรา
ที่เกิดในสมัยการปฏิวัติในฝรั่งเศส แบ่งมาตราออกเป็น 100 หน่วย
คำนวณง่ายแต่ไม่มีใครนิยมกัน แม้ในฝรั่งเศสเอง

1 มุมฉาก แบ่งเป็น 100 เกรต ใช้ตัว "g" ไว้บนตัวเลข
แสดงความกว้างของมุมดังนี้

$$1 \text{ มุมฉาก} = 100^g$$

1 เกรต แบ่งออกเป็น 100 ส่วนย่อย แต่ละส่วนเรียก 1 มินิต
(Minute) ใช้เครื่องหมาย "′" ไว้เหนือตัวเลขแทนความกว้าง

ของมุมดังนี้

$$1^{\circ} = 60'$$

1 นาที แบ่งออกเป็น 60 ส่วนย่อย แต่ละส่วนเรียก สกน့် (second) ใช้เครื่องหมาย "''" ไว้เหนือตัวเลขแสดงความกว้างของมุมดังนี้

$$1' = 60''$$

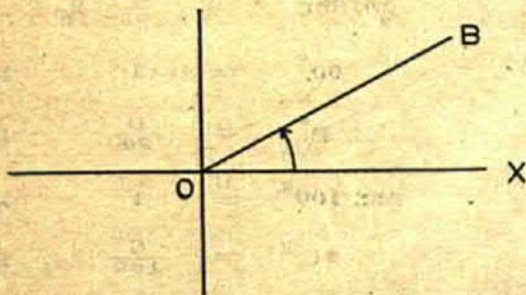
ตัวอย่าง มุม 5 เกรด 9 นาที 70 สกน့် เขียน $5^{\circ} 9' 70''$

3. มาตราเรเดียน (Radian Measure) หรือ Circular Measure
ใช้วัดมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม แบ่งหน่วยมาตราดังนี้

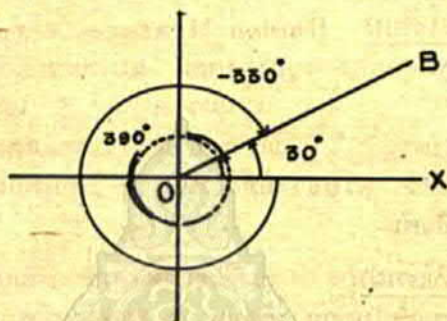
$$1 \text{ มุมฉาก} = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

นิยมใช้ตัว "r" เล็ก ๆ บนหัวตัวเลขแสดงความกว้างของมุมเป็นหน่วยเรเดียน หรือบางทีทิ้งไว้เฉย ๆ โดยไม่มีเครื่องหมายใด ๆ เช่น มุม $\frac{\pi}{2}$ เป็นต้น

3. ตัวอักษรที่ใช้แทนมุม มุมที่มีขนาดแตกต่างกันย่อมต้องใช้อักษรแทนค่าของมุมแตกต่างกันไปด้วย เช่น มุม A, B, C หรือ $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$ หรือ ϕ เป็นต้น อักษรที่ใช้แทนมุมจะต้องเป็นอักษรตัวใหญ่ หรืออักษรกรีก เป็นต้น ส่วนอักษรตัวเล็ก เช่น a, b, c นิยมใช้แทนความยาวของด้าน
4. มุมมาตรฐาน (Standard Angles) คือมุมที่เส้นเวียน terminal line หมุนออกจากเส้น initial line และมีจุดยอดมุมอยู่ที่ต้นกำเนิด O เช่น มุม XO B ในรูป



5. มุมใช้แขนร่วม (Co-terminal Angles) - คือมุมที่มีเส้น Initial line และเส้นเวียน (terminal line) ตรงอยู่ที่เดียวกัน เช่นมุม 30° , 390° , $n \cdot 360^\circ + 30^\circ$ และ -330° เป็นต้นต่างก็เป็น (Co-terminal Angles) ซ้ำกันและกัน



6. สูตรที่ใช้ในการเปลี่ยนค่ามุมระหว่างมาตราอังกฤษและฝรั่งเศส

ให้มุม γ หนึ่งวัดเป็นองศาได้ D องศา

และมุม γ นี้วัดเป็นเกรตได้ G เกรต

$$\text{สูตรก็คือ} \quad \frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

พิสูจน์สูตร $90^\circ = 1$ มุมฉาก

$$\therefore D^\circ = \frac{D}{90} \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{และ } 100^g = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore G^g = \frac{G}{100} \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{นั่นก็คือ} \quad \frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

เปลี่ยนจากมุมฉากเป็นเกรตดังนี้

$$\begin{aligned}
 0.272264 \text{ มุมฉาก} &= 0.272264 \times 100^s = 27.2264^s \\
 .2264^s &= 0.2264 \times 100' = 22.64' \\
 .64' &= 0.64 \times 100'' = 64'' \\
 25^\circ 12' 24'' &= 27^s 22' 64'' \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ

จงเปลี่ยน $94^s 23' 87''$ เป็นมาตราอังกฤษ

ทอนเป็นมุมฉาก $94^s 23' 87'' = 0.942387$ มุมฉาก

เปลี่ยนเป็นองศา 0.942387 มุมฉาก $= 0.942387 \times 90^\circ$

$$= 84.81483$$

$$.81483'' = .81483 \times 60'$$

$$= 48.8898'$$

$$.8898' = .8898 \times 60''$$

$$= 53.388''$$

$$94^s 23' 87'' = 84^\circ 48' 53''$$

ตอบ

6. สูตรที่ใช้ในการเปลี่ยนค่ามุมระหว่างมาตราอังกฤษและฝรั่งเศส

ให้มุม ๆ หนึ่งวัดเป็นองศาได้

D องศา

และมุม ๆ หนึ่งวัดเป็นเกรตได้

G เกรต

$$\text{สูตรคือ } \frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

พิสูจน์สูตร

$$90^\circ = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore D^\circ = \frac{D}{90} \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{และ } 100^s = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore G^s = \frac{G}{100} \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{ถ้าคือ } \frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

ตัวอย่างที่ 3 เปลี่ยน $8^{\circ} 0' 36''$ เป็นมาตราฝรั่งเศสโดยใช้สูตร

วิธีทำ

ทอน $8^{\circ} 0' 36''$ เป็นองศาทั้งหมดดังนี้

$$8^{\circ} 0' 36'' = 8 + 0 + \frac{36}{60 \times 60} = \frac{801}{100} \text{ องศา} = D \text{ ในสูตร}$$

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

$$\therefore \frac{801}{900} = \frac{G}{10}$$

$$\therefore G = 8.9^{\circ} \quad \text{หรือ} \quad 8^{\circ} 90'$$

$$8^{\circ} 0' 36'' = 8^{\circ} 90' \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเปลี่ยน $2^{\circ} 4' 4.5''$ เป็นมาตราอังกฤษ โดยใช้สูตร

วิธีทำ

ต้องเปลี่ยน $2^{\circ} 4' 4.5''$ เป็นเกรตเดียวก่อนดังนี้

$$2^{\circ} 4' 4.5'' = 2 + \frac{4}{100} + \frac{4.5}{100 \times 100} \quad \text{เกรต}$$

$$= 2.04045 \quad \text{เกรต}$$

ตามสูตร $\frac{D}{9} = \frac{G}{10}$ D เป็นจำนวนองศา

G เป็นจำนวนเกรต

$$D = \frac{9}{10} \times 2.04045 = 1.836405 \quad \text{องศา}$$

$$.836405 \text{ องศา} = .836405 \times 60' = 50.1843 \text{ ลิปดา}$$

$$.1843 \text{ ลิปดา} = .1843 \times 60'' = 11.06 \text{ วิลิปดา}$$

$$\therefore 2^{\circ} 4' 4.5'' = 1^{\circ} 50' 11.06'' \quad \text{ตอบ}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ก.

จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้เป็นทศนิยมของมุมฉาก

1. $30^{\circ} 10' 53''$

2. $75^{\circ} 15'$

3. $73^{\circ} 17' 6.5''$

4. $75^{\circ} 1' 8''$

5. $50^{\circ} 10' 27''$

6. $130^{\circ} 30'$

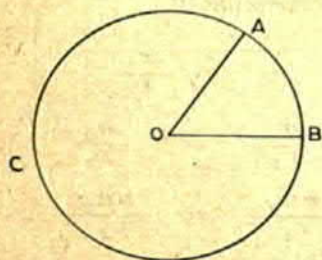
จงทำเป็นมาตราฝรั่งเศส

7. $35^{\circ} 47' 15''$ 8. $43^{\circ} 52' 12''$ 9. $11^{\circ} 0' 38.4''$
 10. $138^{\circ} 30'$ 11. $235^{\circ} 12' 36''$

จงทำเป็นมาตราอังกฤษ

12. 120° 13. $45^{\circ} 35' 24''$ 14. $5^{\circ} 87' 50''$
 15. $59^{\circ} 30'$ 16. $8^{\circ} 10' 6.5''$
 17. มุม ๆ หนึ่งวัดด้วยมาตราอังกฤษได้จำนวนหน่วยเท่ากับจำนวนหน่วยที่วัดด้วยมาตราฝรั่งเศสของอีกมุมหนึ่ง ถ้าปรากฏมุมทั้งสองต่างเป็นมุมประกอบสองมุมฉากซึ่งกันและกัน จงหาว่ามุมทั้งสองนี้เป็นจำนวนของศา
 18. มุมทั้งสองเมื่อรวมกันเข้าแล้วได้ 81° ของศา และผลต่างของมุมทั้งสองเป็น 16° เกรด มุมทั้งสองนี้ต่างได้กี่เกรด กี่องศา

5. คำนิยามของมุม 1 เรเดียน มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น คือมุมที่มีความกว้าง 1 เรเดียน

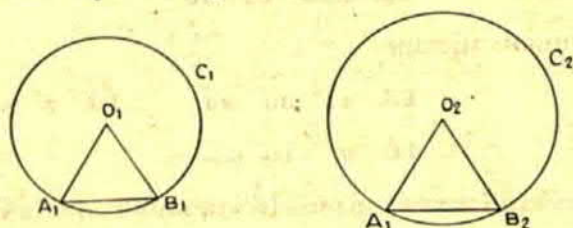


จากรูป ABC เป็นวงกลมวงหนึ่งซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง AOB เป็นส่วนของวงกลม (sector) ซึ่งมีส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับความยาวของรัศมี ฉะนั้นมุม AOB นี้เรียกว่า มุมที่มีความกว้าง 1 เรเดียน

นิยามนี้ได้จำกัดไว้ว่าวงกลมจะโตเท่าใด และมีรัศมียาวเท่าใด การที่เป็นดังนี้ เนื่องจากวงกลมทุกวงมีรัศมีและเส้นรอบวงเป็นอัตราส่วนที่คงที่เสมอ

7. การพิสูจน์อัตราส่วนของเส้นรอบวงและรัศมีมีค่าคงที่เสมอ

ให้ $A_1B_1C_1$ และ $A_2B_2C_2$ เป็นวงกลมสองวงมีรัศมี r_1 และ r_2 และจุดศูนย์กลาง O_1 และ O_2 ตามลำดับ



แบ่งมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองเป็น n มุมเท่า ๆ กัน ฉะนั้นเมื่อทำเป็นรูปสามเหลี่ยมขึ้นจะปรากฏรูปสามเหลี่ยมในวงกลมวงละ n รูป

ให้ $O_1A_1B_1$ เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งในวงกลม $A_1B_1C_1$

และ $O_2A_2B_2$ เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งในวงกลม $A_2B_2C_2$

A_1B_1 ด้านของรูปที่ 1 ยาว a_1 หน่วย

A_2B_2 " " 2 ยาว a_2 หน่วย

$\triangle O_1A_1B_1$ และ $O_2A_2B_2$ มีมุมยอด $O_1 = O_2$ คือ $= \frac{1}{n}$ ของ 4 มุมฉาก และทั้งคู่เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีมุมที่ฐานเท่ากันทั้งสองมุม

$\therefore \triangle O_1A_1B_1$ และ $O_2A_2B_2$ จึงมีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม ดังนั้น ด้านตรงข้ามมุมคู่เท่า ย่อมเป็นสัดส่วนต่อกันดังนี้

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_1}{r_2} \therefore \frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2}$$

$$\frac{na_1}{r_1} = \frac{na_2}{r_2}$$

ถ้ารูปสามเหลี่ยมมีมากรูป ด้าน a_1 และ a_2 ก็จะสั้นเข้าทุกทีจนกระทั่งเป็นจุด ฉะนั้น ด้านก็จะมีความยาวเป็นเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง ในที่นี้ สมมุติให้เส้นรอบวงเป็น C_1 และ C_2

ฉะนั้น $\frac{C_1}{r_1} = \frac{C_2}{r_2}$ ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีวงกลมมากกว่าสองวง
ขึ้นไป ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{C_1}{r_1} = \frac{C_2}{r_2} = \frac{C_3}{r_3} = \dots$$

นั่นคืออัตราส่วนของเส้นรอบวงและรัศมีมีค่าคงที่

และเพราะว่า $\frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{รัศมี}}$ มีค่าคงที่

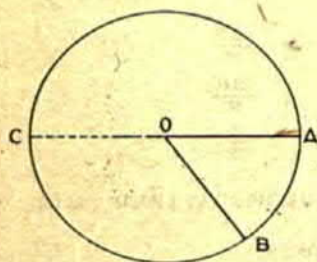
$\therefore \frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{เส้นผ่าศูนย์กลาง}}$ ก็ย่อมคงที่ด้วย และค่าคงที่นี้ใช้อักษรกรีกแทนว่า π
ค่าของ π นี้มีประมาณ 3.1415926..... หรือประมาณ $\frac{22}{7}$

8. สูตรเส้นรอบวงของวงกลม

เนื่องจาก $\frac{\text{เส้นรอบวง}}{2r} = \pi \quad (r = \text{รัศมี})$

$$\text{เส้นรอบวง} = 2\pi r$$

9. มุม 1 เรเดียนย่อมมีค่าคงที่เสมอ



สร้างวงกลมวงหนึ่งโดยให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง
OA เป็นรัศมี ลากเส้น OB ให้ส่วนโค้ง AB
ยาวเท่ากับรัศมี OA ฉะนั้นมุม AOB มีความ
กว้าง 1 เรเดียน คือ AO ออกไปพบเส้นรอบวง
ที่จุด C ตามทฤษฎีบทที่พิสูจน์ในเรขาคณิต
ทราบว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมเดียวกัน
หรือที่เท่ากันย่อมเป็นสัดส่วนกับส่วนโค้งที่รองรับ
มุมนั้น

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\text{มุม AOB}}{\text{มุม AOC}} = \frac{\text{ส่วนโค้ง AB}}{\text{ส่วนโค้ง AC}}$$

ก็คือ $\frac{\text{มุม AOB}}{2 \text{ มุมฉาก}} = \frac{\text{รัศมี } (r)}{2\pi r}$

$$(\text{ส่วนโค้ง AC} = \text{ครึ่งวงกลมน้อยยาว } \frac{2\pi r}{2} = \pi r)$$

$$\therefore \text{มุม AOB} = \frac{2}{\pi} \text{ มุมฉาก} \quad \text{ซึ่งคงที่เสมอ}$$

ก็คือ มุม 1 เรเดียน = $\frac{2}{\pi}$ มุมฉาก

2 มุมฉาก = π เรเดียน

ดังนั้น 1 มุมฉาก = $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน

10. การหาจำนวนองศาในมุม 1 เรเดียน

เนื่องจากมุม 1 เรเดียน $\frac{2}{\pi}$ = มุมฉาก = $\frac{2}{3.1416}$ มุมฉาก
 $= \frac{2}{3.1416} \times 90$ องศา = 57.2958 องศา

ฉะนั้น มุม 1 เรเดียน มีค่าประมาณ 57.3 องศา

11. สูตรที่ใช้ในการเปลี่ยนค่าของมุมระหว่างมาตราอังกฤษและมาตราเรเดียน คือ

$\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi}$ เมื่อ D เป็นหน่วยองศา θ เป็นหน่วยเรเดียน

พิสูจน์ สมมติให้มุม θ หนึ่งวัดด้วยมาตราอังกฤษได้ D องศา
 และวัดด้วยมาตราเรเดียนได้ θ เรเดียน

$90^\circ = 1$ มุมฉาก

$D^\circ = \frac{D}{90}$ มุมฉาก

แต่ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน = 1 มุมฉาก

θ " = $\frac{2\theta}{\pi}$ "

$\therefore \frac{D}{90} = \frac{2\theta}{\pi}$

$\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi}$

ตัวอย่างที่ 1 จงเปลี่ยนมุม 75° เป็นมาตราเรเดียน และ $\frac{\pi}{12}$ เรเดียนเป็นมาตราอังกฤษ

วิธีทำ

1. $\frac{75}{180} = \frac{\theta}{\pi}$ เมื่อ D = 75°

$\therefore \theta = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ เรเดียน ตอบ

2. $\frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\pi}$ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{12}$

$\therefore D = \frac{\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 15$ องศา ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงเปลี่ยน $25^{\circ} 35' 90''$ เป็นมาตราเรเดียน

วิธีทำ

$$100 \text{ เกรต} = 1 \text{ มุมฉาก} = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$25^{\circ} 35' 90'' = 25.3590 \text{ เกรต} = \frac{25.3590}{100}$$

$$= .253590 \text{ มุมฉาก}$$

$$= .253590 \frac{\pi}{2} = .398 \text{ เรเดียน} \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

หลักควรนำมาใช้

1. การเปลี่ยนมุมที่วัดเป็นมาตราเรเดียนให้เป็นมาตราอังกฤษ ให้คูณจำนวนเรเดียนด้วย $\frac{180}{\pi}$
2. การเปลี่ยนมุมที่วัดเป็นมาตราอังกฤษให้เป็นมาตราเรเดียน ให้คูณจำนวนองศาด้วย $\frac{\pi}{180}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ข.

จงทำให้เป็นมาตราเรเดียน กำหนด $\pi = 3.1416$

1. 50°

2. 45°

3. 18°

4. $60^{\circ} 30'$

5. $45^{\circ} 10' 45''$

6. $60^{\circ} 30'$

7. 120°

8. 150°

จงทำเป็นมาตราอังกฤษ

9. 45π

10. $\frac{\pi}{12}$

11. $\frac{5\pi}{24}$

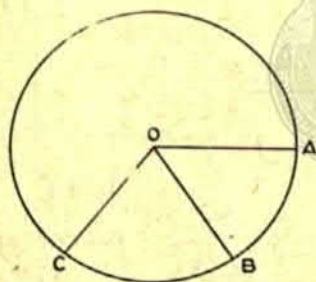
12. $\frac{7\pi}{6}$

13. $\frac{3\pi}{4}$

14. ผลต่างระหว่างมุมแหลมสองมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง เป็น $\frac{\pi}{10}$ เรเดียน จงหาค่าของมุมทั้งสองเป็นจำนวนองศา

15. เข็มนาฬิกาสองเข็มชี้บอกเวลา 15.30 น. จงหามุมระหว่างเข็มทั้งสองนั้นเป็นมาตราทั้งสาม

16. มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม $\frac{3x}{2}$ องศา $\frac{2x}{8}$ เกรด และ $\frac{\pi x}{75}$ เรเดียน จงหาค่าของมุมทั้งสามเป็นจำนวนองศา
17. มุมสองมุมมีผลต่างเป็น $\frac{2\pi}{9}$ เรเดียน ผลบวกเป็น 76° มุมทั้งสองนั้น ต่างก็โคมุมละกี่องศา
18. ผลต่างของมุมแหลมสองมุม ของสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งเป็น $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน จงหาค่าของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเป็นจำนวนองศา
19. มุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเป็น 56 องศา มุมที่สองเป็น $\frac{2\pi}{5}$ เรเดียน จงหาค่ามุมที่สามเป็นจำนวนองศา
12. การหามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นมาตราเรเดียน



เขียนวงกลม ABC มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
OA เป็นรัศมี $= r$ ทำมุม AOC สร้าง
มุม AOB ให้มีความกว้าง 1 เรเดียน

$\therefore$ ส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับรัศมี r

พิสูจน์ มุม AOC และ AOB อยู่บน
ส่วนโค้ง AC และ AB ของ
วงกลมเดียวกัน

$$\begin{aligned} \frac{\text{มุม AOC}}{\text{มุม AOB}} &= \frac{\text{ส่วนโค้ง AC}}{\text{ส่วนโค้ง AB}} \\ \frac{\text{มุม AOC}}{1 \text{ เรเดียน}} &= \frac{\text{ส่วนโค้ง AC}}{\text{ส่วนโค้งที่รับมุม AOB}} \\ \text{มุม AOC} &= \frac{\text{ส่วนโค้งที่รับมุม AOC}}{\text{รัศมี}} \\ &= \frac{\text{ส่วนโค้งที่รับมุมนั้น}}{\text{รัศมี}} \end{aligned}$$

ก็คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

ถ้า θ คือจำนวนเรเดียนที่วัดมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

a เป็นส่วนโค้งที่รับมุมกว้าง θ เรเดียน

r เป็นรัศมีของวงกลมนั้น

จัดเป็นสูตร คือ $\theta = \frac{a}{r}$

ตัวอย่างที่ 3 มุมที่อยู่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมีส่วนโค้งที่รับมุมยาว 7.5 ฟุต และรัศมีของวงกลมนั้นยาว 2.5 หลา มีความกว้างกี่เรเดียน

วิธีทำ จากสูตร $\theta = \frac{a}{r}$ เมื่อ a ยาว 7.5 ฟุต
 r ยาว 2.5 หลา = 7.5 ฟุต
 $\therefore \theta = \frac{7.5}{7.5} = 1$ เรเดียน ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 ลูกโลกลูกหนึ่งมีรัศมียาว 5 ฟุต จงหาว่าที่ตองแห่งบนผิวโลกห่างกันเท่าใด ถ้าเส้นรุ้งของที่ตองแห่งนั้นห่างกัน 33° (ใช้ $\pi = \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ทำมุม 33° ให้เป็นมุมเรเดียน ดังนี้

$$33^\circ = \frac{\pi}{180} \times 33 = \frac{22}{7} \times \frac{33}{180} = \frac{363}{360} \text{ เรเดียน}$$

ใช้สูตร $\theta = \frac{a}{r}$

ในที่นี้ $\theta = \frac{363}{360}$ เรเดียน

a เป็นส่วนโค้งที่รองรับมุม คือระยะยะที่ตองแห่งห่างกัน

r เป็นรัศมีของลูกโลกยาว 5 ฟุต

$$\therefore \frac{363}{360} = \frac{a}{5}$$

$$\therefore a = \frac{5 \times 363}{360} = 5 \frac{37}{40} \text{ ฟุต} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ค.

1. เข็มยาวของนาฬิกาบนหน้าตักแห่งหนึ่งยาว 10 นิ้ว ถ้าเข็มยาวเคลื่อนที่ไปจากเดิม 25 นาที เข็มสั้นจะเคลื่อนเป็นมุมเท่าใด และปลายเข็มจะอยู่ห่างจากที่เดิมเท่าใด
2. แขนเฉียงและคนหนึ่งปักหลักไว้กลางสนาม แล้วด้วยเชือกเส้นหนึ่งยาว 6 ฟุต ฉันทเห็นแพะดึงเชือกตึงแล้วเดินก้นหย้าจนเชือกเป็นขอบทางโค้งซึ่งรับมุมที่หลักประมาณ 35° อยากทราบว่าทางโค้งนั้นยาวเท่าใด



3. คนงานทำสนามหญ้าของโรงเรียนเป็นวงกลมรัศมียาว 8 หลา ภารโรงปลูกต้นไม้ดอกไว้ริมสนาม เป็นทางยาวตามขอบสนาม 1.6 หลา อยากทราบว่าไม้ดอกนี้รับมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นกี่เรเดียน
4. ฉันเป็นคนตาสั้น เมื่อโบกตล่องสายตา นายแพทย์ให้ฉันยืนห่างจากตัวอักษร 12 ฟุต ฉันรู้ลึกว่ามุมที่ดวงตาของฉันเมื่อมองอักษรเป็น $5'$ ดังนั้นตัวอักษรจะต้องโตเท่าใด (กำหนด $\pi = \frac{22}{7}$)
5. สมมุติว่าโลกที่เราอยู่นี้มีรัศมียาว 19200 ไมล์ จงหาระยะทางที่ $1'$ สองแห่งบนผิวโลกรับมุมที่จุดศูนย์กลางโลกเป็น $1'$
6. ใบพัดของเครื่องจักรชนิดหนึ่งหมุน 40 รอบใน 1 วินาที ฉะนั้นถ้าหมุนไปทำมุมที่จุดศูนย์กลางเป็น 35 เรเดียน จะกินเวลานานเท่าใด
7. มุมที่จุดศูนย์กลางกลางของวงกลมเป็น $30^\circ 15' 50''$ และส่วนโค้งที่รับมุมเป็น 300 ฟุต จงหารัศมีของวงกลมนี้
8. ต้นนาฬิกายาว 8 ฟุต ขณะแกว่งโยนตัวทำเป็นมุมที่ชี้ $9'$ องศา จงหาความยาวของปลายตุ้มที่แกว่งโยนตัวครั้งหนึ่ง $1'$
9. รัศมีของวงกลมวงหนึ่งยาว 15 ฟุต จงหาความกว้างของมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งมีส่วนโค้งที่รับมุมยาว $26\frac{1}{2}$ ฟุต (ตอบเป็นจำนวนเรเดียน)
10. รัศมีของวงกลมวงหนึ่งยาว 32 ฟุต จงหาจำนวนองศาของมุมที่จุดศูนย์กลางกลางของวงกลมนี้ เมื่อมีส่วนโค้งที่รองรับมุมยาว 5π ฟุต
11. จงหารัศมีของลูกโลกซึ่งเมื่อวัดที่ผิวลูกโลกนั้นห่างกัน $3'$ จะรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางโต $1^\circ 45'$ ($\pi = \frac{22}{7}$)
12. เส้นครึ่งรอบของวงกลมวงหนึ่งยาวเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางรวมกับความยาวของเส้นโค้งที่รองรับมุม $1'$ หนึ่ง จงหาว่ามุมนี้โตเท่าใด
13. ในวงกลมวงหนึ่ง ส่วนโค้งที่รองรับมุมยาว 1.309 เมตร ถ้ารัศมีของวงกลมนี้ยาว 10 เมตร มุมที่จุดศูนย์กลางที่ส่วนโค้งดังกล่าวรองรับเป็น $7^\circ 30'$ จงหาอัตราส่วนของเส้นรอบวงของวงกลม และเส้นผ่าศูนย์กลาง
14. วงกลมสองวง วงหนึ่งใหญ่และวงหนึ่งเล็ก ปรากฏว่าครึ่งของเส้นรอบวงวงใหญ่ ยาวเท่ากับส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางโต 225° ของวงกลมวงเล็ก จงหาอัตราส่วนของรัศมีของวงกลมทั้งสอง

บทที่ 2

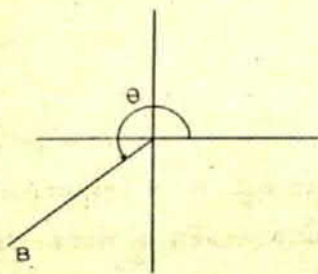
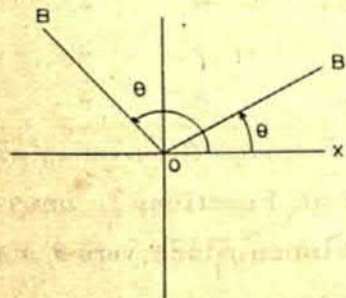
ตรีโกณมิติฟังก์ชันของมุมรอบจุด

1. การหาตำแหน่งของจุดหรือเส้นบนพื้นราบ จะต้องลากเส้นตรงสองเส้นตัดตั้งฉากกัน เรียกว่าแกนพิกัด (Co-ordinates Axis)

ลากเส้นตรงสองเส้นคือ เส้นระดับ XX' และเส้นตั้ง YY' ตัดกันที่จุด O พื้นระนาบจะถูกแบ่งออกเป็นสี่เหลี่ยม เรียกว่า ควอดแดรนต์ (Quadrant) ซึ่งจัดเป็นควอดแดรนต์ที่ 1, 2, 3, และ 4 ตามลำดับ ระยะของจุดซึ่งวัดตามแกน XX' เรียกว่า พิกัดราบ (Abscissa) และระยะของจุดที่วัดขนานกับแกน YY' เรียกว่า พิกัดฉาก (Ordinate) จุดที่แกนสองแกนตัดกันเรียกว่า จุดต้นกำเนิด (Origin)

2. มุมที่หมุนรอบจุดบนแกนราบ

สมมุติให้แกนราบ OX เป็นเส้น (initial) และแขน OB หมุนออกจากเส้น OX ทำให้เกิดมุม θ เส้นที่เป็นแขนหมุนนี้ เรียกว่า terminal line หรือถ้าเป็นมุมในวงกลมเรียกว่า radius vector ถ้าเส้น terminal line อยู่ในควอดแดรนต์ที่ 1 เรียกมุม θ นั้นเป็นมุมในควอดแดรนต์ที่ 1 ถ้าแขน terminal line ไปหยุดที่ในควอดแดรนต์ที่ 2 มุม θ ที่เกิดขึ้นเป็นมุมในควอดแดรนต์ที่ 2 ถ้าแขนของมุมไปหยุดในควอดแดรนต์ที่ 3 มุม θ ที่เกิดขึ้นเป็นมุมในควอดแดรนต์ที่ 3 และถ้าแขนของมุมไปหยุดในควอดแดรนต์ที่ 4 มุม θ ที่เกิดขึ้นเป็นมุมในควอดแดรนต์ที่ 4



3. ฟังก์ชันของมุม Trigonometrical Functions

3.1 มุมใน Quadrant ที่ 1

สมมุติเส้น OB หมุนออกจากเส้น OX ไปทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ

เลือกจุด P บนแขน OB สมมุติว่าระยะ OP ยาว r

จากจุด P ลากเส้นตรง PA มาตั้งฉากกับเส้น OX ที่จุด A ฉะนั้นวัดระยะหาพิกัดของจุด P สมมุติว่าเป็น $P(x, y)$

อัตราส่วนของพิกัดที่เกิดขึ้น คือ

$$\frac{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{y}{r} = \text{sine of } \theta$$

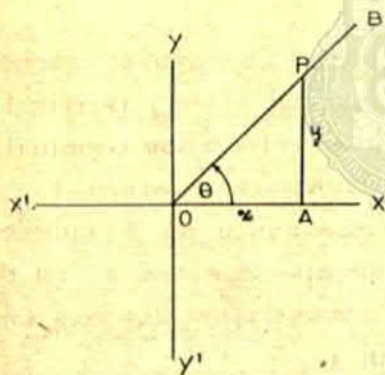
$$\frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{x}{r} = \text{cosine of } \theta$$

$$\frac{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}}{\text{พิกัดราบ (abscissa)}} = \frac{y}{x} = \text{tangent of } \theta$$

$$\frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}} = \frac{x}{y} = \text{cotangent of } \theta$$

$$\frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดราบ (abscissa)}} = \frac{r}{x} = \text{secant of } \theta$$

$$\frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{y} = \text{cosecant of } \theta$$



sine ของมุม θ เขียนย่อ ๆ ว่า $\sin \theta$

cosine " θ " $\cos \theta$

tangent " θ " $\tan \theta$

cotangent " θ " $\cot \theta$

secant " θ " $\sec \theta$

cosecant " θ " $\csc \theta$

ทั้ง 6 นี้มีค่าแปรผันตามความกว้างของมุม θ จึงเรียกว่า ตรีโกณมิติ ฟังก์ชันของมุม θ (Trigonometrical Functions) นอกจากทั้ง 6 ฟังก์ชันนี้แล้วยังมีอีก 2 ฟังก์ชัน แต่ขั้นนี้ไม่ค่อยได้ใช้คือ $\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$ และ $\text{covers } \theta = 1 - \sin \theta$

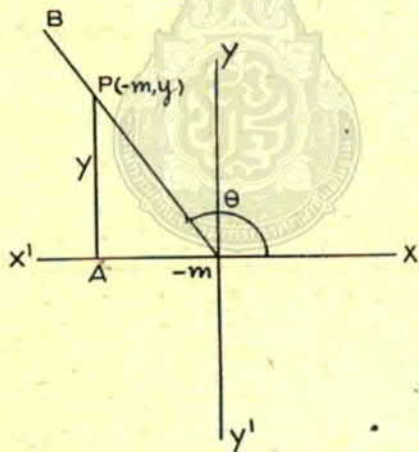
3.2 ความหมายของ Co-functions

sine	และ	cosine	ของมุม	θ
tangent	และ	cotangent	ของมุม	θ
secant	และ	cosecant	ของมุม	θ
vers	และ	covers	ของมุม	θ

ทั้ง 4 ชุดนี้ แต่ละฟังก์ชันในชุดต่างก็เป็น Co-functions ของกันและกัน

3.3 ฟังก์ชันของมุมในควอดแดรนต์ที่ 2

เมื่อหมุนแขน OB มายังควอดแดรนต์ที่ 2 จุด P บน OB จะมีพิกัดราบเป็น— ฉะนั้น พิกัดของจุด P เป็น $(-m, y)$ และ OP คงยาว r



$$\sin \theta = \frac{\text{พิกัดราบ (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{y}{r} \quad \text{มีค่าเป็น} \quad +$$

$$\cos \theta = \frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{-m}{r} \quad \text{,,} \quad -$$

$$\tan \theta = \frac{\text{พิภคฉาก (ordinate)}}{\text{พิภคราบ (abscissa)}} = \frac{-y}{-m} = \text{มีค่าเป็น } -$$

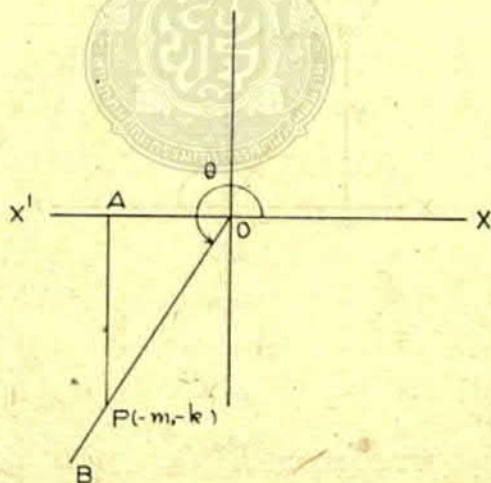
$$\cot \theta = \frac{\text{พิภคราบ (abscissa)}}{\text{พิภคฉาก (ordinate)}} = \frac{-m}{y} = \text{,, } -$$

$$\sec \theta = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภคราบ (abscissa)}} = \frac{r}{-m} = \text{,, } -$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภคฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{y} = \text{,, } +$$

3.4 พังชั้นของมุมในควอดรนต์ที่ 3

เมื่อหมุนแขน OB มายังควอดรนต์ที่ 3 จุด P บน OB จะมีพิภคฉากเป็น $-$ และพิภคราบก็เป็น $-$ เช่นกัน ฉะนั้นให้พิภคของจุด P เป็น $(-m, -k)$ ส่วนระยะ OP ยังคงเป็น r ตามเดิม



$$\sin \theta = \frac{\text{พิภคฉาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{-k}{r} = \text{มีค่าเป็น } -$$

$$\cos \theta = \frac{\text{พิภคราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{-m}{r} = \text{,, } -$$

$$\tan \theta = \frac{\text{พิภตฉาก (ordinate)}}{\text{พิภตราบ (abscissa)}} = \frac{-k}{-m} \quad \text{มีค่าเป็น} \quad +$$

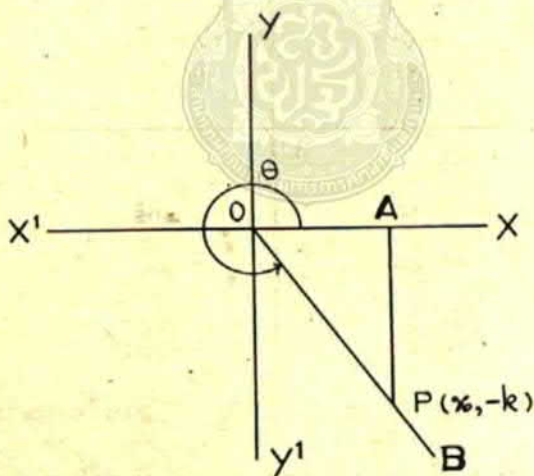
$$\cot \theta = \frac{\text{พิภตราบ (abscissa)}}{\text{พิภตฉาก (ordinate)}} = \frac{-m}{-k} \quad \text{”} \quad +$$

$$\sec \theta = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภตราบ (abscissa)}} = \frac{r}{-m} \quad \text{”} \quad -$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภตฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{-k} \quad \text{”} \quad -$$

3.5 พังชั้นของมุมในควอดรันท์ที่ 4

เมื่อแขน OB หมุนมายังควอดรันท์ที่ 4 จุด P บน OB จะมีพิภตราบเป็น + และพิภตฉากเป็น - ฉะนั้น ให้พิภตของจุด P เป็น $(x, -k)$ และระยะ OP ยังคงเป็น r



$$\sin \theta = \frac{\text{พิภตฉาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{-k}{r} \quad \text{มีค่าเป็น} \quad -$$

$$\cos \theta = \frac{\text{พิภตราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{x}{r} \quad \text{”} \quad +$$

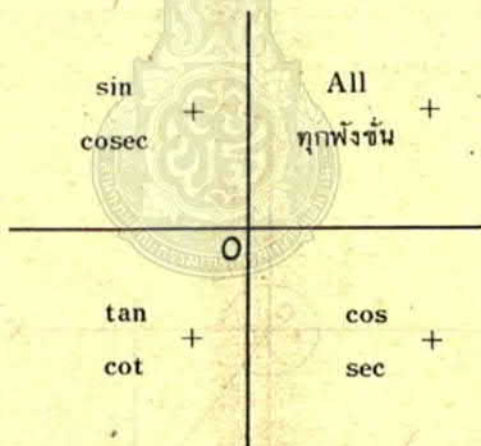
$$\tan \theta = \frac{\text{พิภพฉาก (ordinate)}}{\text{พิภพราบ (abscissa)}} = \frac{-k}{x} \quad \text{มีค่าเป็น} \quad -$$

$$\cot \theta = \frac{\text{พิภพราบ (abscissa)}}{\text{พิภพฉาก (ordinate)}} = \frac{x}{-k} \quad \text{”} \quad -$$

$$\sec \theta = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภพราบ (abscissa)}} = \frac{r}{x} \quad \text{”} \quad +$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภพฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{-k} \quad \text{”} \quad -$$

3.6 รูปผลเครื่องหมายของค่าของฟังก์ชันในควอดแรนต์ต่าง ๆ



ในควอดแรนต์ที่ 1 ทุกฟังก์ชัน มีเครื่องหมายเป็น +

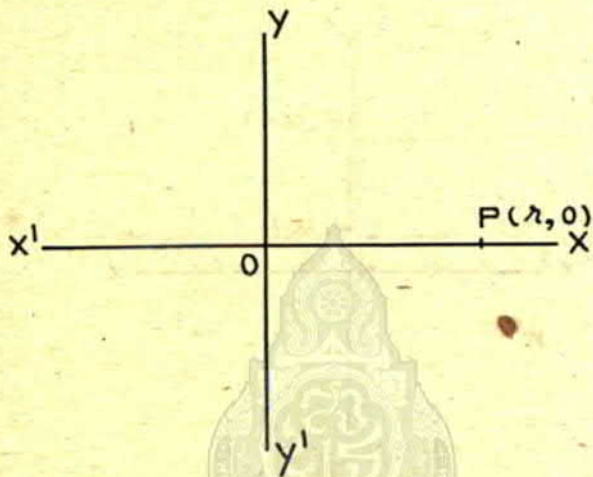
ในควอดแรนต์ที่ 2 มี sine และ cosecant มีเครื่องหมายเป็น +

ในควอดแรนต์ที่ 3 มี tangent และ cotangent มีเครื่องหมายเป็น +

ในควอดแรนต์ที่ 4 มี cosine และ secant มีเครื่องหมายเป็น +

4. ค่าของฟังก์ชันของมุม 0°

เมื่อแขน OB กับเส้น OX มุมที่เกิดจากเส้น OB และ OX เป็น 0° และพิกัดของจุด P บนเส้น OB เป็น $(r, 0)$



$$\sin 0^\circ = \frac{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}}{\text{พิกัดราบ (abscissa)}} = \frac{0}{r} = 0$$

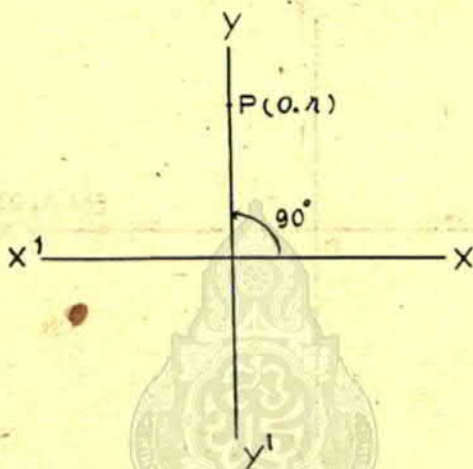
$$\cot 0^\circ = \frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{0} = \pm \infty$$

$$\sec 0^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดราบ (abscissa)}} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{0} = \pm \infty$$

5. พังค์นของมุม 90°

แขน OB หมุนจาก OX ไปทับเส้น OY ฉะนั้น พิกัดของจุด P ซึ่งมีระยะ $OP = r$ เป็น $(0, r)$



$$\sin 90^\circ = \frac{\text{พิภคฉาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{\text{พิภคราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\text{พิภคฉาก (ordinate)}}{\text{พิภคราบ (abscissa)}} = \frac{r}{0} = \pm \infty$$

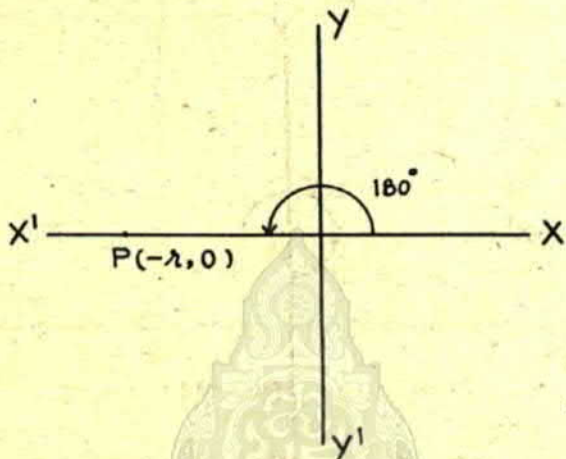
$$\cot 90^\circ = \frac{\text{พิภคราบ (abscissa)}}{\text{พิภคฉาก (ordinate)}} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภคราบ (abscissa)}} = \frac{r}{0} = \pm \infty$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิภคฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{r} = 1$$

6. พังชันของมุม 180°

หมุนแกน OB จากเส้น OX ไปทับเส้น OX' ดังนั้นจุด P บน OB ซึ่งมีระยะ $OP = r$ มีพิกัดเป็น $(-r, 0)$



$$\sin 180^\circ = \frac{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}}{\text{พิกัดราบ (abscissa)}} = \frac{0}{-r} = 0$$

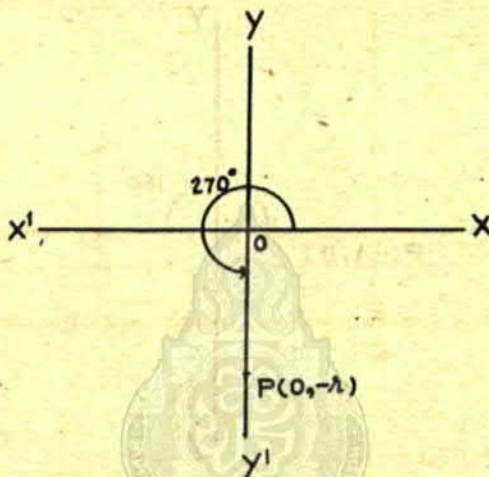
$$\cot 180^\circ = \frac{\text{พิกัดราบ (abscissa)}}{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}} = \frac{-r}{0} = \pm \infty$$

$$\sec 180^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดราบ (abscissa)}} = \frac{r}{-r} = -1$$

$$\operatorname{cosec} 180^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดฉาก (ordinate)}} = \frac{r}{0} = \pm \infty$$

7. พังค์นของมุม 270°

แขน OB หมุนออกจากเส้น OX ไปกับเส้น OX' ดังนั้นจุด P บนเส้น OB ซึ่งมีระยะ $OP = r$ มีพิกัดเป็น $(0, -r)$



$$\sin 270^\circ = \frac{\text{พิกัดจาก (ordinate)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{\text{พิกัดจาก (abscissa)}}{\text{ระยะ } r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\tan 270^\circ = \frac{\text{พิกัดจาก (ordinate)}}{\text{พิกัดจาก (abscissa)}} = \frac{-r}{0} = \pm \infty$$

$$\cot 270^\circ = \frac{\text{พิกัดจาก (abscissa)}}{\text{พิกัดจาก (ordinate)}} = \frac{0}{-r} = 0$$

$$\sec 270^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดจาก (abscissa)}} = \frac{r}{0} = \pm \infty$$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = \frac{\text{ระยะ } r}{\text{พิกัดจาก (ordinate)}} = \frac{r}{-r} = -1$$

8. ตารางค่าของฟังก์ชัน ตั้งแต่ $0^\circ - 360^\circ$

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0
cot	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
sec	1	$\pm \infty$	-1	$\pm \infty$	1
cosec	$\pm \infty$	1	$\pm \infty$	-1	$\pm \infty$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. มุมต่อไปนี้เป็นมุมในควอดรันตใด

$120^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 150^\circ, 265^\circ, 300^\circ, -300^\circ, -315^\circ, 135^\circ, 325^\circ, -150^\circ, 380^\circ, 350^\circ, -850^\circ, 775^\circ, -\frac{3\pi}{4}, 2\frac{\pi}{8}, 5\frac{\pi}{6}, \frac{10\pi}{8}, -11\frac{\pi}{4}, 225^\circ, -1000^\circ, 3\frac{\pi}{5}$

2. จงเขียนมุมบวกที่เล็กที่สุดที่มีแกนของมุมตรงร่วมกับแกนของมุมต่อไปนี้ (Coterminal angle)

$240^\circ, -300^\circ, 575^\circ, -230^\circ, -620^\circ, 13\frac{\pi}{6}, 210^\circ, 315^\circ, -1200^\circ, -880^\circ, 335^\circ, -13\frac{\pi}{6}, 13\frac{\pi}{6}, -4\frac{\pi}{3}, 7\frac{\pi}{8}, 570^\circ$

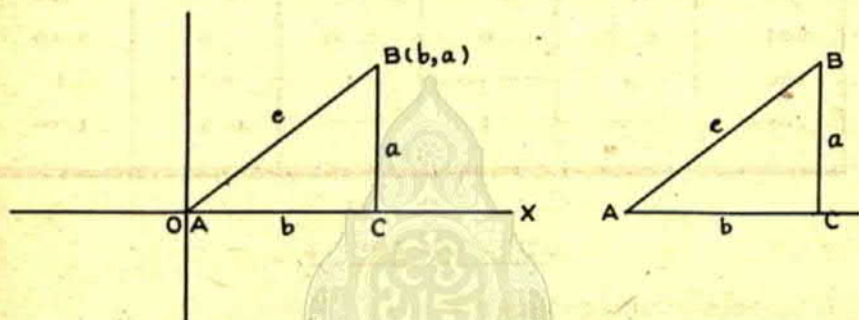
3. มุมต่อไปนี้ มุมใดมีค่าของฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายเป็น บวก

sin 420° , cos 390° , tan 225° , cos -135° , cos 150°
 cosec 225° , tan 300° , tan 240° , sin -575° , cos $11\frac{\pi}{5}$,
 sec $25\frac{\pi}{3}$, tan $-\frac{5\pi}{3}$, cosec 4380°

บทที่ 3

ตรีโกณมิติฟังก์ชันของมุมแหลม

ในการหาฟังก์ชันของมุมแหลมใช้มุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก จะต้องพยายามนำเรื่องของฟังก์ชันของมุมในควอดรนต์ที่ 1 มาใช้ แต่แทนที่จะใช้รูปเดิมกลับเปลี่ยนไปดังนี้



ให้เส้น OB หมุนไปจากเส้น OX และจากจุด B ลากเส้น BC มาตั้งฉากกับ OX ที่ C เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมขึ้น มีมุม C เป็นมุมฉาก และมีพิกัดของจุด B เป็น (b, a) ระยะ OB เป็น $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

ดังนั้นยกรูปสามเหลี่ยมในควอดรนต์ที่ 1 มาเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จะเห็นว่า มีด้าน a เป็นด้านตรงข้ามมุม A (เรียกว่า opposite side) ด้าน $AC = b$ เป็นด้านประชิด มุม A (เรียกว่า adjacent side)

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม (opposite side)}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก (hypotenuse)}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม (adjacent side)}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก (hypotenuse)}}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม (opposite side)}}{\text{ด้านประชิดมุม (adjacent side)}}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม (adjacent side)}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม (opposite side)}}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามฉาก (hypotenuse)}}{\text{ด้านประชิดมุม (adjacent side)}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามฉาก (hypotenuse)}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม (opposite side)}}$$

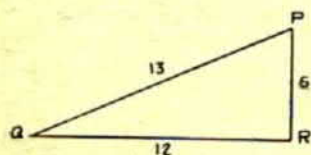
จะเห็นว่า ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ตรีโกณมิติฟังก์ชัน เกิดจากอัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น ฉะนั้น อัตราส่วนทั้ง 6 นี้มีชื่อว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometrical Ratios)

ตัวอย่างที่ 1 ในสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR PQ = 13, PR = 5, QR = 12 จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 ของมุม P และ Q

เมื่อด้าน PQ ยาวที่สุด ฉะนั้น ต้องเป็นด้านตรงข้ามฉาก

PR เป็นด้านตรงข้ามมุม Q

QR เป็นด้านประชิดมุม Q



$$\sin Q = \frac{PR}{QP} = \frac{5}{13}$$

$$\cos Q = \frac{QR}{QP} = \frac{12}{13}$$

$$\tan Q = \frac{PR}{QR} = \frac{5}{12}$$

$$\cot Q = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{5}$$

$$\sec Q = \frac{QP}{QR} = \frac{13}{12}$$

$$\operatorname{cosec} Q = \frac{QP}{PR} = \frac{13}{5}$$

QR เป็นด้านตรงข้ามมุม P

PR เป็นด้านประชิดมุม P

PQ เป็นด้านตรงข้ามฉาก

$$\begin{aligned}
 \sin P &= \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{13} \\
 \cos P &= \frac{PR}{PQ} = \frac{5}{13} \\
 \tan P &= \frac{QR}{PR} = \frac{12}{5} \\
 \cot P &= \frac{PR}{QR} = \frac{5}{12} \\
 \sec P &= \frac{PQ}{PR} = \frac{13}{5} \\
 \operatorname{cosec} P &= \frac{PQ}{QR} = \frac{13}{12}
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ในสามเหลี่ยมมุมฉากทุกรูป ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านยาวที่สุด ฉะนั้น ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ใช้ด้านตรงข้ามฉากเป็นตัวหารย่อมมีค่าไม่เกิน 1 ดังนี้ sine และ cosine ของมุมทุกมุมจึงมีค่าไม่เกิน 1 และเมื่อด้านตรงข้ามฉากเป็นตัวเศษหรือตัวตั้ง ด้านอื่นเป็นตัวหาร อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เกิดขึ้นจึงย่อมมีค่าไม่ต่ำกว่า 1 ดังนั้นค่าของ secant และ cosecant ของมุมจึงมีค่าไม่ต่ำกว่า 1 ส่วนค่าของ tangent และ cotangent ของมุมทุกมุมจะมีค่าเท่าใดก็ได้ไม่จำกัด

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 ก.

