ความน่าทึ่งของ

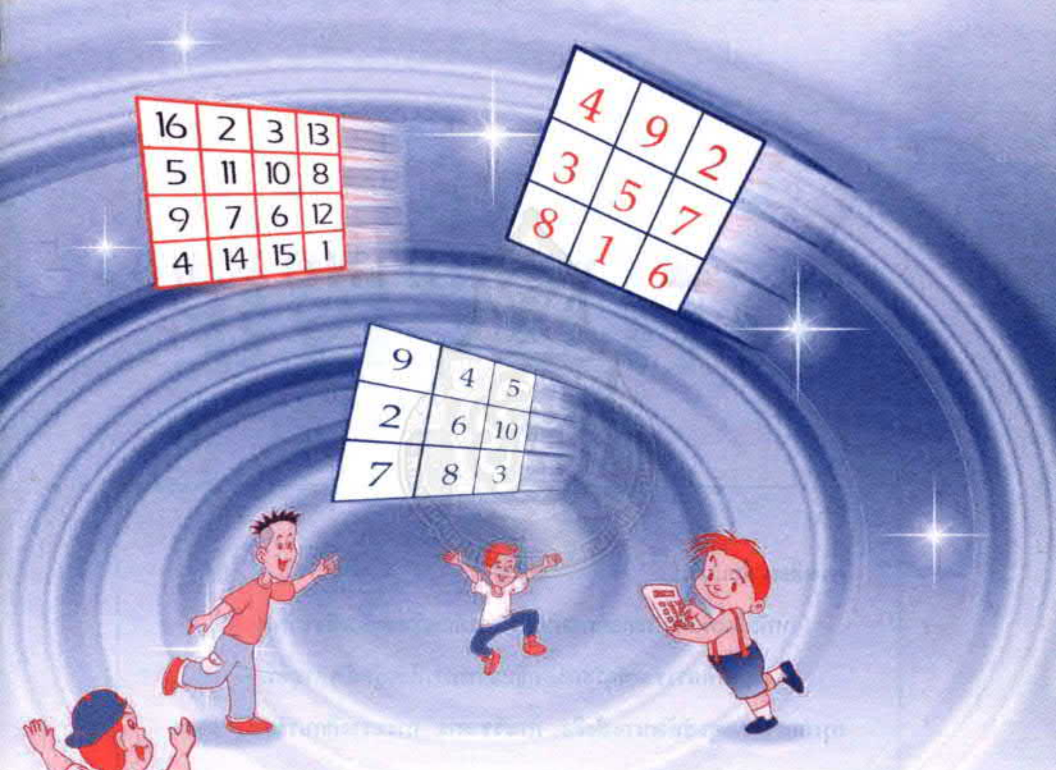
จัตุรัสกล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

กระทรวงศึกษาธิการ

ความน่าพิศวงของจัตุรัสกล

ระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์



ดวงเดือน อ่อนน่วม ผู้เขียน
ประสาท สอ้านวงศ์ ผู้ตรวจ
สิริพร ทิพย์คง
เยาวลักษณ์ เตียรณบรรจง

ศูนย์พัฒนาหนังสือ กรมวิชาการ

ความน่าพิศวงของจัตุรัสกล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2546 จำนวน 47,000 เล่ม

ISBN 974-269-4184

ความน่าพิศวงของ

ดวงเดือน อ่อนน่วม.

หนังสือเพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ การค้นคว้าและอ้างอิงฯ เรื่อง ความน่าพิศวงของจัตุรัสกล. กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. -- กรุงเทพฯ : ศูนย์พัฒนาหนังสือ กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ, 2545