1. ด้าน AB, BC, CA ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ยาว 17, 15, 8 ตามลำดับ จงหาค่าของ $\sin A$, $\sec A$, $\tan B$, $\sec B$
2. ด้าน PQ, QR, RP ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ยาว 13, 5, 12 ตามลำดับ จงหาค่าของ $\cot P$, $\operatorname{cosec} Q$, $\cos Q$, $\cos P$
3. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้า $b = 15$, $c = 20$ จงหา a , $\sin C$, $\tan A$, $\operatorname{cosec} A$
4. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $a = 24$, $b = 25$ จงหา c , $\sin C$, $\operatorname{cosec} A$, $\tan A$

5. ด้าน ED, EF, DF ของสามเหลี่ยมมุมฉากเป็น 35, 37, 12 ตามลำดับ จงหาค่าของ $\sec E$, $\sec F$, $\cot E$, $\sin F$
6. ด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งยาว 15 นิ้ว และด้านหนึ่งยาว 9 นิ้ว จงหาด้านที่ 3 และ $\sin$, $\cos$, และ $\tan$ ของมุมตรงข้ามด้านที่ 3 นั้น
7. ด้านตรงข้ามมุมฉาก AB ของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน AC ยาว 7 ด้าน BC ยาว 24 จงหาค่าของ $\sin$ และ $\cos$ ของมุม A และจงพิสูจน์ว่า $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
8. บันไดอันหนึ่งยาว 41 ฟุต วางพาดกำแพงเชิงบันไดห่างจากกำแพง 9 ฟุต และบันไดนี้จดยอดกำแพงพอดี จงหาความสูงของกำแพงจากพื้นดิน และหา $\sin$ และ $\cos$ ของมุมที่บันไดทำกับพื้นดิน
9. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส E เป็นจุดกึ่งกลาง AD ลากเส้น CE แล้วหาอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 ของมุม ECD
10. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง เส้นทแยงมุม AC ตั้งฉากกับด้าน AB และ CD ถ้า $AB = 15$, $AC = 36$, $AD = 85$ จงหาค่าของ $\sin ABC$, $\sec ACB$, $\cos CDA$, $\operatorname{cosec} DAC$
11. PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุม PSR เป็นมุมฉาก ถ้าเส้นทแยงมุม PR ตั้งฉากกับ RQ และ $RP = 20$, $RQ = 21$, $RS = 16$ จงหาค่าของ $\sin PRS$, $\tan RPS$, $\cos RPQ$, $\operatorname{cosec} PQR$
12. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านประชิดมุมฉากเป็น 4 และ 3 ตามลำดับ จงหาค่าของ $\tan B$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$
13. กำหนดด้าน BC ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เป็น 2 และด้านตรงข้ามมุมฉาก AB เป็น $\sqrt{13}$ จงหาค่าของ $\sec A$, $\cot A$, $\sin B$
14. ด้านตรงข้าม AB ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ยาว 16 ซม. และด้าน BC เป็น 5 ซม. จงหาค่าของ $\cos A$, $\cos B$, $\tan A$, $\tan B$

ตัวอย่างที่ 2 sine ของมุม ๆ หนึ่งมีค่าเป็น .88 จงสร้างมุมนั้นและหาค่า cosine ของมุมนั้นด้วย

วิธีทำ

$$\sin A = .88 = \frac{88}{100} = \frac{11}{25}$$

แต่ sine เกิดจากอัตราส่วนของ $\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม (opposite side)}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก (hypotenuse)}}$

และสามเหลี่ยมมุมฉากย่อมอยู่ในครึ่งวงกลม ซึ่งมีด้านตรงข้ามฉากเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จึงสร้างวงกลมซึ่ง AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 25 ให้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาว 11 หน่วยตัดเส้นรอบวงที่ C ลากเส้น AC, BC ดังนั้นทราบว่า AB ยาว 25 หน่วย

BC ยาว 11 หน่วย

AC ยาว $22\frac{1}{2}$ หน่วย โดยการวัด

$$\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม (adjacent side)}}{\text{ด้านตรงข้ามฉาก (hypotenuse)}} = \frac{22\frac{1}{2}}{25} = .9$$

ตัวอย่างที่ 3 จงสร้างมุม ๆ หนึ่งซึ่งมี tangent ของมุมนั้นเป็น 1.6 วัดมุมเป็นองศาและจงหาค่าของ sine, cosine ของมุม ๆ นั้น

วิธีทำ

$$\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม (opposite side)}}{\text{ด้านประชิดมุม (adjacent side)}} = \frac{16}{10}$$

ลากเส้นตรง BC ยาว 16 เส้นตรง AC ยาว 10 ตั้งฉากกันที่ C ฉะนั้น ลากเส้น AB และวัดได้ 19 หน่วย

$$\therefore \sin A = \frac{16}{19} = .83$$

$$\cos A = \frac{10}{19} = .52$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 ข.

1. จงสร้างมุม 50 องศา แล้วหาค่าของ sine และ cosine ของมุมนั้น
2. จงสร้างมุม 60 องศา แล้วหาค่า sine, tangent และ secant ของมุมนั้น
3. ค่า cosine ของมุม γ หนึ่งเป็น .71 จงหาค่า sine ของมุมนั้นจากการวัด
4. ค่าของ tangent ของมุม γ หนึ่งเป็น 2.9 จงหาค่า cosine และ sine ของมุมนั้น
5. ค่าของ sine ของมุม γ หนึ่งเป็น .9 จงหาค่า cosine และ tangent ของมุมนั้น
6. จงสร้างมุม 75° แล้วหาค่าของ cosecant และ secant ของมุมนั้นโดยการวัด
7. กำหนด $\sec A$ มีค่า 2.8 จงสร้างมุม A แล้ววัดมุมว่าโตเท่าใด
8. จงสร้างสามเหลี่ยม ABC ให้มุม C เป็นมุมฉาก มีด้านตรงข้ามฉากยาว 10 ซม. และ $\tan A = .81$ จงวัดด้าน AC และมุม A และหาค่าของ $\sin A$, $\cos A$
9. จงสร้างสามเหลี่ยม ABC มีด้าน BC ยาว 8 ซม. มุม ABC โต 53° และมุม ACB โต 72° จงสร้างและวัดความสูงของสามเหลี่ยมนี้ และต่อจากนั้นหาค่าของ $\tan 53^\circ$ และ $\cot 72^\circ$
10. จงสร้างมุมซึ่งมี sine ของมุมเป็น .67 และ sine ของอีกมุมหนึ่งเป็น .94 บนแกนร่วมเส้นเดียวกัน และจงวัดหาผลต่างของมุมทั้งสองเป็นจำนวนองศา

บทที่ 4

ฟังก์ชันของมุมบางมุม

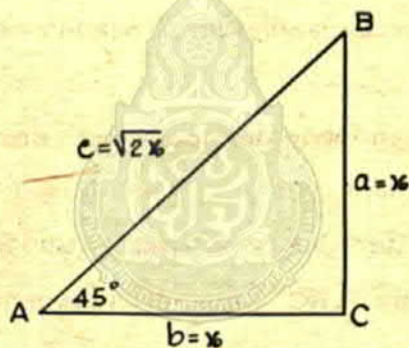
1. ฟังก์ชันของมุม 45° หรือ $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน

สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วและมีมุม C เป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน}$$

ให้ด้าน a และ b ยาว x หน่วยเท่ากัน

ฉะนั้น ด้าน c ยาว $\sqrt{2}x$ หน่วย



$$\sin A = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos A = \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$$

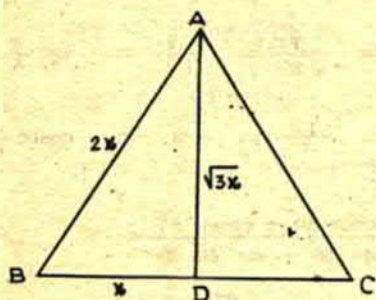
$$\tan A = \tan 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{x} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\cot A = \cot 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{x} = 1 = \cot \frac{\pi}{4}$$

$$\sec A = \sec 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2} = \sec \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{cosec} A = \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$$

2. พังชั้นของมุม 30° และ 60° หรือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน



สร้างสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านทุกด้านยาว $2x$ หน่วย ฉะนั้น มุมทุกมุมในสามเหลี่ยมรูปนี้จะเป็น 60°

แบ่งครึ่งมุม BAC ด้วยเส้นตรง AD พบ BC ที่จุด D มุม BAD เป็นมุม 30° และมุม ADB เป็นมุมฉาก และในสามเหลี่ยม ABD มีด้าน BD ยาว x หน่วย

$$\therefore AB = 2x \text{ หน่วย}$$

$$AD = \sqrt{3}x \text{ หน่วย}$$

$$\sin B = \sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos B = \cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\tan B = \tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\cot B = \cot 60^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot \frac{\pi}{3}$$

$$\sec B = \sec 60^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2x}{x} = 2 = \sec \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{cosec} B = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$$

ใน $\triangle ABD$

$$\sin A = \sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\cos A = \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\tan A = \tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\cot A = \cot 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6}$$

$$\sec A = \sec 30^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{cosec} A = \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2x}{x} = 2 = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\frac{\operatorname{cosec} 30^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ + \operatorname{cosec} 90^\circ}{\sec 0^\circ + \sec 30^\circ + \sec 60^\circ}$

วิธีทำ $\frac{\operatorname{cosec} 30^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ + \operatorname{cosec} 90^\circ}{\sec 0^\circ + \sec 30^\circ + \sec 60^\circ} = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = 1$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ x จากสมการ

$$x \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ = \frac{\cot^2 30^\circ \sec 60^\circ \tan 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ}$$

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2 \cdot 2 \cdot 1}{(\sqrt{2})^2 \cdot 2}$$

$$x = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ โดยการแทนค่า $= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= 1 - \frac{1}{4} - 1 + 1$$

$$= \frac{3}{4}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 ก.

จงหาค่าของนิพจน์ต่อไปนี้

1. $\tan^2 60^\circ + 2 \tan^2 30^\circ$
2. $4 \cot^2 45^\circ + 2 \cot^2 60^\circ$
3. $\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ + \cot^2 45^\circ$
4. $\sqrt{3} \cot 30^\circ \cos 45^\circ \sin 30^\circ \sin 45^\circ$
5. $\tan^2 30^\circ + 4 \sin^2 45^\circ + \frac{1}{3} \sin^2 60^\circ$
6. $\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 60^\circ + 3 \sin^2 45^\circ - \operatorname{cosec} 30^\circ + \frac{1}{2} \cot^2 60^\circ$
7. $\cot^2 60^\circ + 2 \cos 30^\circ + \cot 45^\circ - \cot 30^\circ + \sin 90^\circ$
8. $\frac{1}{3} \sin^2 30^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 30^\circ \cot^2 60^\circ + \frac{4}{3} \cos^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$
9. $3 \cot^2 60^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 30^\circ - \frac{1}{2} \sec^2 45^\circ - \frac{1}{3} \cos^2 30^\circ$
10. $\frac{1}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 30^\circ \cot^2 60^\circ + \frac{4}{3} \cos^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$
11. $\cot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$
12. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} \cdot \sec \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{\pi}{3} \cdot \cos \pi$
13. $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sec \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{2}$
14. $2 \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$
15. $2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3}$

จงแก้สมการต่อไปนี้

$$16. \left(\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4}\right) x^2 + \left(10 \sin \frac{\pi}{6}\right) x - 3 \cot^2 \frac{\pi}{4} = 0$$

$$17. x^2 \sec^2 \frac{\pi}{3} - 3x \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + 2 \tan^2 \frac{\pi}{4} = 0$$

$$18. x^2 \tan 45^\circ + x \cot 45^\circ = \sqrt{2} \operatorname{cosec} 45^\circ \cos 45^\circ - \sec 45^\circ = 0$$

$$19. \sqrt{2} x^2 \sin \frac{\pi}{4} + 3x \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 7$$

$$20. 3x^2 \tan^2 45^\circ - 6x + 4 \cos^2 30^\circ = 0$$

3. พังชันของมุมประกอบ 1 มุมจาก

จากค่าของพังชันที่หามาได้คือ

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ = \cot (90^\circ - 30^\circ)$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ = \tan (90^\circ - 30^\circ)$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ = \operatorname{cosec} (90^\circ - 30^\circ)$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2 = \operatorname{cosec} 60^\circ = \sec (90^\circ - 30^\circ)$$

จะเห็นได้ว่า ค่าของพังชันของมุม 30° จะเท่ากับโคพังชันของมุม

B. ประกอบหนึ่งมุมจากของมัน คือ มุม 60°

ในสามเหลี่ยม ABC มีมุม $\angle C$ เป็นมุมฉาก

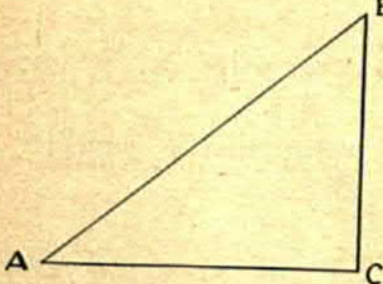
$$\angle B = \angle (90^\circ - A)$$

$$\sin B = \sin (90^\circ - A) = \frac{AC}{AB} = \cos A$$

$$\cos B = \cos (90^\circ - A) = \frac{BC}{AB} = \sin A$$

$$\tan B = \tan (90^\circ - A) = \frac{AC}{BC} = \cot A$$

$$\cot B = \cot (90^\circ - A) = \frac{BC}{AC} = \tan A$$



$$\sec B = \sec (90^\circ - A) = \frac{AB}{BC} = \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} B = \operatorname{cosec} (90^\circ - A) = \frac{AB}{AC} = \sec A$$

ข้อสังเกต จากที่พิสูจน์มาแล้วจะเห็นว่า พังชันของมุม จะมีค่าเท่ากับ โคฟังก์ชันของมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมันทุกครั้ง นักเรียนจำเป็นที่จะต้องท่องแล้วจำให้ได้

ตัวอย่าง จงหาค่าของมุม A เมื่อกำหนด $\tan 2A = \cot 3A$

วิธีทำ $\tan 2A = \cot (90^\circ - 2A) = \cot 3A$

$$90^\circ - 2A = 3A$$

$$90^\circ = 5A$$

$$\therefore A = 18^\circ$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 ข.

จงหามุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุมเหล่านี้

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $37^\circ 13'$ | 2. $57^\circ 30' 50''$ | 3. $25^\circ 54' 13''$ |
| 4. $45^\circ + A$ | 5. $60^\circ + B$ | 6. $30^\circ - \theta$ |
| 7. $45^\circ - \theta$ | 8. $\frac{\pi}{6}$ | 9. $\frac{2\pi}{18}$ |

10. มุมหนึ่งในสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น 72° องศา อีกมุมหนึ่งเป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ 75° เกรด จงหามุมที่ 3

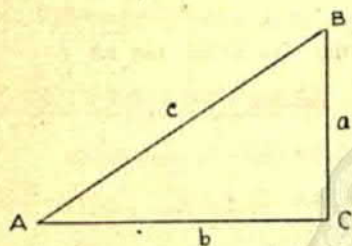
11. ในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง A เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุม 25° องศา B อีกมุมหนึ่งเป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุม 40° องศา จงหามุมที่ 3 จงแก้สมการต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------|--|
| 12. $\cos 4A = \sin A$ | 15. $\cos B = \sin 40^\circ$ |
| 13. $\cos 3A = \sin 7A$ | 16. $\sec 5A = \operatorname{cosec} 10A$ |
| 14. $\tan 5A = \cot 10A$ | 17. $\cot 2A = \tan A$ |

บทที่ 5

ความสัมพันธ์ของตรีโกณมิติฟังก์ชันต่าง ๆ

1. ในสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก



$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$$

1.1 จากอัตราส่วนคู่ที่ 1 นักเรียนจะสังเกตเห็นว่า $\sin A$ และ $\operatorname{cosec} A$ เป็นอัตราส่วนกลับของกันและกัน ฉะนั้นจะได้สูตรสัมพันธ์กันระหว่างสองฟังก์ชันดังนี้คือ

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} \quad ; \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1$$

1.2 จากอัตราส่วนคู่ที่ 2 นักเรียนจะสังเกตเห็นว่า $\cos A$ และ $\sec A$ เป็นอัตราส่วนกลับของกันและกัน ฉะนั้นจะได้สูตรสัมพันธ์กันระหว่างสองฟังก์ชันดังนี้คือ

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \quad ; \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\cos A \cdot \sec A = 1$$

1.3 จากอัตราส่วนคู่ที่ 3 นักเรียนจะสังเกตเห็นว่า $\tan A$ และ $\cot A$ เป็นอัตราส่วนกลับของกันและกัน ฉะนั้น จะได้สูตรสัมพันธ์กันระหว่างสองฟังก์ชันนี้ดังนี้คือ

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} ; \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\tan A \cdot \cot A = 1$$

1.4 จากอัตราส่วนของ $\tan A = \frac{a}{b}$ จะเห็นว่า เป็นรูปดังนี้คือ

$$\tan A = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

และจากอัตราส่วนของ $\cot A = \frac{b}{a}$ จะเห็นว่า เป็นรูปดังนี้คือ

$$\cot A = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ก็คือ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ และ $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

2. เอกลักษณ์ของไพธากอรัส

เหตุที่เรียกว่าเอกลักษณ์ของไพธากอรัสก็เนื่องจากต้องนำทฤษฎีบทของไพธากอรัสในวิชาเรขาคณิตมาช่วยในการพิสูจน์เอกลักษณ์นี้ และถือว่าเป็นเอกลักษณ์ที่สำคัญซึ่งจะต้องใช้มาก นักเรียนจะต้องท่องจำไว้

ทฤษฎีบทของไพธากอรัสคือ จัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากมีเนื้อที่รวมกันเท่ากับเนื้อที่ของจัตุรัสบนด้านตรงข้ามฉาก

เอกลักษณ์เหล่านี้คือ 1.) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

พิสูจน์ $\therefore a^2 + b^2 = c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

หมายเหตุ วิธีการที่จะนำสูตรเอกลักษณ์นี้ไปทอ้ง เพื่อใช้ต่อไปนั้น ควรจะ
ทอ้งดังนี้คือ

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\therefore 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$$

$$1 - \sin^2 A = \cos^2 A$$

$$2. \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

พิสูจน์ เพราะว่า $a^2 + b^2 = c^2$

$$1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\therefore 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

หมายเหตุ วิธีการที่จะนำสูตรเอกลักษณ์นี้ไปทอ้ง เพื่อใช้ต่อไปนั้น ควรจะ
ทอ้งดังนี้คือ

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$\therefore \sec^2 A - \tan^2 A = 1; \quad \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$$

$$3. \quad 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

พิสูจน์ เพราะว่า $a^2 + b^2 = c^2$

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

หมายเหตุ วิธีการที่จะนำเอกลักษณ์นี้ไปทอ้งจำเพื่อจะนำไปใช้ต่อไปนั้นคือ

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\text{และ } \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A$$

การทำตรีโกณมิติฟังก์ชันหนึ่งให้เป็นเทอมของฟังก์ชันอื่น

ตัวอย่างที่ 1 เปลี่ยนทุกฟังก์ชันให้เป็นเทอมของ $\tan A$

$$\sin A = \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \cos A = \tan A \cdot \cos A = \frac{\tan A}{\sec A}$$

$$= \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} \dots\dots\dots 1.$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} \dots\dots\dots 2.$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} \dots\dots\dots 3.$$

$$\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A} \dots\dots\dots 4.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A} \dots\dots\dots 5.$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\cos A = \frac{11}{12}$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} A$, $\tan A$

$$\tan A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\cos A} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{121}{144}}}{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{23}}{11}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{12}{\sqrt{23}}$$

ถ้าไม่กระจายฟังก์ชันหนึ่งเป็นเทอมของอีกฟังก์ชันหนึ่ง อาจจะทำเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ และเมื่อกำหนดสองด้านในก็อาจจะหาด้านที่ 3 ได้โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ดังในตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\tan A = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$
สร้างสามเหลี่ยม ABC ให้เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่ C

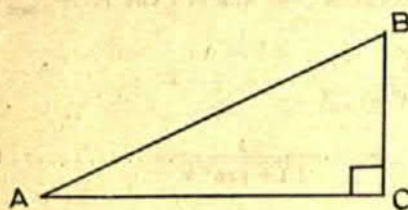
BC ยาว 1 หน่วย

ด้าน AC ยาว 2 หน่วย

ด้านตรงข้ามมุมที่ A ยาว $\sqrt{5}$

$$\sec A = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} A = \sqrt{5}$$



ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $\cot \theta = \frac{p}{q}$ จงหาค่าของ $\frac{p \cos \theta - q \sin \theta}{p \cos \theta + q \sin \theta}$

นำ $\sin \theta$ หารทั้งเศษและส่วน

$$\begin{aligned} \frac{p \cos \theta - q \sin \theta}{p \cos \theta + q \sin \theta} &= \frac{\frac{p \cos \theta}{\sin \theta} - q}{\frac{p \cos \theta}{\sin \theta} + q} = \frac{\frac{p^2}{q} - q}{\frac{p^2}{q} + q} \\ &= \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 5 ก.

1. กำหนด $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จงหาค่าของ $\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$
2. กำหนด $\tan A = p/q$ จงหาค่าของ $\cos A$, $\sin A$
3. กำหนด $\cot A = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} A$, $\sin A$, $\cos A$
4. กำหนด $\operatorname{cosec} A = 4$ จงหาค่าของ $\sec A$ และ $\cos A$
5. ถ้า $5 \sin A = 3$ จงหาค่าของ $\tan A$, $\sec A$, $\cos A$
6. ถ้า $\sec A = 7$ จงหาค่าของ $\sin A$, $\cos A$

7. จงกระจายทุกฟังก์ชันให้เป็นเทอมของ $\sin A$
8. " " " $\cos A$
9. " " " $\cot A$
10. " " " $\operatorname{cosec} A$
11. " " " $\sec A$
12. ถ้า $\sin A - \cos A = 0$ จงหาค่าของ $\sec A$
13. ถ้า $\sin A = x/y$ จงพิสูจน์ว่า $x \cot A = \sqrt{y^2 - x^2}$
14. ถ้า $\cos A = p/q$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} A$
15. เมื่อ $\operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{2m}$ จงหาค่าของ $\tan A, \sin A$
16. ถ้า $\cos A = \frac{13}{5}$ จงหาค่าของ $\frac{2 \operatorname{cosec} A - 3 \sec A}{4 \operatorname{cosec} A - 9 \sec A}$
17. ถ้า $\sec A = \frac{5}{3}$ จงหาค่าของ $\frac{\cot^2 A - \tan^2 A}{\cot^2 A + \tan^2 A}$
18. ถ้า $(1 + a^2) \cot a = 1 - a^2$ จงหาค่าของ $\sin A$ และ $\sec A$
19. กำหนด $\sqrt{mn + m^2} = \operatorname{cosec} \theta = m + n$ จงหาค่าของ $\tan A, \cos A$
20. ถ้า $\sin A = \frac{8}{17}$ จงหาค่าของ $\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}$
21. ถ้า $\sec a = \frac{13}{5}$ จงหาค่าของ $\frac{\operatorname{cosec} a - \cot a}{\operatorname{cosec} a + \cot a}$
22. ถ้า $\operatorname{cosec} a = y/x$ จงหาค่าของ $\sec^2 a + \cos^2 a - 1$
23. ถ้ามุม A และมุม B ต่างก็เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของกันและกัน
และ $\sin A = \frac{m}{n}$ จงหาค่าของ $\sin A \cos B + \cos A \sin B$

การพิสูจน์เอกลักษณ์

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ $\operatorname{cosec}^2 \theta \tan^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{ข้างซ้าย (L.S)} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1 \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \\
 &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{ข้างซ้าย (L.S)} &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\
 &= 1(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\
 &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 5 ข.

- $\frac{\sin A \cdot \cot A}{\cos A} = 1$
- $\sin A \cos A \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sec A}$
- $\cot A \cdot \sec A = \operatorname{cosec} A$
- $\sec A \cdot \sin A = \frac{1}{\cot A}$
- $\cos B \cdot \operatorname{cosec} B = \frac{1}{\tan B}$

$$6. \tan^2 A \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A \cos^2 A = \cot^2 A$$

$$7. \frac{2 \tan^2 \theta \operatorname{cosec} \theta}{\sec^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta \cot^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sin \theta$$

$$8. \tan \theta \cot \theta \operatorname{cosec}^2 \theta + \sin \theta \operatorname{cosec} \theta \sec^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$9. \sqrt{1 - \cos^2 A} \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$10. (1 - \cos^2 A)(1 + \tan^2 A) = \tan^2 A$$

$$11. (\sec^2 A - 1)(\operatorname{cosec}^2 A - 1) = 1$$

$$12. \cos a \sqrt{\sec^2 a - 1} = \sin a$$

$$13. \sin a \sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1} = \cos a$$

$$14. \frac{\cos a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}} = \sin a$$

$$15. (\operatorname{cosec}^2 a - 1) \tan^2 a = 1$$

$$16. \operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A - 1 = \tan^2 A$$

$$17. \sec^4 A - 1 = 2 \tan^2 A + \tan^4 A$$

$$18. (\tan A \operatorname{cosec} A)^2 - (\sin A \sec A)^2 = 1$$

$$19. \tan^2 a - \cot^2 a = (\sin^2 a - \cos^2 a) \sec^2 a \operatorname{cosec}^2 a$$

$$20. \operatorname{cosec}^4 a - 1 = 2 \cot^2 a - \cot^4 a$$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ $\frac{\cot^2 A \sin^2 (90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan (90^\circ - A) - \cos A$

วิธีทำ L. S. $= \frac{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \cdot \cos^2 A}{\frac{\cos A (1 + \sin A)}{\sin A}}$

$$= \frac{\cos^2 A (1 - \sin^2 A)}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{\cos A (1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\sin A} \cdot \frac{1}{1 + \sin A}$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A} - \cos A$$

$$= \cot A - \cos A$$

$$= \tan (90^\circ - A) - \cos A$$

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ $\frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \sin^2 a \sec^2 a$

วิธีทำ L. S. $= \frac{\tan^2 a}{\sec^2 a} \cdot \frac{\operatorname{cosec}^2 a}{\cot^2 a} = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \cos^2 a \cdot \frac{1}{\sin^2 a} \cdot \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$

$$= \sin^2 a \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \sin^2 a \sec^2 a$$

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ $(1 + \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta) = 2 \cot \theta$

วิธีทำ L. S. $\text{คูณ } 2 \text{ วงเล็บเข้าด้วยกัน}$

$$= 1 + 2 \cot \theta + \cot^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$= (1 + \cot^2 \theta) + 2 \cot \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$= \operatorname{cosec}^2 \theta + 2 \cot \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$= 2 \cot \theta$$

ตัวอย่างที่ 6 จงพิสูจน์ $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{L.S.} &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \\ &\quad \sin \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \beta \\ &\quad \cos \alpha \sin \beta \\ &= \cos^2 \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 5 ค.

- $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$
- $\frac{1}{1 - \sin A} + \frac{1}{1 + \sin A} = \frac{2}{\cos^2 A}$
- $(\operatorname{cosec}^4 A - \operatorname{cosec}^2 A) = \cot^2 A \operatorname{cosec}^2 A$
- $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha$
- $\cos^2 \theta (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) + \sin^2 \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta) = 1$
- $(\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 2$
- $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = \tan^2 A + \cot^2 A + 7$
- $2 \sec^2 \theta + 2 \tan \theta \sec \theta - 1 = \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}$
- $\frac{\tan \alpha}{\sec \alpha - 1} + \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha + 1} = 2 \operatorname{cosec} \alpha$

11. $(\sec A + \operatorname{cosec} A)(\sin A + \cos A) = \sec A \operatorname{cosec} A + 2$
12. $(\cos \theta - \sin \theta)(\operatorname{cosec} \theta - \sec \theta) = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta - 2$
13. $(1 + \tan \alpha + \sec \alpha)(1 + \tan \alpha - \sec \alpha) = 2 \tan \alpha$
14. $(\sec^2 \beta + \tan^2 \beta)(\operatorname{cosec}^2 \beta + \cot^2 \beta) = \frac{(\sin^2 \beta \cos^2 \beta + 2)}{\sin^2 \beta \cos^2 \beta}$
15. $\cot^2 \theta \frac{(\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} = \sec^2 \theta \frac{(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)}$
16. $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \frac{\sin^2 A}{\cos A} - \cot A \cos A$
17. $(\sin^4 \theta - \cos^4 \theta) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$
18. $(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) = (\sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
19. $\frac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} = \frac{(1 + \sin A)^2}{(1 - \sin^2 A)}$
20. $\frac{\cot^2 \theta (\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} + \sec^2 \theta \frac{\sin \theta - 1}{1 + \sec \theta} = 0$
21. $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
22. $\sin^2 \theta + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - \cos^2 \theta$
23. $(1 - \sin \alpha - \cos \alpha)^2 (1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

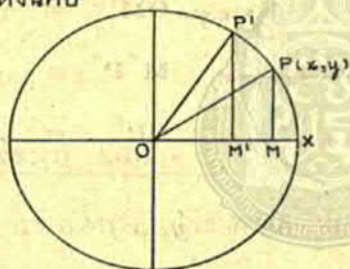
บทที่ 6

ฟังก์ชันของมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม (Circular Functions)

1. ฟังก์ชันของมุม $90^\circ - A$

วิธีการหาต้องเทียบกับฟังก์ชันของมุม A ดังนี้

1. สร้างมุม A โดยที่แขน terminal line ของมุม คือเส้นตรง OP พบเส้นรอบวงที่จุด P ซึ่งมีพิกัดของจุด P เป็น (x, y)
2. จากจุด P ลากเส้นตรงตั้งฉากกับเส้น OX ที่จุด M เกิดสามเหลี่ยมมุมฉาก MOP
3. หมุนแขน OP มาเป็นมุม $90^\circ - A$ หยุดที่เส้น OP'
4. จากจุด P' ลากเส้นตั้งฉากกับเส้น OX ที่จุด M' เกิดสามเหลี่ยมมุมฉาก $M'O P'$
5. สามเหลี่ยม $M'O P'$ และสามเหลี่ยม MOP เท่ากันทุกประการ ดังนี้คือ



$$\begin{aligned} OM' &= MP = y \\ MP' &= OM = x \\ OP' &= OP = r \end{aligned}$$

ฉะนั้น พิกัดของจุด P' คือ (y, x)

$$\sin(90^\circ - A) = \frac{\text{พิกัดฉากของ } P'}{OP'} = \frac{x}{r} = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \frac{\text{พิกัดราบของ } P'}{OP'} = \frac{y}{r} = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{\text{พิกัดฉากของ } P'}{\text{พิกัดราบของ } P'} = \frac{x}{y} = \cot A$$

$$\cot(90^\circ - A) = \frac{\text{พิกัดราบของ } P'}{\text{พิกัดฉากของ } P'} = \frac{y}{x} = \tan A$$

$$\sec(90^\circ - A) = \frac{OP'}{\text{พิกัดราบของ } P'} = \frac{r}{y} = \operatorname{cosec} A$$

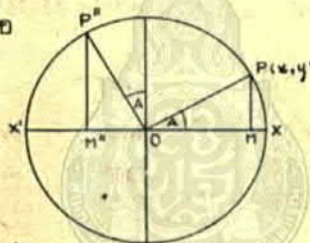
$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \frac{OP'}{\text{พิกัดฉากของ } P'} = \frac{r}{x} = \sec A$$

2. พังชั้นของมุม ($90^\circ + A$)

วิธีการหาเช่นเดียวกับพังชั้นของมุม $90^\circ - A$ คือต้องเทียบกับพังชั้นของมุม A

1. มุมแกน OP มาหยุดที่ OP'' ทำมุม XOP'' เป็นมุม $90^\circ + A$
2. จากจุด P'' ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับ OX' ที่จุด M'' ทำให้เกิดสามเหลี่ยม $M''OP''$
3. เทียบสามเหลี่ยม $M''OP''$ และสามเหลี่ยม MOP เท่ากันทุกประการ

ดังนั้นคือ



$$OM'' = -MP$$

$$M''P'' = OM$$

$$OP'' = OP = r$$

ฉะนั้น พิกัดของจุด P'' คือ $(-y, x)$

$$\sin(90^\circ + A) = \frac{\text{พิภคฉากของ } P''}{OP''} = \frac{+x}{r} = \cos A$$

$$\cos(90^\circ + A) = \frac{\text{พิภคราบของ } P''}{OP''} = \frac{-y}{r} = -\sin A$$

$$\tan(90^\circ + A) = \frac{\text{พิภคฉากของ } P''}{\text{พิภคราบของ } P''} = \frac{x}{-y} = -\cot A$$

$$\cot(90^\circ + A) = \frac{\text{พิภคราบของ } P''}{\text{พิภคฉากของ } P''} = \frac{-y}{x} = -\tan A$$

$$\sec(90^\circ + A) = \frac{OP''}{\text{พิภคราบของ } P''} = \frac{r}{-y} = -\operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + A) = \frac{OP''}{\text{พิภคฉากของ } P''} = \frac{r}{x} = \sec A$$

3. พังชั้นของมุม $180^\circ - A$

วิธีหาต้องเทียบกับพังชั้นของมุม A อย่างการหาพังชั้นของมุม $90^\circ - A$ และ $90^\circ + A$ และจะได้ผลดังนี้คือ

$$\sin (180^\circ - A) = \sin A$$

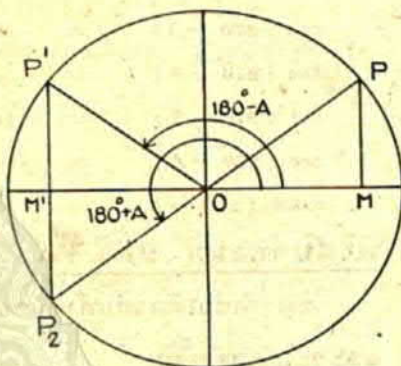
$$\cos (180^\circ - A) = -\cos A$$

$$\tan (180^\circ - A) = -\tan A$$

$$\cot (180^\circ - A) = -\cot A$$

$$\sec (180^\circ - A) = -\sec A$$

$$\operatorname{cosec} (180^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$$



4. พังชั้นของมุม $180^\circ + A$

วิธีหาเหมือนกันเดียวกับพังชั้นของมุมอื่น คือต้องเทียบกับพังชั้นของมุม A และจะได้ผลดังนี้คือ

$$\sin (180^\circ + A) = -\sin A$$

$$\cos (180^\circ + A) = -\cos A$$

$$\tan (180^\circ + A) = \tan A$$

$$\cot (180^\circ + A) = \cot A$$

$$\sec (180^\circ + A) = -\sec A$$

$$\operatorname{cosec} (180^\circ + A) = -\operatorname{cosec} A$$

5. พังชั้นของมุม $270^\circ - A$

วิธีหาที่เช่นเดียวกับพังชั้นของมุมอื่น คือต้องเทียบกับพังชั้นของมุม A และจะได้ผลดังนี้คือ

$$\sin (270^\circ - A) = -\cos A$$

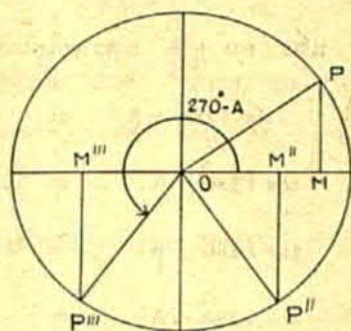
$$\cos (270^\circ - A) = -\sin A$$

$$\tan (270^\circ - A) = \cot A$$

$$\cot (270^\circ - A) = \tan A$$

$$\sec (270^\circ - A) = -\operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} (270^\circ - A) = -\sec A$$



6. พังชั้นของมุม $270^\circ + A$

วิธีหาที่เช่นเดียวกับพังชั้นของมุมอื่น คือต้องเทียบกับพังชั้นของมุม A และจะได้ผลดังนี้คือ

$$\sin (270^\circ + A) = -\cos A$$

$$\cos (270^\circ + A) = \sin A$$

$$\tan (270^\circ + A) = -\cot A$$

$$\cot (270^\circ + A) = -\tan A$$

$$\sec (270^\circ + A) = \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} (270^\circ + A) = -\sec A$$

7. พังชั้นของมุม $-A$

วิธีหาที่เช่นเดียวกับพังชั้นของมุมอื่น คือต้องเทียบกับพังชั้นของมุม A และได้ผลดังต่อไปนี้

$$\sin -A = -\sin A$$

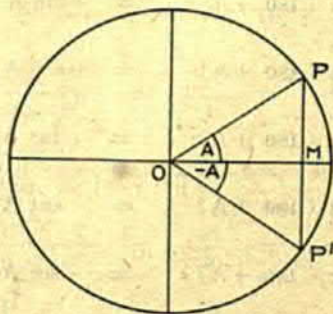
$$\cos -A = \cos A$$

$$\tan -A = -\tan A$$

$$\cot -A = -\cot A$$

$$\sec -A = \sec A$$

$$\operatorname{cosec} -A = -\operatorname{cosec} A$$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos 120^\circ$, $\sin 150^\circ$ และ $\cot 240^\circ$

วิธีทำ

$$\cos 120^\circ = \cos (90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cot 240^\circ = \cot (180^\circ - 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $A = 216^\circ 52'$ และ $\cos A = -\frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\cot A$ และ $\sin A$

วิธีทำ

$$\therefore \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\therefore \sin A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

แต่ A เป็นมุม $216^\circ 52'$ แขนงของมุมตกอยู่ในควอดแรนท์ที่ 3 ซึ่งมี $\sin$ ของมุมในควอดแรนท์ที่ 3 มีเครื่องหมายเป็นลบ

$$\therefore \sin A = -\sqrt{1 - \cos^2 A} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 6 ก.

- กำหนด $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ จงหาค่าของ $\tan 240^\circ$ และ $\cos 240^\circ$
- กำหนด $\cot 135^\circ = -1$ จงหาค่าของ $\sin 135^\circ$
- กำหนด $A = 126^\circ 53'$ และ $\cos A = -\frac{3}{5}$ จงหาค่าของ $\sin A$ และ $\cot A$
- ถ้า $\tan A = -\frac{5}{8}$ จงหาค่าของ $\sin A$ และ $\cos A$
- ถ้า $A = 143^\circ 8'$, $\sin A = \frac{3}{5}$ ($\sin A = \frac{3}{5}$) จงหาค่าของ $\sec A$ และ $\tan A$
- กำหนด $A = 202^\circ 37'$ จงหาค่าของ $\cos A$, $\tan A$ เมื่อ $\operatorname{cosec} A = -\frac{13}{5}$
- ถ้า $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{\pi}{3}$, $\cot \frac{2\pi}{3}$
- ถ้า $\cos A = \frac{12}{13}$ จงหาค่าของ $\sin A$ และ $\tan A$
- ถ้า $\tan \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $\cot \frac{11\pi}{6}$, $\sec \frac{11\pi}{6}$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ $\tan(180^\circ - A) + \tan(180^\circ + A) - \sec(90^\circ + A) = \operatorname{cosec} A$

วิธีทำ ข้างซ้าย $= -\tan A + \tan A + \operatorname{cosec} A$
 $= \operatorname{cosec} A$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ เมื่อมุม θ เป็นมุมบวกเล็กกว่า 360°

วิธีทำ ข้างซ้าย $\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$
 $\theta = 60^\circ$
 $\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos(360^\circ - 60^\circ)$
 $\therefore \theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

แบบฝึกหัดชุดที่ 6 ข.

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\tan \theta = \sqrt{3}$

3. $\cot \theta = 1$

4. $\sec \theta = -2$

5. $\operatorname{cosec} \theta = -2$

จงทำให้เป็นฟังก์ชันของมุม A

6. $\sin(180^\circ + A) \cos(90^\circ - A)$

7. $\cos(180^\circ - A) \cot(90^\circ + A)$

8. $\cot(180^\circ + A) \sec(180^\circ - A)$

9. $\tan(90^\circ - A) \operatorname{cosec}(90^\circ + A)$

10. $\operatorname{cosec}(180^\circ - A) \sec(90^\circ + A) \cot(90^\circ - A)$

11. $\cot(90^\circ + A) \tan(180^\circ + A) \sec(90^\circ - A)$

12. $\operatorname{cosec}(180^\circ - A) \sec(180^\circ + A) \tan(90^\circ - A)$

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$13. \frac{\sin (180^\circ - A)}{\tan (180^\circ + A)} \cdot \frac{\cot (90^\circ - A)}{\tan (90^\circ + A)} \cdot \frac{\cos (-A)}{\sin (360^\circ - A)} = \sin A$$

$$14. \cos (90^\circ + A) - \cot (270^\circ + A) - \cos (90^\circ + A) = \sec (180^\circ + A)$$

$$15. \cot (90^\circ - A) + \cot (90^\circ + A) - \sin A = \sin (360^\circ - A)$$

$$16. -\sin 480^\circ \cos 120^\circ + \cos 140^\circ \sin 120^\circ = 0$$

$$17. \cos 150^\circ \cos 420^\circ + \sin 330^\circ \sin 300^\circ = 0$$

$$18. \sin 780^\circ \sin 120^\circ + \cos 120^\circ \sin 390^\circ = \frac{1}{2}$$

$$19. \sin 600^\circ \cos 330^\circ + \cos 120^\circ \sin 150^\circ = -1$$

$$20. \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cot (\pi - \theta) \cot \left(\frac{3\pi}{2} + \theta \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) \cot \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

บทที่ 7

วิธีใช้ตารางค่าของตรีโกณมิติฟังก์ชันของมุมต่าง ๆ

1. ตารางที่จะใช้นี้เป็นตารางบอกค่าของฟังก์ชันของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90° เรียกว่าตารางของ Natural sines, Cosines, Tangents ในตารางนี้เป็นทศนิยม 4 ตำแหน่ง เว้นระยะแสดงในตารางห่างกันของละ $\frac{1}{10}$ องศาหรือ 6 ลิปดา แต่ถ้ามุมที่ต้องการหาไม่ตรงในช่องตารางนั้นยังมีในตารางช่องท้ายแสดงถึงผลต่างระหว่าง 1 ถึง 5 ลิปดา

ตารางของ Natural Sines, Cosines, Tangents ของมุมต่าง ๆ
นี้มีในหนังสือเล่มนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin 25^{\circ} 18'$

Natural Sines

Deg	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
											1	2	3	4	5
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13

เมื่อต้องการทราบค่าของ $\sin 25^{\circ} 18'$ ต้องไปเปิดตาราง Natural Sines ช่องแรกเขียนไว้เป็น Deg แสดงว่าเป็นมุมองศา ส่วนช่องเล็ก ๆ ต่อ ๆ ไปเป็นช่องลิปดา เมื่อจะหา $\sin 25^{\circ} 18'$ ต้องดูที่ช่อง Deg ตรงกับเลข 25 แสดงว่า $\sin 25^{\circ}$ ที่ตรง $0'$ จะทราบว่า $\sin 25^{\circ} 0' = .4226$ เห็นแต่เลข 4226 ต้องทราบว่าเป็นเลขหลังจุดทศนิยม เพราะค่าของ sine ดังที่กล่าวมาแล้วในคำอธิบายหน้า 28 ไม่มีเกินกว่า 1 ฉะนั้น $\sin 25^{\circ} 0' = .4226$ แต่ในที่นี้ต้องการ $\sin 25^{\circ} 18'$ ตรงบรรทัดเดียวกับ 25° ดูเรื่อยไปจนถึงช่องที่ 5 บนยอดของช่องนี้มี 18' แสดงว่า $\sin 25^{\circ} 18'$ ต้องอ่านที่ช่องนี้ได้ .4274

ฉะนั้นจากตารางได้ $\sin 25^{\circ} 18' = 0.4274$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin 26^\circ 36'$

วิธีหา

ดูที่ช่อง Deg ตรงบรรทัดที่มีเลข 26 แสดงว่า $\sin 26^\circ$ ต้องดูบรรทัดนั้น ตรงบรรทัดเดียวกัน ดูเรื่อยมาถึงช่องที่ 8 ที่ยอดบนของช่องมีเลข 36' อ่านที่บรรทัดตรงกับเลข 26 ในช่องนี้ได้ 0.4478 เป็นค่าของ $\sin 26^\circ 36'$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\sin 26^\circ 38'$

วิธีหา

ดูเหมือนตัวอย่างที่ 2 แต่ตรงบรรทัดเลข 26 ช่อง 38' ไม่มี มีแต่ช่องที่ 8 เป็นช่องของ 36' และช่องที่ 9 เป็นช่องของ 42' ฉะนั้นเป็นอันว่าหาช่อง 38' ไม่ได้ หา $\sin 26^\circ 38'$ จากตารางไม่ได้

ฉะนั้นต้องดูที่ช่องของ $\sin 26^\circ 36'$ ซึ่ง $= 0.4478$ ยังขาดอีก 2' จึงจะครบ $\sin 26^\circ 38'$ ต้องดูบรรทัดเดียวกัน นั้นเลยไปถึงช่อง 2 ช่องสุดท้าย เหนือช่องเหล่านี้เขียนไว้ว่า Mean Differences ได้ตัวหนังสือ Mean Differences มีเลข 1, 2, 3, 4, 5 แสดงว่าถ้าต่างกัน 1', 2', 3', 4', 5' ให้ดูตรงกับเลขเหล่านี้ในบรรทัดเดียวกับมุมที่ต้องการทราบ ดังนั้น $\sin 26^\circ 38'$ ของเรายังขาดอีก 2' จะครบตามที่ต้องการ ต้องดูช่องนี้ตรงกับเลข 2' เหนือช่องที่ 2 ของสุดท้าย ดูตรงลงมาถึงบรรทัดที่ตรงกับมุม 26° จะเห็นตัวเลขตรงนั้นเป็น 5 แสดงว่า ถ้าต่างกันอยู่ 2' ผลต่างของค่าของฟังก์ชันจะต่างกัน .0005 เลข 5 นี้เป็นตำแหน่งสุดท้ายของตำแหน่งทศนิยมในตารางเล่มนี้ เอาเลข .0005 นี้เพิ่มเข้าที่ค่าของ $\sin 26^\circ 36'$ ดังนี้

$$\sin 26^\circ 36' = 0.4478$$

$$\text{ต่างอยู่ } 2' = 0.0005$$

$$\sin 26^\circ 38' = 0.4483$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\cos 43^\circ 47'$

Natural Cosines

Deg	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
											1	2	3	4	5
42	7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

การหาค่าของ Cosine ของมุมใดก็ตามต้องไปเปิดตาราง Natural Cosines ถึงแถวจากตาราง Cosine นี้จะเห็นว่ามุมยังโตขึ้น ค่าของ Cosine ของมุมนั้นยังน้อยลง ดูที่บรรทัดตรงกับตัวเลข 43 ในช่อง Deg เหมือนกับวิธีดูตารางของ Sines จะทราบว่าค่าของ $\cos 43^\circ$ ถึงแถว $\cos 43^\circ 0'$ มากกว่า $\cos 43^\circ 6'$ ฉะนั้นเมื่อมุมเพิ่มขึ้นเท่าใด ค่าของมุมจะยิ่งลดลงเท่านั้น

ดังนั้น $\cos 43^\circ 47'$ จะดูในตารางที่เดียวไม่ได้ นักเรียนต้องดูบรรทัดที่ 43 ตรงที่ช่อง 9 เหนือช่องนั้นมีเลข 42' หาค่า

$\cos 43^\circ 42' = 0.7230$ ยังขาดอีก 5' ดูตรงช่องผลต่างตรงกับ 5' บรรทัดเดียวกับมุม 43° นั้น จะเห็นเลข 10 ฉะนั้น 5' ต้องมีผลต่างไป 0.0010

$$\cos 43^\circ 42' = 0.7230$$

$$\text{ต่าง} \quad \underline{\quad 5' \quad} = 0.0010$$

$$\cos 43^\circ 47' = 0.7220$$

มุมเพิ่มโตขึ้นอีก 5' ผลต่างของมุมทำให้มุมเล็กลงไปอีก 0.0010 ฉะนั้นนักเรียนต้องไม่ลืมว่า เมื่อเอาผลต่างของมุมไปเพิ่ม นักเรียนจะต้องหักค่าของผลต่างของฟังก์ชันลงทุกครั้ง

ตัวอย่างที่ 4 $\cos A = 0.1816$ จงหาค่าของมุม A

การหาค่าของมุมจากตาราง นักเรียนจะต้องดูช่องค่าของฟังก์ชัน
ดูว่าช่องใดใกล้เคียงกับ 0.1816 บ้าง ดังนี้

Deg	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
											1	2	3	4	5
78	2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14

เมื่อตรวจแล้วจะพบในบรรทัดตรงกับช่อง Deg ที่ 79 ในช่องที่ 7
คือ $\cos 79^\circ 30' = 0.1822$ แต่ค่าของฟังก์ชันเกินไป .0006 ฉะนั้น
ต้องไปดูที่ช่อง Mean Differences บรรทัดเดียวกันนั้นเห็นเลข 6 อยู่
ตรงกับ 2'

$$\text{ฉะนั้น } \cos 79^\circ 30' = 0.1822$$

$$\text{ต่าง} \quad \quad \quad \frac{2}{2} = .0006$$

$$\therefore \cos 79^\circ 32' = 0.1816$$

$$\therefore \cos A = \cos 79^\circ 32' \quad A = 79^\circ 32'$$

3. การใช้ตารางของ tangent ใช้วิธีเดียวกับเปิดตารางของ Sine แต่
ปรากฏว่า ค่าของ tangent มีเกิน 1 ได้ นักเรียนดูที่ $\tan 55^\circ 0'$
เป็นต้น จะพบค่า = 1.4281 แต่ในช่องต่อไปบรรทัดเดียวกัน เช่นใน
ช่อง 6' มีเลข 4385 อย่างเดียว แต่ต้องแสดงว่าเลขหน้าทศนิยมทั้ง 4
นั้นเหมือนกับช่อง 0 คือ $\tan 55^\circ 6' = 1.4385$ ด้วย

ในตารางนี้ นักเรียนจะพบเส้นขีดเหนือตัวเลข ดังในช่อง Deg
บรรทัดที่ 78 ช่อง 42' มีเลข 0045 ดังนี้ หมายความว่า จำนวน
เต็มหน้าทศนิยม .0045 นี้ไม่ใช่ 4 เหมือนในช่อง 0' แต่ต้องเพิ่มขึ้นอีก
1 เป็น 5 ฉะนั้น $\tan 78^\circ 42' = 5.0045$

แบบฝึกหัดชุดที่ 7 ก.

จงหาค่าฟังก์ชันดังต่อไปนี้

1. $\sin 15^\circ 25'$

2. $\cos 27^\circ 23.5'$

3. $\tan 60^\circ 57'$

4. $\cos 54^\circ 17'$

5. $\tan 57^\circ 35'$

6. $\tan 53^\circ 39'$

7. $\cos 78^\circ 32'$

8. $\sin 40^\circ 31.5'$

จงหาค่าของมุมของสมการต่อไปนี้

9. $\sin A = 0.8992$

10. $\sin A = 0.8158$

11. $\sin A = 0.9635$

12. $\cos A = 0.9488$

13. $\cos A = 0.2687$

14. $\tan A = 2.0072$

15. $\tan A = 1.4193$

16. $\tan A = 2.3156$

4. การถอดสมการในตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของมุม A จากสมการนี้

วิธีทำ

$$2 \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta$$

$$2 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$2 \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ A จากสมการนี้

วิธีทำ

$$\tan A = 4 - 3 \cot A$$

$$\tan A = 4 - \frac{3}{\tan A}$$

$$\tan^2 A - 4 \tan A + 3 = 0$$

$$(\tan A - 3)(\tan A - 1) = 0$$

$$\therefore \tan A - 3 = 0 \text{ หรือ } \tan A - 1 = 0$$

$$\tan A = 3 \text{ หรือ } \tan A = 1$$

$$\text{เมื่อ } \tan A = 1 = \tan 45^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ$$

$$\tan A = 3 \text{ จากตาราง Natural Tangents}$$

$$= \tan 71^\circ 34'$$

$$A = 71^\circ 34'$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 7 ข.

จงแก้สมการ

1. $\sin x = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x$
2. $3 \tan x = \cot x$
3. $\frac{4}{3} \sin x = \operatorname{cosec} x$
4. $\sec^2 x + \tan^2 x = 3 \tan x$
5. $5 \tan \alpha + 6 \cot \alpha = 11$
6. $2 \sin x \tan x = \tan x + 2 \sin x - 1$
7. $4 \operatorname{cosec} A = 9 - 2 \sin A$
8. $2 \cos A = 3 \sec A - 2\sqrt{2}$
9. $\tan A - \operatorname{cosec} A = \cot A$
10. $\cos^2 A + 5 \cos A = 2 + \sin^2 A$

บทที่ 8

กราฟของตรีโกณมิติฟังก์ชัน

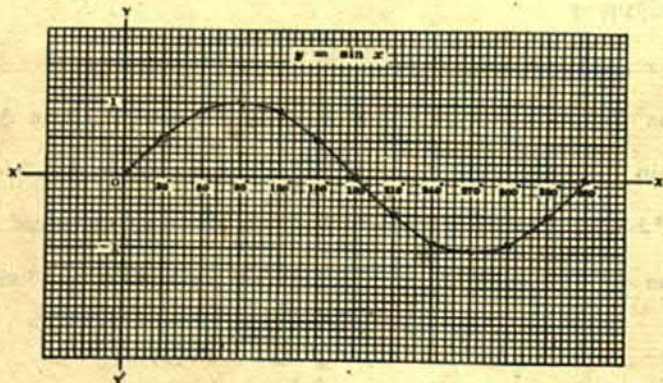
1. กราฟของ $\sin x$

ให้ $y = \sin x$ ดังนั้นค่าของ y เปลี่ยนแปลงไปเมื่อค่าของ x เปลี่ยนแปลงไป ในที่นี้ค่าของ y เปลี่ยนแปลงตามค่าของ x ซึ่งเปลี่ยนไปทีละ 30°

ตารางค่า sine ของมุมต่าง ๆ ทราบได้ดังนี้

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	360°
y หรือ $\sin x$	0	.5	.87	1	.87	.5	0	-.5	-.87	-1	0

ตามรูปข้างล่างนี้ให้ค่าของ x วัดไปตามแกนขวาง OX ซองหนึ่งๆ สมมุติค่าแตกต่างกันเป็น 10° และบนแกนตั้ง OY ให้ค่า 1 หน่วยวัดด้วยช่องเล็ก 20 ช่อง



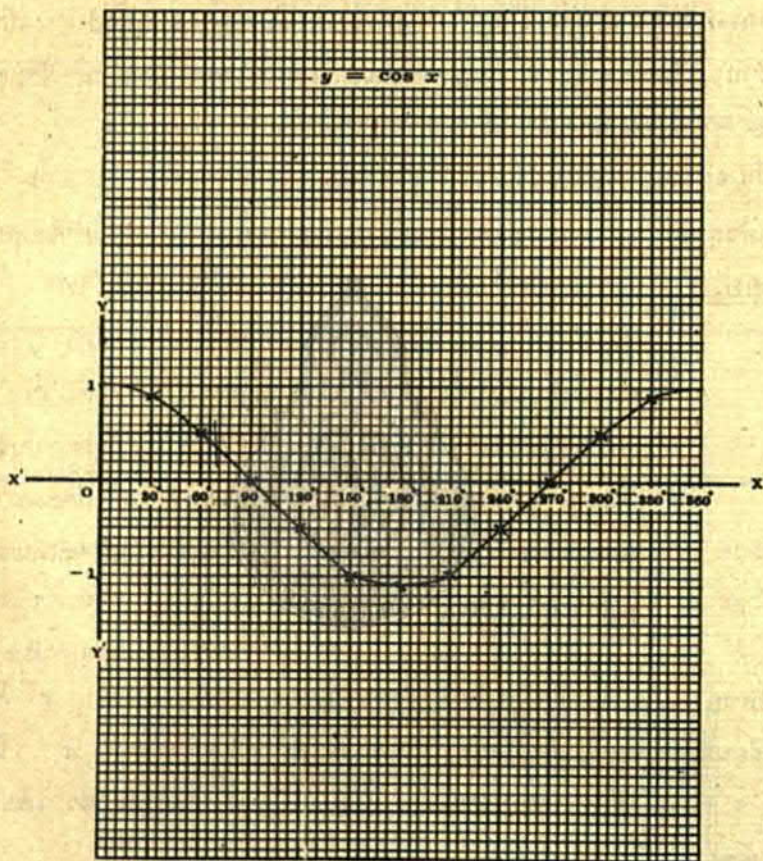
จากกราฟจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า $\sin x$ เป็นเส้นโค้งซึ่งติดต่อกันตลอดไม่ขาดระยะ โดยเหตุนี้จึงเรียกฟังก์ชัน $\sin x$ ว่า ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Function) ซึ่งมีระยะหนึ่ง ๆ (Period) เป็น 4 มุมฉาก เมื่อต่อจาก 4 มุมฉากออกไป เส้นโค้งของ $\sin x$ ก็จะต่อไปเรื่อย ๆ ซ้ำกับเมื่อ x มีค่าเป็น 4 มุมฉากแรก

จากในรูปจะเห็นว่าเส้นโค้งของ $\sin x$ มีค่าสูงสุดเป็น $+1$ และมีค่าต่ำสุดเป็น -1 และระหว่างนี้ sine ของมุม x จะมีค่าได้ทุกค่า ตัวอย่าง จงหาค่าของ x เมื่อ $\sin x = .7$ จากกราฟ

จากกราฟ $y = \sin x$ ดูที่แกนของ y ค่าของ $y = .7$ จากนั้นดูบนเส้นซึ่งขนานกับแกน x ตรงบรรทัดเดียวกับ $y = .7$ ไปตัดเส้นโค้งของ $\sin x$ ที่ใด ดูที่จุดตัดนั้นขนานกับแกน y ลงมาตัดแกน x ที่ตรงเลขเท่าใด ก็จะทราบค่าของมุม x จากแกน x นั้น ในภาพข้างบนนี้ จะเห็นว่า $x = 45^\circ, 135^\circ, 405^\circ, 495^\circ, \dots$

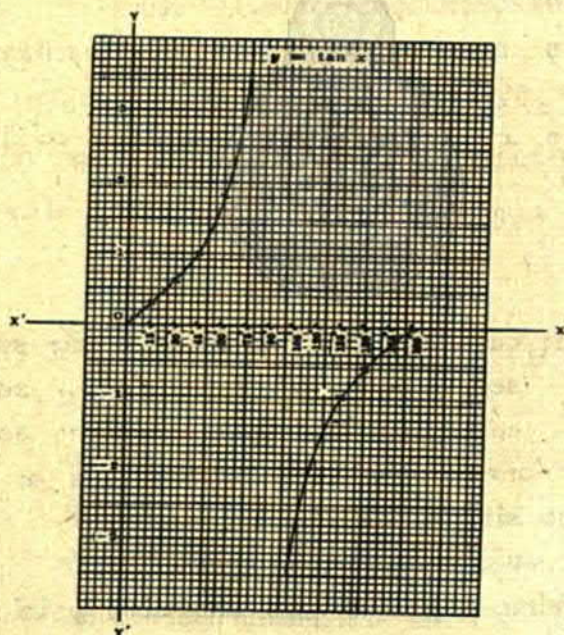
2. กราฟของ $\cos x$ ที่จริงเมื่อนักเรียนเข้าใจกราฟของ $\sin x$ ดีแล้ว นักเรียนก็ควรจะเขียนกราฟของ $\cos x$ ได้ โดยกำหนด x เป็นมุมต่าง ๆ ห่างกันด้วยการเว้นระยะมุม 30° แล้วใช้หน่วยมาตราเดียวกับกราฟของ $\sin x$

จากนี้สังเกตว่า $\cos x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเหมือนกับ $\sin x$ (Continuous Function) ระหว่าง 0° ถึง 360° และค่าสูงสุดเป็น $+1$ ค่าต่ำสุดเป็น -1 ค่าสูงสุดของ $\cos x$ ได้เมื่อ $x = 0^\circ$ และค่าต่ำสุดได้เมื่อ $x = 180^\circ$

(ใต้กราฟของ $\cos x$) 72

3. กราฟของ $\tan x$ จากตารางของ tangents ทราบว่า x 0° 15° 30° 45° 60° 75° 90° 105° 120° 135° 150° 180° y หรือ $\tan x$ 0 $.27$ $.58$ 1 1.7 3.7 ∞ -3.7 -1.7 -1 $-.58$ 0°

ให้แบ่งแกน x ของเล็กช่องหนึ่งเป็นระยะ 6° แกน y แบ่ง 5 ช่องเล็กเป็น 1 หน่วย กราฟของ $\tan x$ เป็นเส้นโค้งที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous)



4. ลักษณะกราฟของ $\tan x$

1. ติดต่อช่วงระยะเมื่อ x อยู่ระหว่าง 2 มุมฉาก แล้วก็ไปขาดตอน
ตั้งต้นใหม่เมื่อ x ต่อออกไปอีก 2 มุมฉาก เมื่อมุม x ใกล้จะไปถึง
 90° เส้นโค้งของ tangent x สูงขึ้นรวดเร็วใกล้เข้าไปจนเกือบจะ
จุดเส้นตั้งซึ่งตรงกับจุด $x = 90^\circ$ แต่ไม่จุด จะเพิ่มค่าสูงขึ้นจนเส้น
นี้ขึ้นไปจนถึง $y = \infty$ และเมื่อมุมเปลี่ยนผ่านจุด 90° ไป ค่าของ
 $\tan x$ เปลี่ยนจาก $+\infty$ เป็น $-\infty$ เมื่อ x อยู่ระหว่าง 90°
และ 180° ค่าของ $\tan x$ เหมือนกับเมื่อ x มีค่าอยู่ระหว่าง 0°
ถึง 90° แต่เครื่องหมายตรงข้ามเป็น $-$ ไป
2. ช่วงระยะเมื่อ อยู่ระหว่าง 2 มุมฉากครั้งหนึ่ง ๆ กราฟเดินรอยซ้ำ
แบบเมื่อ x อยู่ระหว่าง 2 มุมฉากแรก
3. ค่าของ $\tan x$ มีได้ทุกค่าตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$ ไม่จำกัด

แบบฝึกหัดชุดที่ 8

1. จงเขียนกราฟของ $\cot x$ เมื่อ x มีค่าตั้งแต่ 0° ถึง 360°
2. " " $\sec x$ " x " 0° " 360°
3. " " $\operatorname{cosec} x$ " x " 0° " 360°
4. บนแกนเดียวกัน ด้วยหน่วยเดียวกัน เขียนกราฟของ $\cos x$ และ $\sin x$
5. จงเขียนกราฟของ $\sin x$ จากค่าของ x ต่อไปนี้
 $5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 85^\circ, 90^\circ$
(บนแกน x ใช้หน่วย 1 นิ้วแทนค่า 25° และบนแกน y ใช้ 2 นิ้วต่อ 1
หน่วย) และจงอ่านค่าของ $\sin 37^\circ$ และมุมซึ่งมีค่าของ sine เป็น .8
6. จากตารางของ cosine ท้ายเล่ม จงหาค่าของ $\cos x$ เมื่อ x มีค่า
 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$
และจงหาค่าของ $\cos 25^\circ, \cos 45^\circ$

บทที่ 9

ฟังก์ชันของมุมประกอบ (Compound Angles)

1. มุมหลาย ๆ มุมมาบวกหรือมาลบกัน เกิดเป็นมุมใหม่มุมเดียวขึ้น มุมใหม่นี้เรียกชื่อว่ามุมประกอบ (Compound Angles) เช่นมุม A และมุม B รวมเป็นมุม $A+B$ หรือ $A-B$ มุม A, B, C รวมเป็น $A+B-C$ หรือ $A-B+C$ หรือ $A+B+C$ เป็นต้น มุม $A+B$, $A-B$ หรือ $A+B-C$ นี้เรียกว่ามุมประกอบ (Compound Angles)
2. ดังนั้นเมื่อมุม $A+B$ เกิดเป็นฟังก์ชัน คือเป็น $\sin (A+B)$ หรือ $\cos (A+B)$ หรือ $\tan (A+B)$ ขึ้น มุม A กับ B มีสามารถจะแยกจากกันได้อีก ฉะนั้น $\sin (A+B)$ นักเรียนจะมาแยกเป็น $\sin A + \sin B$ ไม่ได้ $\sin (A-B)$ จะแยกเป็น $\sin A - \sin B$ ไม่ได้เช่นกัน

ตัวอย่าง ถ้า $A = 60^\circ$ $B = 30^\circ$ ฉะนั้น $A+B = 90^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \sin (A+B) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{แต่ } \sin A + \sin B = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3+1}}{2} \neq 1$$

จากค่าข้างบนนี้จะเห็นได้ว่า $\sin (A+B) \neq \sin A +$

$\sin B$ ในทำนองเดียวกัน $\sin (A+A) = \sin 2A$

จะแยกเป็น $\sin A + \sin A$ ซึ่งเป็น $2 \sin A$ ไม่ได้

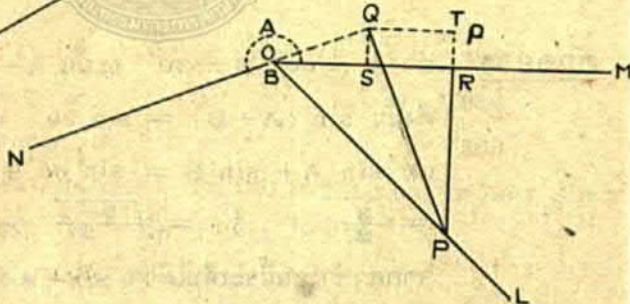
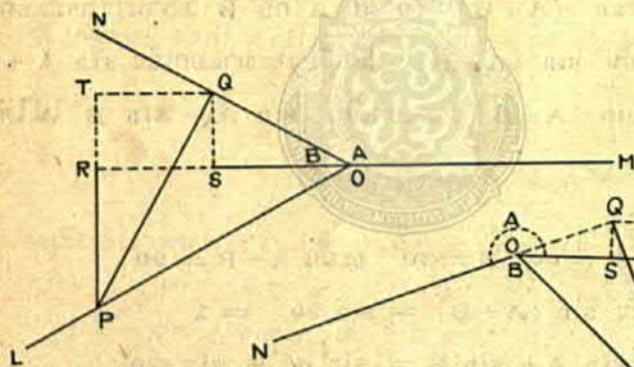
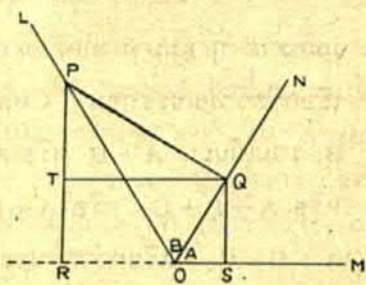
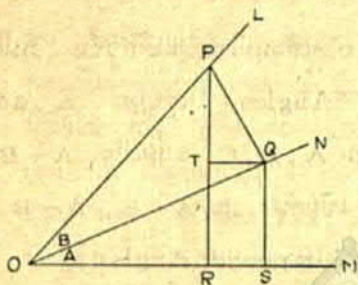
ก็คือ $\sin 2A \neq 2 \sin A$

$$\tan 3A \neq 3 \tan A$$

3. วิธีพิสูจน์สูตร

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$



ให้ ON หมุนเวียนจุด O ออกจากแขน OM ไปกว้าง A ได้มุม $\angle MON = A$ แล้ว ON หมุนต่อไปจากแขน ON เวียนจุด O ออกไปอีก B ไปอยู่ที่ OL

ฉะนั้นได้มุม $NOL = B$

มุม $MOL = A + B$

- ปรากฏในรูปที่ 1 มุม MOL เป็นมุมแหลมมีแขนอยู่ในเขตควอดแรนต์ ที่ 1
 ในรูปที่ 2 มุม MOL เป็นมุมป้านมีแขนอยู่ในเขตควอดแรนต์ ที่ 2
 ในรูปที่ 3 มุม MOL เป็นมุมกลับมีแขนอยู่ในเขตควอดแรนต์ ที่ 3
 ในรูปที่ 4 มุม MOL เป็นมุมกลับมีแขนอยู่ในเขตควอดแรนต์ ที่ 4

วิธีการลากเส้นเพื่อการพิสูจน์

ทั้ง 4 รูป มุม $A + B$ จะกว้างเท่าใดก็ตาม และแขนของมุมจะอยู่ในควอดแรนต์ที่เท่าใดก็ตาม การสร้างรูปต้องมีหลักของการลากเส้น และหลักนี้เป็นหลักที่ใช้ตลอดทุกมุมแม้มุมรวมนั้นจะกว้างเท่าใดก็ตาม

1. เลือกจุดจุดหนึ่งบนแขนของมุมรวม (ในที่นี้คือแขน OL) และจุดนี้สมมติชื่อว่าจุด P จากจุดนี้ลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น
 - ก. เส้นที่ 1 ไปตั้งฉากกับเส้นเดิม (Initial line) ในที่นี้คือเส้น OM ถ้าตั้งฉากด้านขวาไม่ได้ต้องไปตั้งฉากกับเส้นนี้เมื่อต่อไปทางซ้ายที่จุด R
 - ข. เส้นที่ 2 ไปตั้งฉากกับแขนของมุมที่เหลือ (แขน ON) ที่จุด Q
2. จากจุด Q ลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น
 - ค. เส้นที่ 1 ไปตั้งฉากกับเส้นเดิม (Initial line) ที่จุด S
 - ง. เส้นที่ 2 ไปตั้งฉากกับเส้นตั้งฉากในข้อ ก.

นักเรียนใช้หลักนี้แล้วเป็นอันว่าไม่ต้องกังวลในเรื่องการลากเส้นนั้นว่าจะ

ผิดหรือถูกอีก

พิสูจน์

$$\sin (A+B) = \frac{RP}{OP} \quad (\text{รูป 1 และ 2})$$

$$= \frac{PT+TR}{OP} \quad (\text{ " " })$$

$$= \frac{PT}{OP} + \frac{QS}{OP} \quad (\text{ " " })$$

$$= \frac{PT}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} + \frac{QS}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP}$$

$$= \cos Q\hat{P}T \sin B + \sin A \cos B$$

$\triangle XPQ$ กับ $\triangle XOR$ (รูปที่ 1)

$$\hat{Q} = \hat{R} = 1\text{๒}$$

$$PXQ = OXR$$

$$\therefore XPQ = QOS = \hat{A}$$

$\triangle TPQ$ (รูปที่ 2)

$$TPQ + PQT = 1\text{๒} = TQO + TQP$$

$$\therefore TPQ = TQO = QOS = \hat{A}$$

$$\sin (A+B) = \cos A \sin B + \sin A \cos B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

ในรูปที่ 3 $\sin (A+B)$

$$= - \left(\frac{RP}{OP} \right)$$

$$= - \left(\frac{TP-TR}{OP} \right)$$

$$= - \frac{TP}{OP} + \frac{QS}{OP}$$

$$= - \frac{TP}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} + \frac{QS}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP}$$

$$= - \cos TPQ \sin B + \sin (180^\circ - A) \cos B$$

$$\widehat{RPQ} = \widehat{PQS} \quad (\text{แย้ง})$$

$$\widehat{PQS} = \widehat{QOS} \quad \therefore \text{เป็นมุมประกอบ 1 มุมฉากของ } \widehat{SQO}$$

$$\therefore \widehat{RPQ} = \widehat{QOS} = 180^\circ - A$$

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= -\cos(180^\circ - A) \sin B + \sin(180^\circ - A) \cos B \\ &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \end{aligned}$$

ในรูปที่ 4 $\sin(A+B) = -\frac{RP}{OP} = -\left(\frac{PT-RT}{OP}\right)$

$$\begin{aligned} &= -\frac{PT}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} + \frac{QS}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} \\ &= -\cos \widehat{TPQ} \sin \widehat{QOP} + \sin \widehat{QOS} \cos \widehat{QOP} \\ &= -\cos \widehat{TPQ} \sin \widehat{QOP} + \sin(A-180^\circ) \cos(180^\circ - B) \end{aligned}$$

$$\widehat{TPQ} = \widehat{PQS} \quad (\text{แย้ง})$$

$$\widehat{PQS} = \widehat{QOS} \quad \text{ต่างเป็นมุมประกอบ 1 มุมฉากของ } \widehat{OQS}$$

$$\widehat{TPQ} = \widehat{QOS} = A - 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= -\cos(A-180^\circ) \sin(180^\circ - B) + \sin(A-180^\circ) \cos(180^\circ - B) \\ &= -\cos-(180^\circ - A) \sin B + \sin-(180^\circ - A)(-\cos B) \\ &= -\cos(180^\circ - A) \sin B - \sin(180^\circ - A)(-\cos B) \\ &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \end{aligned}$$

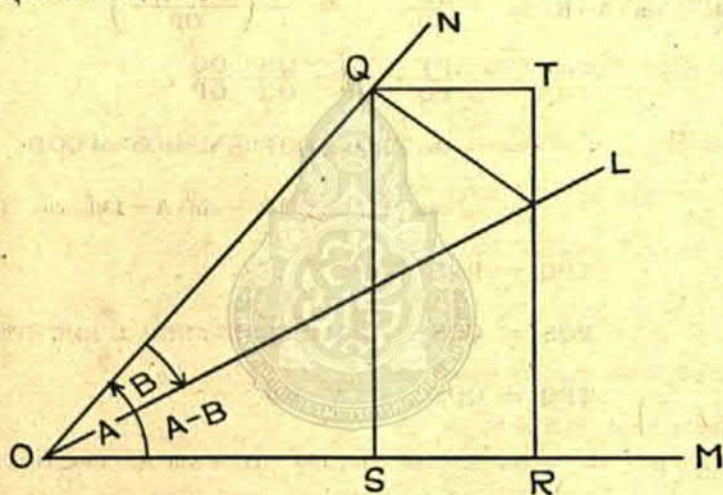
4. การพิสูจน์ค่าของ $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ใช้พิสูจน์ในรูปเดียวกับ การพิสูจน์ $\sin(A+B)$ นั้นเอง เครื่องหมายของ $\cos(A+B)$ นั้นนักเรียนต้องอย่าลืมสังเกตตามเส้น เส้น OM ที่ต่อออกไปทางเบื้องซ้ายต้องมีเครื่องหมายเป็น -

5. การพิสูจน์สูตร

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ให้ NO หมุนเวียนจุด O ออกจากเส้น OM ไปที่ NO ทำมุม MON กว้าง A แล้วหมุนกลับไปที่ OL ทำมุม NOL กว้าง B ฉะนั้นมุม MOL เป็นมุมรวม $A - B$



- วิธีลากเส้น บนแกนของมุมรวม เลือจุด ๆ หนึ่งชื่อจุด P จากจุด P
- ลากเส้นไปตั้งฉากกับเส้นเดิม OM ที่ R
 - ลากเส้นไปตั้งฉากกับแกนที่เหลือ ON ที่ Q จากจุด Q
 - ลากเส้นไปตั้งฉากกับเส้นเดิม OM ที่ S
 - ลากเส้นไปตั้งฉากกับเส้นตั้งฉาก ข้อ ก. ที่ T

ขอให้นักเรียนสังเกตว่า การลากเส้นเพื่อการพิสูจน์นี้ได้ยึดไปจากการลากเส้นเพื่อการพิสูจน์ในข้อ 3

วิธีพิสูจน์

$$\sin (A-B) = \frac{PR}{OP}$$

$$= \frac{TR-PT}{OP}$$

$$= \frac{TR}{OP} - \frac{PT}{OP}$$

$$= \frac{QS}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{PT}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos \hat{TPQ} \sin B$$

$$\hat{TPQ} = \hat{SQP}$$

$$\hat{SQP} + \hat{OQS} = \hat{QOS} + \hat{OQS}$$

$$\hat{SQP} = \hat{QOS} = \hat{A} = \hat{TPQ}$$

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos (A-B) = \frac{OR}{OP} = \frac{OS+SR}{OP}$$

$$= \frac{OS}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{QT}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin \hat{QPT} \sin B$$

$$\hat{QPT} = \hat{PQS} = \hat{A}$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos 75^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ จงหา $\sin (A+B)$ และ $\sin (A-B)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{4}{5} \therefore \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} \\ &= \sqrt{1-\frac{16}{25}} \\ &= \frac{3}{5} \\ \cos B &= \frac{3}{5} \therefore \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} \\ &= \sqrt{1-\frac{9}{25}} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin (A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{25}{25} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin (A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ &= -\frac{7}{25}\end{aligned}$$

6. จงพิสูจน์

$$\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

พิสูจน์ L.S. = $(\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$

$$= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ก.

จงพิสูจน์

$$1. \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\sin A + \cos A)$$

$$2. \cos\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\cos A - \sin A)$$

$$3. \sin(30^\circ + A) = \frac{1}{2}(\cos A + \sqrt{3}\sin A)$$

$$4^* \sin 105^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$5^* \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$6. \cos(A - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A + \sin A)$$

$$7. \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \cot \beta$$

$$8. \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta$$

$$9^* \cos(A+B) \cos(A-B) = \sin^2 B - \sin^2 A$$

$$10. \sin(A+B) + \cos(A-B) = (\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B)$$

$$11. \sin(A-B) + \cos(A+B) = (\sin A + \cos A)(\cos B - \sin B)$$

$$12. 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = \cos(A+B) + \sin(A-B)$$

$$13. 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \cos(A+B) - \sin(A-B)$$

$$14. \sin A = \frac{1}{2}, \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ಇದರಿಂದ } \sin(A+B) \text{ ಮತ್ತು } \cos(A-B)$$

$$15. \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ಇದರಿಂದ } \sin(A-B) \text{ ಮತ್ತು } \cos(A+B)$$

$$16. 2 \sin(A + 45^\circ) \sin(A - 45^\circ) = \sin^2 A - \cos^2 A$$

$$17. 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$18. 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$19. \frac{\cos(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 0$$

$$20. \cos 5A \cos 3A + \sin 5A \sin 3A = \cos 2A$$

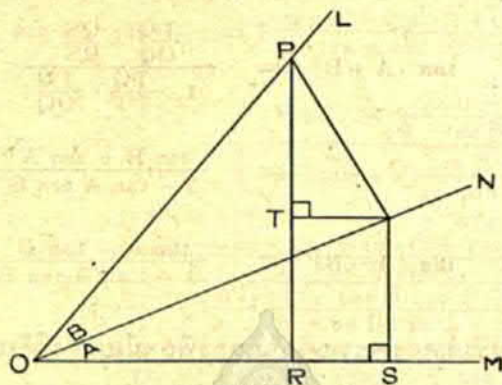
$$21. \sin 2A \cos A + \sin A \cos 2A = \sin 3A$$

$$7. \text{ 7.15 } \tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{1 - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

8. พิสูจน์ $\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ โดยวิธีเรขาคณิต



วิธีสร้างเพื่อการลากเส้นใช้วิธีเดียวกับการพิสูจน์ $\sin (A+B)$

และ $\sin (A-B)$

พิสูจน์ $\tan (A+B) = \frac{PR}{OR}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{PT+TR}{OR} \\
 &= \frac{PT+TR}{OS-TQ} \\
 &= \frac{\frac{PT}{OS} + \frac{TR}{OS}}{1 - \frac{TQ}{OS}} \\
 &= \frac{\frac{PT}{OS} + \frac{QS}{OS}}{1 + \frac{TQ}{PT} \cdot \frac{PT}{OS}}
 \end{aligned}$$

ใน $\triangle PTQ$ และ $\triangle OQS$ มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

คือ $\hat{P} = \hat{A}$ พิสูจน์แล้วในคำอธิบายข้อ 8

$\hat{T} = \hat{S}$ = มุมฉาก

มุมที่ 3 เท่ากัน

$$\frac{PT}{OS} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{TQ}{QS}$$

$$\begin{aligned}\tan (A+B) &= \frac{\frac{PQ}{OQ} + \frac{QS}{OS}}{1 - \frac{TQ}{PT} \cdot \frac{PQ}{OQ}} \\ &= \frac{\tan B + \tan A}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

$$9. \quad \tan (A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

ข้อนี้นักเรียนควร จะพยายามลองพิสูจน์เองทั้งวิธีเปลี่ยนเป็น $\frac{\sin (A-B)}{\cos (A-B)}$ และทั้งการพิสูจน์โดยวิธีเรขาคณิต

$$10. \quad \underline{\text{พิสูจน์สูตร}} \quad \cot (A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\begin{aligned}\underline{\text{วิธีพิสูจน์}} \quad \cot (A+B) &= \frac{\cos (A+B)}{\sin (A+B)} \\ &= \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} \\ &= \frac{\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - 1}{\frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B} + \frac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}} \\ &= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\cot (A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

11. จงกระจาย $\tan (A+B+C)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \tan (A+B+C) &= \frac{\tan A + \tan (B+C)}{1 - \tan A \tan (B+C)} \\
 &= \frac{\tan A + \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}}{1 - \tan A \cdot \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}} \\
 &= \frac{\frac{\tan A - \tan A \tan B \tan C + \tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}}{\frac{1 - \tan B \tan C - \tan A \tan B - \tan C \tan A}{1 - \tan B \tan C}} \\
 &= \frac{(\tan A + \tan B + \tan C) - (\tan A \tan B \tan C)}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}
 \end{aligned}$$

บทแทรก ถ้า $A+B+C = 180^\circ$

$$\tan (180^\circ) = \frac{(\tan A + \tan B + \tan C) - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

แต่ $\tan 180^\circ = 0 \therefore 0 = (\tan A + \tan B + \tan C) - \tan A \tan B \tan C$

ก็คือ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \quad * *$

เมื่อ $A+B+C = 180^\circ$

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ข.

จงหาค่าของ $\tan (A-B)$ เมื่อ $\tan A = \frac{1}{2}$ $\tan B = \frac{1}{3}$

ถ้า $\tan A = \frac{4}{3}$ และ $B = 45^\circ$ จงหา $\tan (A+B)$

3. ถ้า $\cot A = \frac{5}{7}$ $\cot B = \frac{7}{5}$ จงหา $\tan (A+B)$ และ $\cot (A-B)$

4. ถ้า $\cot A = \frac{11}{2}$ $\tan B = \frac{7}{24}$ จงหา $\cot (A+B)$ และ $\tan (A+B)$

5. จงพิสูจน์ว่า $\tan \left(\frac{\pi}{4} + A \right) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$

6. จงพิสูจน์ว่า $\tan \left(\frac{\pi}{4} - A \right) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

7. จงพิสูจน์ว่า $\cot \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$

8. จงพิสูจน์ว่า $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

9. จงพิสูจน์ว่า $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

10. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\tan (n+1) A + \tan (n-1) A}{1 - \tan (n+1) A \tan (n-1) A} = \tan 2nA$

11. จงพิสูจน์ว่า $\tan (A + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3} \tan A + 1}{\sqrt{3} - \tan A}$

12. จงพิสูจน์ว่า $\tan (A + 60^\circ) = \frac{\tan (A + \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3} \tan A}$

13. จงพิสูจน์ว่า $\tan 15^\circ + \tan 30^\circ + \tan 15^\circ \tan 30^\circ = 1$

14. จงพิสูจน์ว่า $\tan 75^\circ - \tan 30^\circ - \tan 75^\circ \tan 30^\circ = 1$

จงกระจาย

15. $\sin (A+B+C)$ และ $\cos (A+B+C)$ ในเทอมของ sine และ cosine

16. $\cos (A-B+C)$ " $\sin (A+B-C)$ " sine " cosine

17. $\cot (A-B+C)$ " $\tan (A-B-C)$ " cotangent " tangent

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า

$$\sin(n+1)A \sin(n-1)A + \cos(n+1)A \cos(n-1)A = \cos 2A$$

วิธีทำ

นักเรียนนึกถึงสูตร $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$\begin{aligned} \text{ฉะนั้น } \cos(n+1)A \cos(n-1)A + \sin(n+1)A \sin(n-1)A \\ = \cos[(n+1)A - (n-1)A] \\ = \cos 2A \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $\cot 2A + \tan A = \operatorname{cosec} 2A$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \cot 2A + \tan A &= \frac{\cos 2A}{\sin 2A} + \frac{\sin A}{\cos A} \\ &= \frac{\cos 2A \cos A + \sin 2A \sin A}{\sin 2A \cos A} \\ &= \frac{\cos(2A - A)}{\sin 2A \cos A} = \frac{1}{\sin 2A} = \operatorname{cosec} 2A \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta &= \sin 4\theta \cos \theta - \cos 4\theta \sin \theta \\ \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 3\theta \\ &= \sin(4\theta - \theta) \\ &= \sin 4\theta \cos \theta - \cos 4\theta \sin \theta \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 9 ค.

จงพิสูจน์ว่า

$$1. \cos(45^\circ - A) \cos(45^\circ - B) - \sin(45^\circ - A) \sin(45^\circ - B) = \sin(A + B)$$

$$2. \sin(45^\circ + A) \cos(45^\circ - B) + \cos(45^\circ + A) \sin(45^\circ - B) = \cos(A - B)$$

$$3. \cos(A + B) \cos B + \sin(A + B) \sin B = \cos A$$

$$4. \sin 3A \cos A - \cos 3A \sin A = \sin 2A$$

$$5. \cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$6. \cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - A\right) = \frac{1}{2}$$

$$7. \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - A\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right) = 1$$

$$8. \cos \alpha \cos(\gamma - \alpha) - \sin \alpha \sin(\gamma - \alpha) = \cos \gamma$$

$$9. \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \cos(\beta + \gamma) \cos \alpha = \sin \beta \sin(\gamma - \alpha)$$

$$10. \frac{\cos 2\alpha}{\sec \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{cosec} \alpha} = \cos 3\alpha$$

$$11. \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \tan \alpha$$

$$12. \frac{\cot(\alpha + \beta) \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - \cot(\alpha + \beta)} = \cot \beta$$

$$13. \frac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \tan 3A} = \tan 7A$$

$$14. (\cot 15^\circ - \cot 30^\circ) = \operatorname{cosec} 30^\circ$$

$$15. 1 + \tan 2\theta \tan \theta = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$16. \quad \cos 4\alpha \cos \alpha + \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 2\alpha$$

$$17. \quad \sin 3\theta \cos \theta + \cos 3\theta \sin \theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$18. \quad \frac{\tan 4\theta - \tan \theta}{1 + \tan 4\theta \tan \theta} = \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \tan \theta}$$

$$19. \quad \frac{\cot 4\theta \cot \theta - 1}{\cot \theta + \cot 4\theta} = \frac{\cot 3\theta \cot 2\theta - 1}{\cot 2\theta + \cot 3\theta}$$

$$20. \quad \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta = \cos 4\theta \cos 3\theta + \sin 4\theta \sin 3\theta$$



บทที่ 10

ฟังก์ชันของมุมทวีคูณ

1. จงกระจาย $\sin 2A$ เป็นเทอมของ $\sin A$ และ $\cos A$

จากสูตร $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

ฉะนั้น $\sin (A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$

ก็เกิดสูตร $\sin 2A = 2\sin A \cos A \dots\dots\dots *$

จึงใช้เป็นสูตรทั่วไป แทนที่จะเป็นมุม $2A$ อาจจะถูกกลายเป็นมุม θ ซึ่ง $\theta = 2A$

ดังนั้น $\sin \theta = 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

และทำนองเดียวกัน $\sin 4A = 2\sin 2A \cos 2A$

2. จงกระจาย $\cos 2A$ เป็นเทอมของ $\sin A$ และ $\cos A$

จากสูตร $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

ฉะนั้น $\cos (A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$

เกิดสูตร $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \dots\dots\dots *$

หรือ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \dots\dots\dots *$

หรือ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \dots\dots\dots *$

ในทำนองเดียวกัน

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{หรือ} \quad = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\text{หรือ} \quad = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

3. ถ้า $\tan^2 A$ เป็นเทอมของ $\cos 2A$

$$\begin{aligned}\tan^2 A &= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \\ &= \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} \\ &= \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} \dots\dots\dots * \end{aligned}$$

4. จงกระจาย $\tan 2A$ เป็นเทอมของ $\tan A$

จากสูตร $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

ฉะนั้น $\tan (A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \dots\dots\dots *$$

ในทำนองเดียวกัน $\tan \theta = \frac{2\tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$

5. จงกระจาย $\cot 2A$ เป็นเทอมของ $\cot A$

จากสูตร $\cot (A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$$

ในทำนองเดียวกัน $\cot \theta = \frac{\cot^2 \frac{\theta}{2} - 1}{2\cot \frac{\theta}{2}}$

6. จงกระจาย $\sin 2A$ และ $\cos 2A$ เป็นเทอมของ $\tan A$

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร } \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\
 &= 2 \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \cos^2 A \\
 &= 2 \tan A \cdot \frac{1}{\sec^2 A} \\
 &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \dots\dots\dots *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\
 &= \cos^2 A \left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \right) \\
 &= \cos^2 A (1 - \tan^2 A) \\
 &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \dots\dots\dots *
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 10

1. ถ้า $\cos A = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $\sin 2A$
2. ถ้า $\sin A = \frac{2}{5}$ จงหาค่าของ $\sin 2A$
3. ถ้า $\tan A = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\tan 2A$
4. ถ้า $\tan A = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $\sin 2A$ และ $\cos 2A$
5. ถ้า $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\tan \alpha$
6. ถ้า $\cos 2A = .96$ จงหาค่าของ $\tan A$, $\cot A$, และ $\sin A$

7. ให้ $\sin A = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $\tan 2A$
8. ถ้า $\sin A = \frac{13}{19}$ จงหาค่าของ $\tan 2A$
9. ถ้า $\tan A = \sqrt{3}$ จงหาค่าของ $\tan 2A$
10. ถ้า $\cos A = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ $\tan \frac{A}{2}$
11. ถ้า $\cos A = \frac{15}{17}$ จงหาค่าของ $\tan \frac{A}{2}$
12. กำหนด $\sqrt{x} = 1.414$ จงหาค่าของ $\sin 157.5^\circ$ และ $\cos 157.5^\circ$

จงพิสูจน์ว่า

13. $\frac{1 + \cos 2A}{\sin 2A} = \cot A$
14. $\frac{\sin A}{1 - \cos A} = \cot \frac{A}{2}$
15. $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \cot \frac{A}{2}$
16. $2 \operatorname{cosec} 2\alpha = \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha$
17. $\frac{1 + \sec \theta}{\sec \theta} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$
18. $\frac{2 - \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \cos 2\theta$
19. $\frac{\operatorname{cosec}^2 \theta - 2}{\operatorname{cosec}^2 \theta} = \cos 2\theta$
20. $\cos A = \frac{2 - \sec^2 \frac{A}{2}}{\sec^2 \frac{A}{2}}$
21. $\tan 2\theta = \frac{\sin 4\theta}{1 + \cos 4\theta}$
22. $\tan 2\theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{\sin 4\theta}$

23. $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$
24. $\tan 2A = \frac{\cot (45^\circ - A) - \tan (45^\circ - A)}{2}$
25. $\left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 + \sin A$
26. $\left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 - \sin A$
27. $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \tan (45^\circ - \alpha)$
28. $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \cot (45^\circ - \alpha)$
29. $\tan 2\theta = \frac{\sin 4\theta - \cos 4\theta + 1}{\sin 4\theta + \cos 4\theta + 1}$
30. $\tan 2\theta = \frac{\sin 4\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 4\theta + \cos 2\theta}$
31. $\tan \theta = \frac{\sin 4\theta}{1 + \cos 2\theta} \cdot \frac{\cos 2\theta}{1 + \cos 4\theta}$
32. $\tan \theta = \frac{\sin 4\theta}{\cos 2\theta} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{1 - \cos 4\theta}$
33. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$
34. $\sin 4A = 4 \sin A \cos^3 A - 4 \cos A \sin^3 A$
35. $\cos 4A = 1 - 8 \cos^2 A + 8 \cos^4 A$
36. $\sin A = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right)$
37. $\cos (45^\circ - \alpha) - \sin (45^\circ - \alpha) = \sin 2\alpha$
38. $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = 2 \tan 2\theta$
39. $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = 2 \sec 2\theta$

บทที่ 11

ฟังก์ชันของมุม 3A

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin 3A &= \sin (2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \\ &= 2\sin A \cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A) \sin A \\ &= 2\sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos 3A &= \cos (2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\ &= (2\cos^2 A - 1) \cos A - 2\sin^2 A \cos A \\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A \\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A \\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \tan 3A &= \tan (2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} \\ &= \frac{\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \cdot \tan A} \\ &= \frac{2 \tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2 \tan^2 A} \\ &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \end{aligned}$$

4. สูตรเหล่านี้เป็นสูตรที่ใช้ทั่วไปในเมื่อมุมหนึ่งเป็น 3 เท่าของอีกมุมหนึ่ง

$$\text{เช่น } \cos 6A = 4\cos^3 2A - 3\cos 2A$$

$$\sin 9A = 3\sin 3A - 4\sin^3 3A$$

5. การหาค่าของ $\sin 18^\circ$

$$\text{ให้ } A = 18^\circ$$

$$5A = 90^\circ$$

$$2A = 90^\circ - 3A$$

$$\sin 2A = \sin (90^\circ - 3A) = \cos 3A$$

$$2\sin A \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

เมื่อ $\cos A \neq 0$ เรา $\cos A$ หาคancel

$$2\sin A = 4\cos^2 A - 3$$

$$2\sin A = 4(1 - \sin^2 A) - 3$$

$$4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0$$

$$\sin A = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{5}}{8}, \frac{-2+2\sqrt{5}}{8}$$

$$= -\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

แต่ $\sin A = \sin (18^\circ)$ มีค่าเป็น +

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ \dots *$$

$$\text{ฉะนั้น } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} = \sin 72^\circ \dots *$$

6. หาค่าของฟังก์ชันของมุม 36°

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ &= \cos 2(18^\circ) \\ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ \\ &= 1 - 2 \left\{ \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \right\}^2 \\ &= 1 - \frac{2(6-2\sqrt{5})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ \dots\dots\dots *\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 36^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} \\ &= \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} = \cos 54^\circ \dots\dots\dots *\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 11 ก.