100 หน้า

1. คณิตศาสตร์. 2. ชื่อเรื่อง

ISBN 974-269-4184

จัตุรัสกล

คำนำ

หนังสือ เรื่อง ความน่าพิศวงของจัตุรัสกล เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนรู้ การค้นคว้า และอ้างอิงกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 จัดทำขึ้นเพื่อเสริมสร้างทักษะกระบวนความคิดสร้างสรรค์ การแก้ปัญหา การคิดเชิงเหตุผล โดยใช้จัตุรัสกลเป็นเครื่องมือพัฒนาและฝึกทักษะ การนำความรู้เรื่องจำนวนไปใช้คำนวณแก้ปัญหาในด้านต่าง ๆ รวมทั้งเป็นแนวในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับครูผู้สอน ลักษณะการนำเสนอเนื้อหาของหนังสือเล่มนี้ มีเนื้อหาเกี่ยวกับประวัติความเป็นมาของจัตุรัสกล สมบัติของจัตุรัสกล อันดับของจัตุรัสกล ผลบวกกล การสร้างจัตุรัสกลใหม่จากจัตุรัสกลเดิม การนำจัตุรัสกลไปใช้ และการนำทักษะและความรู้ไปใช้ประโยชน์ และแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

กรมวิชาการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อ นักเรียน ครูผู้สอน ศึกษานิเทศก์ และนักวิชาการศึกษาที่มีหน้าที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และขอขอบคุณผู้ที่มีส่วนร่วมในการจัดทำหนังสือเล่มนี้มา ณ โอกาสนี้

(นายประพัฒน์พงศ์ เสนาฤทธิ์)
อธิบดีกรมวิชาการ
29 พฤษภาคม 2546

สารบัญ

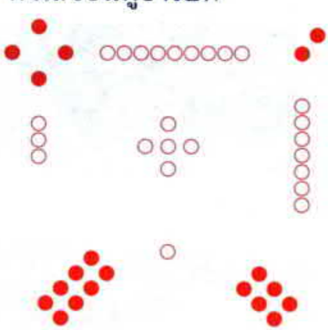
	หน้า
1. ประวัติความเป็นมาของจัตุรัสกล	2
2. สมบัติของจัตุรัสกล	14
อันดับของจัตุรัสกล	14
ผลบวกกล	15
การสร้างจัตุรัสกล	18
เส้นทแยงมุมหัก	20
3. การนำจัตุรัสกลไปใช้	24
4. การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคี่	28
5. การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคู่	52
การสร้างจัตุรัสกลที่มี 4 แถว	52
การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 6, 10, 14,...	53
การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 8, 12, 16,...	58
6. กิจกรรม	62
บรรณานุกรม	92

ประวัติของจัตุรัสกล

จัตุรัสกลเกิดจากการนำตัวเลขมาวางเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อนำจำนวนแต่ละจำนวนในแนวตั้ง แนวนอน หรือแนวเส้นทแยงมุมมารวมกัน ผลบวกจะเท่ากันเสมอ

1. ประวัติของจัตุรัสกล

ประวัติความเป็นมาของจัตุรัสกล เริ่มต้นขึ้นในประเทศจีน สมัยพระเจ้าจักรพรรดิโย (Emporor Yo) เมื่อประมาณ 2,200 ปี ก่อนคริสต์ศักราช ขณะที่เขากำลังยืนอยู่บนฝั่งริมแม่น้ำฮวงโห ได้มองเห็นเต่าศักดิ์สิทธิ์ตัวหนึ่งซึ่งกลางหลังมีสัญลักษณ์ที่เรียกว่า โล-ซู (Lo-shu) ปรากฏอยู่ สัญลักษณ์นี้เคยปรากฏอยู่ในหนังสือเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutations) ซึ่งเป็นหนึ่งในหนังสือคณิตศาสตร์ที่เก่าแก่ที่สุดของชาวจีน โล-ซู เป็นรูปปมเชือกแสดงจำนวนเรียงกันอยู่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ปมสีดำแสดงจำนวนคู่ ส่วนปมสีขาวแสดงจำนวนคี่ ตัวอย่างดังภาพ ภาพซ้ายมือ แสดง โล-ซู ที่แสดงรูปปมเชือกและภาพขวามือแสดงโล-ซู ที่แสดงด้วยตัวเลขฮินดูอารบิก