1. ถ้า $\cos A = \frac{2}{3}$ จงหา $\cos 3A$
2. จงหา $\sin 3A$ เมื่อ $\sin A = \frac{1}{3}$
3. กำหนด $\tan A = \frac{1}{3}$ จงหา $\tan 3A$
4. จงกระจาย $\cot 3A$ เป็นเทอมของ $\cot A$
5. จงกระจาย $\cos 6A$ เป็นเทอมของ $\cos A$
6. จงกระจาย $\sin 6A$ เป็นเทอมของฟังก์ชันมุม A
จงหาค่าของ

$$7. \frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A}$$

$$8. \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

9. $\sin 18^\circ + \sin 30^\circ$

10. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ$

11. $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ$

12. $4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า

$$\cos^5 \alpha + \sin^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\ &= 1(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \quad \dots\dots\dots * \\ &= 1 - \frac{3}{4} (1 - \cos^2 2\alpha) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha \quad \dots\dots\dots * \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์

วิธีทำ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tan 3\theta + \tan \theta} - \frac{1}{\cot 3\theta + \cot \theta} = \cot 4\theta \\ &\frac{1}{\tan 3\theta + \tan \theta} - \frac{1}{\cot 3\theta + \cot \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} - \frac{1}{\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\cos 3\theta \cos \theta}{\sin 3\theta \cos \theta + \cos 3\theta \sin \theta} - \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\sin \theta \cos 3\theta + \cos \theta \sin 3\theta} \\ &= \frac{\cos 3\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin \theta}{\sin 4\theta} \\ &= \frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta} = \cot 4\theta \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \sin A}{\cos A + \cos 3A} &= \tan 2A - \tan A \\
 \frac{2 \sin A}{\cos A + \cos 3A} &= \frac{2 \sin A}{\cos A + 4 \cos^3 A - 3 \cos A} \\
 &= \frac{2 \sin A}{2 \cos A (2 \cos^2 A - 1)} \\
 &= \frac{2 \sin A}{2 \cos A \cos 2A} \\
 &= \frac{\sin (2A - A)}{\cos A \cos 2A} \\
 &= \frac{\sin 2A \cos A - \cos 2A \sin A}{\cos A \cos 2A} \\
 &= \tan 2A - \tan A
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 11 ข.

จงพิสูจน์

- $1 - \frac{1}{2} \sin 2A \tan A = \cos^2 A$
- $\operatorname{cosec} 2A - \tan A = \cot 2A$
- $\cot A - \operatorname{cosec} 2A = \cot 2A$
- $\tan A - \sec A \sin A = \tan A \sec 2A$
- $\tan 2A + \cos A \operatorname{cosec} A = \cot A \sec 2A$
- $(\cos A + \sin A)^2 = 1 + \sin 2A$
- $(\cos A - \sin A)^2 = 1 - \sin 2A$
- $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \tan 2A$
- $\frac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = \tan \theta$

10. $\frac{1 + \cos \theta + \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta + \sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$
11. $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \sec 2A + \tan 2A$
12. $\frac{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 1 + 2 \sin 2\alpha$
13. $\frac{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 1 - 2 \sin 2\alpha$
14. $\begin{aligned} \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha &= \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha\right) \\ &= \cos 2\alpha - \frac{1}{8} \sin 2\alpha \sin 4\alpha \\ &= \cos 2\alpha \left(\cos^2 2\alpha + \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha\right) \end{aligned}$
15. $\cos^4 A - \sin^4 A = \frac{1}{2} \cos 2A (1 + \cos^2 2A)$
16. $\cos^4 A + \sin^4 A = 1 - \sin^2 2A + \frac{1}{8} \sin^4 2A$
17. $\sin 4A = 4 \sin A \cos^3 A - 4 \cos A \sin^3 A$
18. $\cos 4A = 1 - 8 \cos^3 A + 8 \cos^5 A$
19. $\frac{\cot \alpha - 1}{\cot \alpha + 1} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$
20. $\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}}$
21. $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cot \frac{\theta}{2} + 1}{\cot \frac{\theta}{2} - 1}$
22. $\sin 5A = 5 \sin A - 20 \sin^3 A + 16 \sin^5 A$
23. $\cos 5A = 5 \cos A - 20 \cos^3 A + 16 \cos^5 A$
24. $\sin 6A = 2 \sin A \cos A (16 \cos^4 A - 16 \cos^2 A + 3)$
25. $\sin 6A \operatorname{cosec} 2A = 3 - 16 \sin^2 A + 16 \sin^4 A$

$$26. \sec A - \tan A = \tan\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$27. \tan A + \sec A = \cot\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$28. \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$29. (2 \cos A - 1)(2 \cos A + 1) = 2 \cos 2A + 1$$

$$30. \frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} \cdot \frac{1 - \cos A}{\cos A} = \tan \frac{A}{2}$$

$$31. \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} \cdot \frac{\cos A}{1 + \cos A} = \tan \frac{A}{2}$$

$$32. 4 \sin^2 \alpha \cos 3\alpha + 4 \cos^2 \alpha \sin 3\alpha = 3 \sin 4\alpha$$

$$(\text{[?] } 4 \sin^2 \alpha = 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha \text{ and } 4 \cos^2 \alpha = 3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

$$33. \cos^3 \alpha \cos 3\alpha + \sin^3 \alpha \sin 3\alpha = \cos^3 2\alpha$$

$$34. 4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ)$$

$$35. 4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ)$$

$$36. \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$$

$$[\text{[?] } \tan 3A = \tan(2A + A)]$$

$$37. \frac{\cot \theta}{\cot \theta - \cot 3\theta} + \frac{\tan \theta}{\tan \theta - \tan 3\theta} = 1$$

$$38. \frac{1}{\tan 3A - \tan A} + \frac{1}{\cot 3A - \cot A} = \cot 2A$$

$$39. \frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2A$$

$$40. \frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A} = 1 + \frac{1}{2} \sin 2A$$

บทที่ 12

การแก้สมการที่ไม่จำกัดขนาดของมุม

1. ค่าของมุมที่ออกจาก $\sin A$ หรือ $\operatorname{cosec} A$

ถ้าค่าของ $\sin A$ ออกมาเป็นค่าหนึ่งที่มีค่าเท่ากับ $\sin \alpha$ จะต้องเท่ากับ $\sin(\pi - \alpha)$ ด้วย ดังนั้น ถ้ามุม A เป็นมุมอยู่ระหว่าง $0 - 360^\circ$ มุม A จะต้องเท่ากับ α และ $\pi - \alpha$

แต่แขน terminal ของมุม อาจจะหมุนไปกี่รอบก็ได้ ฉะนั้น ทุกครั้งที่แขน terminal มาหยุดที่เดิม คือที่เกิดมุม α และ $\pi - \alpha$ sine ของมุมที่เกิดขึ้นจะต้องมีค่าเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า A มีค่าเท่ากับ $n\pi + (-1)^n \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มีเครื่องหมายเป็นบวก มุมที่ออกจาก $\operatorname{cosec} A$ ก็เช่นเดียวกัน $A = n\pi + (-1)^n \alpha$ ทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มและมีเครื่องหมายเป็นบวก

2. ค่าของมุมที่ออกจาก cosine หรือ secant

ถ้าค่าของ $\cos A$ ออกมาเป็นค่าหนึ่งซึ่งเท่ากับ $\cos \alpha$ จะต้องเท่ากับ $\cos - \alpha$ ดังนั้นมุม A จะต้องเท่ากับ α และ $-\alpha$

แต่แขน terminal ของมุมอาจจะหมุนไปกี่รอบก็ได้ ฉะนั้น ทุกครั้งที่แขน terminal มาหยุดที่เดิม คือที่เกิดมุม α และ $-\alpha$ $\cos$ ของมุมที่เกิดขึ้นจะต้องมีค่าเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า A มีค่าเท่ากับ $2n\pi \pm \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มและมีเครื่องหมายเป็นบวก

มุมที่ออกจาก $\sec A$ ก็เช่นเดียวกัน $A = 2n\pi \pm \alpha$ ทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มและเป็นบวก

3. ค่าของมุมที่ออกจาก $\tan A$ หรือ $\cot A$

ถ้าค่าของ $\tan A$ ออกเป็นค่าหนึ่ง ซึ่งเท่ากับ $\tan \alpha$ จะต้อง มีค่าเท่ากับ $\tan(\pi + \alpha)$ ด้วย ดังนั้นถ้ามุม α เป็นมุมบวกระหว่าง $0 - 360^\circ$ มุม A จะต้องเท่ากับ α และ $\pi + \alpha$

แต่แขน terminal ของมุมอาจจะหมุนไปกี่รอบก็ได้ ฉะนั้น
ทุกครั้งที่แขน terminal มาหยุดที่เดิม คือที่เกิดมุม α และ $\pi + \alpha$
tan ของมุมที่เกิดขึ้นจะต้องมีค่าเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า A มีค่าเท่ากับ
 $n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็ม และมีเครื่องหมายเป็นบวก

$$\text{เช่น } \tan^2 x = 1$$

$$\therefore \tan x = \pm 1$$

$$\tan x = 1 = \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad \tan x = -1 = \tan\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 12

จงแก้สมการ

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

2. $2\cos x = \sqrt{2}$

3. $\cot 2x - 1 = 0$

4. $\tan 4x = 0$

5. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

6. $\operatorname{cosec} 2x = \sqrt{2}$

7. $3\tan^2 x = 1$

8. $\sin^2 x = \cos^2 x$

9. $\sin x \cos x - \sin x = 0$

10. $\cos^2 x + \cos x = 0$

11. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

12. $2\cos x - \cos x - 1 = 0$

13. $\sin x + \cos x = 0$

14. $\tan x = \cot x$

15. $\cos x = \sec x$

16. $\sin x + \operatorname{cosec} x = 0$

17. $\tan x + \cot x = 2$

18. $\cos \frac{x}{2} - \sin x = 0$

19. $\sqrt{3}\tan x \sin x = \sin x$

20. $\tan^2 x - \sec x = 1$

21. $\sqrt{3}\cot x \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} x$

22. $\sin 3x + \sin x = \sin x$

บทที่ 13

ฟังก์ชันผกผัน

1. ในสมการ $\sin A = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $A = \arcsin \frac{1}{2}$ หรือ $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ เรียก $\arcsin \frac{1}{2}$ หรือ $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ ดังนั้น ถ้า $\sin^{-1} x$ หมายความว่า sine ของมุมใดมุมหนึ่งที่มีค่าเป็น x นั่นเอง

ส่วนฟังก์ชันอีก 5 ฟังก์ชันก็เป็นเช่นเดียวกัน ฉะนั้นฟังก์ชันผกผันนี้เป็นประโยชน์ในการแก้สมการ เช่น $\tan A = 3$ แทนที่จะต้องใช้ตาราง tangent หาค่าของมุม A ใช้ฟังก์ชันผกผันแทนได้ดังนี้คือ $A = \tan^{-1} 3$ การใช้เครื่องหมาย -1 เหนือฟังก์ชันมิได้มีความหมายเป็นดัชนี คือ $\tan^{-1} x$ ไม่ได้เป็น $\frac{1}{\tan x}$ คงเป็นเครื่องหมายใช้แทนคำว่า arc เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์

$$\sin(2 \arcsin 2) = \frac{4}{5}$$

$$\theta = \arcsin 2 \therefore \sin \theta = 2$$

$$\begin{aligned}\sin(2 \arcsin 2) &= \sin 2\theta \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์

$$2 \sin^{-1} x = \cos^{-1} (1 - 2x^2)$$

$$\theta = \sin^{-1} x \therefore \sin \theta = x$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2x^2\end{aligned}$$

$$\therefore 2\theta = \cos^{-1} (1 - 2x^2)$$

$$2 \sin^{-1} x = \cos^{-1} (1 - x^2)$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 13

จงพิสูจน์

$$1. \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$3. 2 \cos^{-1} x = \sec^{-1} \frac{1}{2x^2 - 1}$$

$$4. 2 \cot^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$5. 2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$6. \sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$7. \cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1} \{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$$

$$8. \tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \tan^{-1} \frac{2x(x+2)}{4x+5}$$

จงหาค่าของนิพจน์ต่อไปนี้

$$9. \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{4}{5}$$

$$10. \arctan \frac{5}{3} + \arctan \frac{4}{3}$$

$$11. \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}$$

$$12. \arctan 2x + \arctan 3x$$

$$13. \arctan \frac{(1 - \tan \frac{\pi}{6})}{(1 + \tan \frac{\pi}{6})}$$

$$14. \arctan (\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2})$$

$$15. \sin (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)$$

$$16. \cos (\sin^{-1} x - \cos^{-1} x)$$

$$17. \cot (2 \arctan x)$$

$$18. \sin (2 \arcsin x)$$

$$19. \cos (3 \arcsin x)$$

บทที่ 14

การแปลงสูตรระหว่างผลคูณ และผลบวก หรือผลลบ

1. การแปลงสูตรจากผลคูณเป็นผลบวกหรือผลลบ

จากสูตร $\sin(A+B)$ ทราบว่า $\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A+B) \dots (1)$

และจากสูตร $\sin(A-B)$ ทราบว่า $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A-B) \dots (2)$

$$(1) + (2) \qquad 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$(1) - (2) \qquad 2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

ดังนั้นเกิดเป็นสูตรว่า 2 เท่าของผลคูณของ sine และ cosine เกิดเป็นผลบวกหรือผลลบของ 2 sines คือ

$$1. \quad 2 \text{ เท่าของ } \sin A \cos B = \sin (\text{ผลบวกของมุม}) + \sin (\text{ผลลบของมุม})$$

$$2. \quad 2 \text{ เท่าของ } \cos A \sin B = \sin (\text{ผลบวกของมุม}) - \sin (\text{ผลลบของมุม})$$

และจากสูตร $\cos(A+B)$ ทราบว่า $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) \dots (3)$

จากสูตร $\cos(A-B)$ ทราบว่า $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A-B) \dots (4)$

$$(3) + (4) \qquad 2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$(4) - (3) \qquad 2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

ดังนั้นเกิดเป็นสูตรว่า 2 เท่าของผลคูณของ 2 cosines ได้ผลเป็นผลบวกของ 2 cosines และ 2 เท่าของผลคูณของ 2 sines ได้ผลเป็นผลลบของ 2 cosines ดังนี้

$$3. \quad 2 \text{ เท่าของ } \cos A \cos B = \cos (\text{ผลบวกของ 2 มุม}) + \cos (\text{ผลลบของ 2 มุม})$$

$$4. \quad 2 \text{ เท่าของ } \sin A \sin B = \cos (\text{ผลลบของ 2 มุม}) - \cos (\text{ผลบวกของ 2 มุม})$$

ตั้งแต่บัดนี้เป็นต้นไป ตรีโกณมิติเริ่มจะยากขึ้นทุกที ฉะนั้น ทั้ง 4 สูตรที่กล่าวถึงนี้ นักเรียนจึงควรต้องรีบท่องให้คล่องเสียก่อน เพื่อจะได้ไม่ปะปนกับสูตรต่อไป

ตัวอย่างที่ 1 จงแปลง $2 \sin 3\theta \cos \theta$ เป็นผลบวก

วิธีทำ

$$\text{สูตร } 2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$$

$$2 \sin 3\theta \cos \theta = \sin (3\theta + \theta) + \sin (3\theta - \theta) \\ = \sin 4\theta + \sin 2\theta$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแปลง $\cos \frac{3A}{2} \cos \frac{5A}{2}$ เป็นผลบวกหรือผลลบ

วิธีทำ

$$\text{สูตร } 2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$$

$$\cos \frac{3A}{2} \cos \frac{5A}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{3A}{2} + \frac{5A}{2} \right) + \cos \left(\frac{3A}{2} - \frac{5A}{2} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} [\cos 4A + \cos -A] = \frac{1}{2} [\cos 4A + \cos A]$$

ตัวอย่างที่ 3 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ $\frac{\sin 8\theta \cos \theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin 4\theta}$

วิธีทำ

$$\text{สูตร } 2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$$

$$\text{และ } 2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$$

$$\frac{(\sin 8\theta \cos \theta) - (\sin 6\theta \cos 3\theta)}{(\cos 2\theta \cos \theta) - (\sin 3\theta \sin 4\theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (\sin 9\theta + \sin 7\theta) - \frac{1}{2} (\sin 9\theta + \sin 3\theta)}{\frac{1}{2} (\cos 3\theta + \cos \theta) - \frac{1}{2} (\cos -\theta - \cos 7\theta)} \\ = \frac{\frac{1}{2} (\sin 9\theta + \sin 8\theta - \sin 9\theta - \sin 3\theta)}{\frac{1}{2} (\cos 3\theta + \cos \theta - \cos \theta + \cos 7\theta)} \\ = \frac{\sin 8\theta - \sin 3\theta}{\cos 3\theta + \cos 7\theta}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ก.

จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้เป็นรูปของผลบวกหรือผลลบ

- | | |
|---|---|
| 1. $2 \sin 3\theta \cos \theta$ | 2. $2 \cos 6\theta \sin 3\theta$ |
| 3. $2 \cos 7A \cos 5A$ | 4. $2 \sin 3A \sin 2A$ |
| 5. $2 \cos 5\theta \sin 4\theta$ | 6. $2 \sin 4\theta \cos 8\theta$ |
| 7. $2 \sin 9\theta \sin 3\theta$ | 8. $2 \cos 9\theta \sin 7\theta$ |
| 9. $2 \cos 2\alpha \cos 11\alpha$ | 10. $2 \sin 5\alpha \sin 10\alpha$ |
| 11. $\sin 4\alpha \cos 7\alpha$ | 12. $\sin 3\alpha \sin \alpha$ |
| 13. $\cos \frac{A}{2} \sin \frac{3A}{2}$ | 14. $\sin \frac{5A}{2} \cos \frac{7A}{2}$ |
| 15. $2 \sin (2\theta + \phi) \cos (\theta - 2\phi)$ | 16. $2 \cos (60 + \alpha) \sin (60 - \alpha)$ |

จงพิสูจน์

17. $\sin (45^\circ + A) (45^\circ - A) = \frac{1}{2} \cos 2A$
18. $\cos (36^\circ - A) \cos (36^\circ + A) + \cos (54^\circ + A) \cos (54^\circ - A) = \cos 2A$
19. $(\sin 3A + \sin A) \sin A + (\cos 3A - \cos A) \cos A = 0$
20. $\sin A \sin (A + 2B) - \sin B \sin (B + 2A) = \sin (A - B) \sin (A + B)$
21. $\sin (\beta - \gamma) \cos (\alpha - \delta) + \sin (\gamma - \alpha) \cos (\beta - \delta) + \sin (\alpha - \beta) \cos (\gamma - \delta) = 0$

จงทำให้เป็นผลบวกหรือผลลบของ 2 sines หรือ 2 cosines แล้วหาค่าต่อไปนี้จากตาราง sines หรือ cosines

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 22. $2 \cos 60^\circ \sin 30^\circ$ | 23. $2 \cos 45^\circ \cos 53^\circ$ |
| 24. $\sin 35^\circ \cos 45^\circ$ | 25. $2 \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ |
| 26. $\sin 52^\circ \sin 75^\circ$ | 27. $2 \sin 55^\circ \cos 40^\circ$ |
| 28. $\cos 32^\circ \cos 58^\circ$ | 29. $\cos 140^\circ \sin 78^\circ$ |

จงทำเป็นผลบวกหรือผลลบของ 2 sines หรือ 2 cosines

$$30. \quad 2 \cos (2A+B) \cos (A-B) \qquad 31. \quad 2 \sin (A+3B) \sin (2A+5B)$$

$$32. \quad 2 \cos (x+2y) \sin (3x+4y) \qquad 33. \quad 2 \cos (3x+5y) \sin (x-y)$$

2. การแปลงสูตรจากผลบวกหรือผลลบเป็นผลคูณ

เนื่องจาก $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

และ $\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

ฉะนั้น $\sin (A+B) + \sin (A-B) = 2 \sin A \cos B \quad \dots\dots\dots (1)$

และ $\sin (A+B) - \sin (A-B) = 2 \cos A \sin B \quad \dots\dots\dots (2)$

เนื่องจาก $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

และ $\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

ฉะนั้น $\cos (A+B) + \cos (A-B) = 2 \cos A \cos B \quad \dots\dots\dots (3)$

และ $\cos (A+B) - \cos (A-B) = -2 \sin A \sin B \quad \dots\dots\dots (4)$

สังเกตสูตรที่ได้ตั้งแต่ข้อ (1) ถึงข้อ (4) นั้นมุมของ sines หรือ cosines ที่กำหนดเป็นมุมรวม (compound) แต่ในการทำแบบฝึกหัดจริง ๆ และการที่จะใช้ต่อไปนั้นเขากำหนดมุมเดียว ฉะนั้น ทั้ง 4 ข้อที่กล่าวมาแล้ว จึงยังจะนับเป็นสูตรมิได้

3. ดังนั้นจึงสมมติให้ $A+B = x$

และ $A-B = y$

$$2A = x+y$$

$$A = \frac{x+y}{2}$$

$$2B = x-y$$

$$B = \frac{x-y}{2}$$

ฉะนั้น จาก (1)

$$\sin (A+B)-\sin (A-B)=2 \sin A \cos B$$

จึงเป็นสูตร

$$\sin x+\sin y=2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

* สูตร (1) ผลบวกของ 2 sines = 2 sin (ครึ่งผลบวกของมุม)
cos (ครึ่งผลลบของ 2 มุม)

จาก (2) $\sin (A+B)-\sin (A-B)=2 \cos A \sin B$

$$\sin x-\sin y=2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

* เกิดสูตร (2) ผลลบของ 2 sines = 2 cos (ครึ่งผลบวกของมุมทั้ง 2)
sin (ครึ่งผลลบของมุมทั้ง 2)

จาก (3) $\cos (A+B)+\cos (A-B)=2 \cos A \cos B$

ฉะนั้น $\cos x+\cos y=2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

* เกิดสูตร (3) ผลบวกของ 2 cosines = 2 cos (ครึ่งผลบวกของมุมทั้ง 2)
cos (ครึ่งผลลบของมุมทั้ง 2)

จาก (4) $\cos (A+B)-\cos (A-B)=-2 \sin A \sin B$

$$\begin{aligned} \cos x-\cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(-\sin \frac{x-y}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin -\left(\frac{x-y}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} \end{aligned}$$

* เกิดสูตร (4) ผลลบของ 2 cosines = 2 sin (ครึ่งผลบวกของ 2 มุม)
sin (ครึ่งผลลบของ 2 มุมกลับมุมหลังตั้ง)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{ON} (NQ + RL) \\
 &= \frac{1}{ON} \cdot 2PS \\
 &= \frac{2PS}{OP} \cdot \frac{OP}{OI} \\
 &= \frac{2PS}{OP} \cos \frac{x-y}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

(2) $\sin x - \sin y$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{NQ}{ON} - \frac{RL}{OL} \\
 &= \frac{1}{OL} (NQ - RL) \\
 &= \frac{1}{OL} HK \\
 &= \frac{1}{OL} (PH + PK) \\
 &= \frac{1}{OL} (2PK) \\
 &= 2 \cdot \frac{PK}{PL} \cdot \frac{PL}{OL} \\
 &= 2 \cdot \frac{PK}{PL} \sin \frac{x-y}{2}
 \end{aligned}$$

$\hat{O}PS + \hat{S}PL$

$$= 1 \text{ ไร่ } (\text{สี่ไร่})$$

$\hat{O}PS + \hat{P}OS$

$$= 1 \text{ ไร่ } \therefore \hat{O}PS + \hat{S}PL = \hat{O}PS + \hat{P}OS$$

$$\therefore \hat{S}PL = \hat{P}OS = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \hat{K}PL = \frac{x+y}{2}$$

$\sin x - \sin y$

$$= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \cos x + \cos y &= \frac{OQ}{ON} + \frac{OR}{OL} \\
 &= \frac{1}{OL} (OQ + OR)
 \end{aligned}$$

$\therefore NH = KL$ พิสูจน์จาก $\triangle PNH$ และ $\triangle PKL$ (เท่ากันทุกประการ)

$$\therefore QS = SR \quad \therefore OQ + OR = 2OS$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos x + \cos y &= \frac{1}{OL} \cdot 2OS \\
 &= \frac{2OS}{OP} \cdot \frac{OP}{OL} \\
 &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \cos x - \cos y &= \frac{OQ}{ON} - \frac{OR}{OL} \\
 &= \frac{1}{OL} (OQ - OR) \\
 &= \frac{-2RS}{OL} = \frac{-2KL}{OL} = \frac{-2KL}{OL} \cdot \frac{PL}{OL} \\
 &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(-\sin \frac{x-y}{2} \right) \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin -\frac{(x-y)}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ $\frac{\cos 2A - \cos 5A}{\sin 2A + \sin 5A} = \cot \frac{7A}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos 2A + \cos 5A}{\sin 2A + \sin 5A} &= \frac{2 \cos \frac{7A}{2} \cos \frac{-3A}{2}}{2 \sin \frac{7A}{2} \cos \frac{-3A}{2}} \\
 &= \cot \frac{7A}{2}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงทำเป็นผลคูณ $\sin 52^\circ - \sin 32^\circ$

วิธีทำ

$$\sin 52^\circ - \sin 32^\circ = 2 \cos 42^\circ \sin 10^\circ$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ข.

จงทำเป็นผลคูณ

1. $\sin 2A + \sin A$

2. $\cos 2A + \cos 3A$

3. $\cos 5A - \cos 7A$

4. $\sin 5A - \sin 3A$

5. $\sin 11A + \sin 5A$

6. $\cos 3A + \cos 5A$

7. $\cos A - \cos 5A$

8. $\sin 3A - \sin 7A$

9. $\sin 30^\circ + \sin 62^\circ$

10. $\cos 35^\circ - \cos 55^\circ$

11. $\cos 42^\circ + \cos 36^\circ$

12. $\sin 52^\circ - \sin 32^\circ$

13. $\cos 52^\circ - \cos 42^\circ$

14. $\sin 70^\circ + \sin 50^\circ$

จงพิสูจน์

15. $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \tan 2\alpha$

16. $\frac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}$

17. $\frac{\cos 4\theta - \cos \theta}{\sin \theta - \sin 4\theta} = \tan \frac{5\theta}{2}$

18. $\frac{\cos 2\theta - \cos 12\theta}{\sin 12\theta + \sin 2\theta} = \tan 5\theta$

19. $\sin (60^\circ + A) - \sin (60^\circ - A) = \sin A$

20. $\cos (30^\circ - A) + \cos (30^\circ + A) = \sqrt{3} \cos A$

21. $\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = -\sqrt{2} \sin A$

22. $\frac{\cos (2\alpha - 3\beta) + \cos 3\beta}{\sin (2\alpha - 3\beta) + \sin 3\beta} = \cot \alpha$

23. $\frac{\cos (\theta - 3\phi) - \cos (3\theta + \phi)}{\sin (3\theta + \phi) + \sin (\theta - 3\phi)} = \tan (\theta + 2\phi)$

$$24. \frac{\sin (\alpha+\beta)-\sin 4 \beta}{\cos (\alpha+\beta)+\cos 4 \beta} = \tan \left(\frac{\alpha-3 \beta}{2} \right)$$

$$25. \frac{\sin 60^{\circ}+\sin 30^{\circ}}{\cos 30^{\circ}-\cos 60^{\circ}} = \cot 15^{\circ}$$

$$26. \frac{\sin 75^{\circ}-\sin 15^{\circ}}{\cos 75^{\circ}+\cos 15^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$27. \frac{\cos 20^{\circ}-\cos 70^{\circ}}{\sin 70^{\circ}-\sin 20^{\circ}} = 1$$

$$28. \frac{\sin (3 A+B)-\sin (A+B)}{\cos (3 A+B)+\cos (A+B)} = \tan A$$

$$29. \frac{\sin (3 A+2 B)+\sin A}{\cos A-\cos (3 A+2 B)} = \cot (A+B)$$

$$30. \frac{\cos 3 B-\cos (4 A+3 B)}{\sin (4 A+3 B)+\sin 3 B} = \tan 2 A$$

5. การแปลงสูตรจากผลคูณเป็นผลบวกหรือผลลบ 4 สูตร และการแปลงสูตรจากผลบวกหรือผลลบเป็นผลคูณอีก 4 สูตรด้วยกัน เป็นสูตรที่สำคัญมากในวิชาตรีโกณมิติ นักเรียนจะต้องพยายามท่องจำให้ได้โดยมิให้สูตร 2 หนุ่มนั้นสลับกัน และต่อไปนี้เป็นแบบฝึกหัดที่ใช้สูตรทั้ง 8 ทักกล่าวแล้วทำให้ยุ่งยากยิ่งขึ้น แบบฝึกหัดเหล่านี้ ถ้านักเรียนเห็นว่าเป็นหมู่บวก หรือลบของ 2 cosines หรือ 2 sines ต้องทำเป็นผลคูณทันที แต่ถ้าโจทย์เป็นผลคูณอยู่แล้วขอให้นักเรียนทำเป็นผลบวกหรือผลลบทันที ดังตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $\cos 3A + \sin 2A - \sin 4A = \cos 3A (1 - 2 \sin A)$
 (ในที่นี้นักเรียนดูข้างซ้าย $\cos 3A$ จะบวกกับ $\sin 2A$ แล้ว
 ทำเป็นผลคูณมิได้ ต้องจับคู่ $\sin 2A - \sin 4A$ แล้วทำเป็นผลคูณ)

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\cos 3A + \sin 2A - \sin 4A &= \cos 3A + 2 \cos 3A \sin A - 2A \\ &= \cos 3A (1 - \sin 2A)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin 2(\alpha + \beta + \gamma)$
 $= 4 \sin(\beta + \gamma) \sin(\gamma + \alpha) \sin(\alpha + \beta)$

วิธีทำ

จากด้านซ้าย $(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + [\sin 2\gamma - \sin 2(\alpha + \beta + \gamma)]$

$$\begin{aligned}&= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos(\alpha + \beta + 2\gamma) \sin -(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta + 2\gamma) \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin(\alpha + \beta) [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)] \\ &= 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot 2 \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \\ &= 4 \sin(\alpha + \beta) \sin(\gamma + \alpha) \sin(\beta + \gamma)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงกระจาย $4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ เป็นผลบวกของ 4 cosines

วิธีทำ

$$\begin{aligned}4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= 2 \cos \alpha (2 \cos \beta \cos \gamma) \\ &= 2 \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] \\ &= 2 \cos \alpha \cos(\beta + \gamma) + 2 \cos \alpha \cos(\beta - \gamma) \\ &= \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta - \gamma) + \cos \\ &\quad (\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) \\ \text{จัดลำดับใหม่ดังนี้} &= \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos -(\beta + \gamma - \alpha) + \cos \\ &\quad (\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos \\ &\quad (\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha - \beta)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 (60^\circ + \alpha) + \cos^2 (60^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$$

วิธีทำ

ข้อนี้ก่อนจะทำผลบวกเป็นผลคูณ เมื่อมีกำลัง 2 แบบนี้จะทำ
ยังไม่ได้ ฉะนั้นต้องทำให้กำลังสองหมดไปเสียก่อน โดยใช้สูตร

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x]$$

$$\text{เมื่อให้ } x = 60^\circ + \alpha$$

$$\cos^2 (60^\circ + \alpha) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(60^\circ + \alpha)]$$

$$\text{และเมื่อให้ } x = 60^\circ - \alpha$$

$$\cos^2 (60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(60^\circ - \alpha)]$$

ฉะนั้น จากข้างซ้ายมี

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} [1 + \cos 2(60^\circ + \alpha)] + \frac{1}{2} [1 + \cos 2(60^\circ - \alpha)] \\ &= \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} [2 + \cos 2(60^\circ + \alpha) + \cos 2(60^\circ - \alpha)] \\ &= \cos^2 \alpha + 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 120^\circ \cos 2\alpha \\ &= \cos^2 \alpha + 1 + \cos 120^\circ \cos 2\alpha \\ &= \cos^2 \alpha + 1 - \frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่า $\sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 8x \sin 2x$

(1) วิธีทำ ด้านซ้ายมือ $\sin^2 5x - \sin^2 3x = (\sin 5x + \sin 3x)(\sin 5x - \sin 3x)$

$$= 2 \sin 4x \cos x \cdot 2 \cos 4x \sin x$$

$$= (2 \sin 4x \cos 4x)(2 \sin x \cos x)$$

$$= \sin 8x \sin 2x$$

(2) วิธีที่ 2 ด้านขวามือ $= \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 10x)$

$$= \frac{1}{2}[1 - 2 \sin^2 3x - 1 + 2 \sin^2 5x]$$

$$= \sin^2 5x - \sin^2 3x$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ค.

จงพิสูจน์

1. $\sin 5A + \sin A - \sin A = \sin 2A (2 \cos 3A + 1)$

2. $\cos 3\theta - \sin \theta - \sin 5\theta = \cos 3\theta (1 + 2 \sin 2\theta)$

3. $\cos \theta - \cos 2\theta + \cos 5\theta = \cos 2\theta (2 \cos 3\theta - 1)$

4. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{3\alpha}{2}$

5. $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

6. $\frac{\sin 7x - \sin 5x}{\cos 7x - \cos 5x} = -\cot 6x$

7. $\frac{\cos \frac{3A}{2} + \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{3A}{2} + \sin \frac{A}{2}} = \cos x$

8. $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha - 2 \cos \alpha \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
9. $\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta = 4 \cos \theta \cos 2\theta \sin 4\theta$
10. $(\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x) = \sin 4x \sin 2x$
11. $\frac{\sin \phi \sec \phi + \sin \theta \sec \theta}{\sin \phi \sec \phi - \sin \theta \sec \theta} = \sin (\phi + \theta) \operatorname{cosec} (\phi - \theta)$
12. $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sec 2x$
13. $\cos A + \cos (120^\circ + A) + \cos (120^\circ - A) = 0$
14. $\sin^2 A + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + A \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) = \frac{3}{2}$
15. $\cos^2 \theta + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) = \frac{3}{2}$
16. $\tan 2\alpha + \sec 2\theta = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$
17. $\cot 4\alpha + \tan \alpha = \frac{2 \cos 3\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}$
18. $4 \sin A \sin (60^\circ + A) \sin (60^\circ - A) = \sin 3A$
19. $\sec A + \sec \left(\frac{2\pi}{3} + A \right) + \sec \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) = -3 \sec 3A$
20. $\operatorname{cosec}^2 36^\circ + \operatorname{cosec}^2 72^\circ = 4$
21. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \sqrt{3}$
22. $\sec \alpha + \sec \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \sec \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = -3 \sec 3\alpha$
23. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \sin^2 \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{3}{2}$
24. $\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{cosec} \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \operatorname{cosec} \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha \right) = 3 \operatorname{cosec} 3\alpha$

ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ บางครั้งจะยากและน่าสนใจยิ่งขึ้นเมื่อพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม ในการพิสูจน์ชนิดนี้จะต้องใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันของมุมประกอบ 1 มุมจาก หรือมุมประกอบ 2 มุมจาก และก่อนจะพิสูจน์จะต้องสังเกตว่า โจทย์จะต้องกำหนด “ในรูปสามเหลี่ยม ABC หรือ เมื่อ $A+B+C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้” เป็นต้น

เมื่อ $A+B+C = 180^\circ$

เราทราบว่า $\sin (A+B) = \sin (180^\circ - C) = \sin C$

$\cos (A+B) = \cos (180^\circ - C) = -\cos C$

$\tan (A+B) = \tan (180^\circ - C) = -\tan C$

ในทำนองเดียวกัน $\sin (B+C) = \sin A$

$\cos (B+C) = -\cos A$

$\tan (B+C) = -\tan A$

และ $\sin (C+A) = \sin B$

$\cos (C+A) = -\cos B$

$\tan (C+A) = -\tan B$

นอกจากนั้นบางครั้งเราต้องใช้ทวนกลับ เช่น $\cos C = -\cos (A+B)$

หรือ $\tan B = -\tan (C+A)$

หรือ $\sin A = \sin (B+C)$ เป็นต้น

นอกจากที่ทราบเช่นในคำอธิบายแล้ว ยังต้องทราบเลยไปอีกว่า

$$\text{เมื่อ } A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$\text{ฉะนั้น } \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$$

$$\cos \left(\frac{A+B}{2} \right) = \cos \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}$$

$$\tan \left(\frac{A+B}{2} \right) = \tan \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{และ } \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos \left(\frac{B+C}{2} \right) = \sin \frac{A}{2}$$

$$\tan \left(\frac{B+C}{2} \right) = \cot \frac{A}{2}$$

$$\text{และ } \sin \left(\frac{C+A}{2} \right) = \cos \frac{B}{2}$$

$$\cos \left(\frac{C+A}{2} \right) = \sin \frac{B}{2}$$

$$\tan \left(\frac{C+A}{2} \right) = \cot \frac{B}{2}$$

และเมื่อกำหนด $A+B+C = 180^\circ$ ต้องทราบอีกว่า

$$2A + 2B + 2C = 360^\circ$$

$$\sin (2A + 2B) = \sin (360^\circ - 2C) = -\sin 2C$$

$$\cos (2A + 2B) = \cos (360^\circ - 2C) = \cos 2C$$

$$\tan (2A + 2B) = \tan (360^\circ - 2C) = -\tan 2C$$

และทำนองเดียวกัน

$$\sin (2B + 2C) = -\sin 2A$$

$$\cos (2B + 2C) = \cos 2A$$

$$\tan (2B + 2C) = -\tan 2A$$

$$\sin (2C + 2A) = -\sin 2B$$

$$\cos (2C + 2A) = \cos 2B$$

$$\tan (2C + 2A) = -\tan 2B$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $A+B+C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

วิธีทำ

$$\text{ทำข้างซ้าย} = (\cos A + \cos B) + \cos C$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2} + 1$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right] + 1$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] + 1$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \times 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 1$$

$$= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $A+B+C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right] \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right] \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left[2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \right] \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 14 ง.

ถ้า $A+B+C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

- $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$
- $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = -4 \sin A \cos B \cos C$
- $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1$
- $\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$

$$* 6. \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$7. \frac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$* 8. \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0$$

$$9. \cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$$

$$10. (\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B) = \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$$

$$11. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$$

$$12. \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$13. \cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$$

$$14. \frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} + \frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = 1$$

$$15. \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$16. \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C} = \tan A \tan B$$

$$17. \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$$

$$18. \sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2(1 - \cos 2A \cos 2B \cos 2C)$$

$$19. \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

$$20. \sin 4A + \sin 4B - \sin 4C + 4 \cos 2A \cos 2B \sin 2C = 0$$

แบบฝึกหัดในบทต่อไปนี้เป็นแบบฝึกหัดที่ใช้สูตรการแปลงสูตรระหว่างผลคูณ

และผลบวก หรือ ผลลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ $\cot(15^\circ + A) + \tan(15^\circ + A) = \frac{4}{\cos 2A + \sqrt{3} \sin 2A}$

$$\begin{aligned} \tan(15^\circ + A) + \cot(15^\circ + A) &= \frac{\sin(15^\circ + A)}{\cos(15^\circ + A)} + \frac{\cos(15^\circ + A)}{\sin(15^\circ + A)} \\ &= \frac{\sin^2(15^\circ + A) + \cos^2(15^\circ + A)}{\cos(15^\circ + A) \sin(15^\circ + A)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin(30^\circ + 2A)} \\ &= \frac{2}{\sin 30^\circ \cos 2A + \cos 30^\circ \sin 2A} \\ &= \frac{4}{\cos 2A + \sqrt{3} \sin 2A} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi-A}{4} \sin \frac{\pi-B}{4} \sin \frac{\pi-C}{4}$

เมื่อ $A+B+C = 180^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ด้านซ้าย} &= 2 \sin \frac{A+B}{4} \cos \frac{A-B}{4} + \cos \frac{A+B}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{4} \cos \frac{A-B}{4} + 1 - 2 \sin^2 \frac{A+B}{4} \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{4} \left[\cos \frac{A-B}{4} - \sin \frac{A+B}{4} \right] + 1 \\ &= 2 \sin \frac{\pi-C}{4} \left[\cos \frac{A-B}{4} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right) \right] + 1 \\ &= 2 \sin \frac{\pi-C}{4} 2 \sin \frac{\pi-B}{4} \sin \frac{\pi-A}{4} + 1 \\ &= 1 + 4 \sin \frac{\pi-A}{4} \sin \frac{\pi-B}{4} \sin \frac{\pi-C}{4} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 เมื่อ $A+B+C = 180^\circ$ จงพิสูจน์

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ด้านซ้าย} &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= \frac{1}{2} [2 + 2 \cos (A+B) \cos (A-B)] + \cos^2 C \\ &= 1 - \cos C \cos (A-B) + \cos^2 C \\ &= 1 - \cos C [\cos (A-B) - \cos C] \\ &= 1 - \cos C [\cos (A-B) + \cos (A+B)] \\ &= 1 - \cos C \cdot 2 \cos A \cos B \\ &= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 14 จ.

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

- $\cos (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) + \cos (\beta + \gamma) \sin (\beta - \gamma) + \cos (\gamma + \delta) \sin (\gamma - \delta) + \cos (\delta + \alpha) \sin (\delta - \alpha) = 0$
- $\frac{\sin (\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin (\gamma - \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = 0$
- $\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta - \sin (\alpha + \beta)} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2}$
- $\sin \alpha \cos (\beta + \gamma) - \sin \beta \cos (\alpha + \gamma) = \cos \gamma \sin (\alpha - \beta)$
- $\cos \alpha \cos (\beta + \gamma) - \cos \beta \cos (\alpha + \gamma) = \sin \gamma \sin (\alpha - \beta)$
- $(\cos A - \sin A)(\cos 2A - \sin 2A) = \cos A - \sin 3A$
- $\cos (\alpha + \beta + \gamma) + \cos (\alpha + \beta - \gamma) + \cos (\alpha - \beta + \gamma) + \cos (\beta + \gamma - \alpha) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$
- $\sin (\beta + \gamma - \alpha) + \sin (\gamma + \alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta + \gamma) = \sin (\alpha + \beta - \gamma) + 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

9. $\tan(\gamma - \alpha) + \tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) = \tan(\gamma - \alpha) \tan(\alpha - \beta) \tan(\beta - \gamma)$
10. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 + 2 \cos(\beta + \gamma) \cos(\gamma + \alpha) \cos(\alpha + \beta)$
11. $\tan(A + 60^\circ) \tan(A - 60^\circ) + \tan A \tan(A + 60^\circ) + \tan A \tan(A - 60^\circ) = -3$
12. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2(A + B) - 2 \cos A \cos B \cos(A + B) = 1$
13. $\tan A + 2 \tan 2A + 4 \cot 4A = \cot A$
 ถ้า $A + B + C = 90^\circ$ จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี
14. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C = 1$
15. $\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma} = \cot \alpha \cot \beta$
16. $\tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha + \tan \alpha \tan \beta = 1$
 ถ้า $A + B + C = 180^\circ$ จงพิสูจน์
17. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
18. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
19. $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1$
20. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$
21. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C$
22. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
23. $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$
24. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$
25. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C$
26. $\sin(B + 2C) + \sin(C + 2A) + \sin(A + 2B) = 4 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
27. $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C$

บทที่ 15

ลอการิทึม (Logarithms.)

ลอการิทึม เขียนย่อ ๆ ว่า $\log$.

นิยาม

ลอการิทึมของเลขจำนวนใด เมื่อกำหนดฐานให้ คือ เลขชี้กำลังของฐาน ซึ่งเมื่อฐานยกกำลังนี้แล้ว จะเท่ากับเลขจำนวนนั้น

" $\log$." ไม่เคยอยู่โดด ๆ แบบในเครื่องหมายคำพูดนั้นเลย จะต้องมีจำนวนเลขจำนวนหนึ่งกำกับมาด้วย และจะต้องมีฐานในที่นี้สมมุติเลขที่กำกับมานั้น เป็นจำนวน N และฐานของ $\log$. นั้นเป็น a . ดังนี้เขียนเป็นรูป " $\log_a N$ "

" $\log_a N$ " อ่านว่า $\log$. ของจำนวน N . ฐาน a . ตามนิยามว่า " $\log_a N$ " เท่ากับเลขจำนวนหนึ่ง คือ x(1)
แต่ x ตัวนี้ เป็นเลขชี้กำลังของ a ซึ่งเมื่อ

$$a^x = N \text{(2)}$$

ดังนั้น เมื่อ $\log_a N = x$ เมื่อใด เราทราบได้ทันทีว่า

$$a^x = N \text{ เมื่อนั้น}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\log$. ของ 1024 เมื่อกำหนดฐานเป็น 4

วิธีทำ

$$\text{ให้ } \log_4 1024 = x$$

$$\therefore \text{ จากนิยาม } 4^x = 1024$$

$$2^{2x} = 2^{10}$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$\therefore \log_4 N = 5$$

ตัวอย่างที่ 2 $\log_2$ ของเลขจำนวนใด เมื่อกำหนดฐานเป็น 49. มีค่าเป็น 2
จงหาเลขจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้เลขจำนวนนั้นเป็นจำนวน N .

$$\therefore \log_{49} N = 2$$

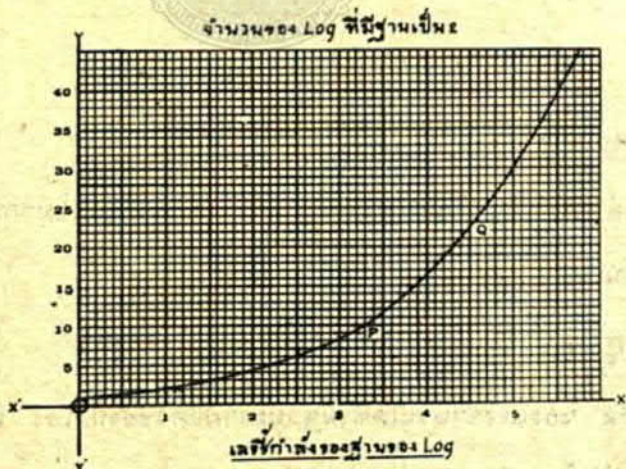
$$\text{ตามนิยาม } 49^2 = N$$

$$\therefore N = 2401$$

$$\therefore \log_{49} 2401 = 2$$

ตัวอย่าง จงเขียนกฎของ $\log_2 y = x$ บนสเกลใหญ่ที่สุด หาค่า
ของ $\log_2 10$, $\log_2 22.9$ ทศนิยม 2 ตำแหน่ง ด้วยวิธีการ
(ในที่นี้ใช้สเกล 10 นิ้ว และ .1 นิ้ว ต่อ 1 หน่วย บนแกน x
และ y ตามลำดับ จากสมการ $y = 2^x$ หรือ $\log_2 y = x$)

x	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
y	1	1.41	2	2.82	4	5.65	8	16	32



ดู จากกราฟ เมื่อ $y = 10$ $x = 3.32$
ถ้า $y = 22.9$ $x = 4.5$

แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ก.

1. จงหาค่าของ $\log$ ของ .008 เมื่อฐานเป็น 5
2. จงหาค่าของ $\log$ ของ .00001 เมื่อฐานเป็น .01
3. จงหาค่าของ $\log$ ของเลขจำนวนต่อไปนี้

เลขจำนวน	27,	.125,	.01,	.3,	1000
ฐาน	$\sqrt{3},$	8,	.1,	.9,	.001

4. จงหาค่าของ $\log_4 8$ $\log_3 243$, $\log_{.01} 100$, $\log_{\sqrt{7}} 343$
5. จงหาจำนวนเลขซึ่งค่าของ $\log$ ของจำนวนเลขนั้นมี

ฐาน	.1	.3,	.25,	.16,	9,	10
เป็น	$\frac{1}{2},$	- 2,	- 1,	$-\frac{1}{2},$	1.5,	- 3

2. สูตรของ logarithms.