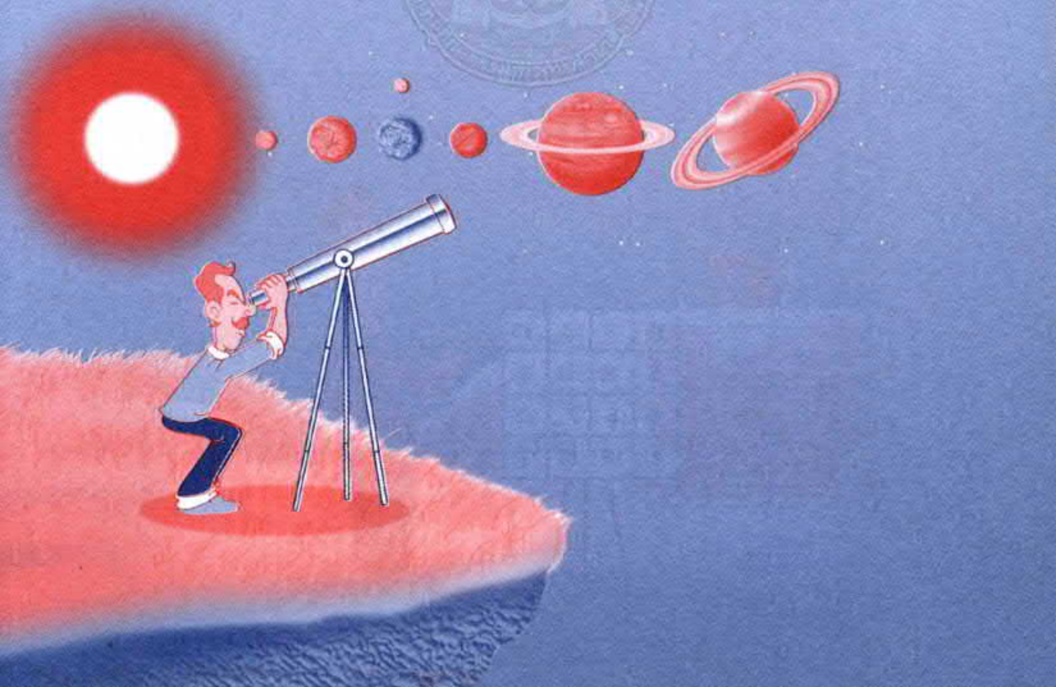
4	9	2
3	5	7
8	1	6

โล-ซู

แนวคิดเรื่องจัตุรัสกลได้เผยแพร่แผ่ขยายจากจีนไปยังประเทศต่างๆ เช่น อาหรับในราวศตวรรษที่ 9 อินเดียในราวศตวรรษที่ 11 และพบในข้อเขียนของชาวฮีบรูในราวศตวรรษที่ 12

ราวศตวรรษที่ 15 มอสโคโปลัส (Moschopolus) ซึ่งอาศัยอยู่ในเมืองคอนสแตนติโนเปิล เป็นผู้ได้รับการยกย่องว่านำจัตุรัสกลเข้าไปเผยแพร่ในยุโรป

ความลึกลับของจัตุรัสกล มักจะถูกนำไปสัมพันธ์กับโหราศาสตร์อยู่เสมอ ผู้มีชื่อเสียงในการสร้างจัตุรัสกลในขณะนั้น คือ คอร์นีเลียส อกริปปา (Cornelius Agrippa) ซึ่งสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวดังนี้ คือ 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 แถว โดยเปรียบเทียบจัตุรัสกลทั้ง 7 ของเขา กับดาว 7 ดวง ได้แก่ ดาวเสาร์ ดาวพฤหัสบดี ดาวอังคาร ดวงอาทิตย์ ดาวศุกร์ ดาวพุธ และดวงจันทร์



จัตุรัสกลที่ปรากฏให้เห็นเป็นหลักฐานชัดเจน พบในภาพพิมพ์ที่มีชื่อเสียงของอัลเบร็คชท์ ดูเรอร์ (Albrecht Durer) ซึ่งมีชื่อว่า เมแล็นโคเลีย (Melancholia) สร้างขึ้นเมื่อคริสต์ศักราช 1514 จัตุรัสกลดังกล่าวเป็นจัตุรัสกลที่มี 4 แถว โดยใช้ปีคริสต์ศักราชที่สร้างจัตุรัสกลนำไปปรากฏอยู่ในสองช่องกลางของแถวล่างสุดของจัตุรัสกล ซึ่งผลบวกแต่ละแถวของจัตุรัสกลนี้ คือ 34

จัตุรัสกลของดูเรอร์

จัตุรัสกลของดูเรอร์ นอกจากที่กล่าวมาแล้ว ยังมีสมบัติพิเศษที่แตกต่างไปจากจัตุรัสกลทั่ว ๆ ไปหลายประการ เช่น

1. จำนวนในช่องที่มุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้แก่ 16, 13, 4, 1 ซึ่งรวมกันได้ 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2. จำนวนในสี่ช่องกลางของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้แก่ 10, 11, 6, 7 ซึ่งรวมกันได้ 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3. จำนวนในสองช่องกลางของแถวบนสุด ได้แก่ 3, 2 กับจำนวนในสองช่องกลางของแถวล่างสุด ได้แก่ 15, 14 ซึ่งรวมกันได้ 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4. จำนวนในสองช่องกลางของแถวแนวตั้งซ้ายสุด ได้แก่ 5, 9 กับจำนวนในสองช่องกลางของแถวแนวตั้งขวาสุด ได้แก่ 8, 12 ซึ่งรวมกันได้ 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

5. จำนวนในแนวเฉียงที่ขนานทั้งซ้ายสุดและขวาสุดของเส้นทแยงมุม รวมกันได้ 34 จำนวนในข้อนี้จึงมีสองชุด เพราะมีเส้นทแยงมุมสองเส้น ได้แก่ 9, 15, 2, 8 ชุดหนึ่ง และ 3, 5, 12, 14 อีกชุดหนึ่ง

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

6. กำลังสองของแต่ละจำนวนในสองแถวบนรวมกัน เท่ากับกำลังสองของแต่ละจำนวนในสองแถวล่างรวมกัน

$$(16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2) + (5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2) = 748$$

$$(9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2) + (4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2) = 748$$

7. ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนในแถวแรก กับแถวที่สาม เท่ากับผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนในแถวที่สองกับแถวที่สี่

$$(16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2) + (9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2) = 748$$

$$(5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2) + (4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2) = 748$$

8. ผลบวกของจำนวนต่าง ๆ ที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมทั้งสองเท่ากับผลบวกของจำนวนต่าง ๆ ที่เหลือทั้งหมด

$$(16 + 10 + 7 + 1) + (13 + 11 + 6 + 4) = 68$$

$$(5 + 9 + 15 + 14) + (3 + 2 + 8 + 12) = 68$$

9. ผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมทั้งสอง เท่ากับผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม

$$(16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2) + (13^2 + 11^2 + 6^2 + 4^2) = 748$$

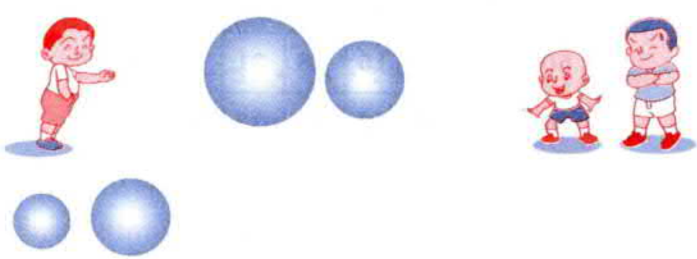
$$(5^2 + 9^2 + 15^2 + 14^2) + (3^2 + 2^2 + 8^2 + 12^2) = 748$$

10. ผลบวกของกำลังสามของแต่ละจำนวนในแนวเส้นทแยงมุมทั้งสอง เท่ากับผลบวกของกำลังสามของแต่ละจำนวนที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม

$$(16^3 + 3^3 + 2^3 + 13^3) + (9^3 + 6^3 + 7^3 + 12^3) = 9{,}344$$

$$(5^3 + 10^3 + 11^3 + 8^3) + (4^3 + 15^3 + 14^3 + 1^3) = 9{,}344$$

นอกจากสมบัติดังกล่าวแล้ว จัตุรัสกลของดูเรอร์ ยังมีสมบัติอื่น ๆ อีกหลายประการ อันชวนให้คิดค้นหาเพิ่มเติมจากที่ยกตัวอย่างให้ไว้ข้างต้น