- 2.1 $\log$ ของ 1 เมื่อมีฐานกำหนดให้เป็นจำนวนเลขมากกว่า 0 ย่อมมีค่าเป็น 0

พิสูจน์ เนื่องจาก $a^0 = 1$ ฉะนั้น $\log_a 1 = 0$

- 2.2 $\log$ ของเลขจำนวนใดที่มีฐานเท่ากับตัวของมันเอง มีค่าเป็น 1

พิสูจน์ เนื่องจาก $a^1 = a$ $\therefore \log_a a = 1$

2.3 log ของผลคูณ เท่ากับผลบวกของ log ของตัวคูณแต่ละตัว เมื่อมีฐานเท่ากัน คือ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

พิสูจน์ ให้ $\log_a M = x \quad \therefore M = a^x$

$\log_a N = y \quad \therefore N = a^y$

$\therefore MN = a^x \cdot a^y$

$MN = a^{x+y}$

$\therefore \log_a MN = x + y$

แทนค่า x และ y

$\therefore \log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2.4 log ของผลหารเท่ากับผลลบของ log ของตัวตั้งและตัวหาร เมื่อมีฐานเท่ากันคือ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

พิสูจน์ ให้ $\log_a M = x \quad \therefore M = a^x$

ให้ $\log_a N = y \quad \therefore N = a^y$

$\therefore \frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

2.5 $\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$

2.6 log ของเลขซึ่งยกกำลัง จะเท่ากับเลขชี้กำลังคูณด้วย log ของเลขจำนวนนั้น คือ $\log_a M^p = p \log_a M$

พิสูจน์ ให้ $\log_a M = x$

$M = a^x$

$M^p = a^{px}$

$\therefore \log_a M^p = px$

$= p \log_a M$

3. $\log$ สามัญ คือ $\log$ ของเลขจำนวนใด ๆ ซึ่งมีฐานเป็น 10 เช่น $\log_{10} N$ เรียกว่า $\log$ สามัญ หรือ Common $\log$ แต่ทั่ว ๆ ไปแล้ว มักจะไม่เขียนฐาน แต่ทิ้งไว้ลอย ๆ เป็น $\log N$ ให้เข้าใจเอาเองว่าฐาน 10

3.1 ค่าของ $\log$ ที่ปรากฏมักจะไม่เป็นจำนวนเต็มเสมอไป เช่น $\log_a N = x$; x นี้ อาจจะเป็นเลขจำนวนทศนิยม เช่น สมมุติ x เป็น 1.345 เป็นต้น เลขจำนวนเต็มหน้าทศนิยมนี้ เราเรียกว่า characteristic (แคนแรกเตอรืสติค) และเลขหลังจุดทศนิยม เราเรียกว่า Mantissa ตามหลักทั่ว ๆ ไปแล้ว characteristic จะเป็น + หรือ - ก็ได้ แต่ Mantissa ต้องมีจำนวนบวกเสมอ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\log$ ของ 243 ฐาน 9

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{ให้ } \log_9 243 &= x \\ 243 &= 9^x \\ 3^5 &= 3^{2x} \\ 2x &= 5 \\ x &= 2.5\end{aligned}$$

ดังนั้น $\log_9 243 = 2.5$

มี characteristic เป็น 2 Mantissa เป็น 5.

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ Mantissa และ Characteristic ของ $\log_9 \frac{1}{243}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\log_9 \frac{1}{243} &= x \\ \frac{1}{243} &= 9^x \\ \frac{1}{3^5} &= 3^{2x} \\ 3^{-5} &= 3^{2x} \\ 2x &= -5 \\ x &= -2.5\end{aligned}$$

ดังนั้น ทำ Mantissa เป็น + ให้ $x = -2 - .5 + 1 - 1 = -3.5$ Characteristic เป็น -3 Mantissa เป็น 5

เขียนรวม $\log_9 \frac{1}{243} = \bar{3}.5$

(เครื่องหมาย $\bar{3}$ หมายความว่า 3 ตัวเดียวเท่านั้นเป็น -)

3.2 วิธีหาแคแรคเตอริสติกของ $\log$ สามัญ

เนื่องจาก $10^1 = 10$ $\therefore \log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100$ $\therefore \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000$ $\therefore \log_{10} 1000 = 3$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$ $\therefore \log_{10} .1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = .01$ $\therefore \log_{10} .01 = -2$

ดังนั้น ก. เมื่อต้องการทราบค่าของ $\log_{10} 175$ คิด Characteristic ได้ดังนี้

$100 < 175 < 1000$

$10^2 < 175 < 10^3$

$\log 10^2 < \log 175 < \log 10^3$

$2 < \log 175 < 3$

ค่าของ $\log 175$ อยู่ระหว่าง 2 และ 3 คือ มากกว่า 2 ขึ้นไป แต่ยังไม่ถึง 3 ฉะนั้น $\log 175$ มีค่า $2 + (. \text{ทศนิยม})$ คือ $\log 175$ มี Characteristic เป็น 2

ข. เมื่อหาค่าของ $\log 17.5$

$10 < 17.5 < 100$

$10^1 < 17.5 < 10^2$

$\log 10 < \log 17.5 < \log 10^2$

$1 < \log 17.5 < 2$

ฉะนั้น Characteristic ของค่า $\log 17.5$ เป็น 1

ค. เมื่อดูค่าของ $\log .0175$

$$.01 < .0175 < .1$$

$$10^{-2} < .0175 < 10^{-1}$$

$$\log .01 < \log .0175 < \log .1$$

$$-2 < \log .0175 < -1$$

ฉะนั้น ค่าของ $\log .0175$ มากกว่า -2 ขึ้นไป แต่ยังไม่ถึง -1

$\log .0175 = -2 + (\text{ทศนิยม})$ ฉะนั้น Characteristic เป็น 2

3.3 วิธีหา Mantissa

วิธีหา Mantissa นั้น ดูจากตารางของ logarithm ตารางที่ใช้กันนี้ โดยมากใช้สำหรับนักเรียนชั้นนี้เพียง 4 ตำแหน่งเท่านั้น และนักเรียนจะต้องจำไว้ว่า $\log$ ของเลขซึ่งมีตัวเลขรูปเหมือนกัน Mantissa เท่ากัน ทั้งนี้ เพราะจำนวนเลขที่เหมือนกันจะเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนหลัก 100 หลัก 1,000 อย่างไรก็ได้ โดยใช้ 10 คูณเข้ากับหลักหน่วยซึ่งทำให้ค่า $\log$ เปลี่ยนแปลงแต่เพียงแคแครคเตอริสติก (Characteristic) เท่านั้น เช่น

$$\log 6.682 = 0.8249$$

$$\log 66.82 = \log (10 \times 6.682) = \log 10 + \log 6.682$$

$$= 1 + 0.8249 = 1.8249$$

$$\log 668.2 = \log (10^2 \times 6.682) = 2 \log 10 + \log 6.682$$

$$= 2 + 0.8249 = 2.8249$$

$$\log .6682 = \log (10^{-1} \times 6.682) = -1 \log 10 + \log 6.682$$

$$= \bar{1} + 0.8249 = \bar{1}.8249$$

$$\log .06682 = \log (10^{-2} \times 6.682)$$

$$= -2 \log 10 + \log 6.682$$

$$= \bar{2}.8249$$

1. การใช้ตาราง logarithm

การเปิดหา Mantissa จากตาราง log นั้น มีรูปตัวเลขทั้งหมด (ทั้งจำนวนเต็มและทศนิยมปนกัน) ตั้งต้นแต่ตัวเลขนำหน้าที่ไม่ใช่ 0 ไม่ต้องดูว่าเป็นกี่ตำแหน่งหน้าทศนิยมหรือหลังทศนิยม เช่น $\log 66.82$ หรือ $\log 668.2$ หรือ $\log 6.682$ หรือ $\log .66682$ ดูจากตารางดังนี้

No	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8252	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8227	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	4	5	6

ดูที่ช่อง No. ตรงตัวเลขที่ 66 หมายถึง 2 ตัวแรกของ 6682 เลขตัวที่ 3 เป็น 8 ดูตรงช่องบนยอดตารางตรงกับเลข 8 ดูเรื่อยลงมา ตรงบรรทัดเดียวกับ 66 จะเห็นเป็นเลข 8248 ตำแหน่งที่ 4 เป็นเลข 2 ดูบนยอดตารางขวามือตรงเลข 2 ช่องที่ 2 บรรทัดเดียวกับเลข 66 จะพบตัว 1 เขา 1 ที่ได้ไปรวมกับ 8248 ได้ผลเป็น 8249 แสดงว่า Mantissa เป็น 8249

การที่จะดูหลักความแตกต่างของ log ของเลขต่าง ๆ กันดูที่ Characteristic ตามวิธีหาแคแรคเตอริสติก ดังนี้

	100	<	668.2	<	1000
ฉะนั้น	log 100	<	log 668.2	<	log 1000
	2	<	log 668.2	<	3
ฉะนั้น	log 668.2	=	2.8249		
	log 66.92	=	1.8249		
	log 6.682	=	0.8249		
	log .06682	=	$\bar{2}.8249$		

- 4.1 การหา Antilog นั้น เมื่อต้องการจะรู้ว่าจำนวน log นั้น คือจำนวนเลขอะไร เช่น $\log N = x$ ฉะนั้น เมื่อได้ $x = 2.8249$ จะต้องการทราบจำนวน N ว่าเป็นเท่าไร ต้องไปเปิดตาราง Antilog จะทราบว่า $N = 668.2$

สรุปได้ว่าการใส่ Characteristic ให้นับจำนวนหลักของเลขจำนวนเต็มหน้าทศนิยมแล้วหักเสีย 1 ได้ Characteristic เช่น $\log 668.2 = 2.8249$, $\log 66.82$ ได้ 1.8249 ถ้าเลขนั้นเป็นจำนวนทศนิยมทั้งนั้น Characteristic จะต้องเป็น — ให้สังเกตดูว่าตัวหน้าออกจาก 0 อยู่หลังทศนิยมเป็นตำแหน่งที่เท่าไร ต้องได้ Characteristic เป็น — เท่านั้น เช่น $\log .06882$ ตัว 6 อยู่หลังทศนิยมเป็นตำแหน่งที่ 2 ต้องได้ Characteristic $\bar{2}$ และ $\log .006882 = \bar{3}.8249$

- 4.2 การเปิดตาราง Anti-logarithms นี้ ดูแค่ Mantissa คือเลขหลังจุดทศนิยม เช่น $\log N = 1.2459$ ดูช่องแรก (ช่อง log) บรรทัดที่มีเลข .24 ตัวที่ 3 ของ .2459 เป็นเลข 5 ดูบนยอดของตารางตรงกับเลข 5 ช่องเดียวกันนั้นบรรทัดเดียวกับ .24 จะพบ 1758 ตัวที่ 4 เป็นเลข 9 ดูบนยอดตารางช่องใหญ่สุดท้ายตรงกับเลข 9 บรรทัดเดียวกับ .24 เห็นเป็นจำนวนเลข 4 เอาเลข 4 นี้ไปเพิ่มท้าย 1758+4 เป็น 1762 ดังนี้

Anti-logarithms

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	011	222	334
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	011	222	334
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	011	222	334

การที่จะดูว่า N ตัวนี้ เป็นจำนวนเต็มเท่าใด และมีจุดทศนิยมอยู่ตรงที่ใด
 ต้องดูที่ Characteristic ในที่นี้ Characteristic เป็น 1 ฉะนั้น แสดงว่า
 มีเลขหน้าทศนิยม 2 ตำแหน่ง หรือเป็นเลขจำนวนเต็ม 2 หลัก

$$\log N = 1.2459$$

เปิด antilog คือ Mantissa .2459 ได้เลขจำนวน 1762 $\therefore N = 17.62$

$$\text{ถ้า } \log N = 3.2459$$

เปิด antilog วิธีเดียวกัน N = 1762 มีเลขจำนวนเต็ม 4 ตัว

$$\text{ถ้า } \log N = \bar{2}.2459$$

เปิด antilog ทราบว่า N = .01762

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\frac{2.31 \times .037 \times 1.43}{.0561 \times 3.87 \times 0.0019}$ โดยวิธีใช้ log

$$\text{วิธีทำ ให้ } X = \frac{2.31 \times .037 \times 1.43}{.0561 \times 3.87 \times 0.0019}$$

$$\text{ฉะนั้น } \log X = \frac{\log 2.31 \times .037 \times 1.43}{.0561 \times 3.87 \times 0.0019}$$

$$\therefore = \log 2.31 + \log .037 + \log 1.43 - \log .0561$$

$$- \log 3.87 - \log 0.0019$$

$$= 0.3636 + \bar{2}.5682 + 0.1553 - \bar{2}.7490 - 0.5877$$

$$- 3.2788$$

$$= 2.4716$$

เปิด antilog ทราบว่า

$$X = 296.2$$

ตัวอย่าง เลขจำนวนเต็มที่เป็นบวก จะมีได้กี่จำนวนที่สามารถมี Characteristic

เป็น 3 เมื่อเลขจำนวนนั้น ๆ เป็น $\log$ ฐาน 7

วิธีทำ สมมติให้ $\log_7 N = 3$

$$N = 7^3$$

สมมติให้ $\log_7 M = 4$

$$M = 7^4$$

ฉะนั้น $M - N$ คือเลขทุก ๆ จำนวนซึ่งอยู่ระหว่าง 7^3 และ 7^4 จึงเป็นเลขซึ่งจะมี Characteristic เป็น 3 เมื่อเป็น $\log$ ฐาน 7 จึงมีได้

$$7^4 - 7^3 = 2058$$

5. การเปลี่ยนฐาน $\log$ จากฐานเดิมให้เป็นฐานอื่น

ใช้ประโยชน์สำหรับเปลี่ยนให้เป็นฐาน 10 ซึ่งใช้ตาราง logarithm

ได้ สมมติให้เปลี่ยน $\log_b M$ เป็นฐาน a

$$\text{ให้ } \log_b M = X$$

$$\therefore M = b^X$$

$$\log_a M = \log_a b^X$$

$$= X \log_a b$$

$$\therefore X = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

$$\therefore \log_a M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\log_{12} 275$

วิธีทำ

$$\therefore \log_{12} 275 = \frac{\log 275}{\log 12} = \frac{2.4393}{1.0792}$$

$$= 2.26 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ข.

1. จงหา Characteristics ของ

$\log$ ของ 329, 1504, 2403, 10006, 12

เมื่อฐาน 3, 11, 7, 9, 19

2. จงหา Characteristics ของ $\log$ ตามัญของ

2.26, 625.1, .0325, .00001, 35951, .01

3. ถ้า Mantissa ของ $\log 6443$ เป็น .8011 จงหาค่าของ

$\log .6443$, $.06443$, $.006443$, 64.43 , 644.3

4. ถ้า $\log 32.5 = 1.51188$ จงหาจำนวนเลข ซึ่งมี $\log$ ของเลขนั้น ๆ เป็น

2.51188 , 1.51188 , 2.51188 , 3.51188 , 3.51188

5. จงหาค่าของ $\log \frac{15}{4} - \log \frac{1}{160} + \log \frac{2}{3}$

6. จงหารากที่ 7 ของ 9

กำหนด $\log 3 = .4771$ and $\log 1.602 = .2045$

7. จงหาค่าของ $\frac{2.38 \times 3.901}{4.83}$ และ $\frac{925.9 \times 1.597}{740.3}$

8. จงอ่านค่าจากตาราง logarithms ของ

.345, 54.6, 6347, 6.347×10^3 , $.345 \times 10^7$

9. จงอ่านจากตาราง antilog หาจำนวนเต็ม เมื่อลอกการทิมของเลข
จำนวนนั้น มีค่าเป็น 2.732, 3.127, 0.6425, 1.4345, 5.2346, 10.835
จงหาค่าของ

10. 24.32×6.185

11. $396.4 \times .00017$

12. $\frac{3.8 \times 5.69}{10.78}$

13. $\frac{2.803}{.0634 \times 4.185}$

14. $24.37 \times \frac{39.4}{89.7}$

15. $\frac{7.859}{45.28}$ ของ 30.1

16. $6 \sqrt{.489} \times \frac{3.2}{4.7}$

17. $\log_{24} 475$ and $\log_{8.55} 12.45$

18. $\log_{.02} \sqrt{148}$

19. $\log_9 12 \times \log_{12} 9$

20. $\log_a a \cdot \log_b b \cdot \log_c c$

6. สมการซึ่งมีจำนวนตัวแปรค่าเป็นกำลัง (Exponential Equations)

สมการชนิดนี้ ตัวแปรที่ต้องการทราบค่าของมัน กลายเป็นเลข
ชี้กำลังในสมการไป และการถอดสมการชนิดนี้ ต้องใช้ $\log$ เข้าช่วย
จึงจะได้

ตัวอย่างที่ 1 จงถอดสมการ $5^x = 2^{-y}$ และ $5^{x+y} = 2^{2-x}$

ต้องการหาคณิณมเพียง 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ

$$5^x = 2^{-y}$$

$$\text{ฉะนั้น } \log 5^x = \log 2^{-y}$$

$$x \log 5 = -y \log 2$$

$$x = -y \frac{\log 2}{\log 5} \dots\dots\dots (1)$$

$$5^{x+y} = 2^{2-x}$$

$$\log 5^{x+y} = \log 2^{2-x}$$

$$(x+y) \log 5 = (2-x) \log 2$$

$$2 \log 5 + y \log 5 = 2 \log 2 - x \log 2$$

$$y \log 5 + x \log 2 = -2 (\log 5 - \log 2)$$

เอาค่าของ x ใน (1) มาแทน

$$y \log 5 - y \frac{\log 2}{\log 5} \times \log 2 = -2 (\log 5 - \log 2)$$

$$y [(\log 5)^2 - (\log 2)^2] = -2 \log 5 (\log 5 - \log 2)$$

$$y (\log 5 - \log 2) (\log 5 + \log 2) = -2 \log 5$$

$$y (\log 5 + \log 2) = -2 \log 5$$

$$y \log 10 = -2 \log 5$$

$$y = -2 \log 5$$

$$= -2 \times 0.6990$$

$$= -1.3980$$

$$x = -y \frac{\log 2}{\log 5}$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ได้ } x = -(-2 \log 5) \times \frac{\log 2}{\log 5} = 2 \log 2$$

$$= 2 \times 0.3010$$

$$x = 0.6020$$

$$x = .60, y = -1.40$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\log 2 = .3010$ จงหาค่าสมการต่อไปนี้

$$2^x \cdot 5^y = 1 \text{ and } 5^{x+1} \cdot 2^y = 2$$

ใช้ $\log$ เข้าช่วยได้

$$x \log 2 + y \log 5 = 0$$

$$(x+1) \log 5 + y \log 2 = \log 2$$

อาจทำสั้น ๆ เพื่อไม่เบลอของแรงงานเขียน สมมติให้ $\log 2 = a$

$$\log 5 = b$$

$$ax + by = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$b(x+1) + ay = a \quad \dots\dots\dots$$

$$bx + ay = a - b \quad \dots\dots\dots (2)$$

เอา $a \times (1)$ ได้

$$a^2x + aby = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

เอา $b \times (2); b^2x + aby = ab - b^2 \quad \dots\dots\dots (4)$

$$(3) - (4); -(a^2 - b^2)x = b(a - b)$$

$$x = -\frac{b}{a+b}$$

$$= -\frac{\log 5}{\log 2 + \log 5} = -\log 5$$

$$-\log 5 = -\log 10 + \log 2 = -1 + .3010 = -.6990$$

$$x = -.6990$$

จากสมการ (1) $y = -\frac{ax}{b} = -\frac{a}{b} (-\log 5)$

$$= \frac{a}{b} \log 5$$

$$= \frac{\log 2}{\log 5} \cdot \log 5$$

$$= \log 2 = .3010$$

$$x = .6990, y = .3010$$

ตอบ

แบบฝึกหัดชุดที่ 15 ค.

จงถอดสมการต่อไปนี้ :-

1. $2^{x-1} = 5$

2. $3^{x-4} = 7$

3. $5^{1-x} = 6^{x-3}$

4. $2^x = 3^y$ และ $2^{y+1} = 3^{x-1}$

5. $8^{5-3x} = 12^{4-2x}$

6. $2^x \cdot 3^{x+4} = 7^x$

7. $2^{2x+1} \cdot 3^{2x+2} = 7^{4x}$

8. $\frac{7}{2^{x-4}} = 3^{3x-7}$

9. $7^{x+y} \cdot 3^{2x+y} = 9$

และ $\frac{3^{x-y}}{2^{x-2y}} = 3^x$

กำหนด $\log 2 = .3010$

$\log 3 = .4771$

$\log 7 = .8451$

10. กำหนด $\log 27 = a$, $\log 56 = b$, $\log 15 = c$ จงหาค่าของ

$\log 28$ และ $\log 21$ เป็นเทอมของ a, b, c

11. กำหนด $\log 36 = a$, $\log 66 = b$, $\log 2 = c$ จงหา $\log 242$

ในเทอมของ a, b, c

12. แก้สมการ $3^{x+2} \times 7^{y-1} = 3$, $3^y \times 7^{x+1} = 7$

Logarithms ของฟังก์ชันของมุม

7.1 การหาค่าของ logarithmic sines เช่นเดียวกับการหาค่าของ Natural sines เช่นต้องการหาค่าของ $\log \sin 18^\circ 36'$

ปรากฏว่า ถ้าจะเปิดจากตาราง Natural sines จะเห็นว่า $\sin 18^\circ 36' = .3190$ ฉะนั้น $\log \sin 18^\circ 36' = \log .3190$ ดูจากตาราง logarithms จะได้ $\log .3190 = \bar{1}.5038$ $\log \sin 18^\circ 36' = \bar{1}.5038$ แต่แทนที่จะเปิดตาราง Natural sines แล้วเปิดตาราง logarithms อีกทีหนึ่ง อาจจะเปิดหาค่าของ $\log \sin 18^\circ 36'$ ได้จากตาราง logarithmic sines ดังนี้คือ

ตาราง Logarithmic sines

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
											1	2	3	4	5
18	9.4900	4923	4946	4949	4992	5015	5037	5060	5082	5104	4	8	11	15	19
19	9.5136	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	4	7	11	14	18

ดูที่ช่อง Deg เมื่อต้องการ $\sin 18^\circ$ และดูที่ช่อง 36' บรรทัดเดียวกับเลข 18 จะเห็นว่า $\log \sin 18^\circ 36'$ มีค่าเท่ากับ 9.5037 แต่ค่าของ $\log \sin 18^\circ 36'$ หรือ $\log \sin$ ทั่วไป จะต้องมี characteristic เป็น $\bar{1}$ เนื่องจากค่าของ sine ไม่เกิน 1 แต่ในตาราง $\log \sin$ นี้ ได้ค่าเป็น 9.5037 คือค่าจริง $\bar{1}.5037 + 10$ ฉะนั้นจึงมิให้ปะปนกันโดยเขียนเครื่องหมายแทน Logarithmic เป็น $L \sin 18^\circ 36'$ เสีย หมายถึงว่ามีค่าเท่ากับ $\log \sin 18^\circ 36' + 10$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\log \sin 19^{\circ} 31'$

ดูที่ $L \sin 19^{\circ} 30'$ ได้ค่า 9.5235 ดูที่ mean differences อีก 1 มีตัวเลข 4 นำไปเพิ่มที่ตัวท้ายของเลขทศนิยมตำแหน่งที่ 4 รวมเข้าไปได้ $9.5235 + .0004$

$$\text{ฉะนั้น } L \sin 19^{\circ} 31' = 9.5239$$

$$\text{แต่ } L \sin 19^{\circ} 31' = \log \sin 19^{\circ} 31' + 10$$

$$\log \sin 19^{\circ} 31' = 9.5239 - 10$$

$$= \bar{1}.5239$$

7.2 การหา Antilogarithmic sine นั้นไม่มีตาราง Anti-log ให้ดู ฉะนั้น จึงต้องดูจากค่าตาราง logarithmic sine นั้นเอง เช่น ต้องการทราบว่าถ้า $\log \sin x = \bar{1}.5246$ x จะมีค่าเท่าใด เนื่องจากในตารางนี้ $\log \sin x + 10 = L \sin$ ฉะนั้น ก่อนจะเปิดตาราง logarithmic sines จึงต้องนำ 10 มาบวกค่า $\log \sin$ ที่แท้จริงในใจ $\bar{1}.5246 + 10 = 9.5246$ ตรวจดูในตารางว่าช่องใด ค่าของ $L \sin$ จะมีใกล้เคียง 9.5246 พบในช่อง $L \sin 19^{\circ} 30' = 9.5235$ เป็นค่าใกล้เคียง ดังนั้น นำค่า 9.5235 มาเปรียบเทียบกับค่า 9.5246 จะเห็นว่าน้อยกว่ากัน .0011 ดังนั้นไปดูที่บรรทัดเดียวกับ 19 ตรงช่อง mean differences จะเห็นว่า ถ้าต่างกัน 11 หรือ .0011 นั้น ค่าของลบตาต่างกัน 3' ดังนั้น 9.5246 ตรงกับค่า $L \sin 19^{\circ} 33'$

$$\text{ดังนั้น } L \sin 19^{\circ} 33' = \log \sin 19^{\circ} 33' + 10$$

$$\log \sin 19^{\circ} 33' = \bar{1}.5246 = \log \sin x$$

$$x = 19^{\circ} 33'$$

7.3 การหาค่าของ Logarithmic cosines

การใช้ตาราง logarithmic cosines ก็เช่นเดียวกับการใช้ตาราง logarithmic sines จะแตกต่างกันแต่เพียงว่า เมื่อมุมโตขึ้นค่าของฟังก์ชันของมุมลดลง เมื่อมุมโตขึ้น ค่าของ logarithm ของ cosines ของมุมจะต้องน้อยลง ดังนั้นในช่องของ mean differences เมื่อมุมโตขึ้น 1' ต้องเอาค่าในแถว 1' ไปหักจากค่าของ logarithmic cosines เดิม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\log \cos 30^{\circ} 23'$

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
											1'	2'	3'	4'	5'
30	9.9375	9371	9377	9362	9358	9353	9349	9344	9340	9335	1	2	3	4	5

ดูตรงช่อง Deg ที่เลข 30° จะทราบว่า $L \cos 30^{\circ} 0' = 9.9375$ ต้องการค่า $\log \cos 30^{\circ} 23'$ ดูที่ $L \cos 30^{\circ} 18' = 9.9362$ ยังขาดอีก 5' จะครบ $30^{\circ} 23'$ ฉะนั้นดูที่ mean differences บรรทัดเดียวกันตรงกับแถว 5' ได้ 4 หมายถึง .0004 ฉะนั้นเมื่อมุมโตขึ้น 5' ค่าของ $L \cos$ จะลดลง .0004 คือ

$$\begin{aligned}
 L \cos 30^{\circ} 23' &= 9.9362 - .0004 \\
 &= 9.9358 \\
 \log \cos 30^{\circ} 23' &= \bar{L} \cos 30^{\circ} 23' - 10 \\
 &= 9.9358 - 10 \\
 &= \bar{1}.9358
 \end{aligned}$$

7.4 การหาค่า Anti-logarithmic cosines

การใช้ตาราง logarithmic cosines หา Antilogarithmic cosines นั้น เช่นเดียวกับการเปิดหา Antilogarithmic sines หากแต่อย่าลืมว่าเมื่อมุมโตขึ้นค่าของฟังก์ชันของมุมจะต้องลดลง เช่น ต้องการทราบว่า ถ้า $\log \cos x = \overline{1.9333}$ x จะมีค่าเท่าไร นำ 10 มาบวกกับ $\overline{1.9333}$ ในใจได้ 9.9333 เทียบดูในตาราง logarithmic cosines เห็นว่า $L \cos 30^\circ 54' = 9.9335$ ใกล้เคียงกับ 9.9333 แต่ค่าเกินไป .0002 ดังนั้น ตรวจดูในช่อง mean differences บรรทัดเดียวกัน จะได้เห็นว่า .0002 หรือ 2 ต่างกัน 2 เมื่อค่าของ L ลดลง .0002 มุมจะต้องโตขึ้น 2 ฉะนั้น $L \cos (30^\circ 54' + 2) = 9.9333$

$$\begin{aligned}\log 30^\circ 56' &= \overline{1.9333} = \log \cos x \\ x &= 30^\circ 56'\end{aligned}$$

7.5 การหาค่าของ Logarithmic tangents

ก็เปิดเช่นเดียวกับ log sine หากแต่ว่าในตารางบางครั้งจะมีเครื่องหมายปลาด คือ “ — ” บนตัวเลขในตาราง เช่น

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
											1'	2'	3'	4'	5'
84	10.9784	9857	9932	0008	0085	0164	0244	0326	0409	0494	13	26	40	53	66

ดังนี้ หมายความว่า ที่ตรง $84^\circ 18'$ นั้นเปลี่ยน Characteristic เพิ่มจากช่อง $84^\circ 0'$ อีก 1 ดังนี้ $L \tan 84^\circ 18' = 11.0008$ แทนที่จะมี Characteristic เป็น 10 เหมือนช่องแรก และ $L \tan 84^\circ 24'$ เป็น 11.0085 เช่นเดียวกัน

เป็นไปเช่นเดียวกับ Anti-logarithmic sines

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\frac{\cos 18^{\circ} 15' \cdot \sin 30^{\circ} 12'}{\tan 30^{\circ} 14'}$

วิธีทำ ให้ $x = \frac{\cos 18^{\circ} 15' \cdot \sin 30^{\circ} 12'}{\tan 30^{\circ} 14'}$

$$\log x = \log \cos 18^{\circ} 15' + \log \sin 30^{\circ} 12' - \log \tan 30^{\circ} 14'$$

$$\log x = \bar{1}.9776 + \bar{1}.7016 - \bar{1}.7655$$

$$= \bar{1}.9137$$

$$x = .8198$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 15 จ.

จงหาค่าของ

1. $\sin 16^{\circ} 43' \cos 12^{\circ} 52'$

2. $153 \tan 45^{\circ} 40'$

3. $\frac{17 \times \sin 52^{\circ} 14'}{\tan 35^{\circ} 25'}$

4. $\frac{\cos 46^{\circ} 14' \times \tan 18^{\circ} 12'}{\sin 31^{\circ} 15'}$

5. $\sec 20^{\circ} 13' \times \cot 31^{\circ} 42'$

$$6. \frac{\cos 56^{\circ} 41' \times \sin 80^{\circ} 25'}{\tan 40^{\circ} 50'}$$

$$7. \sin^2 x = \frac{2}{3} \text{ จงหาค่าของ } x$$

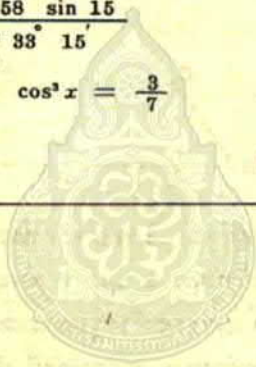
$$8. \tan x = \frac{.11 \times 3.55}{\sin 42^{\circ} 15'} \text{ จงหาค่าของ } x$$

$$9. \text{ จงหาค่าของ } ab \sin C \text{ เมื่อกำหนดให้ } a = 32.79, b = 27.86, \hat{C} = 30^{\circ} 16'$$

$$10. \text{ จงหาค่าของ } \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2}{n} \text{ เมื่อ } r = 3.3, n = 10$$

$$11. \text{ จงหาค่าของ } \frac{47.5 \cos^2 58^{\circ} \sin 15^{\circ}}{32 \cos^2 33^{\circ} 15'}$$

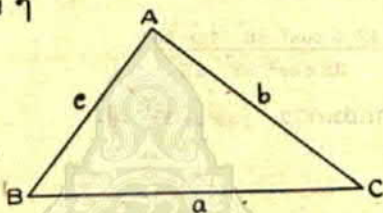
$$12. \text{ จงหาค่า } x \text{ จากสมการ } \cos^3 x = \frac{3}{7}$$



บทที่ 16

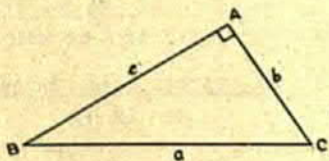
การหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม

1. รูปสามเหลี่ยมทุก ๆ รูปมี 6 ส่วนด้วยกัน มีด้าน 3 ด้าน และมุม 3 มุม ในวิชาตรีโกณมิติ มักใช้ชื่อของจุดยอดมุมเป็นตัวอักษรตัวใหญ่ เป็น A, B, C เป็นต้น และใช้เรียกชื่อด้าน เป็น a, b, c ถ้าด้านตรงข้ามมุม A เรียกว่าด้าน a ด้านตรงข้ามมุม B เรียกว่าด้าน b ด้านตรงข้ามมุม C เรียกว่าด้าน c ซึ่งตัวอักษร a, b, c นี้ หมายถึงจำนวนความยาวของด้านนั้น ๆ



2. ในการสร้างรูปสามเหลี่ยม โจทย์จะต้องกำหนดถึง 3 สิ่ง เป็นต้นว่า กำหนด 3 ด้าน หรือกำหนด 2 มุม 1 ด้าน หรือ กำหนด 2 ด้าน 1 มุม เป็นต้น ดังนี้ จึงจะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ตามวิธีเรขาคณิต และตามวิธีตรีโกณมิติ เมื่อกำหนด 3 ส่วนดังนี้ ก็อาจจะหาส่วนทั้ง 3 ที่เหลือได้ การแก้ $\triangle$ มุมฉาก

3. สามเหลี่ยมมุมฉากทุกรูป เมื่อกำหนด 2 ด้านให้ อาจจะหาด้านที่ 3 ได้ ดังในรูป $\triangle ABC$ มีมุม A เป็นมุมฉาก $\therefore a^2 = b^2 + c^2$



ฉะนั้น เมื่อกำหนด 2 ด้าน อาจจะหาด้านที่ 3 ได้ และใน $\triangle$ มุมฉากนี้ เมื่อกำหนดมุมใดมุมหนึ่งให้ เราสามารถหาอีกมุมหนึ่งได้ เนื่องจากมุมแหลมทั้งคู่เป็นมุมประกอบ 1 มุมฉากซึ่งกันและกัน ฉะนั้น สรุปได้ว่า ใน $\triangle$ มุมฉาก โจทย์จะต้องกำหนด

$$\therefore b = .93 \times 100 = 93$$

1. ด้านให้ 2 ด้าน

หรือ 2. 1 มุมแหลม กับ 1 ด้าน

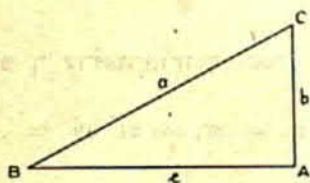
ในประการใดประการหนึ่งนี้ จึงจะสามารถหาส่วนที่เหลือของ $\triangle$ ได้

4. ในกรณีที่ 1 กำหนด 2 ด้านของ $\triangle$ มุมฉากให้

ตัวอย่างที่ 1 ใน $\triangle$ มุมฉาก ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก $a = 60$,

$b = 30$ จงหาส่วนที่เหลือของ $\triangle$

วิธีทำ



$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 3600 - 900 = 2700$$

$$c = 30\sqrt{3}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\therefore \hat{B} = 30^\circ$$

$$\therefore \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

5. กรณีที่ 2 คือการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดด้าน ๆ หนึ่ง และมุมแหลมมุมหนึ่งให้

ตัวอย่างที่ 2 จงถอดรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดมุม $A = 30^\circ$ ด้าน b

$= 20\sqrt{3}$ และมุม C เป็นมุมฉาก

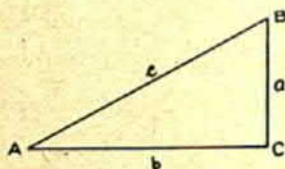
วิธีทำ

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{a}{20\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{20\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{20\sqrt{3}}$$

$$a = 20$$



(หา c โดยใช้ $c^2 = a^2 + b^2$) หรือ

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

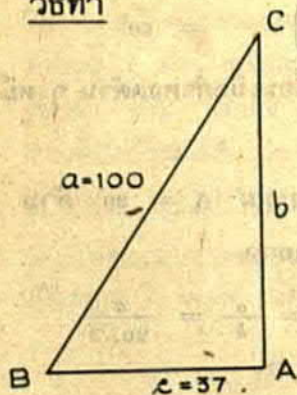
$$\sin 30^\circ = \frac{20}{c}$$

$$\therefore c = \frac{20}{\sin 30^\circ} = 40$$

$$\therefore \hat{B} = 90^\circ - A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $\hat{A} = 90^\circ$, $c = 37$, $a = 100$ จงหาส่วนต่าง ๆ ของ
รูปสามเหลี่ยม กำหนด $\sin 21^\circ 43' = .97$; $\cos 21^\circ 43' = .98$

วิธีทำ



$$\sin C = \frac{c}{a} = \frac{37}{100}$$

$$= .37$$

$$= \sin 21^\circ 43'$$

$$\hat{C} = 21^\circ 43'$$

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

$$\cos 21^\circ 43' = \frac{b}{100}$$

$$.98 = \frac{b}{100}$$

$$\therefore b = .98 \times 100 = 98$$

6. กำหนดส่วนของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีใน $\triangle$ มุมฉากให้เพื่อจะให้หาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม

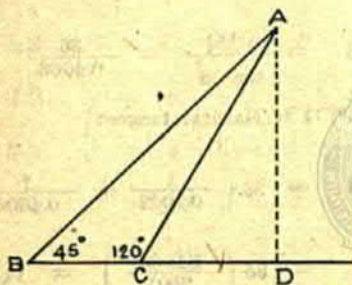
ตัวอย่างที่ 1 ในรูปสามเหลี่ยม ABC มุม $B = 45^\circ$ มุม $C = 120^\circ$

ถ้าด้าน a ยาว 40 จงหาความยาวของเส้นตั้งฉาก

ที่ลากจาก A มาถึง BC ที่ต่อออกไป

วิธีทำ

ให้ AD เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุม A มาถึงจุด D บนด้าน BC ที่ต่อออกไป



$$\hat{ACD} = 60^\circ = 180^\circ - \hat{ACB}$$

$$\therefore \tan \hat{ACD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AD}{CD}$$

$$\therefore CD = \frac{AD}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ใน } \triangle ABD \quad \tan \hat{ABD} = \frac{AD}{40 + CD}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{40 + \frac{AD}{\sqrt{3}}}$$

$$40 + \frac{AD}{\sqrt{3}} = AD$$

$$40\sqrt{3} + AD = \sqrt{3} AD$$

$$AD = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= 20(3 + \sqrt{3})$$

ตัวอย่างที่ 2 ใน $\triangle PRS$ PQ เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากมุม P มายังด้าน RS
กำหนด $PQ = 36$ $\widehat{PRS} = 35^\circ$, $\widehat{PSR} = 25^\circ$, จงหา RS

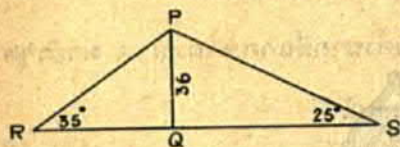
วิธีทำ

$$\tan \widehat{PRQ} = \frac{PQ}{RQ}$$

$$\tan 35^\circ = \frac{36}{RQ}$$

$$\therefore RQ = \frac{36}{\tan 35^\circ} = \frac{36}{0.7002}$$

(จากตาราง Natural Tangent)



$$\frac{PQ}{QS} = \tan 25^\circ$$

$$QS = \frac{PQ}{\tan 25^\circ} = \frac{36}{0.4006}$$

(จากตาราง Natural tangent)

$$\begin{aligned} \therefore RQ + QS &= RS = 36 \left(\frac{1}{0.7002} + \frac{1}{0.4006} \right) \\ &= 36 \left(\frac{1.1008}{.2805} \right) = 14.04 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ก.

จงหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

1. $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$

2. $a = 15$, $b = 5\sqrt{3}$, $\hat{C} = 90^\circ$

3. $\cos 51^\circ 41' = .62$ ถ้าใน $\triangle ABC$ มีมุม $C = 1$ มุมจาก ด้าน $c = 50$
มุม $A = 38^\circ 19'$

จงหาตัวทั้ง 3 ที่เหลือ

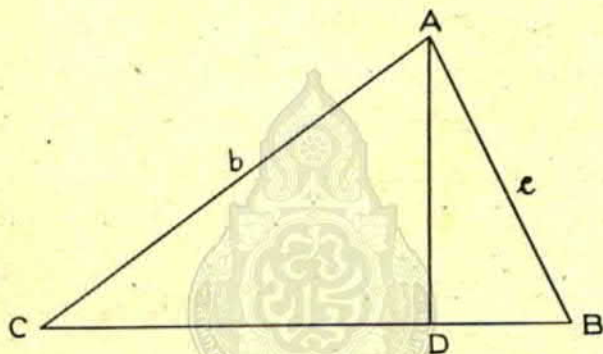
4. ถ้า $b = 200$ $\hat{A} = 90^\circ$ $\hat{C} = 78^\circ 19'$ จงหาตัว a
5. $\hat{A} = 90^\circ$ $c = 37$ $a = 100$ และกำหนด $\cos 68^\circ 7' = .37$ $\sin 68^\circ 7' = .93$
6. $\hat{A} = 90^\circ$ $b = 4\sqrt{3}$ $c = 2$
7. $\hat{C} = 90^\circ$ $\cot A = .07$ $b = 49$
8. $\hat{A} = 54^\circ$ $\hat{C} = 90^\circ$ $c = 10$
9. $\hat{B} = 90^\circ$ $\hat{C} = 37^\circ$ $b = 100$
10. $\hat{C} = 90^\circ$ $b = 22.75$ $c = 25$
11. $\hat{C} = 90^\circ$ $a = 225$ $b = 272$
12. $2B = \hat{C} = 60^\circ$ $a = 10$
13. $\hat{A} = 90^\circ$ $b : c = 5 : 3$
14. $a = 4$ $b : c = 5 : 8$
15. $a = 27$ $b = 6$ $\hat{C} = 68^\circ$
16. $\hat{A} = 90^\circ$ $b = 35$ $c = 5$
17. $\hat{C} = 90^\circ$ $a = 9\sqrt{3}$ $\hat{A} = 30^\circ$
18. $2c = b = 6\sqrt{3}$ $\hat{B} = 90^\circ$
19. $\hat{A} = 39^\circ$ $\hat{C} = 90^\circ$ $a = 15$
- * 20. ถ้า $\hat{C} = 90^\circ$ $\hat{B} = 25^\circ 49'$ และ $c = 100$ จงหาส่วนต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยม
21. $\hat{B} = 90^\circ$ $\hat{A} = 30^\circ$ $c = 5$
- * 22. $\hat{B} = 90^\circ$ $c = 37$ $b = 100$
- * 23. $\hat{C} = 90^\circ$ $a = 50 = \hat{B}$ 75°
- * 24. $a = 10$ $b = 20$ $\hat{C} = 90^\circ$

การแก้ $\triangle$ ที่ไม่ใช่มุมฉาก

6. การเกี่ยวข้องระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม

6.1 สูตรที่ 1 ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ก็ตาม ด้านจะเป็นปฏิภาคกับ sine ของมุมซึ่งอยู่ตรงข้ามด้านนั้น ๆ คือ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



(1) ให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมแหลม

จาก A ลาก AD ตั้งฉากกับด้านตรงข้าม

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \sin C$$

$$AD = AC \sin C = b \sin C$$

$$\text{และ } \frac{AD}{AB} = \sin B$$

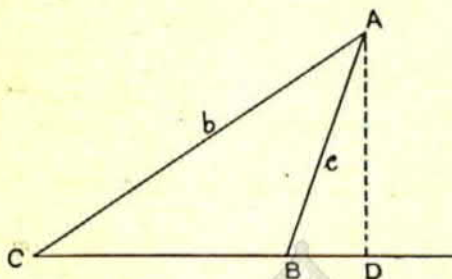
$$\therefore AD = AC \sin B = c \sin B$$

$$\text{ก็คือ } b \sin C = c \sin B$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากมุม C ถึงด้าน AB

- (๒) ให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุม B เป็นมุมบ้าน
ลากเส้น AD ตั้งฉากกับ CB ที่ต่อออกไปที่จุด D



$$\sin C = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC \sin C$$

$$= b \sin C$$

$$\frac{AD}{AB} = \sin (180^\circ - \hat{B})$$

$$AD = AB \sin (180^\circ - \hat{B})$$

$$= c \sin B$$

$$b \sin C = c \sin B$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

6.2 รูปสามเหลี่ยมทุกรูปทุกชนิดมีด้าน 3 ด้าน และมีมุม 3 มุม รวมเป็น 6 ส่วนด้วยกัน ฉะนั้น ในการกำหนดส่วนของรูปสามเหลี่ยมบางส่วนให้ แล้วต้องการทราบส่วนต่าง ๆ ที่เหลือจะต้องกำหนดให้ 3 ส่วนเป็นอย่างน้อย และการที่จะใช้สูตร $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ โจทย์จะต้องกำหนด

ก. ๒ ด้าน กับ 1 มุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งที่กำหนดให้เช่น กำหนดด้าน a, b, A เป็นต้น หรือ ข. กำหนด 1 ด้าน กับ ๒ มุมให้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $\hat{A} = 30^\circ$ จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{สูตร } \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ \frac{1}{\sin 30^\circ} &= \frac{\sqrt{3}}{\sin B} \\ \sin B &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \text{ หรือ } \sin 120^\circ\end{aligned}$$

ฉะนั้น $\hat{B} = 60^\circ$, 120° ก็ได้

$$\text{ดังนั้น } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

$$\text{หรือ } = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

เมื่อเกิดมุม C 2 มุม ด้านตรงข้าม $\hat{C}$ ก็มี 2 ด้าน ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{สูตร } \frac{c}{\sin C} &= \frac{a}{\sin A} \\ c &= \frac{a \sin C}{\sin A} \\ \text{เมื่อ } \hat{C} = 90^\circ \quad c &= \frac{1 \cdot \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 \\ \text{เมื่อ } \hat{C} = 30^\circ \quad \hat{C} &= \hat{A} \\ c &= a = 1\end{aligned}$$

ฉะนั้น $\triangle$ ที่ได้อาจจะเป็นมุมฉาก ดังนี้ $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$

$$\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 90^\circ$$

หรืออาจจะเป็น $\triangle$ มุมป้านก็ได้ คือ $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 1$

$$\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 120^\circ, \hat{C} = 30^\circ$$

แต่บางครั้งจะเป็น $\triangle$ 2 รูป เช่นนี้ไม่ได้ ดังจะได้พิจารณาในคำอธิบายต่อไป

6.3 ในการถอดรูป $\triangle$ เมื่อกำหนด ๒ ด้านกับ 1 มุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง ที่กำหนดให้

สมมติให้โจทย์กำหนด ด้าน a, b , และมุม A

$$\text{ใช้สูตร} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

(1) ถ้าปรากฏว่า $a < b \sin A$ เกิดผล $\frac{b \sin A}{a} > 1$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \sin B = > 1$$

แต่ค่าของ sine ของมุมใด ๆ ก็ตามเกิน 1 ไปไม่ได้จึงสรุปได้ว่าในกรณี ที่กำหนดนี้ไม่มีรูป $\triangle$ เกิดขึ้นเลย

(2) ถ้าปรากฏว่า $a = b \sin A$ เกิดผล $\frac{b \sin A}{a} = 1$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \sin B = 1 = \sin 90^\circ$$

มุม B ก็มีค่าเดียวคือ 90° และรูป $\triangle$ รูปนี้ก็เป็นได้ $\triangle$ มุมฉาก รูปเดียวเท่านั้น

(3) ถ้า $a > b \sin A$ ฉะนั้น $\frac{b \sin A}{a} < 1$ ฉะนั้น $\hat{B}$ อาจจะมีได้

๒ ค่าซึ่งเป็นมุมประกอบ ๒ มุมฉากซึ่งกันและกัน หรือบางกรณี $\hat{B}$ อาจจะมีได้ค่าเดียวเท่านั้นก็ได้ จึงต้องพิจารณาดังนี้

(1) ถ้าด้าน $a < b$

$$\hat{A} < \hat{B}$$

มุม B ที่ได้จะเป็นมุมป้านก็ได้ มุมแหลมก็ได้ และ เมื่อมุม B มี ๒ ค่า มุม C ก็ต้องมี ๒ ค่า ด้าน c ก็มี ๒ ค่า และเกิด $\triangle$ เป็น ๒ รูป รูปหนึ่งมุมแหลม รูปหนึ่งมุมป้าน ขอแต่ $\hat{B} > \hat{A}$ ก็พอ ในกรณีนี้เรียกว่ากรณี ๒ นัย (Ambiguous Case)

(2) ถ้าด้านที่กำหนดให้ตรงข้ามกับมุมที่กำหนดให้คือ ด้าน $a > b$ มุม $\hat{A} > \hat{B}$ แต่ $\hat{A}$ กำหนดแล้วจะเป็นมุมป้านหรือมุมแหลมก็ตาม $\hat{B}$ คงมีได้ค่าเดียวคือมุมแหลม $\hat{B}$ จะเป็นมุมป้านไม่ได้ เมื่อใน $\triangle$ มีมุมป้านได้เพียงมุมเดียวเท่านั้น

(3) ถ้าด้าน $a = b$; $\hat{A} = \hat{B}$ ฉะนั้นเกิด $\triangle$ หน้าจั่วได้รูปเดียว

6.4 การพิสูจน์โดยวิธีเรขาคณิต

ให้ a, b และ $\hat{A}$ เป็นส่วนที่กำหนดให้

วิธีทำ

ลากเส้น AX ยาวไม่จำกัด

ทำมุม XAC เท่ากับมุม A ที่กำหนดให้

ลาก AC เท่ากับด้าน b

ลากเส้น CD ตั้งฉากกับ AX ที่จุด D

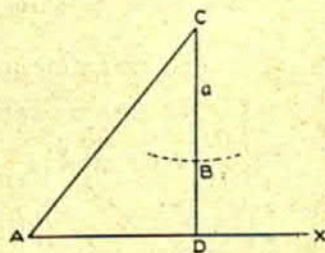
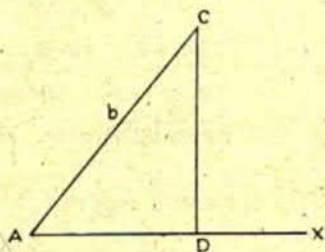
ฉะนั้น $\sin A = \frac{CD}{AC}$

$$\therefore CD = AC \sin A$$

$$= b \sin A$$

ดังนี้ในกรณีนี้

- เมื่อ $b \sin A > a$ ก็คือเส้นตั้งฉากยาวกว่าด้าน a ใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี a เขียนส่วนโค้งของวงกลมจะเห็นว่า เมื่อ a สั้นกว่าเส้นตั้งฉาก CD ก็ไม่สามารถจะพบด้าน AX ได้เลย ฉะนั้นก็ไม่เกิดรูป $\triangle$

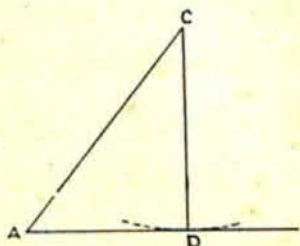


2. เมื่อ $b \sin A = a$

ก็คือเส้นตั้งฉาก $= a$

เมื่อใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี a

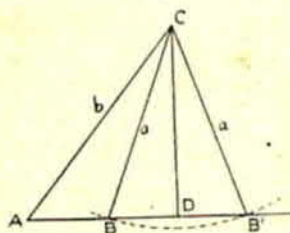
เขียนส่วนโค้งของวงกลมจะสัมผัสด้าน AX ที่จุด D พอดี คือด้าน a เป็นเส้นตั้งฉาก จุด B กับจุด D ก็คือ $\triangle$ นั้นเป็น $\triangle$ มุมฉาก



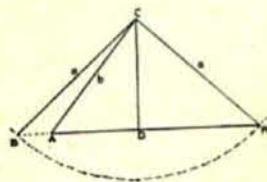
3. ถ้า $a > b \sin A$

$a >$ เส้นตั้งฉาก

ก. ฉะนั้นเมื่อใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี a ตัดเส้น AX ได้ที่จุด B และ B' ได้ 2 จุด จึงเกิดได้สองรูป คือ $\triangle ABC$ รูปหนึ่ง $\hat{B}$ เป็นมุมป้าน และ $\triangle ABC$ ฉะนั้น B' เป็นมุมแหลม เกิด $\triangle$ 2 รูป เรียกว่ากรณี 2 มุม แต่จะเกิดกรณี 2 มุมนี้ได้เมื่อด้าน $a < b$



ข. ฉะนั้นถ้าด้าน a โจทย์กำหนดให้ยาวกว่าด้าน b ดังในรูป ใช้จุด c เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี a จะตัดด้าน AX ที่จุด B และ B' เกิดเป็น $\triangle ABC$ และ $\triangle ABC$ แต่ $\triangle ABC$ ไม่ใช่ $\triangle$ ที่ต้องการ เนื่องจากมุม A ของ $\triangle$ นี้เป็นมุมป้าน ไม่ใช่มุม A ที่กำหนดให้ ฉะนั้นในกรณีนี้



$\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ใช้ได้ตามเหลี่ยม

เดียวไม่ใช่กรณี 2 มุม

ค. แต่เมื่อด้าน $a = b$ $\triangle$ ที่ได้เป็น

$\triangle$ หน้าจั่วรูปเดียว

ข้อสังเกต

เมื่อกำหนดส่วนของรูปสามเหลี่ยมเพียง 2 ด้านกับ 1 มุมตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่ง จะต้องใช้สูตร $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ จะเกิดเป็น $\triangle$ 2 รูปได้คือรูปหนึ่งเป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม และอีกรูปหนึ่งเป็นสามเหลี่ยมมุมป้านได้เมื่อ ด้านตรงข้ามกับที่กำหนดให้สั้นกว่าอีกด้านหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2 ถ้ามุม $B = 135^\circ$, $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$ จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{ใช้สูตร } \frac{b}{\sin B} &= \frac{a}{\sin A} \\ \therefore \sin A &= \frac{a \sin B}{b} \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times \sin 135^\circ}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \\ \hat{A} &= 60^\circ\end{aligned}$$

แต่ $\hat{A} + \hat{B} = 135^\circ + 60^\circ > 180^\circ$ ไม่เป็นความจริง

เกิด $\triangle$ ไม่ได้ แม้จะไม่ทำโดยวิธีสูตร ก็น่าจะสังเกตได้ว่า

$$\text{ด้านกำหนด } a > b$$

$$\text{ฉะนั้น } \hat{A} > \hat{B}$$

$$\text{แต่มุม } \hat{B} = 135^\circ$$

ฉะนั้นมุม A จะใหญ่กว่า $\hat{B}$ ไปไม่ได้ สิ่งที่กำหนดให้จึงมีสามารรถเป็นรูป $\triangle$

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ข.

1. กำหนดด้าน $b = \sqrt{8}$, $c = \sqrt{12}$, $\hat{B} = 45^\circ$ จงถอดส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมนั้น
2. กำหนดด้าน $b = 3\sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{3}$, $\hat{C} = 45^\circ$ จงถอดส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมนั้น
3. กำหนด $\hat{C} = 60^\circ$, $a = 2$, $c = \sqrt{6}$ จงถอดส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมนั้น
4. ถ้า $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 2$, $c = 5$ จงหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมนี้
5. ถ้า $\hat{B} = 60^\circ$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 + \sqrt{3}$ จงหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมนี้
6. ถ้า $\hat{B} = 30^\circ$, $b = \sqrt{6}$, $c = 2\sqrt{3}$ จงหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมนี้
7. ถ้า $\hat{A} = 18^\circ$, $a = 4$, $b = 4 + \sqrt{80}$ จงหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยมนี้
8. ถ้า $a = 5$, $b = 7$ และ $\sin A = \frac{3}{4}$ เกิดกรณี 2 นัยหรือไม่
9. ถ้า $a = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$ และ $\hat{A} = 45^\circ$ จงสร้างสามเหลี่ยม
10. ถ้า $a = 100$, $c = 100\sqrt{2}$ และ $\hat{A} = 30^\circ$ จงหาส่วนที่เหลือของสามเหลี่ยม
11. ถ้า $a = 30^\circ$, $b = 8$ และ $a = 6$ จงหา c
12. ถ้า $\hat{B} = 30^\circ$, $c = 150$ และ $b = 50\sqrt{3}$ เกิดสามเหลี่ยมกี่รูป และบอกส่วนต่าง ๆ ที่เหลือของสามเหลี่ยมนั้น ๆ มาด้วย
13. ถ้า $\hat{B} = 30^\circ$, $c = 150$, $b = 75$ เกิดกรณี 2 นัยหรือไม่ ถ้าเกิดสามเหลี่ยม 2 รูปนั้น มีส่วนต่าง ๆ เป็นอย่างไร

14. ถนนตรงสองสายตัดกันเป็นมุม 30° A และ B ตั้งต้นเดินทางจากจุดต่อของทางเดินเข้าของถนนด้วยเวลาเดียวกัน A เดินไปตามถนนด้วยอัตราความเร็ว 5 ไมล์ต่อ 1 ชั่วโมง และ B เดินไปตามถนนด้วยอัตราความเร็วสม่ำเสมอ เมื่อเดินไปประมาณ 2 ชั่วโมง เขาอยู่ห่างจากกัน 9 ไมล์ ฉะนั้นปรากฏว่า B อาจจะใช้อัตราความเร็ว 2 อย่างได้ และอัตราความเร็วทั้งสองของมีเท่า B นั้นเป็นเท่าใด
15. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมเป็น $22\frac{1}{2}$ และ $122\frac{1}{2}$ จงแสดงว่าฐานเป็น 2 เท่าของส่วนสูง
16. ในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มุมที่ฐานเป็น 2 เท่าของมุมยอด และสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ฐานยาว 2 จงหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม
17. ถ้า $a = 2b$ และ $A = 3B$ จงหา m และ c ในเทอมของ a

7. ด้าน ๆ หนึ่งแตกเป็นเทอมของด้านอีก 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมและมุมระหว่างด้านทั้ง 2 นั้น

7.1 ในสามเหลี่ยมมุมแหลม

จากบทพิสูจน์ในเรขาคณิตที่ว่า จัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมแหลมเท่ากับผลบวกของจัตุรัสบนด้านอีก 2 ด้าน หักเสียด้วย 2 เท่าผลคูณของด้าน ๆ หนึ่งกับโปรเจกชันของอีกด้านหนึ่ง

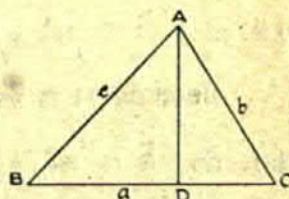
$$\text{ดังนี้} \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD$$

$$\text{แต่} \quad \frac{CD}{AC} = \cos C$$

$$\therefore CD = AC \cos C = b \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



7.2 ในสามเหลี่ยมมุมป้าน ABC มีมุม C เป็นมุมป้าน

ตามด้วยทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่ดัดแปลงว่า

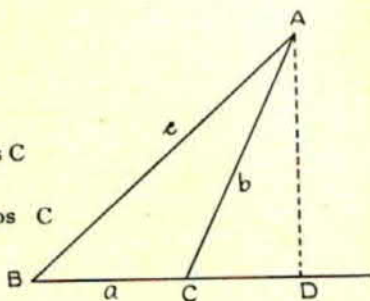
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2 BC \cdot CD$$

$$\therefore c^2 = b^2 + a^2 + 2a \cdot CD$$

แต่ $\frac{CD}{AC} = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$

$$\therefore CD = -AC \cos C = -b \cos C$$

$$\therefore c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$$



และในทำนองเดียวกัน พิสูจน์สูตรนี้ได้ดังนี้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

7.3 ในการที่จะใช้สูตรข้างบนนี้ โจทย์จะต้องกำหนด ก. ด้าน 2 ด้าน กับ 1 มุมระหว่างด้าน หรือ ข. ด้าน 3 ด้าน

จึงจะถอดรูปสามเหลี่ยมออก

ตัวอย่างที่ 1 จงหามุมทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดด้านให้เป็น

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

วิธีทำ

กำหนดให้ $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

สูตร $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \frac{(4-2\sqrt{3}+6-4-2\sqrt{3}) \times 2\sqrt{2}}{(3-\sqrt{3})8} \\
 &= \frac{6-4\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+1)}{(3-1)2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{(3+\sqrt{3}-2)}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{-(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = \cos 105^\circ
 \end{aligned}$$

$$\hat{A} = 105^\circ$$

दिया $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin B &= \frac{b \sin A}{a} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \sin 15^\circ$$

$$\hat{B} = 15^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 105^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$

ก็คือ $\hat{A} = 105^\circ$ $\hat{B} = 15^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$

ตัวอย่างที่ 2 ด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็น $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ และ $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ และมุมระหว่างด้านเป็น 60° จงหาส่วนต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ ให้ $a = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $\hat{C} = 60^\circ$

ใช้สูตร $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right) \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{8-4\sqrt{3}} + \frac{1}{8+4\sqrt{3}} - 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8+4\sqrt{3}+8-4\sqrt{3}-4}{64-48} = \frac{12}{16}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

สูตร $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) \times \frac{\sin 60^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ$$

$$\hat{A} = 75^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$$

ก็คือ $\hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 45^\circ, c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ค.

1. ถ้า $a = 15, b = 7, c = 13$ จงหา $\hat{C}$
2. ถ้า $a = 7, b = 3, c = 5$ จงหา $\hat{A}$
3. ถ้า $a = 5, b = 5\sqrt{3}, c = 5$ จงหามุมทั้ง 3
4. ถ้า $a = 25, b = 31, c = 7\sqrt{2}$ จงหา $\hat{A}$
5. ด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็น $2, 2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}$ ตามลำดับ จงหามุมใหญ่ที่สุด
6. จงหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมเมื่อ $a = \sqrt{3}+1, b = 2, c = \sqrt{6}$
7. จงแก้รูปสามเหลี่ยม เมื่อ $a = \sqrt{2}, b = 2, c = \sqrt{3}-1$
8. ถ้า $a = 8, b = 5, c = \sqrt{19}$ จงหา $\hat{C}$
9. ถ้าด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็นอัตราส่วน $4 : 7 : 5$ จงหามุมที่ใหญ่ที่สุด
10. ถ้า $a = 2, b = \sqrt{3}+1, \hat{C} = 60^\circ$ จงหา c
11. กำหนด $a = 3, c = 5, \hat{B} = 120^\circ$ จงหา b
12. จงหา $b = 7, c = 6, \hat{A} = 75^\circ 31'$ จงหา a
13. ถ้า $b = 8, c = 11, \hat{A} = 93^\circ 35'$ จงหา a

14. ถ้า $a = 7$, $c = 3$, $\hat{B} = 123^\circ 12'$ จงหา b
15. เมื่อ $a = 2\sqrt{6}$, $c = 6 - 2\sqrt{3}$, $\hat{B} = 75^\circ$
16. $\hat{A} = 72^\circ$, $b = 2$, $c = \sqrt{5} + 1$
17. กำหนดให้ $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $b = \sqrt{8}$ จงหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม
18. ถ้า $b = 1$, $c = \sqrt{3} - 1$, $\hat{A} = 60^\circ$ จงหาความยาวของด้าน a
19. มุม ๆ หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเป็น 30° ความยาวของด้านประชิดเป็น 40 และ $40\sqrt{3}$ ตามลำดับ จงหาความยาวของด้านที่ 3 และจำนวนของคาของมุมที่เหลือ
20. ด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็น $\sqrt{3} + 1$ และ $\sqrt{3} - 1$ มุมระหว่างด้านเป็น 60° จงหาด้านและมุมที่เหลือของสามเหลี่ยมรูปนี้
21. กำหนด $\hat{A} = 72^\circ$, $b = 2$, $c = \sqrt{5} + 1$ จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม
22. เมื่อ $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $b = \sqrt{8}$ จงหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม
23. ถ้า $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 15^\circ$, $b = \sqrt{6}$ จงแก้รูปสามเหลี่ยม
24. ถ้า $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 105^\circ$, $c = \sqrt{2}$ จงหาส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยม
25. ถ้า $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, จงแสดงว่า $c : a = \sqrt{3} + 1 : 2$
26. ถ้า $\hat{C} = 120^\circ$, $c = 2\sqrt{3}$, $a = 2$ จงหา b
27. ถ้า $\hat{B} = 60^\circ$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$ จงหา c
28. กำหนดให้ $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ จงหา $\hat{A}$
29. จงหามุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดด้านทั้งสามเป็น $3 + \sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$

7.4 ในกรณีที่กำหนดด้าน 2 ด้านกับ 1 มุมให้ และเมื่อใช้สูตร

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

หรือ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ดังนี้ อาจจะได้กรณี 2 นัยได้

พิสูจน์ สมมติให้โจทย์กำหนดด้าน a, b และมุม A เหมือนเมื่อกำหนด

ในข้อ 6 ให้ใช้สูตร $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

จัดเป็นรูป $c^2 - 2b \cos A \cdot c + (b^2 - a^2) = 0$

เป็นรูปสมการกำลังสองของ c ฉะนั้นจากสูตรที่ว่าในสมการ

กำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{ในที่นี้ } c = \frac{2b \cos A \pm \sqrt{4b^2 \cos^2 A - 4(b^2 - a^2)}}{2}$$

$$= b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2}$$

$$= b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2(1 - \cos^2 A)}$$

$$= b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

พิจารณาดังนี้

1. ถ้า $a < b \sin A \therefore a^2 < b^2 \sin^2 A$

จำนวน $a^2 - b^2 \sin^2 A$ เป็น — ฉะนั้นไม่สามารถจะทราบค่าได้ เป็นอันว่าที่กำหนดมาให้ไม่มีสามารถจะประกอบเข้าเป็นส่วนของรูปสามเหลี่ยมได้

2. ถ้า $a = b \sin A$ ฉะนั้น $a^2 = b^2 \sin^2 A$

จำนวน $a^2 - b^2 \sin^2 A = 0$

ฉะนั้น $c = b \cos A$

เมื่อในกรณีเช่นนี้ $\sin A < 1$ และ $a = b \sin A$ ฉะนั้น $a < b$ ก็คือมุม A ต้องเล็กกว่ามุม B เมื่อโจทย์กำหนดมุม A เป็นมุมป้านหรือมุมใหญ่มาแล้ว กรณีเช่นนี้จะเป็นจริงไปไม่ได้ นอกจากมุม A ที่กำหนดให้เป็นมุมแหลมซึ่ง $c = b \cos A$ ได้ผล c เป็นเครื่องหมายบวก กรณีนี้เกิดสามเหลี่ยมได้รูปเดียวเท่านั้น

3. เมื่อ $a < b \sin A$ $a^2 > b^2 \sin^2 A$ ฉะนั้น $a^2 - b^2 \sin^2 A > 0$

ก. สมมติให้ $a < b$ ดังนั้น $\hat{A} < \hat{B}$ สามเหลี่ยมรูปนี้จะเป็นสามเหลี่ยมได้ก็ต่อเมื่อมุม A เป็นมุมแหลม มิฉะนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ได้ ในกรณีเช่นนี้ $b \cos A$ จะต้องเป็น บวก $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ เป็นจำนวนจริง และ $\sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 A} = b \sqrt{\cos^2 A}$ ก็คือ $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} < b \cos A$ ฉะนั้น $c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ เป็นจำนวนจริงและเป็น + เกิดรูปสามเหลี่ยมได้ 2 รูป เป็นกรณี 2 นัย

ข. สมมติว่า $a > b$ ฉะนั้น

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} > \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 A} = b \cos A$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} > b \cos A$$

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} \quad \text{ใช้ได้เฉพาะ}$$

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} \quad \text{มิฉะนั้น } c \text{ จะเป็น -}$$

ในกรณีเช่นนี้ ไม่ว่า θ จะเป็นมุมป้านหรือมุมแหลมก็ตาม เกิดสามเหลี่ยมได้สามเหลี่ยมเดียว

ค. สมมติว่า $a = b$ ฉะนั้น

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} = b \cos A$$

$$\text{ฉะนั้น } c = b \cos A \pm b \cos A = 2b \cos A \text{ หรือ } 0$$

ฉะนั้น เกิดสามเหลี่ยมได้รูปเดียวเท่านั้น คือ A เป็นมุมแหลม ถ้า A เป็นมุมป้าน จะเป็นรูปสามเหลี่ยมไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า b, c, B เป็นส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และถ้า $b < c$ จงแสดงว่า $(a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B = 4b^2$ โดยที่กำหนด a_1 และ a_2 เป็นค่าของด้านที่ 3 ของ $\triangle$ นั้น

วิธีทำ

จากสูตรที่ว่า $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$a^2 = 2c \cos B \cdot a + c^2 - b^2 = 0$$

$$a = c \cos B \pm \sqrt{c^2 \cos^2 B - (c^2 - b^2)}$$

$$= c \cos B \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$$

$$\text{ถ้า } a_1 = c \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$$

$$a_2 = c \cos B - \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 2c \cos B \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= c^2 \cos^2 B - b^2 + c^2 \sin^2 B \\ &= c^2 (\cos^2 B + \sin^2 B) - b^2 \\ &= c^2 - b^2 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$(1)^2; a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = 4c^2 \cos^2 B \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{จาก (2); } 4a_1 a_2 = 4(c^2 - b^2) \dots\dots\dots (4)$$

$$(a_1 - a_2)^2 = 4c^2 \cos^2 B - (4c^2 - 4b^2)$$

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B &= 4c^2 \cos^2 B - 4c^2 + 4b^2 + 4c^2 \cos^2 B \tan^2 B \\ &= 4c^2 \cos^2 B - 4c^2 + 4b^2 + 4c^2 \sin^2 B \\ &= 4c^2 - 4c^2 + 4b^2 \\ &= 4b^2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ง.

- 1.* ถ้า a, b, A เป็นส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และถ้า c_1, c_2 เป็นค่าของด้านที่สามในเรื่งที่มีกรณี 2 นัย และถ้า $c_1 > c_2$ จงพิสูจน์ว่า

$$(1) \quad c_1 - c_2 = 2a \cos B_1$$

$$(2) \quad \cos \frac{C_1 - C_2}{2} = \frac{b \sin A}{a}$$

$$(3) \quad c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos 2A = 4a^2 \cos^2 A$$

$$(4) \quad \sin \frac{C_1 + C_2}{2} \sin \frac{C_1 - C_2}{2} = \cos A \cos B_1$$

2. ถ้า $\hat{A} = 45^\circ$ และ C_1, C_2 เป็นค่าของด้านที่ทราบในกรณีที่มีสามเหลี่ยม 2 รูป จงพิสูจน์ว่า

$$\cos B_1 \cos B_2 = \frac{2C_1 C_2}{C_1^2 + C_2^2}$$

7.5 เท่าที่พิสูจน์กรณี 2 นัยมาแล้ว พอจะสรุปได้ว่า ถ้าโจทย์กำหนดด้าน a, b, A ให้ และปรากฏว่า $b \sin A < a$ จะเกิดกรณี 2 นัย คือเป็นสามเหลี่ยม 2 รูปได้ต่อเมื่อด้าน a คือด้านตรงข้ามมุมที่กำหนดให้สั้นกว่าอีกด้านหนึ่ง ถ้านอกไปจากนี้แล้วจะเกิดกรณี 2 นัย (Ambiguous Case) ไม่ได้

8. ในการแยกส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมโดยใช้สูตรทั้งสองดังที่กล่าวมาแล้วยังมีสูตรที่ 3 ที่จะกล่าวต่อไป แต่สูตรที่ 3 นี้มักไม่ใช้ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม แต่มักใช้ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ (Identities)

สูตร

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}$$

พิสูจน์ 1. ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC

$$BC = BD + DC$$

แต่ $\frac{BD}{AB} = \cos B$

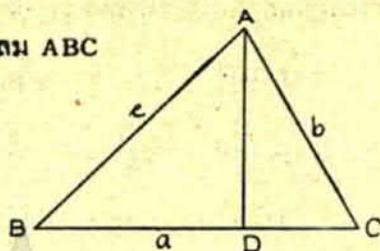
$$\therefore BD = AB \cos B$$

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

$$CD = AC \cos C$$

$$\therefore BC = BD + DC = AB \cos B + AC \cos C$$

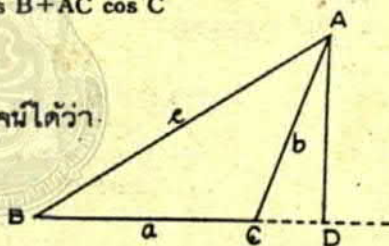
$$a = b \cos C + c \cos B$$



ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$c = b \cos A + a \cos B$$



2. ในสามเหลี่ยมมุมป้าน ABC มีมุม C เป็นมุมป้าน

$$BC = BD - CD$$

แต่ $\frac{BD}{AB} = \cos B$ และ $\frac{CD}{AC} = \cos(180^\circ - \hat{C})$

$$\therefore BD = AB \cos B \quad CD = AC \cos(180^\circ - \hat{C})$$

$$BC = AB \cos B - AC \cos(180^\circ - C)$$

$$a = c \cos B + b \cos C$$

การเกี่ยวพันระหว่างสูตรของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามสูตรที่กล่าวมาแล้วใน
คำอธิบาย ข้อ 6, 7, 8 นั้นต้องใช้ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ เข้าช่วย

$$\text{จากสูตร } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}, \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

$$\text{เนื่องจาก } \sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

$$\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

$$\text{เอา } \sin A \text{ หาคancel 1} = \frac{\sin B}{\sin A} \cos C + \cos B \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$1 = \frac{b}{a} \cos C + \frac{c}{a} \cos B$$

$$a = b \cos C + c \cos B \quad \dots\dots\dots (1)$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$b = a \cos C + c \cos A \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$c = a \cos B + b \cos A \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{ใช้ } a \text{ (1) ได้ผล } a^2 = ab \cos C + ca \cos B \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{ใช้ } b \text{ (2) ได้ผล } b^2 = ab \cos C + bc \cos A \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{ใช้ } c \text{ (3) ได้ผล } c^2 = ac \cos B + bc \cos A \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$(4) + (5) - (6) \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$(5) + (6) - (4) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$(4) + (6) - (5) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

เราอาจพิสูจน์หาการเกี่ยวข้อระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมได้
โดยใช้สูตรดังกล่าวไว้แล้วแต่ตอนต้นของบทนี้ได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$(b-a) \cos C + c(\cos B - \cos A) = c \sin \frac{A-B}{2} \operatorname{cosec} \frac{A+B}{2}$$

วิธีทำ ด้านซ้าย = $b \cos C - a \cos C + c \cos B - c \cos A$

$$= (b \cos C + c \cos B) - (a \cos C + c \cos A)$$

$$= a - b$$

$$= k(\sin A - \sin B); \left(\text{เนื่องจาก } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = k \right)$$

$$= k \left(2 \cos \frac{A+B}{2} \times \cos \frac{A-B}{2} \right)$$

$$= 2k \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$= 2k \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$= k \sin C \cos \frac{A-B}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$= k \sin C \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{cosec} \frac{A+B}{2} \left(\frac{c}{\sin C} = k \right)$$

$$= c \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{cosec} \frac{A+B}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า a, b, c เป็น A.P. จงพิสูจน์ว่า

$$\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2} \text{ เป็น A.P. ด้วย}$$

พิสูจน์ ถ้า $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ อาจเป็น A.P. ได้

$$2 \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2}$$

$$\frac{2 \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\left(\cos \frac{A-C}{2} - \cos \frac{A+C}{2} \right) \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \sin B$$

$$\cos \frac{A-C}{2} \sin \frac{A+C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \sin B$$

$$\frac{1}{2} (\sin A + \sin C) - \frac{1}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \sin B$$

$$\sin A + \sin C = 2 \sin B$$

$$\frac{a}{k} + \frac{c}{k} = \frac{2b}{k}$$

$$a + c = 2b$$

a, b, c เป็น A.P.

ฉะนั้นเมื่อ a, b, c เป็น A.P. $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ เป็น A.P. ด้วย

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 จ.

ในสามเหลี่ยม จงพิสูจน์

$$1. \quad r \sin \frac{P-Q}{2} = (p-q) \cos \frac{R}{2}$$

$$2. \quad p (\sin Q - \sin R) + q (\sin R - \sin P) + r (\sin P - \sin Q) = 0$$

$$3. \quad p \sin (Q-R) + q \sin (R-P) + r \sin (P-Q) = 0$$

4. $\cos A + \cos B = \frac{2(a+b)}{c} \sin^2 \frac{C}{2}$
5. $\frac{\sin(P-Q)}{\sin(P+Q)} = \frac{p^2+q^2}{r^2}$
6. $b \sin\left(\frac{C}{2} + A\right) = (a+c) \sin \frac{B}{2}$
7. $\sin\left(A + \frac{C}{2}\right) \cos \frac{C}{2} = \frac{c+a}{c+b} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$
8. $\frac{a \sin(B-C)}{b^2-c^2} = \frac{b \sin(C-A)}{c^2-a^2} = \frac{c \sin(A-B)}{a^2-b^2}$
9. $\frac{a \sin A \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b \sin B \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c \sin C \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$
10. $\frac{1 + \cos(B-C) \cos A}{1 + \cos(B-A) \cos C} = \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$
11. $(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C = a+b+c$
12. $(b+c) \sin \frac{A}{2} = a \cos \frac{B-C}{2}$

9. ฟังก์ชันของครึ่งมุมและด้านของ

$$9.1 \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

การพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 \sin^2 \frac{A}{2} &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} \end{aligned}$$

แต่ $2s = a + b + c$

$$\therefore 2s - 2c = a + b - c$$

และ $2s - 2b = a + c - b$

$$\therefore \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

การพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\text{แต่ } 2s = a+b+c$$

$$2s - 2a = b+c-a$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2s(2s-2a)}{4bc}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

ในการทำงานเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

การพิสูจน์

$$\text{เนื่องจาก } \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

9.4

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$\cot \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}$$

$$\cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 น.

จงพิสูจน์

$$1. a \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = s$$

$$2. s \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = s - a$$

$$3. \frac{1 - \cos A}{1 - \cos B} = \frac{a(a+c-b)}{b(b+c-a)}$$

$$4. \text{ ถ้า } a = 25, b = 52, c = 63 \text{ จงหาค่าของ } \tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$$

$$5. \text{ ถ้า } a = 125, b = 123, c = 62 \text{ จงหาค่าของ } \sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}, \cos \frac{B}{2}$$

$$6. \text{ ถ้า } a = 18, b = 14, c = 15 \text{ จงหาค่าของ } \cos \frac{C}{2}$$

$$7. \text{ จงหาค่าของ } \sin A, \sin B, \sin C \text{ เมื่อ } a = 18, b = 24, c = 30$$

จงพิสูจน์

$$8. \frac{s^2}{abc} = \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$9. \frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0$$

$$10. b \sin^2 \frac{A}{2} + a \sin^2 \frac{B}{2} = s - c$$

11. การเกี่ยวข้องกับระหว่างด้าน 2 ด้าน และมุมระหว่างด้านของสามเหลี่ยม

$$\text{สูตร} \quad \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

การพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{a + b} \quad (\text{Dividendo et Componendo})$$

$$\frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\cot \frac{A+B}{2} \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \tan \frac{A+B}{2}$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

10. การหาค่าของ sine เป็นเทอมของด้าน

สูตร

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

การพิสูจน์

เนื่องจาก $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$= 2 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=$$

$$= \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

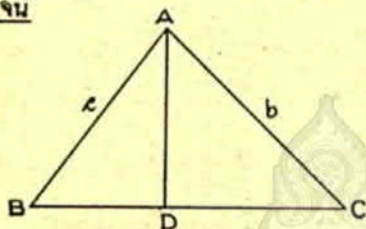
11. การหาเนื้อที่รูปสามเหลี่ยม ABC

สูตร 1. $\Delta = \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

2. $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$ หรือ $\frac{1}{2} ac \sin B$ หรือ $\frac{1}{2} bc \sin A$

3. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

พิสูจน์



$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{สูง} \dots\dots \text{จาก (1)}$$

$$= \frac{1}{2} a \times AD$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C \dots\dots\dots (2)$$

เนื่องจาก $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C \dots\dots\dots \text{จาก (2)}$

และ $\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} ab \times \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $a = 283$, $b = 317$, $c = 428$ จงหามุม A ของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ

ตามสูตร $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

$$s = \sqrt{\frac{283+317+428}{2}} = 514$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(514-317)(514-428)}{514(514-283)}}$$

$$= \sqrt{\frac{197 \times 86}{514 \times 231}}$$

$$\begin{aligned}
 \log \tan \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} (\log 197 + \log 86 - \log 514 - \log 231) \\
 &= \frac{1}{2} (2.2945 + 1.9345 - 2.7110 - 2.3636) \\
 &= \frac{1}{2} \times \bar{1}.1544 \\
 &= \bar{1}.5772 \\
 &= \log \tan 20^{\circ} 42' \\
 \frac{A}{2} &= 20^{\circ} 42' \quad \therefore \hat{A} = 41^{\circ} 24'
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $b = 456.12$, $c = 296.86$ และ $\hat{A} = 74^{\circ} 20'$ จงหามุม B และ $\hat{C}$ จากสามเหลี่ยมรูปนี้ กำหนด $\log 157.26 = 2.2021067$, $\log 752.98 = 2.8767834$, $L \tan 15^{\circ} 35' 18'' = 9.4455826$, $L \cot 37^{\circ} 10' = 10.1202593$

วิธีทำ

$$\text{ตามสูตร} \quad \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{456.12 - 296.86}{456.12 + 296.86} \cot 37^{\circ} 10' \\
 &= \frac{159.26}{752.98} \cot 37^{\circ} 10'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \tan \frac{B-C}{2} &= \log 259.26 - \log 752.98 + \log \cot 37^{\circ} 10' \\
 &= 2.2021067 - 2.8767834 + (10.1202593 - 10) \\
 &= \bar{1}.4455826 = \log \tan 15^{\circ} 35' 18''
 \end{aligned}$$

$$B - C = 31^{\circ} 10' 36''$$

$$B + C = 180^{\circ} - A = 105^{\circ} 40'$$

$$\text{เมื่อ } B - C = 31^{\circ} 10' 36''$$

$$B + C = 105^{\circ} 40'$$

$$2B = 136^{\circ} 50' 36''$$

$$B = 68^{\circ} 25' 18''$$

$$C = 37^{\circ} 14' 42''$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 16 ข.

1. จงหา $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อกำหนด $a = 35$, $b = 21$, $\hat{C} = 50^\circ$, $\log 2 = .3010$, $L \tan 28^\circ 11' = 9.7290$, $L \tan 65^\circ = 0.3313$, $L \tan 28^\circ 12' = 9.7293$
2. ถ้า $a = 9$, $b = 6$, $\hat{C} = 60^\circ$ จงหา $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ ของรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้ $\log 2 = .3010$, $\log 3 = .4771$, $L \tan 19^\circ 6' = 9.5394$, $L \tan 19^\circ 7' = 9.5398$
3. ในรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้ $a = 1$, $c = 9$, $\hat{B} = 65^\circ$ จงหา $\hat{A}$ และ $\hat{C}$ โดยมี $\log 2 = .3010$, $L \cot 32^\circ 30' = 10.1958$, $L \tan 51^\circ 28' = 10.0989$ ผลต่าง $1' = 3$
4. ในรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้ $\hat{A} = 40^\circ$, $b = 131$, $c = 72$, $\log 5.9 = .7709$, $L \tan 39^\circ 37' = 9.9024$
5. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 21$ หลา, $b = 20$ หลา, $\hat{C} = 60^\circ$ จงหา c และเนื้อที่รูป $\triangle$
6. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 327$, $c = 256$, $\hat{B} = 56^\circ 28'$ จงหา $\hat{A}$ และ $\hat{C}$ และเนื้อที่รูป $\triangle$
7. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 376$, $b = 251$, $\hat{C} = 78^\circ 26'$ จงหา $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ และเนื้อที่รูป $\triangle$
8. ถ้า $a = 2303$, $b = 7677$, $\hat{C} = 30^\circ 10' 5''$ ในสามเหลี่ยมใด จงหามุม $\hat{A}$ และ $\hat{B}$
9. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $b = 37.2$, $c = 22.3$, $\hat{A} = 29^\circ 38'$ จงหา $\hat{B}$, $\hat{C}$ และด้าน a
10. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 15.72$, $b = 17.08$, $\hat{C} = 37^\circ 25'$ จงแก้สามเหลี่ยม
11. ถ้า $a = .012$, $b = .576$, $\hat{C} = 60^\circ 31'$ จงหามุม $\hat{B}$ และ $\hat{A}$ ของรูปสามเหลี่ยมนี้

12. ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ยาว 27.3 และ 16.8 และมุมระหว่างด้านทั้งสองโต $45^{\circ} 7'$ จงหาด้านและมุมที่เหลือ และเนื้อที่ของ $\triangle$ รูปนี้
13. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 17.6$, $b = 24.03$ และ $\hat{C} = 121^{\circ} 38'$ จงหาส่วนที่เหลือ
14. ถ้า $b = 27$, $c = 33.48$, $\hat{A} = 60^{\circ}$ จงหามุม $\hat{B}$ และมุม $\hat{C}$ ในสามเหลี่ยมรูปนี้
15. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $b = 1000$, $\hat{A} = 45^{\circ}$, $\hat{C} = 68^{\circ} 17'$ จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยม
16. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $\hat{A} = 48^{\circ}$, $\hat{B} = 54^{\circ}$, $c = 38$ จงหา a และ b
17. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 1000$, $\hat{A} = 50^{\circ}$, $\hat{C} = 66^{\circ} 17'$ จงหา c
18. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 100$, $\hat{B} = 60^{\circ} 15'$, $\hat{C} = 54^{\circ} 10'$ จงหา c
19. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 145$, $b = 178$, $\hat{B} = 41^{\circ} 10'$ จงแก้สามเหลี่ยม
20. ถ้า $\hat{A} = 26^{\circ} 26'$, $b = 127$, $a = 85$ จงแก้สามเหลี่ยม
21. ถ้า $b = 4$, $c = 5$, $\hat{C} = 45^{\circ}$ จงหา $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ ของสามเหลี่ยม
22. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $b = 8.4$, $c = 12$, $\hat{B} = 37^{\circ} 36'$ จงแก้สามเหลี่ยม
23. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 123.9$, $b = 172.4$, $\hat{C} = 57^{\circ} 37'$ จงหามุมที่เหลือ
24. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $c = 421.9$, $a = 531.4$, $\hat{A} = 72^{\circ} 15'$ จงหามุมที่เหลือ
25. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 73$, $b = 62$, $\hat{A} = 82^{\circ} 14'$ จงหา $\hat{B}$

26. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $a = 17.28$, $b = 23.97$, $\hat{B} = 55^\circ 13'$ จงหามุม A และ $\hat{C}$
27. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $b = 1325$, $c = 1665$, $\hat{B} = 52^\circ 19'$ จงหาส่วนที่เหลือ
28. ในรูปสามเหลี่ยม ถ้า $\hat{A} = 20^\circ 41'$, $b = 137$, $a = 115$ จงแก้สามเหลี่ยม
29. ผลต่างระหว่างมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมเป็น 24° ด้านอีกสองด้านยาว 175 และ 337 จงหามุมทั้งสาม
30. ด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมมุมฉากยาว $\frac{2}{3}$ ของด้านตรงข้ามมุมฉาก จงหามุมแหลมที่โตที่สุด
31. ด้านของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งยาว 9 และ 3 ผลต่างของมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองเป็น 90° จงหามุมทั้งสามของสามเหลี่ยมนั้น
32. ผลต่างระหว่างมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น $17^\circ 48'$ และด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่ฐานยาว 105.3 และ 76.75 ฟุต จงหามุมยอด
33. ถ้า $a = 1000$, $b = 840$, $c = 1258$ จงแก้สามเหลี่ยมโดยใช้สูตร $\sin \frac{B}{2}$
34. กำหนดให้ $\hat{B} = 30^\circ$, $c = 150$, $b = 50\sqrt{3}$ จงแก้สามเหลี่ยม
35. ถ้ามุมที่ฐานของสามเหลี่ยมโต $22\frac{1}{2}^\circ$ และ $112\frac{1}{2}^\circ$ จงแสดงว่าสามเหลี่ยมนี้มีส่วนสูงเป็นครึ่งของฐาน
36. ครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างมุมที่ฐานของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น $10^\circ 14'$ และด้านอีก 2 ด้าน ซึ่งไม่ใช่ฐาน ยาว 18.42 และ 16.35 จงหามุมยอดของสามเหลี่ยมนี้

บทที่ 17

การวัดความสูงและระยะทางบนพื้นราบ

1. สิ่งสำคัญอีกสิ่งหนึ่งในวิชาตรีโกณมิติ คือการวัดระยะทางหรือความสูงของวัตถุสิ่งใดสิ่งหนึ่ง จะเป็นตึก เสาธง หรืออนุสาวรีย์ เป็นต้น โดยไม่ต้องใช้วัดกันอย่างจริงจัง ดังนั้นนักเรียนจะเห็นได้ในแบบฝึกหัดในบทนี้
2. ในการที่จะวัดระยะทางหรือความสูงต้องเกี่ยวข้องกับมุม การที่จะวัดมุม เขาถือเส้นระดับ (horizontal line) เป็นหลัก มุมที่กางขึ้นไปจากเส้นระดับ ดังในภาพ 1 เรียกมุมเงย (Angle of Elevation) และมุมที่กางลงไปจากเส้นระดับ เรียกว่ามุมก้ม (Angle of Depression) ดังในภาพ 2

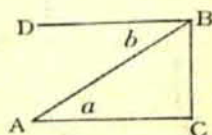


สมมุติให้ A, B เป็นจุดสองจุด B อยู่เหนือ A

AC เป็นเส้นระดับลากผ่านจุด A

พบเส้นตั้งที่ลากจากจุด B ที่จุด C

ดังนั้นมุม BAC เป็นมุมเงย (Angle of Elevation) ของจุด B ที่มองจาก A



จากจุด B ลาก BD ขนานกับ AC ดังนั้น DB เป็นเส้นระดับผ่านจุด B

ฉะนั้น DBA เป็นมุมก้ม (Angle of Depression) ของจุด A ซึ่งมองจากจุด B

8. เครื่องมือที่ใช้ในการเล็งมุมนี้มี 2 ชนิด เรียกว่า Theodolite และ Sextant เครื่อง Theodolite นี้เป็นกล้องติดอยู่กับแผ่นไม้แบน ๆ และแผ่นไม้มีขาหยั่งรองรับ 3 ขา และทั้ง 3 ขาอาจจะยืดหรือหดลงได้เพื่อให้ได้ระดับอย่างถาวร เครื่องนี้จะตั้งที่จุด A กล้องนี้จะส่องไปทางเส้นระดับ AC เมื่อได้ระดับแล้วหมุนกล้องขึ้นไปจนมองเห็นจุด B จะมีสเกลบอกว่ากล้องนั้นเงยขึ้นไปกี่องศา และในทำนองเดียวกัน เมื่อกล้องอยู่ที่ AB เมื่อส่องได้ระดับ DB แล้วหมุนกล้องลงมาจนมองเห็นจุด A สเกลก็จะแสดงให้ทราบถึงมุมก้ม DBA เครื่องชนิดนี้ใช้วัดมุมทั่วไปในพื้นราบธรรมดา
- เครื่อง Sextant ใช้ในการทำมุมซึ่งจุด 2 จุด รับมุมที่จุดซึ่ง Sextant ตั้งนั้น เครื่องชนิดนี้ใช้ในการหามุมจากดาวฟ้าเรือ

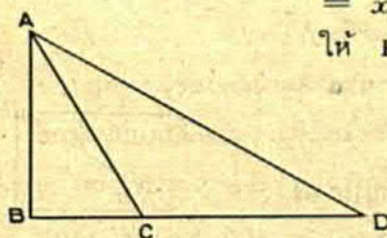
ตัวอย่างที่ 1 ชายผู้หนึ่งยืนอยู่บนฝั่งแม่น้ำ มองเห็นต้นไม้นบนฝั่งตรงข้ามรับมุมที่จุดที่เขายืนเป็น 60° เมื่อเขาถอยหลังไป 40 ฟุต ปรากฏว่ามุมกลายเป็น 30° จงหาความสูงของต้นไม้และความกว้างของแม่น้ำ

วิธีทำ ให้ AB เป็นต้นไม้บนฝั่งตรงข้ามกับที่ชายผู้นั้นยืน
 $= x$ ฟุต

ให้ BC เป็นความกว้างของแม่น้ำ

C เป็นที่ซึ่งเขายืนมอง

D เป็นที่ซึ่งเขาถอยหลังไปมองเห็นต้นไม้เป็นครั้งที่สอง



$$\hat{ACB} = 60^\circ \quad \hat{ADB} = 30^\circ$$

$$\tan \hat{ACB} = \frac{x}{BC}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{x}{BC} \quad \therefore x = \sqrt{3} BC \quad \dots (1)$$

$$\tan \hat{ADB} = \frac{x}{BC+40} \quad \therefore x = \frac{BC+40}{\sqrt{3}} \quad \dots (2)$$

$$(1) = (2) \quad \sqrt{3}BC = \frac{BC + 40}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 3BC = BC + 40$$

$$BC = 20$$

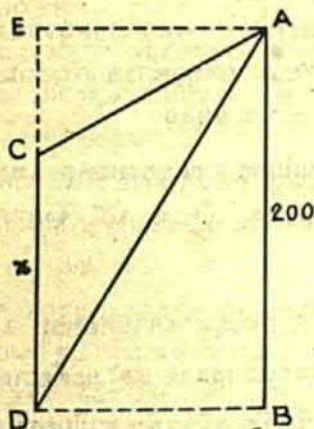
$$\therefore AB = x = \sqrt{3} \cdot 20$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ต้นไม้สูง} & 20\sqrt{3} \text{ ฟุต} \\ \text{แม่น้ำกว้าง} & 20 \text{ ฟุต} \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

ตัวอย่างที่ 2 เมื่อยืนอยู่บนยอดผาซึ่งสูง 200 ฟุต เห็นหอคอยแห่งหนึ่งที่อยู่เชิงผานั้น มุมของยอดหอคอยที่มองเห็นและมุมของเชิงหอคอยเป็นมุมก้ำ 30° และ 60° ตามลำดับ จงหาความสูงของหอคอย

วิธีทำ

ให้ A เป็นจุดที่มองเห็นหอคอยอยู่บนยอดผา BA สูง 200 ฟุต
CD เป็นหอคอยสูง x ฟุต



$$\widehat{EAC} = 30^\circ, \widehat{EAD} = 60^\circ$$

$$\therefore \tan \widehat{EAD} = \frac{ED}{EA} = \frac{200}{EA}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{200}{EA}, EA = \frac{200}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \widehat{EAC} = \frac{EC}{EA} = \frac{200-x}{EA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore EA = 200\sqrt{3} - x\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{200}{\sqrt{3}} = 200\sqrt{3} - x\sqrt{3}$$

$$200 = 600 - 3x$$

$$x = \frac{400}{3} = 133 \frac{1}{3} \text{ ฟุต}$$

$$\therefore \text{หอคอยสูง } 133 \frac{1}{3} \text{ ฟุต } \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

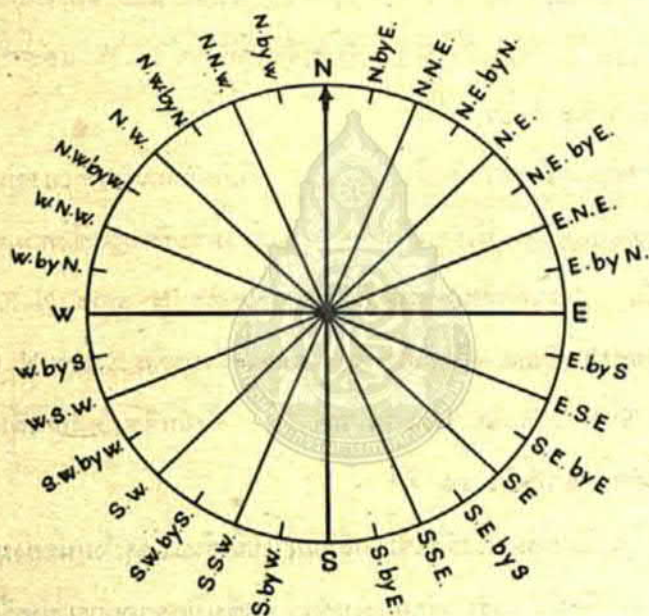
แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ก.

1. นักมองหอคอยแห่งหนึ่งปรากฏว่าต้องมองยอดของหอคอยนั้นเป็นมุมเงย 30° แต่เมื่อเดินเข้าไปใกล้อีก 100 ฟุต ในแนวระดับเดิม ปรากฏว่ามุมเงยกลายเป็น 45° หอคอยแห่งนั้นสูงเท่าใด
2. ชายผู้หนึ่งอยู่บนเขาดังกวน เห็นเรือทอดสมอยู่น้ำเมืองสงขลา 2 ลำ หน้าผาบนเขาที่เขายืนมีอยู่เหนือระดับน้ำทะเล 200 ฟุต และเรือทั้งสองลำนั้นอยู่ในแนวเส้นระดับเดียวกับเชิงผาที่เขายืน เขาทราบว่ามีมุมที่เขามองเรือทั้งสองนั้นเป็นมุมก้ม 45° และ 30° ตามลำดับ เรือทั้งสองลำนั้นอยู่ห่างกันเท่าใด
3. ต้นไม้ต้นหนึ่งถูกพายุพัดหัก ส่วนบนของต้นไม้หักค้ำงอลงมาทำมุมกับพื้นดินเป็น 30° ระยะจากโคนต้นไม้ถึงที่ปลายต้นไม้ทำมุมกับพื้นดินเป็น 50° จงหาความสูงของต้นไม้
4. นักสำรวจขึ้นไปอยู่บนยอดผา มองเรือช่วยชีวิต 2 ลำ ด้วยมุมก้ม 39° และ 26° ตามลำดับ เรือทั้งสองนั้นห่างกัน 300 หลา และเส้นตรงซึ่งต่อระหว่างเรือเป็นแนวระดับเดียวกับเชิงผานั้น จงหาความสูงของหน้าผา และระยะที่เรือช่วยชีวิตลำที่อยู่ใกล้เชิงผามากที่สุดห่างจากผานั้นกำหนด $\cot 26^\circ = 2.0503$ และ $\cot 39^\circ = 1.2349$
5. หอคอยสองแห่งห่างกัน 60 ฟุต และมุมก้มของยอดของหอคอยแห่งแรกซึ่งมองจากยอดหอคอยแห่งที่สองซึ่งสูง 150 ฟุต เป็นมุม 30° จงหาความสูงของหอคอยแห่งแรก
6. นายช่างควบคุมการสร้างหอคอยแห่งหนึ่ง ยืนอยู่ห่างจากหอคอย 120 ฟุต ไข้วถัดต้องดูยอดของหอคอยซึ่งยังไม่เสร็จเป็นมุมเงย 35° จะต้องเสริมยอดของหอคอยอีก ดังเท่าใดจึงจะเสร็จ ซึ่งเมื่อเสร็จแล้วเขายืนอยู่ที่จุดเดิมดูยอดหอคอยด้วยกัลถองวัดมุมนั้นจะเป็นมุม 60°

7. หน้าผาตองแห่งมีถนนตัดผ่ากลางกว้าง 100 ฟุต และหน้าผาทั้งสองแห่งนี้สูงเท่ากัน นักสำรวจยืนอยู่ที่จุด ๆ หนึ่งกลางถนน ใช้กล้องมองดูยอดผาทั้งสองเห็นเป็นมุม 30° และ 60° ตามลำดับ ถ้าวานยืนอยู่ที่ใดบนถนนนั้น จงบอกระยะทางที่เขาขึ้นห่างจากผาทั้งสองและจงหาความสูงของผานั้น
8. เมื่ออยู่ชั้นต่างของหอประชุมซึ่งสูงจากพื้นดิน 5 ฟุต มองเห็นยอดเสาธงกลางสนามหน้าหอประชุมแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยนั้นด้วยมุมเงย 45° ถ้าเสาธงสูง 275 ฟุต หอประชุมสูงเท่าใด
9. กลาสีคนหนึ่งขึ้นไปอยู่บนยอดเสากระโดงเรือลำหนึ่ง มองเห็นเรืออีกลำหนึ่งเป็นมุมก้ม 30° จงหาระยะทางที่เรือทั้งสองห่างจากกัน ถ้าเสานั้นสูง 160 ฟุต
10. เซโมยคนหนึ่งจะทำการลักทรัพย์จึงนำบันไดมาพาดกำแพง บันไดนี้จะทำมุม 60° กับพื้นดิน จงหาความสูงของกำแพงถ้าระยะทางที่เชิงบันไดห่างจากเชิงกำแพงเป็น 6 ฟุต
11. ฉันทันไปยืนอยู่บนยอดหอคอยริมฝั่งแม่น้ำแห่งหนึ่ง มองเห็นวัดฤๅษะหนึ่งบนฝั่งตรงข้ามด้วยมุมก้ม 25° 12 จงหาความกว้างของแม่น้ำเมื่อหอคอยสูง 50 ฟุต
12. บัลดูนลูกหนึ่งลอยอยู่เหนือเมือง ๆ หนึ่ง คนที่อยู่บนบัลดูนมองเห็นเมืองอีกเมืองหนึ่งเป็นมุมก้ม $10^\circ 14'$ ถ้าเมืองนี้ห่างกัน 8 ไมล์ จงหาความสูงของลูกบัลดูน
13. หอระฆังสองหอสูง 50 ฟุตและ 30 ฟุตและเส้นซึ่งต่อระหว่างยอดหอระฆังทำมุมกับพื้นราบเป็น $38^\circ 41'$ จงหาระยะที่หอทั้งสองห่างจากกัน กำหนด $\cot 38^\circ 41' = 1.5$
14. จงหาระยะทางซึ่งวัดจากยอดผาริมฝั่งทะเลมายังเรือลำหนึ่ง ซึ่งกลาสีบนเรือลำนั้นมองเห็นยอดผาเป็นมุมเงย $41^\circ 18'$ และยอดผาสูง 132 หลา ($\sin 41^\circ 18' = .66$)
15. มุมเงยของยอดหอคอยแห่งหนึ่งเป็น 30° เมื่อเดินไกลหอคอยอีก 100 หลาปรากฏว่ามุมเงยเป็น 45° จงหาความสูงของหอคอย

16. เสาธงปักอยู่บนยอดดึก นักสำรวจตั้งกล้องส่องวัดมุมอยู่ที่ระยะห่างจากดึก 45 ฟุต วัดมุมของยอดเสาธงและยอดของดึกเป็นมุมเงย 60° และ 30° จงหาความยาวของเสาธง
17. ที่เชิงเสาดันหนึ่ง นักเรียนผู้หนึ่งมองดูยอดแหลมของดึกเรียนเป็น 45° และเมื่อปีนขึ้นไปบนยอดเสาซึ่งสูง 30 ฟุต มองยอดดึกเรียนเป็นมุมเงย 30° จงหาความสูงของดึกและระยะทางที่ดึกนั้นห่างจากเสา
18. เขาแห่งหนึ่งสูง 1,650 ฟุตเหนือระดับพื้นราบ จากจุด ๆ หนึ่งบนพื้นราบ มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 60° ถูกบัลลูนขึ้นจากจุดนั้นด้วยอัตราความเร็วสม่ำเสมอ เมื่อบัลลูนลอยขึ้นไปได้ 5 นาทีของมุมเงยของยอดเขาจากถูกบัลลูนเป็น 30° จงหาอัตราความเร็วของบัลลูนเป็นไมล์ในเวลา 1 ชั่วโมง
19. ที่เชิงหอคอยมุมเงยของยอดอนุสาวรีย์เป็น 60° และจากยอดหอคอยซึ่งสูง 60 ฟุตมุมเงยเป็น 30° จงหาความสูงของอนุสาวรีย์
20. จากยอดผาแห่งหนึ่งสูง 100 ฟุต มองเห็นเรือสองลำด้วยมุมก้ม 15° และ 75° จงหาระยะทางซึ่งเรือทั้งสองนี้ห่างจากกัน กำหนด $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ และ $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$
21. บนยอดอนุสาวรีย์มองเห็นวัดพุทธตั้งบนพื้นดินเป็นมุมก้ม 45° และ 30° ถ้าอนุสาวรีย์สูง 150 ฟุต จงหาระยะทางที่วัดพุทธตั้งนี้ห่างจากกัน
22. จากยอดเขาแห่งหนึ่งมองหลักบอกระยะทาง 1 ก.ม. บนถนนซึ่งตัดไปทางทิศใต้เป็นมุมก้ม 45° และ 22° ตามลำดับ จงหาความสูงของภูเขาเป็นเมตร กำหนด $\cot 22^\circ = 2.475$
23. จากชั้นบนของประภาคารซึ่งสูง 120 หลา มุมก้มของหินโสโครกสองแห่งทางทิศตะวันตกเป็น 75° และ 15° ตามลำดับ จงหาระยะทางที่หินทั้งสองห่างจากกัน กำหนด $\cot 75^\circ = 0.268$ และ $\cot 15^\circ = 3.732$

4. ในการศึกษาวิชาตรีโกณมิติ นักเรียนจะต้องมีความรู้เข็มทิศอยู่บ้าง ฉะนั้น จะต้องนำเรื่องทิศมาไว้ในที่นี้ด้วย ทิศทั้งหมดมี 32 ทิศด้วยกัน ทิศหนึ่ง แยกจากทิศหนึ่งด้วยการทำมุมที่จุดศูนย์กลางของเข็มทิศเท่ากัน และทุก ๆ ทิศนี้มีชื่อกำกับอยู่ด้วย นักเรียนจำจะต้องรู้ชื่อทิศทั้งหมด



ทิศหลักมี 4 ทิศด้วยกัน จุดปลายทิศทั้ง 4 เรียกว่า Cardinal Points

บอกทิศเหนือ North เขียนย่อว่า N

ทิศใต้ South " " S

ทิศตะวันออก East " " E

ทิศตะวันตก West " " W

ทั้ง 4 จุดนี้เมื่อต่อจุดทิศเหนือกับทิศใต้ และจุดทิศตะวันออก และจุดทิศตะวันตก จะกลายเป็นเส้นตรง 2 เส้นตัดกันเป็นมุมฉาก และเมื่อเชื่อมสี่ทิศ

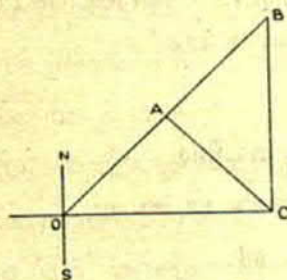
- เคลื่อนที่มาเชื่อมระหว่างกึ่งกลางมุมฉากของทิศใดก็จะเรียกชื่อควบทิศทั้ง 2 นั้นเข้าด้วยกัน เมื่อเชื่อมเคลื่อนเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างทิศเหนือ (N) และทิศตะวันออก (E) เรียกชื่อ (N.E) North East และเมื่อเชื่อมเคลื่อนไปแบ่งครึ่งมุม E และ S เรียกว่า S.E ดังนั้นจึงเกิดมีทิศ N.W และ S.W โดยวิธีทำนองเดียวกันรวมเป็น 8 ทิศ

ส่วนทิศย่อยลงไปกว่าทิศทั้ง 8 นั้น ก็เกิดจากเชื่อมทิศไปอยู่เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมของทิศย่อยคู่ใด ก็เรียกชื่อทิศจากการรวมชื่อทิศย่อยซึ่งทำมุมกันและถูกแบ่งครึ่งไปนั้น เช่นทิศที่เกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุมทิศ N และ N.E เรียกทิศ North-North East ทิศที่เกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุมทิศ E และ N.E เรียกทิศนั้นว่า E.N.E (East North East) ดังนั้นจึงเกิดมีทิศเพิ่มขึ้นจากมุม 8 คู่อีก 8 ทิศ รวมเป็น 16 ทิศ

จาก 16 ทิศย่อย เมื่อเชื่อมเคลื่อนมาเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมของมุม 16 มุมซึ่งเกิดจาก 16 ทิศนั้น เรียกชื่อต่างไปคือ ทิศซึ่งเกิดจากการแบ่งครึ่งมุมของทิศ N และ N.N.E ก็เรียกเป็น North by East (N. by E) คือทิศนั้นอยู่ใกล้ทิศใดมากกว่าก็เรียกทิศนั้นขึ้นก่อน ถ้าเป็นทิศซึ่งเกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุมของ N.E และ N.N.E เรียกชื่อ N.E ก่อนเป็น N.E by N. ถ้าแบ่งครึ่งมุมระหว่าง N.E และ N.N.E เรียกชื่อเป็น N.E by E ตามในรูปดังนี้จะมีอีก 16 ทิศ รวมเป็น 32 ทิศ

ตัวอย่างที่ 1 ชายผู้หนึ่งเดินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือถึงอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ (N.E) เมื่อเขาเดินไปอีก 800 หลา วัดจุดขึ้นหนึ่งอยู่ทางทิศเหนือ (N) ของเขา และอีกชั้นหนึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ (N.W) ถามว่าเมื่อแรกวัดจุดทั้งสองอยู่ห่างเขาเท่าใด

วิธีทำ เมื่อแรกสมมุติให้ชายผู้หนึ่งอยู่ที่ A มองเห็นวัตถุ A, B อยู่ทางทิศ (N.E)



$$\therefore \angle BOC = 45^\circ$$

เขาเดินไปที่ C ด้วยระยะ OC ซึ่งยาว = 800 หลา
วัตถุ A อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ (N.W)

$$\therefore \angle BCA = 45^\circ$$

และ B อยู่ห่างทางทิศเหนือ $\therefore \angle OCB = 90^\circ$

$$\tan \angle BOC = \frac{BC}{OC} \therefore \tan 45^\circ = \frac{BC}{OC}$$

$$1 = \frac{BC}{OC}$$

$$\therefore BC = OC$$

$$= 800 \text{ หลา}$$

ใน $\triangle CBA$, $\angle BCA = 45^\circ$ และ $\angle OBC = \angle BOC$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ$$

$$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{800} = \cos 45^\circ$$

$$\therefore AB = 400\sqrt{2}$$

ใน $\triangle OAC$ $\cos \angle AOC = \frac{AO}{OC} = \frac{AO}{800} = \cos 45^\circ$

$$\therefore OA = 400\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{วัตถุ A ห่างจากชายฝั่งนั้นด้วยระยะ} &= 400 \times 1.414 \\ &= 565.6 \text{ หลา} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{วัตถุ B ห่างจากชายฝั่งนั้นด้วยระยะ} &= OA + AB \\ &= 800\sqrt{2} = 800 \times 1.414 \\ &= 1131.2 \text{ หลา} \end{aligned}$$

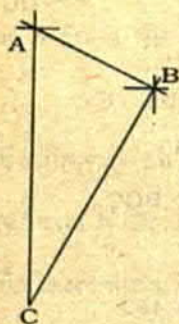
ตัวอย่างที่ 2 เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศ S.S.W (ทิศใต้ $22\frac{1}{2}^{\circ}$ ตะวันตก) เมื่อเที่ยงคนมองจากประภาคารแห่งหนึ่ง เห็นว่าเรือลำนั้นอยู่ทางทิศ E.S.E (ทิศตะวันออก $22\frac{1}{2}^{\circ}$ ใต้) และอยู่ห่างจากประภาคาร 4 ไมล์ เมื่อเวลา 13.00 น. เรือลำนี้แล่นอยู่ทางทิศใต้ของประภาคาร จงหาอัตราความเร็วของเรือลำนั้นกำหนด $67\frac{1}{2} = 2.414$

วิธีทำ

ให้ A เป็นประภาคาร

B เป็นเรือที่แล่นมาถึงเมื่อเวลาเที่ยง

C เป็นเรือที่แล่นมาถึงเมื่อเวลา 13.00 น.



$$\hat{A}BC = 90^{\circ}$$

$$\hat{B}AC = 67\frac{1}{2}^{\circ}$$

$$\therefore \tan 67\frac{1}{2}^{\circ} = \frac{BC}{AB}, \text{ ระยะ } AB = 4 \text{ ไมล์}$$

$$= \frac{BC}{4}$$

$$BC = 4 \tan 67\frac{1}{2}^{\circ}$$

$$= 4 \times 2.414 \text{ ไมล์}$$

$$= 9.656 \text{ ไมล์}$$

เรือแล่นจาก B ถึง C กินเวลา 1 ชม.

$$\therefore \text{ใน 1 ชม. เรือแล่น } 4 \times 2.414 = 9.656 \text{ ไมล์}$$

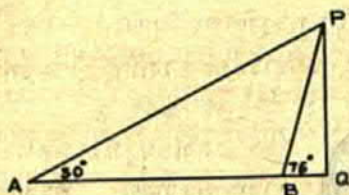
แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ข.

1. เมื่อมองจากกระโຈມไฟ K จะมองเห็นเรือ A และ B อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้และทิศใต้ 15° ตะวันออกตามลำดับ และขณะเดียวกันเรือ B อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของเรือ A ถ้า A ห่างจาก K 4 ไมล์ จงหา ระยะทางที่เรือ A และเรือ B อยู่ห่างจากกัน
2. ชายผู้หนึ่งเดินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ (N.E) 3 กิโลเมตร และเดินไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนืออีก 6 กิโลเมตร ขณะนี้เขาอยู่ห่างจากที่ซึ่งเขาตั้งต้นออกเดินทางเท่าใด
3. A และ B ตั้งต้นออกเดินทางไปทางทิศเหนือ 17° ตะวันตก (N 17° W) และทิศเหนือ 73° ตะวันออก (N 73° E) เมื่อเดินไปได้ 2 ชม. เขาจะอยู่ห่างกันเท่าใด กำหนดให้ A เดิน ชม. ละ 3 ไมล์ และ B เดิน ชม. ละ 4 ไมล์
4. บ៉อม A อยู่ทางทิศตะวันตกของบ៉อม B เรือ C อยู่ทางทิศใต้ของบ៉อม A และทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ของบ៉อม B หลังจากแล่นไปทางทิศ E.N.E 10 ไมล์ เขาอยู่ทางใต้ของ B บ៉อมทั้งสองห่างกันเท่าใด
5. เมื่อ 19.00 น. เรือลำหนึ่งซึ่งกำลังแล่นตรงไปทางทิศตะวันออก 37° เฉียงไปทางใต้ (E. 37° S.) ด้วยอัตราความเร็ว 8 ไมล์ ต่อ 1 ชม. เห็นบ៉อม ๆ หนึ่งอยู่ทางทิศตะวันออก 53° ไปทางเหนือ (E. 53° N.) เมื่อเวลา 23.00 น. เรือลำนี้เห็นบ៉อมอยู่ทางทิศ N. 20° W จงหา ระยะทางที่บ៉อมอยู่ห่างจากเรือทั้งเมื่อเวลา 19.00 น. และ 23.00 น.
6. เรือ A อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ (S.W) ของท่า และห่างจากท่านั้น 10 ไมล์ และขณะเดียวกันเรือ B ก็กำลังแล่นออกไปจากท่า เรือ B แล่นไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของท่านั้นด้วยอัตราความเร็ว 8 ต่อ 1 ชม. และไปพบกับเรือ A ในเวลา 2 ชม. นับจากเมื่อออกจากท่า จงหาทางเดินของ A

7. เรือ 2 ลำแล่นออกจากท่าเมื่อเวลาเที่ยงในทิศ $W. 28^{\circ} S.$ และ $E. 62^{\circ} S.$ ด้วยอัตราความเร็ว 10 ไมล์ และ $10\frac{1}{2}$ ไมล์ ต่อ 1 ชม. ตามลำดับ จงหารระยะทางที่เรือห่างกันเมื่อเวลาบ่าย 2 โมง
8. A, B, C เป็นเรือ 3 ลำ เรือ B ทอดสมออยู่ทางทิศ $E. N. E$ ของ A และ C อยู่ทางทิศ $S. S. E$ ของ B และห่างจากเรือ B 40 ไมล์ จงหาว่าเรือ C อยู่ห่างจากเรือ A เท่าใด และอยู่ทางทิศไหนของเรือ A
9. เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศเหนือด้วยอัตราความเร็ว 5 น็อต สัมผัสพบเรือลำหนึ่งซึ่งแล่นไปทางทิศตะวันตกด้วยอัตราความเร็ว 12 น็อต จงหาระยะทางที่เรือทั้งสองอยู่ห่างจากกันเมื่อเวลา 1 ชม. ก่อนหน้านั้น และหาว่าเรือลำนั้นอยู่ทางทิศใดของเรืออีกลำหนึ่ง (1 น็อต = 6080 ฟุต ต่อ 1 ชม.)
10. จากเรือลำหนึ่งมองเห็นประภาคาร 2 แห่ง อยู่ในแนวตั้งตะวันตก และเมื่อเรือนี้แล่นไปทางทิศใต้ไปอีก 10 ไมล์ เห็นว่าประภาคารทั้งสองอยู่ทางทิศ $N. W.$ และ $W. N. W.$ จงหาระยะทางระหว่างประภาคารทั้งสอง
11. ชายผู้หนึ่งเดินไปตามถนนซึ่งตัดตรงไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ มองเห็นวัตถุสิ่งหนึ่ง $S. 60^{\circ} W.$ ของเขาหลังจากเดินไป 1,000 หลา วัตถุสิ่งนั้นอยู่ทาง $N. 75^{\circ} W.$ จงหาระยะทางที่วัตถุนั้นห่างจากจุดที่ชายผู้มองวัตถุสิ่งนั้น และหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่วัตถุนั้นอยู่ห่างจากถนน
12. A และ B เป็นเมืองสองเมืองซึ่งอยู่คนละฟากฝั่งแม่น้ำซึ่งมีลำน้ำตรงสายหนึ่ง C เป็นเมืองที่สาม B อยู่ทางทิศ $N. 10^{\circ} W$ ของเมือง A และ C อยู่ทางทิศ $N. 20^{\circ} E$ ของ B และทิศ $N. 10^{\circ} E$ ของ A จงหาระยะทางที่ C อยู่ห่างจากแม่น้ำนั้น ถ้าแม่น้ำนั้นกว้าง 30 เมตร
13. ประภาคาร A และ B ห่างกัน 12 ไมล์ และประภาคาร B อยู่ทางทิศ $E 15^{\circ} N$ เรือสินค้าลำหนึ่งแล่นไปทางทิศ $S 15^{\circ} W$ ด้วยอัตราความเร็ว 15 ไมล์ต่อชม. เมื่อเวลาเที่ยงคืนอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A และตะวันตกเฉียงเหนือของ B จงหาเวลาซึ่งเรือสินค้าลำนั้นแล่นผ่านแนวตรงที่ต่อระหว่างเชิงประภาคารทั้งสองนั้น

14. ที่พักรอรถประจำทางของบริษัทหนึ่งอยู่ริมถนนซึ่งตัดตรงไปทาง ตะวันตก และตะวันออกและที่พักลองแห่งนั้นห่างกัน 2 กม. ฉะนั้นอยู่ที่พักรอรถแห่งหนึ่ง เห็นบ้านหลังหนึ่งอยู่ทางทิศ N. 52° W และเมื่อไปยืนอยู่ในแห่งที่สองมองเห็นบ้านหลังนั้นอยู่ทางทิศ N. 38° W บ้านหลังนั้นอยู่ห่างจากถนนเท่าใด
15. A และ B เป็นหน้าผาสองแห่งอยู่บนฝั่งทะเล และอยู่ห่างกัน 1,200 หลา ฝั่งทะเลนี้ยาวตรงจากทิศตะวันออกไปทางทิศตะวันตก กระโจมไฟแห่งหนึ่งอยู่ทางทิศ S 38° E ของ B จงหาระยะทางที่กระโจมไฟอยู่ห่างจากฝั่ง ถ้าปรากฏว่ากระโจมไฟนี้อยู่ S 57° W ของ A
16. กระโจมไฟแห่งหนึ่งหันหน้าไปทางทิศใต้ ตั้งตำแหน่งเป็นรูปใบพัดทางตั้งแต่ทิศ S.E ถึงทิศ S.W. เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศตะวันตก ครั้งแรกก็ตกเข้ามาอยู่ในตำแหน่งนั้นอยู่ห่างจากประภาคาร 5 ไมล์ แต่แล่นอยู่ในเขตตำแหน่งถึง $30\sqrt{2}$ นาที จงหาความเร็วของเรือลำนั้น
17. เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศตะวันตก เห็นประภาคารแห่งหนึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือและอยู่ห่างจากเรือ 15 ไมล์ เมื่อเวลาเที่ยง แต่เมื่อเวลา 18.30 น. ประภาคารอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ เรือลำนั้นแล่นวันละกี่นอต ($60 \text{ นอต} = 69 \text{ ไมล์}$)
18. ทหารยามผู้หนึ่งยืนอยู่บนกระโจมไฟ มองเห็นเรือยามฝั่งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือห่างจากประภาคารนั้น 9 ไมล์ เรือลำนี้แล่นไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ เมื่อเวลาบ่ายโมงเรือลำนี้อยู่ทางทิศเหนือ 15° ไปทางทิศตะวันตก จงหาอัตราเร็วของเรือ
19. เรือลำหนึ่งแล่นไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 10 ไมล์ต่อชั่วโมง เมื่อเวลาเที่ยงเห็นประภาคารอยู่ทาง N. 32° E เมื่อเวลา 18.30 น. เห็นประภาคารอยู่ทางทิศ N. 58° W. จงหาระยะทางที่ประภาคารอยู่ห่างจากเรือเมื่อเวลาเที่ยง
20. จากเรือลำหนึ่งซึ่งแล่นไปทางทิศ W. 80° S. ด้วยความเร็ว 10 ไมล์ต่อชั่วโมง เมื่อเวลา 10.00 น. มองเห็นบ่อน้ำหนึ่งอยู่ทางทิศ W. 60° N. เมื่อเวลาเที่ยงจะปรากฏว่าบ่อน้ำนั้นอยู่ทางทิศ N. 15° E ของเรือ จงหาระยะทางที่บ่อน้ำห่างจากเรือ เมื่อเวลา 10.00 น. และเวลาเที่ยง

ตัวอย่าง ชายผู้หนึ่งเดินทางเข้าไปหาภูเขาสูงหนึ่ง เขาหยุดที่จุด A บนพื้นราบมองเห็นยอดเขานี้ด้วยมุมเงย 30° องศา เมื่อเขาเดินเข้าไปอีก 1 ไมล์ นับจาก A บนเส้นตรงเดียวกับเชิงเขาและที่ยืนครั้งแรกปรากฏว่า มุมเงยของยอดเขาเป็น 75° ดังนั้นท่านจะทราบว่า เขานี้สูงเท่าใด



ให้ PQ เป็นความสูงของภูเขา

A เป็นจุดบนพื้นราบที่หยุดมองเห็นยอดเขาครั้งแรก

B เป็นจุดที่หยุดมองดูยอดเขาครั้งที่สอง

ระยะ $AB = 1$ ไมล์ $= 1,760$ หลา

$$\hat{APB} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore \text{ใน } \triangle ABP \quad \frac{AB}{\sin \hat{APB}} = \frac{PB}{\sin \hat{PAB}}$$

$$\therefore PB = \frac{AB \sin \hat{PAB}}{\sin \hat{APB}} = \frac{1760 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \text{ใน } \triangle PBQ \quad \frac{PQ}{PB} = \sin \hat{PBQ}$$

$$\therefore PQ = PB \sin \hat{PBQ} = \frac{1760 \sin 30^\circ \times \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$= 1760 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$= 440(\sqrt{3}+1) \text{ หลา}$$

$$= 440 \times 2.7321$$

$$= 1202 \text{ หลา}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ค.

1. ชายคนหนึ่งสังเกตเห็นมุมแหลมของยอดเขาแห่งหนึ่งเป็น 15° องศา และเมื่อเดินเข้าไปใกล้เขานั้นอีกหนึ่งไมล์ ปรากฏว่าองศายอดเขานั้นอีกครั้งเป็นมุมแหลม 75° องศา ดังนั้นเขาถูกนั้นสูงเท่าใด ถ้าที่ ๆ หยุดมองสองครั้งและเชิงเขาเป็นเส้นตรงเดียวกัน
2. ก. และ ข. เป็นป้อมตำรวจอยู่บนทางสายหนึ่ง ตำรวจที่อยู่ป้อมต่างมองเห็นชายคนหนึ่งด้วยกัน ระยะทางระหว่างป้อมต่องป้อมรับมุมที่ชายคนนี้เป็นมุม 80° องศา ถ้าชายคนนั้นเดินตรงเข้าหาป้อม ก. อีก 4 หลา ปรากฏว่าระยะทางระหว่างป้อมต่องป้อมรับมุมที่ชายคนนั้นอีกครั้งเป็นมุม 48° องศา อยากทราบว่าเมื่อชายคนนั้นเดินเข้าหาป้อม ก. แล้ว เขายืนอยู่ห่างจากป้อม ข. เท่าใด
3. ฉันทยืนอยู่บนดาดฟ้าตึกเรียนแห่งหนึ่งสูงจากพื้นดิน x ฟุต มองเห็นนักเรียนสองคนบนพื้นราบในแนวเส้นตรงเดียวกับเชิงตึกที่ฉันทยืน ฉันทมองเห็นเด็กคนหนึ่งด้วยมุมก้ม $45^\circ - A$ และฉันทมองเห็นเด็กอีกคนหนึ่งด้วยมุมก้ม $45^\circ + A$ ดังนั้นปรากฏว่าเด็กสองคนยืนอยู่ห่างจากกัน $2x \tan 2A$ เป็นความจริงหรือไม่ประการใด จงพิสูจน์
4. ฉันทไปเที่ยววัดโบราณแห่งหนึ่งมองเห็นยอดเจดีย์ด้วยมุมแหลมโต α องศา เมื่อเดินจากที่เดินตรงไปหาเจดีย์ของคัมภีร์ a ฟุต ปรากฏว่าฉันทมองเห็นยอดเจดีย์แห่งนั้นเป็นมุมแหลม 45° องศา ฉันทเดินจากที่ใหม่ตรงเข้าหาเจดีย์ของคัมภีร์อีก b ฟุต จะปรากฏว่ามุมแหลมของยอดเจดีย์นั้นเป็น $90^\circ - \alpha$ องศา ดังนั้นอยากทราบว่าเจดีย์ของคัมภีร์สูงเท่าใด

5. วัดแห่งหนึ่งตั้งอยู่บนลาดเขาซึ่งเอียงทำมุม 9° ของคาบกับพื้นราบ มีหอรระฆังสร้างอยู่เชิงเขา เมื่อเดินไปตามถนนตรงจากหอรระฆังขึ้นไปบนเขา 40 ฟุต แล้วหยุดมอง เห็นว่าระฆังนั้นรับมุมที่จุดที่มองนี้ 54° ของคา
6. ฉันไปโบราณสถานแห่งหนึ่ง เห็นว่ามีปราสาทหนึ่งอยู่ทางทิศเหนือ และมีหอสูงตั้งดีว่าเป็นหอรระฆังอยู่ทางทิศเหนือ 30° ของคาตะวันตก ถ้าฉันเดินไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ 1 ไมล์ ปรากฏว่าปราสาทนั้นอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของเขา และหอสูงนั้นอยู่ทางทิศตะวันออกของเขา อยากทราบว่ปราสาทและหอสูงนั้นห่างกันเท่าใด
7. ท่าเรือ ก. และ ข. ห่างกัน 1,200 หลา บนฝั่งทะเล ผู้ชำนาญการทำ ก. มองเห็นประภาคารแห่งหนึ่งอยู่ทางทิศใต้ $48^\circ 20'$ ตะวันตก จากท่าเรือ ข. ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของท่า ก. เห็นประภาคารแห่งนี้อยู่ทางทิศใต้ 33° ของคาตะวันออกของตน ดังนั้นอยากทราบว่าประภาคารอยู่ห่างจากฝั่งทะเลเท่าใด
8. ขณะที่เครื่องบินโดยสารลำหนึ่งกำลังจะร่อนลงสู่ลาน ชายสองคนยืนอยู่ห่างกัน 2,000 หลา มองเห็นมุมแหลมของเครื่องบินอยู่ในพื้นตั้งเดียวกับตน และเป็นมุมแหลม $34^\circ 15'$ และ $59^\circ 25'$ ตามลำดับ อยากทราบว่าเครื่องบินลำนั้นขณะนั้นอยู่สูงจากพื้นดินเท่าใด
9. ฉันนำนักเรียนออกทำการปฏิบัติงานนอกอาคารเรียน ปรากฏว่าโรงเรียนแห่งนี้มีเสาธงปักอยู่บนยอดอาคารเรียน อาคารเรียนรับมุมที่เด็กนักเรียนยืนมองอยู่นั้นเป็น α และเสาธงซึ่งอยู่บนยอดอาคารเรียนรับมุมที่เด็กนักเรียนยืนอยู่นี้เป็น β ถ้าปรากฏว่าเสาธงสูง c ฟุต จงพิสูจน์ว่าอาคารเรียนสูง $c \sin \alpha \operatorname{cosec} \beta \cos (\alpha + \beta)$ ฟุต

ตัวอย่าง ตึกเรียนหลังหนึ่งมีสี่ชั้น แต่ละชั้นสูงเท่ากัน ฉายยืนอยู่ที่จุด A บนถนนหน้าตึกเรียน มองเห็นว่าตึกเรียนทั้ง 8 ชั้นเว้นชั้นล่างซึ่งอยู่ติดกับถนน รับมุมที่ฉายยืนมีค่า tangent ของมุมเป็น .6 อยากทราบว่า ตึกเรียนหลังนั้นมีความสูงทั้งหมดรับมุมที่ฉายยืนอยู่เป็น tangent มีค่าเท่าไร

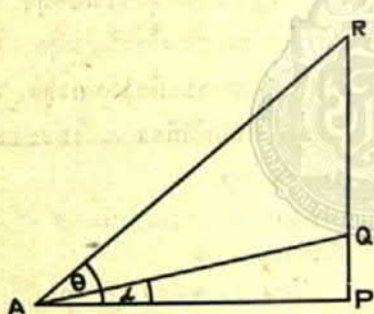
วิธีทำ

PQR ให้เป็นตึกเรียน

QR เป็นความสูงของตึกตามชั้นบน

PQ เป็นความสูงของตึกชั้นล่าง = a

A. เป็นจุดที่ฉายยืนมองตึกหลังนั้น $AP = b$



$$\text{ให้ } \angle PAQ = \alpha, \angle PAR = \theta$$

$$\tan \theta = \frac{4a}{b}, \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}$$

$$.6 = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}$$

$$.6 = \frac{\frac{4a}{b} - \frac{a}{b}}{1 + \frac{4a^2}{b^2}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3a}{b} \cdot \frac{b^2}{b^2 + 4a^2}$$

$$3b^2 + 12a^2 = 15ab$$

$$(3b - 12a)(b - a) = 0$$

$$\frac{a}{b} = 4, 1$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{a}{b} = 4, 1$$

ตัวอย่าง พระปรางค์องค์หนึ่ง แบ่งออกเป็นสามตอน ตอนบนเป็นกระเบื้อง
สีทอง สูง 36 ฟุต ตอนที่สองถัดลงมาเป็นกระเบื้องสีเงิน สูง
72 ฟุต ตอนใต้ลงจากกระเบื้องสีเงิน เป็นซีเมนต์ สูง 9 ฟุต
พระปรางค์องค์นี้มีฐานซึ่งเป็นตอมก่อด้วยซีเมนต์นั้นสร้างอยู่บนพื้น
ราบ ปรากฏว่าฉันทินชมพระปรางค์องค์นี้อยู่ที่จุด ๆ หนึ่งบนพื้น
ราบห่างจากเชิงพระปรางค์ออกมาเป็นระยะทางหนึ่ง ดังเกิด
เห็นว่า ยอดพระปรางค์ส่วนที่เป็นสีทองรับมุมที่จุดที่ฉันทินเท่ากับ
ส่วนเชิงพระปรางค์ซึ่งก่อด้วยปูนธรรมดา ดังนั้นอยากทราบว่า
พระปรางค์อยู่ห่างจากที่ฉันทินมองอยู่เท่าใด

วิธีทำ

BCDE เป็นพระปรางค์ BC ส่วนฐานก่อด้วยซีเมนต์สูง 9 ฟุต

CD ส่วนกระเบื้องสีเงินสูง 72 "

DE ส่วนกระเบื้องสีทองสูง 36 "

สมมติให้ฉันทินที่จุด A ให้ระยะ AB
เป็น x ฟุต

$$\angle BAC = \angle DAE = \theta$$

$$\angle BAD = \phi$$

$$\therefore BD = 9 + 72 = 81$$

$$BE = 9 + 72 + 36 = 117$$

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 + \tan \theta \tan \phi}$$

$$\frac{117}{x} = \frac{\frac{9}{x} + \frac{81}{x}}{1 - \frac{9}{x} \cdot \frac{81}{x}}$$

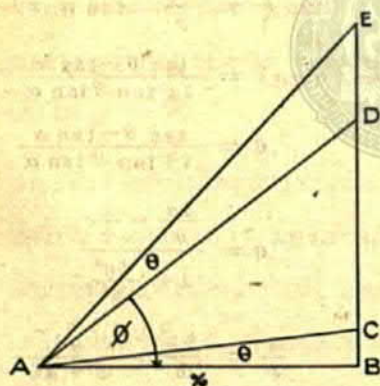
$$\frac{117}{x} = \frac{90}{x} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - 729)}$$

$$117x^2 - 729 \cdot 117 = 90x^2$$

$$27x^2 = 729 \cdot 117$$

$$x = \sqrt{x^2} = 9\sqrt{39}$$

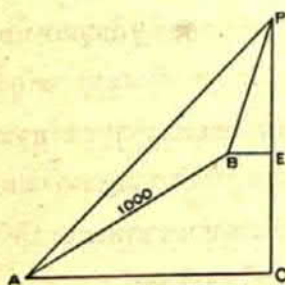
ดังนั้นฉันทินอยู่ห่างจากองค์พระปรางค์นั้น $9\sqrt{39}$ ฟุต



ตัวอย่าง ฉันทน์อยู่เชิงเขาสูงหนึ่ง เงยหน้าขึ้นมองยอดเขาเป็นมุมเงย 47° องศา เขานี้ลาดทำมุม 32° องศา กับพื้นราบ ฉันทน์เดินขึ้นลาดเขาไปเป็นระยะทาง 1,000 ฟุต แล้วเงยหน้าขึ้นดูยอดเขาอีกครั้ง คราวนี้ปรากฏว่าเป็นมุมเงย 77° องศา อยากทราบว่าเขาสูงนี้ สูงจากพื้นราบเท่าใด

วิธีทำ

P เป็นยอดเขา



A และ B เป็นจุดที่ฉันทน์มองยอดเขา $AB = 1000'$

$$\angle PAC = 47^\circ \quad \angle BAC = 32^\circ \quad \angle PBE = 47^\circ$$

$$AB = 1000'$$

$$\angle APB = \angle 77^\circ - 47^\circ = 30^\circ$$

$$\angle PAB = 47^\circ - 32^\circ = 15^\circ$$

$$\angle ABP = 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ$$

$$\triangle APB; \quad \frac{AP}{\sin \hat{ABP}} = \frac{AB}{\sin \hat{APB}}$$

$$\therefore AP = \frac{1000 \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\triangle APC \quad \frac{PC}{AP} = \sin \hat{APC}$$

$$\therefore PC = AP \sin \hat{APC} = \frac{1000 \sin 135^\circ \sin 47^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= 1000 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.731 \cdot 2$$

$$= 1033.6 \text{ ฟุต}$$

10. เสาของเสาหนึ่งสูง 20 ฟุต ปักอยู่บนยอดกำแพงตึกซึ่งสูง 10 ฟุต นักเรียนคนหนึ่งอยู่บนสนามหญ้าห่างจากกำแพงตึกนั้น ปรากฏว่าเสานั้นรับมุมที่นักเรียนยืนอยู่เป็น tangent ซึ่งมีค่า .5 จงหาว่ากำแพงรับมุมที่จุดที่นักเรียนยืนมองก็องศา
11. เสาวิทยุต้นหนึ่งปักอยู่บนหลังคาบ้านซึ่งสูง 25 ฟุต ฉนวนยิมมองดูแล้วเห็นว่าเสาวิทยุนี้รับมุมที่จุดที่ฉนวนยิมมองบนพื้นดินมี tangent เป็น .125 ถ้าฉนวนยิมอยู่ห่างจากบ้านหลังนั้น 60 ฟุต ฉนวนยิมจะทราบว่า เสาวิทยุนี้สูงเท่าใด
12. พระปราสาทองค์หนึ่งมียอดเป็นทองอยู่บนองค์ปราสาทซึ่งก่ออิฐถือปูนเหนือฐานอีกชั้นหนึ่ง ปรากฏว่าส่วนฐานสูง 9 ฟุต ส่วนองค์พระปราสาทสูง 280 ฟุต ไม่นับยอด ส่วนยอดสูง 35 ฟุต ฉนวนยิมอยู่ห่างจากองค์พระปราสาทบนฐานดังกล่าว ปรากฏว่าส่วนยอดพระปราสาทกับส่วนฐานรับมุมที่จุดที่ฉนวนยิมบนพื้นราบเท่ากัน ดังนั้นฉนวนยิมต้องยืนอยู่ห่างจากพระปราสาทองค์นั้นประมาณ 180 ฟุต จะจริงหรือไม่ประการใดจงพิสูจน์
13. พระภิกษุองค์หนึ่งสร้างหอระฆังไว้บนเนินดิน ปรากฏว่า หอระฆังนี้สูง 50 ฟุต ถ้าฉนวนยิมอยู่บนพื้นดินเห็นว่ายอดหอระฆังและเชิงหอระฆังเป็นมุมเงย 75 และ 45 องศาตามลำดับ จงหาว่าเนินดินนั้นสูงจากพื้นดินเท่าใด
14. เสาวิทยุแห่งหนึ่งสร้างบนฐานสูง $\frac{1}{3}$ ของตัวเสา จากจุด ๆ หนึ่งบนพื้นดินห่างจากฐาน 40 ฟุต เห็นว่าเสาวิทยุรับมุมที่จุดดังกล่าว มีค่าของ tangent ของมุมนี้เป็น $\frac{1}{2}$ ดังนั้นเสาวิทยุนี้สูงเท่าใด
15. ฉนวนยิมอยู่ริมฝั่งทะเลสาบแห่งหนึ่ง เห็นตึกหลังหนึ่งอยู่บนฝั่งตรงข้ามของทะเลสาบ และมีคน ๆ หนึ่งยืนอยู่ที่หน้าตึกแห่งนี้ บนยอดตึกมีเสาของปักอยู่ด้วย ปรากฏว่าเสาและคนที่ยืนอยู่หน้าตึกกับมุมที่จุดที่ฉนวนยิมมองอยู่นี้เท่ากัน ถ้าตึกหลังนี้สูง 192 ฟุต เสาสูง 24 ฟุต และคนยืนอยู่หน้าตึกสูง 6 ฟุต ฉนวนยิมจะทราบว่าทะเลสาบแห่งนี้กว้างเท่าใด

16. ฉันทักทักต้นหนึ่งบนพื้นราบ และตอกหมุด P หลักต้นนี้ฉันทแบ่งออกเป็น ส่วน ๆ ดังนี้ส่วน $AB = a$ รับมุมที่จุด P เป็น α ส่วน $AC = b$ รับมุมที่จุด P เป็น γ ส่วน $AB = c$ รับมุมที่จุด P เป็น γ เส้นตรง AP อยู่บนพื้นราบยาว x ฉะนั้นถ้า $\alpha + \beta + \gamma$ เป็น 180 องศา จงพิสูจน์ว่า $(a+b+c)x^2 = abc$
17. ฉันทเดินทางขึ้นเขาแห่งหนึ่งลาดเอียงทำมุม θ กับพื้นราบ เมื่อฉันทอยู่เชิงเขา ฉันทเห็นมุมเงยของยอดเขาเป็น ϕ เมื่อฉันทเดินขึ้นลาดเขาไประยะ c ฟุต ฉันทเห็นมุมเงยของยอดเขาเป็น α จงพิสูจน์ให้เห็นว่า เขาสูงนี้สูง $c \sin \phi \sin(\alpha - \theta) \operatorname{cosec}(\alpha - \phi)$
18. ริมถนนสายหนึ่งมีตึกหลังหนึ่ง และมีเสาธงปักอยู่บนยอดกำแพงล้อมตึกนั้น ถ้าปรากฏว่าความสูงของกำแพงและเสาธงเป็นอัตราส่วน 3:5 และทั้งกำแพงและเสาธงรับมุมที่จุด ๆ หนึ่งบนบาทวิถีตรงข้ามเท่ากัน อยากทราบว่า ถนนสายนั้นจะกว้างเท่าไร ถ้าเสาธงมีความสูงถึง 35 ฟุต
19. เดิมทีนายช่างคิดจะสร้างอนุสาวรีย์แห่งหนึ่ง ให้เสาที่รองรับรูปปั้นสูงเป็น ตามเท้าของความสูงของรูปปั้นนั้น ฉันทยืนอยู่บนที่แห่งหนึ่งซึ่งระดับตาสูง เท่ากับรูปปั้น มองเห็นว่าส่วนของรูปปั้นและส่วนของเสาที่รองรับรูปปั้นนั้นรับ มุมที่ตาฉันทเท่ากัน จงหาว่า ระยะที่จุดที่ฉันทมองห่างจากรูปปั้นนั้นเท่าใด

ตัวอย่าง กำแพงแห่งหนึ่งบนพื้นราบมีเสาธงปักอยู่บนยอด ฉันทมองเห็นว่า กำแพงรับมุมที่จุด ๆ หนึ่งบนพื้นราบตรงข้ามเป็นมุม 15 องศา และเสาธงรับมุมที่จุดเดียวกันนี้เป็นมุม 30 องศา เมื่อเดินเข้าไป หากำแพงอีก 30 ฟุต ปรากฏว่าองศาของรับมุมที่จุดที่ฉันทมองใหม่นี้ เป็น 30 องศาเท่าเดิม ดังนั้นอยากทราบว่าเสาธงสูงเท่าใด

ให้ ED เป็นกึ่งวง

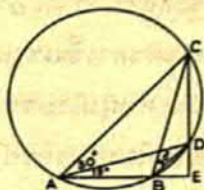
• DC เป็นเส้นตรง

DC รับมุม CAD และ CBD ที่จุด A และ B เท่ากัน

ฉะนั้น A, B, D, C อยู่ในวงกลมเดียวกัน

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADE}$$

แต่ $\widehat{ADE} = 75^\circ$



$$\widehat{ABC} = \widehat{ADE} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \therefore \widehat{ACB} = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

ใน $\triangle ACB$

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$$

$$\frac{30}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 105^\circ}$$

$$\therefore AC = \frac{30 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}$$

ใน $\triangle ACD$

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ADC}} = \frac{DC}{\sin \widehat{CAD}}$$

$$DC = \frac{AC \sin \widehat{CAD}}{\sin \widehat{ADC}}$$

$$= \frac{30 \sin 105^\circ \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

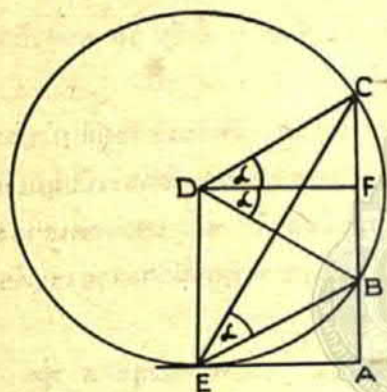
$$= 30 \sin 105^\circ$$

$$= 30 \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2}}$$

$$= 29 \text{ ฟุต (ประมาณ)}$$

ตัวอย่าง

ตึกเรียนหลังหนึ่งมีเสาธงปักอยู่บนยอด นักเรียนคนหนึ่งหยุดยืนมองที่จุด E บนถนนห่างจากตึก c ฟุต มองเห็นว่า เสาธงจะรับมุมที่ตาของเขาโตที่สุด ถ้ามุมที่โตที่สุดนี้เป็น α จงพิสูจน์ว่าตึกสูง $c \tan (45^\circ - \frac{\alpha}{2})$ และเสาธงสูง $2c \tan \alpha$ ฟุต

วิธีทำ

BC เป็นเสาธงปักอยู่บนยอดตึก AB สร้างวงกลมล้อม $\triangle BCE$ เนื่องจากจุดที่ E นี้ BC รับมุมใหญ่ที่สุด α ฉะนั้น AE ต้องเป็นเส้นสัมผัส D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ฉะนั้น $DE \perp AE$ สากลัน DC, DB, $DF \perp BC$ $\hat{CDF} = \hat{BDF} = \hat{CEB} = \alpha$ $DF \parallel EA$ และเท่ากับ $AE = c$

$$\therefore \frac{BC}{c} = \tan \hat{FDB}$$

$$BC = c \tan \alpha$$

$$\therefore 2BC = 2c \tan \alpha$$

เสาธงสูง $2c \tan \alpha$ ตอบ

$\hat{BEA}$ เป็นมุมที่เส้นสัมผัสทำกับคอร์ด BE

$$\therefore \hat{BEA} = \hat{ECA} = \frac{1}{2} \hat{EDB} = \frac{1}{2} (90^\circ - \alpha)$$

$$\therefore \hat{BEA} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{AB}{c} = \tan (45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$\therefore AB = c \tan (45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$\therefore \text{ตึกสูง } c \tan (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) \quad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

20. ตึกหลังหนึ่งตั้งอยู่บนหน้าผา ฉันทมองดูตึกหลังนี้อยู่ที่จุด ๆ หนึ่งห่างจากเชิงผาไป 30 ฟุต เห็นว่าตึกหลังนี้รับมุมที่ฉันทมองเป็น 45 องศา เมื่อฉันทเดินตรงเข้าหาเชิงผา ห่างจากเชิงผา 15 ฟุต เห็นว่าตึกหลังนี้รับมุมที่ฉันทมองครั้งหลังนี้เป็น 45 องศาอีก อยากทราบว่าตึกหลังนั้นสูงเท่าใด
21. ตึกหลังหนึ่งสูง 20 ฟุต มีเสาวิทยุอยู่บนยอดตึก ฉันทยืนอยู่บนพื้นดินหน้าตึกมองเห็นเสาวิทยุรับมุมที่ฉันทมองเป็น 30 องศา เมื่อฉันทเดินเข้าไปใกล้ตึกหลังนี้อีก 20 ฟุต ปรากฏว่าเสาวิทยุรับมุมที่จุด ๆ นี้เป็น 30 องศาอีกครั้ง ดังนั้นจงหาความสูงของเสาวิทยุนี้
22. ฉันทมองเห็นเสาธงปักอยู่บนยอดตึกอาคารเรียน เมื่อฉันทมองอยู่ที่ ก. ปรากฏว่าเสาธงรับมุมที่จุดที่ฉันทมองใหญ่ที่สุด และมองยอดเสาธงเป็นมุมเงย α เมื่อฉันทเดินตรงออกไปจากเสาธงแล้วมายืนอยู่ที่ ข. มองยอดเสาธงเป็นมุมเงย β ถ้า ก. และ ข. อยู่ห่างกัน c ฟุต จงพิสูจน์ว่าเสาธงจะต้องสูง $c \sin (\alpha + \beta - 90^\circ) \operatorname{cosec} (\alpha - \beta)$
23. ตึกหลังหนึ่งตั้งอยู่บนไหล่เขาซึ่งสูง 80 ฟุต ชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุต จะต้องยืนอยู่บนพื้นราบห่างจากไหล่เขาเท่าใดจึงจะเห็นว่าทั้งไหล่เขาและตึกหลังนั้น รับมุมที่ตามองเท่ากัน
24. เจดีย์องค์หนึ่งตั้งอยู่บนเนิน ณ ที่แห่งหนึ่งห่างจากเชิงเนินไป 60 ฟุต เจดีย์อยู่ตรงข้ามกับมุมที่จุดนี้โต 80 องศา และเนินนั้นกับมุมที่จุดที่เจดีย์รับเป็น 30 องศาเช่นเดียวกัน จงพิสูจน์ว่าเจดีย์นี้สูง $40\sqrt{3}$ ฟุต
25. ชายผู้หนึ่งเดินไปตามถนนตรงสายหนึ่ง มองเห็นหลักหินสองหลักในทุ่งนา ปักเป็นแนวเส้นตรงเอียงทำมุม α กับถนน และเมื่อชายผู้นั้นเดินไปตามถนนห่างจากที่เดิม c เมตร ปรากฏว่า หลักหินทั้งสองรับมุมที่เขามองครั้งหลังนี้เป็นมุมใหญ่ที่สุด และมีความกว้าง β จงพิสูจน์ว่าหลักหินทั้งสองห่างกัน
$$\frac{2c \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

26. เสาธงปักอยู่บนยอดดึกที่ทำการของรัฐบาลแห่งหนึ่ง จันเดินมาตามถนนตรงเข้าไปหาตัวดึกที่ทำการของรัฐบาลแห่งนั้น ถึงเกิดเห็นยอดของเสาธงเป็นมุมเงย β และเมื่อนั้นเดินตรงเข้าไปหาตัวดึกที่ทำการนั้นอีก α เมตร ปรากฏว่าจันมองเสาธงนั้นอีกครั้ง เห็นเสาธงรับมุมที่จันมองใหญ่ที่สุดเป็นมุม α จงพิสูจน์ว่าเสาธงสูง $\frac{2\alpha \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta + \sin(\alpha + \beta)}$ เมตร

5. การวัดระยะทางและความสูงบนพื้นราบหลายระนาบ

ตัวอย่าง เมื่อจันยืนอยู่ที่ ก. จันมองเห็นหอคระฆังแห่งหนึ่งด้วยมุมเงย 30° องศา ปรากฏว่าหอคระฆังอยู่ทางทิศเหนือของจัน เมื่อจันเดินไปอยู่ที่ ข. ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของ ก. ปรากฏว่ามุมเงยของหอคระฆังเป็น 18° องศา ถ้าระยะระหว่าง ก. และ ข. ห่างกัน 60 เมตร อยากทราบว่าหอคระฆังสูงเท่าใด

วิธีทำ. ให้ ก. ข. เป็นที่ตั้งซึ่งจันยืนมองหอคระฆัง ค. ง.

สมมติว่าหอคระฆังสูง x เมตร

จันอยู่ที่ ก. ซึ่งเป็นทิศใต้ของหอคระฆัง ค. ง.

จันเดินไปที่ ข. ซึ่งทางทิศตะวันตกของ ก.

ห่างกันระยะ ก.ข. 30 เมตร

$$\text{ข. ค.} = x \cot 18^\circ$$

$$\text{ก. ค.} = x \cot 30^\circ$$

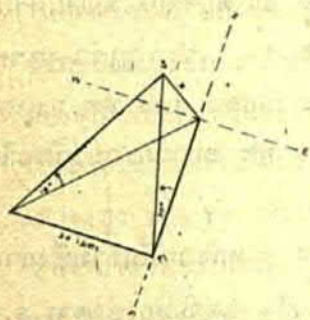
ในสามเหลี่ยม ข.ก.ค.

$$x^2 \cot^2 18^\circ - x^2 \cot^2 30^\circ = (30)^2$$

$$x^2 \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} - 3 \right) = 3600$$

$$x^2 \cdot \frac{8}{\sqrt{5}-1} = 3600$$

$$x = 15\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) \text{ เมตร}$$



แบบฝึกหัดชุดที่ 17 ง.

1. เมื่อยืนอยู่ที่จุด A มองเห็นยอดเขาถูกหนึ่งซึ่งอยู่ทางทิศเหนือเป็นมุมเงย $15^{\circ} 20'$ เมื่อเดินไปทางทิศตะวันตกได้ 5 ไมล์ มุมเงยเป็น $11^{\circ} 25'$ เขาถูกนั้นสูงเท่าใด
2. ฉายยืนอยู่ที่จุด P ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของเขาลูกหนึ่ง ฉายมองเห็นยอดเขาถูกนั้นเป็นมุมเงย 45° และเมื่อฉายอยู่ที่จุด Q ซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของจุด P ถึงเกิดเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 30° ถ้า PQ ยาว 500 เมตร เขาถูกนั้นสูงเท่าใด
3. เครื่องบินลำหนึ่งร่อนอยู่บนอากาศ ฉายยืนมองอยู่ที่สถานีบนทางทิศใต้ของเครื่องบินลำนั้น มองเครื่องบินลำนั้นเป็นมุมเงย $45^{\circ} 35'$ ปรากฏว่าเพื่อนของฉายยืนอยู่ทางทิศตะวันตกของสถานีบนที่ฉายมองอยู่นั้น เห็นเครื่องบินเป็นมุมเงย $40^{\circ} 22'$ เครื่องบินลำนั้นอยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร
4. ฉายยืนอยู่ที่ลานวัด ก. มองเห็นเจดีย์องค์หนึ่งซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกของฉายเป็นมุมเงย 60° เมื่อฉายเดินไปทางทิศใต้ มองเห็นเจดีย์องค์นี้เป็นมุมเงย 30° ถ้าเจดีย์องค์นี้สูง 250 ฟุต ดังนั้น ฉายเดินจากที่เดิมไปเท่าใด
5. ฉายยืนอยู่ทางทิศใต้ของโคนไฟดวงหนึ่งบนยอดเสา ปรากฏว่าเงาของฉายทอดยาว 24 ฟุต เมื่อฉายเดินไปทางทิศตะวันออก 100 ฟุต ปรากฏว่าเงาของฉายทอดยาว 30 ฟุต ถ้าตัวฉายสูง 6 ฟุต อยากทราบว่าโคนไฟนั้นสูงจากพื้นดินเท่าใด
6. ฉายยืนอยู่บนยอดผาแห่งหนึ่ง มองดูอาคาร 8 หลังบนพื้นราบซึ่งห่างกันหลังละ 1 ไมล์ และอยู่ริมถนนตรงสายเดียวกัน แต่ฉายมองอาคาร 8 หลังนั้นด้วยมุมก้ม $\alpha, \beta,$ และ γ ตามลำดับ ดังนั้นฉายคำนวณว่า ฉายยืนอยู่หน้าผาซึ่งสูง
$$\frac{5280 \sqrt{2}}{\sqrt{\cot^2 \alpha - 2 \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma}}$$
 อยากทราบว่า การคำนวณของฉายผิดพลาดประการใดหรือไม่จึงพิสูจน์

7. นายมีและนายมายืนอยู่ห่างกัน 500 เมตร มองเห็นเครื่องบินลำหนึ่งกำลังร่อนอยู่เหนือพื้นดิน นายมีเห็นเครื่องบินนั้นอยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ และมองด้วยมุมเงย 60° ส่วนนายยามองเห็นเครื่องบินนั้นอยู่ทางทิศตะวันตกด้วยมุมเงย 45° อยากทราบว่าเครื่องบินอยู่สูงจากพื้นดินเท่าใด
8. รางรถไฟ ๒ สายตัดกันเป็นมุม $20^\circ 16'$ และรถไฟ 2 คัน ขบวนแรกออกจากรางที่ตัดกันขบวนละราง ขบวนที่หนึ่งออกด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ 30 ไมล์ ปรากฏว่าในเวลา 8 ชม. รถไฟทั้งสองขบวนอยู่ห่างกัน 80 ไมล์ อยากทราบว่าขบวนที่สองแล่นด้วยอัตราความเร็วเท่าใด
9. ฉันมองเห็นเครื่องบินลำหนึ่งอยู่ทางทิศใต้ของฉันด้วยมุมเงย α ปรากฏว่าเพื่อนของฉันอยู่ทางทิศของฉันมองเห็นเครื่องบินลำนั้นอยู่ทางทิศเหนือของเขาด้วยมุมเงย β ปรากฏว่า ฉันและเพื่อนอยู่ห่างกัน c หลา จงหาระยะทางที่เครื่องบินลำนั้นอยู่ห่างจากฉันตามระยะทางพื้นราบและอยู่สูงเหนือพื้นดินเท่าใด
10. ฉันยืนอยู่บนตาดฟ้าเรือซึ่งกำลังแล่นไปทางทิศเหนือด้วยอัตราความเร็ว 10 ไมล์ต่อชั่วโมง มองเห็นประภาคารอยู่ทางทิศตะวันออก อีกชั่วโมงต่อมาฉันมองเห็นประภาคารแห่งนั้นอยู่ทางทิศ S.S.E ดังนั้นจงหาว่าเมื่อฉันมองดูประภาคารนั้นสองครั้งเป็นระยะทางห่างกันเท่าใด และระยะจากเรือถึงประภาคารเมื่อฉันมองครั้งแรกเท่าใด
11. เสาธงสูง 100 ฟุต ปักตรึงอยู่กลางพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ถ้าปรากฏว่าด้านของสามเหลี่ยมด้านเท่าทุกด้านรับมุมที่ยอดเสาธงเป็น 60° องศา จงหาความยาวของด้านของสามเหลี่ยมนั้น.

โจทย์ระคน

หมวด 1

1. ถ้า A เป็นมุมแหลม และ $\sin A = \frac{5}{13}$ จงหาค่าของ $\tan A + \sec A$
2. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = 1 - 2 \sin^2 A$
3. sine ของมุม γ หนึ่งในสามมุมด้วย cosine ของมุมนั้นเป็น $\frac{8}{15}$ ดังนั้นค่าของ sine และ cosine ที่แท้จริงของมุมนี้เป็นเท่าไร
4. กำหนดให้ $\tan A = \frac{3}{7}$ จงหาค่าของฟังก์ชันอีก 5 ฟังก์ชันของมุม A
5. ถ้า $\tan A = \frac{4}{15}$ จงหาค่าของ $\frac{5 \sin A + 7 \cos A}{6 \cos A - 8 \sin A}$
6. ถ้า $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 30^\circ, \hat{C} = 90^\circ$ จงหาค่าของ $\sin A \sin B \sin C + \sin A \cos B \cos C - \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$
7. จงทำให้ $2 \sec^2 A - \sec^2 A - 2 \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$ เป็นรูปสำเร็จในรูปของเทอมของ $\tan A$
8. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{1 + 2 \sin A \cos A}{1 - 2 \cos^2 A}$
9. ถ้า $\tan \theta = \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$ จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2} \sin \theta = \sin A - \cos A$
10. จงหาค่าของ $\cot^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ$
11. ถ้าลากเส้น AD ตั้งฉากกับ BC ซึ่งเป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและ BC ยาว 2m จงหาความยาวของ AD และจากรูปในข้อนี้จงพิสูจน์ว่า $\cos^2 60^\circ + \cot^2 30^\circ = \frac{13}{4}$
12. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sec A - \operatorname{cosec} A}{\tan A + \cot A} = \frac{\tan A - \cot A}{\sec A + \operatorname{cosec} A}$
13. จงหาค่าของ $3 \tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ + \frac{1}{8}$
14. จงแก้สมการ $\operatorname{cosec} (90^\circ - A) - n \cos A \cot (90^\circ - A) = \sin (90^\circ - A)$
15. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin A - \sin (180^\circ - B)}{\cos B + \cos (180^\circ - A)} = \frac{\cos A + \cos B}{\sin B + \sin (180^\circ - A)}$

16. จงพิสูจน์ว่า $(1 + \tan A + \sec A)^2 + (1 - \tan A + \sec A)^2 = 4 \sec A (1 + \sec A)$

17. ถ้า $\tan \theta = \frac{a}{b}$ จงพิสูจน์ว่า $\sin \theta (1 + \tan \theta) + \cos \theta (1 + \cot \theta) - \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$

18. จงพิสูจน์ว่า $(\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A - \sec A)^2 = \cot^2 A + \tan^2 A - 1$

19. จงพิสูจน์ว่า $(\cot \theta - 8)(8 \cot \theta - 1) = 8 \operatorname{cosec}^2 \theta - 10 \cot \theta$

20. ถ้า $\cot A = 4.5$ จงหาค่าของ $\frac{2 \sin A - \cos A}{2 \sin A + 3 \cos A}$

21. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} - \frac{\sec A - 1}{1 + \sec A} - 4 \cot^2 A = \frac{4}{1 + \sec A}$

22. ฉันทยืนอยู่บนหน้าผาของเทือกหินโลโครกแห่งหนึ่งด้วยมุมก้ม 45 องศา และมองเห็นท่อนแห่งหนึ่งด้วยมุมก้ม 60 องศา หินโลโครกและท่อนห่างกัน 290 เมตร อยากทราบว่าหน้าผาที่ฉันทยืนนั้นสูงจากระดับน้ำทะเลเท่าใด

23. จงพิสูจน์ว่า $(1 + \sec \theta + \tan \theta)(1 + \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) = 2(1 + \tan \theta + \cot \theta + \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta)$

24. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}$$

25. จงหาค่าของ $\sin(270^\circ + A)$ เมื่อ $\sin A = .6$

26. ถ้า $\tan \theta = \frac{x}{y}$ จงหาค่าของ $\frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{x \sin \theta + y \cos \theta}$

27. ถ้า $\sec \alpha = \frac{18}{5}$ จงหาค่าของ $\frac{2 - 3 \cot \alpha}{4 - 9 \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$

28. ถ้าพิสูจน์ว่า $\cos(360^\circ - A) + \sin(270^\circ + A) + \cos(180^\circ + A) = \sin(270^\circ + A)$

29. จงพิสูจน์ว่า $\cot \theta \sec \theta - \cot \theta \cos \theta = \sin \theta$

30. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta \tan^2 \theta}{\cot^2 \theta} = \tan^2 \theta$

31. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = 1$
32. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$
33. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta} - \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\sec \theta} = \tan \theta - \cot \theta$
34. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sec^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta \sec^2 \theta} + \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta} = 2$
35. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos \theta + 2 \sin \theta}{\cos \theta + 3 \sin \theta} = \frac{\cot \theta + 2}{\cot \theta + 3}$
36. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\tan^2 \theta + \cot^2 \theta + 2}{\tan^2 \theta - \cot^2 \theta} = \frac{\tan \theta + \cot \theta}{\tan \theta - \cot \theta}$
37. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\tan \theta + \cot \theta} = \cos \theta$
38. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1 - \operatorname{cosec} \theta}{1 + \operatorname{cosec} \theta} = \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta + 1}$
39. จงพิสูจน์ว่า $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$
40. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = \tan \theta + 1$
41. จงพิสูจน์ว่า $(\sin \theta - \cos \theta)(\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta) = \tan \theta - \cot \theta$
41. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\tan \theta + \cot \theta}{\sec \theta \operatorname{cosec} \theta} = 1$
43. จงพิสูจน์ว่า $\sec \theta \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$
44. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin \theta}{1 - \operatorname{cosec} \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \operatorname{cosec}^2 \theta}$

45. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 4 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta$

46. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} - \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{4 \sin \theta \cos \theta}{1 - 2 \sin^2 \theta}$

47. จงพิสูจน์ว่า $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

48. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} = \sec \theta - \tan \theta$

49. จงพิสูจน์ว่า $\sec^4 \theta - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - 1$

50. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\operatorname{cosec} \theta + \sin \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta} = \sec^2 \theta + \tan^2 \theta$

51. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sec \theta + \cos \theta}{\sec \theta - \cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + 1}{\sin^2 \theta}$

โจทย์ระคน

หมวด 2

จงพิสูจน์ว่า

1. $(\tan A + \cot A)^2 = \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$

2. $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$

3. $(\sec A - \operatorname{cosec} A)^2 = \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A - 4 \operatorname{cosec} 2A$

4. $(1 - \tan^2 A) \cot^2 A = \cos 2A \operatorname{cosec}^2 A$

5. $\frac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2A$

$$6. (1 + \cot \alpha)(1 - \cot \alpha) = \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 1}$$

$$7. \frac{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 - \cos \alpha}{3 + \cos \alpha}$$

$$8. \frac{1}{\cos A + \cot A} = \frac{\tan A}{1 + \sin A}$$

$$9. \frac{1 + \sin A + \cos A}{1 + \cos A} = \frac{\sec A + \tan A + 1}{1 + \sec A}$$

$$10. \sin A + \tan A = \frac{\sin A \tan A}{\tan \frac{A}{2}}$$

$$11. \sin(x+y) \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$12. \cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$$

$$13. \tan(x+y) \tan(x-y) = \frac{\tan^2 x - \tan^2 y}{1 - \tan^2 x \tan^2 y}$$

$$14. \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$15. \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$$16. \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$17. \frac{\cos 2\theta - \sin 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \cot \theta - \tan \theta - 2$$

$$18. \operatorname{cosec} 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x}$$

$$19. \frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta} = \tan \frac{3}{2} \theta$$

$$20. \frac{\cos 3\theta + \cos 5\theta}{\sin 4\theta + \sin 6\theta} = \frac{\cos 4\theta}{\sin 5\theta}$$

$$21. (\sin 3A - \sin A)(\sin 3A + \sin A) = \sin 4A \sin A$$

$$22. \cos^2 5x - \cos^2 x = -\sin 6x \sin 4x$$

$$23. (\cos 3x - \cos x)(\cos 3x + \cos x) = -\sin 4x \sin 2x$$

จงแก้สมการต่อไปนี้

$$24. \sec A \tan A = \sqrt{2}$$

$$25. \tan 2\alpha = \tan \alpha$$

$$26. \sin x \cos x = \cot x$$

$$27. \tan 2x + 2\sin x = 0$$

$$28. \tan \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$29. 2\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$$

$$30. 3\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$31. \tan^2 x + \tan x - 6 = 0$$

จงหาค่าต่อไปนี้

$$32. \cos \arctan(-\sqrt{3})$$

$$33. \cot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$34. \sin \arcsin \frac{2}{3}$$

$$35. \sin \left(2\sin^{-1} \frac{2}{3} \right)$$

$$36. \sin \left(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{4} \right)$$

$$37. \sin \left(2 \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

จงพิสูจน์ว่า

$$38. \arcsin \frac{5}{13} + \arccos \frac{3}{5} = \arccos \frac{16}{65}$$

$$39. \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} = \arctan \frac{11}{10}$$

$$40. \arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$$

$$41. \tan(\arctan x - \arctan y) = \frac{x-y}{1+xy}$$

$$42. \frac{1}{2} \sin^{-1} x = \tan^{-1} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

โจทย์ระคน

หมวด 8

1. มุมของ $\triangle$ รูปหนึ่งเป็นสัดส่วนกันดังนี้ $4 : 5 : 6$ มุมหนึ่ง ๆ โตกี่เรเดียน
2. ส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งยาว 6 เมตร ถ้าวงกลมวงนั้นมีรัศมียาว 5 เมตร ส่วนโค้งของวงกลมจะรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นโตกี่เรเดียน
3. ด้านประชิดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งเป็น 15 ฟุต และ 80 ฟุต และมุมระหว่างด้านทั้งสองโต 60° จงหาเส้นทแยงมุมเส้นสั้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้
4. หอดูหลังหนึ่งสูง 50 ฟุต ตั้งอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง จากจุด ๆ หนึ่งบนพื้นราบเชิงเขา มุมเงยของหลังคาและยอดหน้าผาโต α และ β กำหนด $\tan \alpha = 1.26$, $\tan \beta = 1.185$ ดังนั้นหน้าผาสูงเท่าไร
5. จงหาว่ามุมยอดของ $\triangle$ โตกี่เกรด ถ้า $\triangle$ นี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วและมีมุม ๆ หนึ่งที่ฐานโต 12 เท่าของมุมยอด
6. ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $A = 2B = 3C$ ดังนั้นแต่ละมุมโตกี่องศา
7. เข็มยาวของนาฬิกาเรือนหนึ่งชี้ที่ 2.20 น. ครึ่งหนึ่ง และชี้ที่ 2.42 น. อีกครึ่งหนึ่ง ระหว่างที่เคลื่อนจากที่เดิมมาที่ใหม่ทำมุมโตเท่าใด
8. ถ้า $\cos \alpha + \cos \beta = a$ และ $\sin \alpha + \sin \beta = b$
จงพิสูจน์ว่า $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$
9. จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{2 \sin \theta \cos \theta + 1}$

10. ชายสองคนอยู่ห่างกัน 1000 เมตร ยืนอ ทางทิศใต้ของบัลลูน ดังเกตเห็นมุมเงยของลูกบัลลูนเป็น 18° และ 21° ตามลำดับ ลูกบัลลูนสูงจากพื้นดินเท่าใด
11. จงหาค่าของ θ จากสมการ $2\cos\theta \cot\theta + 1 = \cot\theta + 2\cos\theta$
12. เขาแห่งหนึ่งลาดลงทำมุมกับพื้นราบเป็น θ ขณะนาย ก. เดินลงมาตามลาดเขา มองเห็นวัตถุชิ้นหนึ่งด้วยมุมก้ม α และเดินมาได้ครึ่งทาง เขามองวัตถุชิ้นนี้ด้วยมุมก้ม β จงพิสูจน์ว่า $\cot\theta = 2\cot\alpha - \cot\beta$
13. ใน $\triangle$ รูปหนึ่ง มี $a = 25\sqrt{2}$, $c = 90^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$ จงหา $\hat{B}$, b และเส้นตั้งฉากที่ลากจาก $\hat{C}$ ไปยังด้าน c
14. จงหาค่า $\tan 15^\circ$, $\tan 75^\circ$ จากสูตร $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A}$ และจงแก้สมการ $\sec^2\theta = 4\tan\theta$
15. บรรรไคอันหนึ่งยาว 30 ฟุต เมื่อเขาไปตั้งที่ถนนระหว่างตึก 2 แถว จะพาดถึงขอบหน้าต่างของตึกหลังหนึ่งซึ่งสูง 20 ฟุต เมื่อเอนบรรรไคไปพาดทางตึกอีกหลังหนึ่งซึ่งอยู่ตรงข้าม โดยไม่ขยับเขยื้อนเชิงบรรรไคๆ จะพาดที่ตึกหลังใหม่นี้สูง 15 ฟุต ดังนั้นเมื่อบรรรไควางในสองลักษณะ ทำมุมกันเท่าใด
16. จงพิสูจน์ว่า $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B)$
17. หอดูดาวแห่งหนึ่งตั้งอยู่บนพื้นราบ บนเส้นตรงจากเชิงหอนี้ที่ 2 แห่ง ซึ่งห่างจากเชิงหอ a และ b ฟุตตามลำดับ ถ้ามองยอดหอจากจุดทั้งสองนี้จะเห็นเป็นมุมเงยรวมกันแล้ว 90° จงพิสูจน์ว่า หอดูดาวนี้สูง $\sqrt{ab}$ ฟุต

18. ถ้า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$$

19. จงพิสูจน์ว่า $[\sin \theta (1 + \sin \theta) + \cos \theta (1 + \cos \theta)][\sin \theta (1 - \sin \theta) + \cos \theta (1 - \cos \theta)] = \sin 2\theta$

20. ถ้า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C = 1$$

จงพิสูจน์

21. $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4 \cos x \cos 2x \cos 3x$

22. $\frac{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \tan 6x$

23. $\frac{\sin 2A + \sin 4A}{\cos 2A + \cos 4A} = \tan 3A$

24. $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \sin 2\theta (1 + 2\cos \theta)$

25. $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos 2\theta (1 + 2\cos \theta)$

26. $\sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 6\theta = 4 \cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta$

27. $\cos 160^\circ + \cos 110^\circ + \cos 10^\circ = 0$

28. $\sin^2 \theta \sin^3 \theta = \frac{1}{16} (2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta)$

29. ถ้า $A = \frac{\pi}{19}$ จงหาค่าของ $\frac{\sin 2A - \sin 3A}{\sin 16A + \sin 4A}$

30. ถ้า $\hat{A} + \hat{B} = 225^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cot A}{1 + \cot A} \cdot \frac{\cot B}{1 + \cot B} = \frac{1}{2}$

31. เสาธงสองเส้าปักอยู่บนพื้นราบเดียวกัน A และ B เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรงที่ลากมาจากโคนเสาธง แต่อยู่ระหว่างเสาทั้งสอง เมื่อมองจาก A เห็นยอดเสาธงเป็นมุม 30° และ 60° ตามลำดับ ถ้าอยู่ที่ P มองเห็นยอดเสาธงเป็นมุม 60° และ 45° ถ้า AB ยาว 30 ฟุต จงหาความสูงของเสาธง และระยะที่เสาธงทั้ง 2 ห่างจากกัน

32. จงพิสูจน์ว่า $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ + \cos 135^\circ = 1 + \operatorname{cosec} 30^\circ$

33. จงพิสูจน์ว่า $\cos 78^\circ \cos 60^\circ \cos 42^\circ \cos 6^\circ = \frac{1}{16}$

34. จากสูตร $\frac{\cos 2A + 1}{\sin 2A} = \cot A$ จงพิสูจน์ว่า $\cot 22^\circ 30' = \sqrt{2} + 1$

35. ถ้า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ จงพิสูจน์

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \left(\frac{\pi - A}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi - B}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi - C}{4} \right)$$

36. กำหนด $L \sin 27^\circ 45' = 9.6680265$

$$L \sin 27^\circ 46' = 9.6682665$$

$$\text{และ } L \sin \theta = 9.6682007$$

จงหาค่าของ θ

37. ใน $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a^2 - b^2}{c} \cos C + \frac{b^2 - c^2}{a} \cos A + \frac{c^2 - a^2}{b} \cos B = 0$$

38. ถ้า $b \cos \theta + a \sin \theta$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{\sec 2\theta} + \frac{b}{\operatorname{cosec} 2\theta} = a$$

แบบฝึกหัดในบทต่อไปนี้เป็นแบบฝึกหัดที่ใช้สูตรการแปลงสูตรระหว่างผลคูณ

39. ใน $\triangle$ จงพิสูจน์ว่า $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$

40. ถ้า $a = 1021$, $b = 723$, $\hat{B} = 41^\circ$ จงหามุม A

41. ใน $\triangle ABC$ ถ้า $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \sin B$ จงหาค่าของมุม C

42. ชายผู้หนึ่งสูง 4 ฟุต 8 นิ้ว ยืนห่างจากกำแพงห้อง 20 ฟุต และมองเงาจากตาไปที่เพดานมุมหนึ่งเป็น 30° เมื่อเดินเข้าใกล้กำแพงอีก 16 ฟุต มุมเงยของเพดานนั้นเป็น 60° ห้องนี้สูงเท่าใด

43. หอคอยแห่งหนึ่งสูง 80 ฟุต มีเสาธงปักอยู่บนยอด ฉันทันอยู่ที่จุด ๆ หนึ่ง ห่างจากเชิงหอคอย 100 ฟุต ปรากฏว่ามุมที่เสาธงรับที่จุดที่ฉันทันมองเป็น $\tan^{-1} \frac{1}{9}$ จงหาความสูงของเสาธง

44. จงพิสูจน์ว่า $\cot^{-1} 7 + \cot^{-1} 8 + \cot^{-1} 18 = \cot^{-1} 3$

45. จงพิสูจน์ว่า $4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

Natural Cosines.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
		0°-1	0°-2	0°-3	0°-4	0°-5	0°-6	0°-7	0°-8	0°-9	1'	2'	3'	4'	5'
0	1.000	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9623	9617	1	2	2	3	4
16	9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	5
18	9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	9456	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

Natural Tangents.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
	0°-1	0°-2	0°-3	0°-4	0°-5	0°-6	0°-7	0°-8	0°-9		1'	2'	3'	4'	5'
0	0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	6	10	13	16
20	3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

Natural Tangents.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
	0°-1	0°-2	0°-3	0°-4	0°-5	0°-6	0°-7	0°-8	0°-9		1'	2'	3'	4'	5'
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6129	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	0057	0145	0233	0323	0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445					
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627					
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916					
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326					
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878					
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	0061	0237	0415	0595					
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506					
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646					
74	3.4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062					
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812					
76	4.0108	0409	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4.3315	3862	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	0045	0504	0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5028	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	0405	1066	1742	2432					
81	6.3128	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	10264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	10285					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	0579	2052	3572					
84	9.5144	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	18.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.62	33.09	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					

หมายเหตุ Mean Differences ในตารางข้างบน
 Tangents ของมุมเหล่านี้ถูกคำนวณโดย Tan ของ
 มุมที่ใกล้เคียงกว่า และเมื่อต้องการค่าที่แม่นยำกว่า
 ให้คำนวณด้วยตัวคูณ.

Logarithmic Sines.

Deg.	0'	6' 0°-1	12' 0°-2	18' 0°-3	24' 0°-4	30' 0°-5	36' 0°-6	42' 0°-7	48' 0°-8	54' 0°-9	Mean Differences				
											1'	2'	3'	4'	5'
0		7-2419	5429	7190	8439	9408	10200	10870	11450	11961					
1	8-2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206					
2	8-5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041					
3	8-7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	21	42	62	84	104
4	8-8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	16	32	48	64	80
5	8-9408	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	10045	10120	13	26	39	52	65
6	9-0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	11	22	33	44	55
7	9-0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	10	19	29	38	48
8	9-1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	8	17	25	34	42
9	9-1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	8	15	23	30	38
10	9-2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	7	14	20	27	34
11	9-2906	2945	2983	3021	3059	3097	3134	3171	3207	3243	6	12	19	25	31
12	9-3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	6	11	17	23	28
13	9-3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	5	11	16	21	26
14	9-3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	5	10	15	20	24
15	9-4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	5	9	14	18	23
16	9-4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4	9	13	17	21
17	9-4650	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4878	4	8	12	16	20
18	9-4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	4	8	11	15	19
19	9-5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	4	7	11	14	18
20	9-5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	3	7	10	14	17
21	9-5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	3	6	10	13	16
22	9-5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	3	6	9	12	15
23	9-5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	3	6	9	12	15
24	9-6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	3	6	8	11	14
25	9-6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	3	5	8	11	13
26	9-6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6525	6541	6556	3	5	8	10	13
27	9-6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	2	5	7	10	12
28	9-6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	2	5	7	9	12
29	9-6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	2	4	7	9	11
30	9-6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	2	4	6	9	11
31	9-7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	2	4	6	8	10
32	9-7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	2	4	6	8	10
33	9-7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	2	4	6	8	10
34	9-7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	2	4	6	7	9
35	9-7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	2	4	5	7	9
36	9-7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	2	3	5	7	9
37	9-7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	2	3	5	7	8
38	9-7893	7903	7913	7923	7932	7941	7951	7960	7970	7979	2	3	5	6	8
39	9-7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	2	3	5	6	8
40	9-8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	1	3	4	6	7
41	9-8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	1	3	4	6	7
42	9-8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8321	8330	1	3	4	6	7
43	9-8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	1	3	4	5	7
44	9-8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1	3	4	5	6

Logarithmic Sines.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
		0°-1	0°-2	0°-3	0°-4	0°-5	0°-6	0°-7	0°-8	0°-9	1'	2'	3'	4'	5'
45	9°8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6
46	9°8509	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	1	2	4	5	6
47	9°8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	1	2	3	5	6
48	9°8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	1	2	3	4	6
49	9°8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1	2	3	4	5
50	9°8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	1	2	3	4	5
51	9°8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	1	2	3	4	5
52	9°8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	1	2	3	4	5
53	9°9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	1	2	3	4	5
54	9°9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	1	2	3	4	5
55	9°9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	1	2	3	3	4
56	9°9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	1	2	3	3	4
57	9°9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	1	2	2	3	4
58	9°9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	1	2	2	3	4
59	9°9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1	1	2	3	4
60	9°9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	1	1	2	3	4
61	9°9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	1	1	2	3	3
62	9°9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	1	1	2	3	3
63	9°9499	9503	9507	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	1	1	2	3	3
64	9°9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	1	1	2	2	3
65	9°9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	1	1	2	2	3
66	9°9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	1	1	2	2	3
67	9°9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	1	1	2	2	3
68	9°9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	0	1	1	2	2
69	9°9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	0	1	1	2	2
70	9°9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	0	1	1	2	2
71	9°9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	0	1	1	2	2
72	9°9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	0	1	1	2	2
73	9°9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	0	1	1	2	2
74	9°9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	0	1	1	1	2
75	9°9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	0	1	1	1	2
76	9°9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	0	1	1	1	2
77	9°9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	0	1	1	1	1
78	9°9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	0	1	1	1	1
79	9°9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	0	0	1	1	1
80	9°9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	0	0	1	1	1
81	9°9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	0	0	1	1	1
82	9°9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	0	0	1	1	1
83	9°9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	0	0	0	1	1
84	9°9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	0	0	0	0	1
85	9°9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	0	0	0	0	0
86	9°9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	0	0	0	0	0
87	9°9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	0	0	0	0	0
88	9°9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
89	9°9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0

Logarithmic Cosines.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
	0° 0'	0° 1'	0° 2'	0° 3'	0° 4'	0° 5'	0° 6'	0° 7'	0° 8'	0° 9'	1'	2'	3'	4'	5'
0	10.0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	9.9999	0	0	0	0	0
1	9.9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	0	0	0	0	0
2	9.9997	9997	9997	9996	9996	9996	9996	9995	9995	9994	0	0	0	0	0
3	9.9994	9994	9993	9993	9992	9992	9991	9991	9990	9990	0	0	0	0	0
4	9.9989	9989	9988	9988	9987	9987	9986	9985	9985	9984	0	0	0	0	0
5	9.9983	9983	9982	9981	9981	9980	9979	9978	9978	9977	0	0	0	0	1
6	9.9976	9975	9975	9974	9973	9972	9971	9970	9969	9968	0	0	0	1	1
7	9.9968	9967	9966	9965	9964	9963	9962	9961	9960	9959	0	0	1	1	1
8	9.9958	9956	9955	9954	9953	9952	9951	9950	9949	9947	0	0	1	1	1
9	9.9946	9945	9944	9943	9941	9940	9939	9937	9936	9935	0	0	1	1	1
10	9.9934	9932	9931	9929	9928	9927	9925	9924	9922	9921	0	0	1	1	1
11	9.9919	9918	9916	9915	9913	9912	9910	9909	9907	9906	0	1	1	1	1
12	9.9904	9902	9901	9899	9897	9896	9894	9892	9891	9889	0	1	1	1	1
13	9.9887	9885	9884	9882	9880	9878	9876	9875	9873	9871	0	1	1	1	2
14	9.9869	9867	9865	9863	9861	9859	9857	9855	9853	9851	0	1	1	1	2
15	9.9849	9847	9845	9843	9841	9839	9837	9835	9833	9831	0	1	1	1	2
16	9.9828	9826	9824	9822	9820	9817	9815	9813	9811	9808	0	1	1	2	2
17	9.9806	9804	9801	9799	9797	9794	9792	9789	9787	9785	0	1	1	2	2
18	9.9782	9780	9777	9775	9772	9770	9767	9764	9762	9759	0	1	1	2	2
19	9.9757	9754	9751	9749	9746	9743	9741	9738	9735	9733	0	1	1	2	2
20	9.9730	9727	9724	9722	9719	9716	9713	9710	9707	9704	0	1	1	2	2
21	9.9702	9699	9696	9693	9690	9687	9684	9681	9678	9675	0	1	1	2	2
22	9.9672	9669	9666	9662	9659	9656	9653	9650	9647	9643	1	1	2	2	3
23	9.9640	9637	9634	9631	9627	9624	9621	9617	9614	9611	1	1	2	2	3
24	9.9607	9604	9601	9597	9594	9590	9587	9583	9580	9576	1	1	2	2	3
25	9.9573	9569	9566	9562	9558	9555	9551	9548	9544	9540	1	1	2	2	3
26	9.9537	9533	9529	9525	9522	9518	9514	9510	9507	9503	1	1	2	3	3
27	9.9499	9495	9491	9487	9483	9479	9475	9471	9467	9463	1	1	2	3	3
28	9.9459	9455	9451	9447	9443	9439	9435	9431	9427	9422	1	1	2	3	3
29	9.9418	9414	9410	9406	9401	9397	9393	9388	9384	9380	1	1	2	3	4
30	9.9375	9371	9367	9362	9358	9353	9349	9344	9340	9335	1	1	2	3	4
31	9.9331	9326	9322	9317	9312	9308	9303	9298	9294	9289	1	2	2	3	4
32	9.9284	9279	9275	9270	9265	9260	9255	9251	9246	9241	1	2	2	3	4
33	9.9236	9231	9226	9221	9216	9211	9206	9201	9196	9191	1	2	3	3	4
34	9.9186	9181	9175	9170	9165	9160	9155	9149	9144	9139	1	2	3	3	4
35	9.9134	9128	9123	9118	9112	9107	9101	9096	9091	9085	1	2	3	4	5
36	9.9080	9074	9069	9063	9057	9052	9046	9041	9035	9029	1	2	3	4	5
37	9.9023	9018	9012	9006	9000	8995	8989	8983	8977	8971	1	2	3	4	5
38	9.8965	8959	8953	8947	8941	8935	8929	8923	8917	8911	1	2	3	4	5
39	9.8905	8899	8893	8887	8880	8874	8868	8862	8855	8849	1	2	3	4	5
40	9.8843	8836	8830	8823	8817	8810	8804	8797	8791	8784	1	2	3	4	5
41	9.8778	8771	8765	8758	8751	8745	8738	8731	8724	8718	1	2	3	5	6
42	9.8711	8704	8697	8690	8683	8676	8669	8662	8655	8648	1	2	3	5	6
43	9.8641	8634	8627	8620	8613	8606	8598	8591	8584	8577	1	2	4	5	6
44	9.8569	8562	8555	8547	8540	8532	8525	8517	8510	8502	1	2	4	5	6

Logarithmic Cosines.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
		0° 1	0° 2	0° 3	0° 4	0° 5	0° 6	0° 7	0° 8	0° 9	1'	2'	3'	4'	5'
45	9° 8495	8487	8480	8472	8464	8457	8449	8441	8433	8426	1	3	4	5	6
46	9° 8418	8410	8402	8394	8386	8378	8370	8362	8354	8346	1	3	4	5	7
47	9° 8338	8330	8322	8313	8305	8297	8289	8280	8272	8264	1	3	4	6	7
48	9° 8255	8247	8238	8230	8221	8213	8204	8195	8187	8178	1	3	4	6	7
49	9° 8169	8161	8152	8143	8134	8125	8117	8108	8099	8090	1	3	4	6	7
50	9° 8081	8072	8063	8053	8044	8035	8026	8017	8007	7998	2	3	5	6	8
51	9° 7989	7979	7970	7960	7951	7941	7932	7922	7913	7903	2	3	5	6	8
52	9° 7883	7874	7864	7854	7844	7834	7825	7815	7805	7795	2	3	5	7	8
53	9° 7795	7785	7774	7764	7754	7744	7734	7723	7713	7703	2	3	5	7	9
54	9° 7692	7682	7671	7661	7650	7640	7629	7618	7607	7597	2	4	5	7	9
55	9° 7586	7575	7564	7553	7542	7531	7520	7509	7498	7487	2	4	6	7	9
56	9° 7476	7464	7453	7442	7430	7419	7407	7396	7384	7373	2	4	6	8	10
57	9° 7361	7349	7338	7326	7314	7302	7290	7278	7266	7254	2	4	6	8	10
58	9° 7242	7230	7218	7205	7193	7181	7168	7156	7144	7131	2	4	6	8	10
59	9° 7118	7106	7093	7080	7068	7055	7042	7029	7016	7003	2	4	6	9	11
60	9° 6990	6977	6963	6950	6937	6923	6910	6896	6883	6869	2	4	7	9	11
61	9° 6856	6842	6828	6814	6801	6787	6773	6759	6744	6730	2	5	7	9	12
62	9° 6716	6702	6687	6673	6659	6644	6629	6615	6600	6585	2	5	7	10	12
63	9° 6570	6556	6541	6526	6510	6495	6480	6465	6449	6434	3	5	8	10	13
64	9° 6418	6403	6387	6371	6356	6340	6324	6308	6292	6276	3	5	8	11	13
65	9° 6259	6243	6227	6210	6194	6177	6161	6144	6127	6110	3	6	8	11	14
66	9° 6093	6076	6059	6042	6024	6007	5990	5972	5954	5937	3	6	9	12	15
67	9° 5919	5901	5883	5865	5847	5828	5810	5792	5773	5754	3	6	9	12	15
68	9° 5736	5717	5698	5679	5660	5641	5621	5602	5583	5563	3	6	10	13	16
69	9° 5543	5523	5504	5484	5463	5443	5423	5402	5382	5361	3	7	10	14	17
70	9° 5341	5320	5299	5278	5256	5235	5213	5192	5170	5148	4	7	11	14	18
71	9° 5126	5104	5082	5060	5037	5015	4992	4969	4946	4923	4	8	11	15	19
72	9° 4900	4876	4853	4829	4805	4781	4757	4733	4709	4684	4	8	12	16	20
73	9° 4659	4634	4609	4584	4559	4533	4508	4482	4456	4430	4	9	13	17	21
74	9° 4403	4377	4350	4323	4296	4269	4242	4214	4186	4158	5	9	14	18	23
75	9° 4130	4102	4073	4044	4015	3986	3957	3927	3897	3867	5	10	15	20	24
76	9° 3837	3806	3775	3745	3713	3682	3650	3618	3586	3554	5	11	16	21	26
77	9° 3521	3488	3455	3421	3387	3353	3319	3284	3250	3214	6	11	17	23	28
78	9° 3179	3143	3107	3070	3034	2997	2959	2921	2883	2845	6	12	19	25	31
79	9° 2806	2767	2727	2687	2647	2606	2565	2524	2482	2439	7	14	20	27	34
80	9° 2397	2353	2310	2266	2221	2176	2131	2085	2038	1991	8	15	23	30	38
81	9° 1943	1895	1847	1797	1747	1697	1646	1594	1542	1489	8	17	25	34	42
82	9° 1436	1381	1326	1271	1214	1157	1099	1040	981	920	10	19	29	38	48
83	9° 0859	0797	0734	0670	0605	0539	0472	0403	0334	0264	11	22	33	44	55
84	9° 0192	0120	0046	8° 9970	9894	9816	9736	9655	9573	9490	13	26	39	52	65
85	8° 9403	9315	9226	9135	9042	8946	8849	8749	8647	8543	16	32	48	64	80
86	8° 8436	8328	8213	8098	7979	7857	7731	7602	7468	7330	21	42	62	84	104
87	7° 7188	7041	6889	6731	6567	6397	6220	6035	5842	5640					
88	8° 5428	5206	4971	4723	4459	4179	3880	3558	3210	2832					
89	8° 2419	1961	1450	0870	0200	7° 9408	8439	7190	5429	2419					

Logarithmic Tangents.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
		0°-1	0°-2	0°-3	0°-4	0°-5	0°-6	0°-7	0°-8	0°-9	1'	2'	3'	4'	5'
0		72419	5429	7190	8439	9400	0200	0870	1450	1962					
1	8°2419	2833	8211	8559	3881	4181	4461	4725	4973	5208					
2	8°5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046					
3	8°7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	21	42	62	84	104
4	8°8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	16	32	48	64	81
5	8°9490	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	0068	0143	13	26	40	53	66
6	9°0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	11	22	34	45	56
7	9°0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	10	20	29	39	49
8	9°1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	9	17	26	35	43
9	9°1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	8	16	23	31	39
10	9°2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	7	14	21	28	35
11	9°2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	6	13	19	26	32
12	9°3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	6	12	18	24	30
13	9°3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	6	11	17	22	28
14	9°3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	5	10	16	21	26
15	9°4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	5	10	15	20	25
16	9°4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	5	9	14	19	23
17	9°4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	4	9	13	18	22
18	9°5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	4	8	13	17	21
19	9°5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	4	8	12	16	20
20	9°5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	4	8	12	15	19
21	9°5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	4	7	11	15	19
22	9°0064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	4	7	11	14	18
23	9°0279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	3	7	10	14	17
24	9°0486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	3	7	10	13	17
25	9°0687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	3	7	10	13	16
26	9°0882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	3	6	9	13	16
27	9°1072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	3	6	9	12	15
28	9°1257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	3	6	9	12	15
29	9°1438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	3	6	9	12	15
30	9°17614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	3	6	9	12	14
31	9°1788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	3	6	9	11	14
32	9°1863	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	3	6	8	11	14
33	9°1825	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	3	5	8	11	14
34	9°1890	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	3	5	8	11	14
35	9°1852	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	3	5	8	11	13
36	9°1813	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	3	5	8	11	13
37	9°1771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	3	5	8	10	13
38	9°1823	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	3	5	8	10	13
39	9°1904	9090	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	3	5	8	10	13
40	9°1928	9254	9260	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	3	5	8	10	13
41	9°1992	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	3	5	8	10	13
42	9°1954	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	3	5	8	10	13
43	9°1997	9712	9727	9742	9757	9773	9788	9803	9818	9833	3	5	8	10	13
44	9°1948	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	3	5	8	10	13

Logarithmic Tangents.

Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	Mean Differences				
		0°-1	0°-2	0°-3	0°-4	0°-5	0°-6	0°-7	0°-8	0°-9	1'	2'	3'	4'	5'
45	10°0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13
46	10°0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	3	5	8	10	13
47	10°0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	3	5	8	10	13
48	10°0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	3	5	8	10	13
49	10°0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	3	5	8	10	13
50	10°0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	3	5	8	10	13
51	10°0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	3	5	8	10	13
52	10°1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	3	5	8	10	13
53	10°1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	3	5	8	11	13
54	10°1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	3	5	8	11	13
55	10°1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	3	5	8	11	14
56	10°1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	3	5	8	11	14
57	10°1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	3	6	8	11	14
58	10°2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	3	6	9	11	14
59	10°2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	3	6	9	12	14
60	10°2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	3	6	9	12	15
61	10°2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2688	2707	2725	3	6	9	12	15
62	10°2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	3	6	9	12	15
63	10°2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3	6	9	13	16
64	10°3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3	6	10	13	16
65	10°3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3	7	10	13	17
66	10°3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3	7	10	14	17
67	10°3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	4	7	11	14	18
68	10°3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4	7	11	15	19
69	10°4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4	8	12	15	19
70	10°4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4	8	12	16	20
71	10°4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4	8	13	17	21
72	10°4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	4	9	13	18	22
73	10°5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5	9	14	19	23
74	10°5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5	10	15	20	25
75	10°5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	5	10	16	21	26
76	10°6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6	11	17	22	28
77	10°6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6	12	18	24	30
78	10°6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	6	13	19	26	32
79	10°7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7	14	21	28	35
80	10°7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8	16	23	31	39
81	10°8003	8052	8102	8152	8203	8253	8307	8360	8413	8467	9	17	26	35	43
82	10°8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	10	20	29	39	49
83	10°9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	11	22	34	45	56
84	10°9784	9857	9932	0008	0085	0164	0244	0326	0409	0494	13	26	40	53	66
85	11°0380	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	16	32	48	64	81
86	11°1554	1684	1777	1883	2012	2135	2261	2391	2525	2663	20	42	62	84	104
87	11°2808	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357					
88	11°4509	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167					
89	11°7581	8038	8550	9130	9800	0591	1561	2810	4371	7381					

LOGARITHMS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	12	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	10	12	13
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITHMS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	4	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	4	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ANTILOGARITHMS

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PROPORTIONAL PARTS								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1333	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	2	2	2	2	2	3
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	2	2	2	2	2	3
Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ด. 19



องค์การผ้าของคุรุสภา

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ตรัสภา

นายกำจร สัตถกุล ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา

๘ กรกฎาคม ๒๕๐๕