จัตุรัสกลของเบนจามิน แฟรงคลิน

เบนจามิน แฟรงคลิน (Benjamin Franklin) เป็นอีกผู้หนึ่งที่ให้ความสนใจเรื่องจัตุรัสกลเป็นอย่างมาก จัตุรัสกลที่เขาสร้างขึ้นนอกจากจะมีผลบวกในแต่ละแถวตามแนวตั้ง แนวนอน รวมกันได้ 260 แล้ว ยังมีสมบัติพิเศษอื่น ๆ อีกดังต่อไปนี้

1. ผลบวกของจำนวนในช่องที่มุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้แก่ 52, 45, 17, 16 กับจำนวนในสี่ช่องกลางของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้แก่ 54, 43, 23, 10 ซึ่งรวมกันได้ 260

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

จัตุรัสกลสร้างโดยแฟรงคลิน

2. ผลบวกของจำนวนในสี่ช่องใด ๆ ที่เรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รวมกันได้ 130 เช่น

50	63
16	1

50 + 63 + 16 + 1 = 130

3. ผลบวกของจำนวนในสี่ช่องใด ๆ ที่อยู่ห่างจากจุดตัดที่เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตัดกัน เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน รวมกันได้ 130 เช่น 4 + 29 + 59 + 38 = 130

5 + 28 + 57 + 40 = 130

4. ผลบวกของจำนวนตามแนวเส้นทแยงมุมทั้งสองรวมกันได้ 520 เช่น (52 + 3 + 5 + 54 + 23 + 40 + 34 + 17) + (45 + 30 + 28 + 43 + 10 + 57 + 63 + 16) = 520

5. ผลบวกของจำนวนตามแนวเส้นทแยงมุมหัก (เส้นทแยงมุมหักแสดงด้วยเส้นประในจัตุรัสกลที่มี 4 แถว จำนวน 4 รูปเรียงต่อกัน รวมกันได้ 260 เช่น

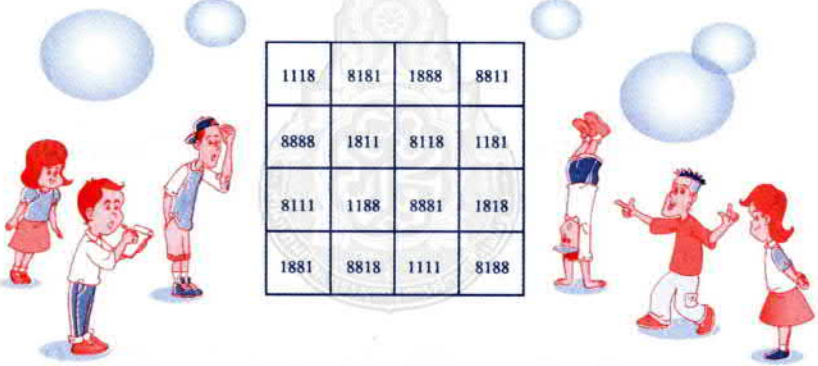
53 + 6 + 4 + 51 + 46 + 29 + 27 + 44 = 260

9 + 63 + 64 + 10 + 23 + 33 + 34 + 24 = 620

* คำอธิบายเกี่ยวกับเส้นทแยงมุมหักมีอยู่ในเรื่องสมบัติของจัตุรัสกล หน้า 20

จัตุรัสกล IXOHOXI

จัตุรัสกลที่น่าสนใจมากอีกแบบหนึ่ง คือ IXOHOXI ซึ่งเป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกของจำนวนแต่ละแถวเป็น 19,998 สัญลักษณ์พิเศษของจัตุรัสกลนี้ คือ ไม่ว่าจะกลับหัวลงหรือสะท้อนในกระจกเงาก็ยังคงเป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกของจำนวนในแต่ละแถวเท่าเดิม

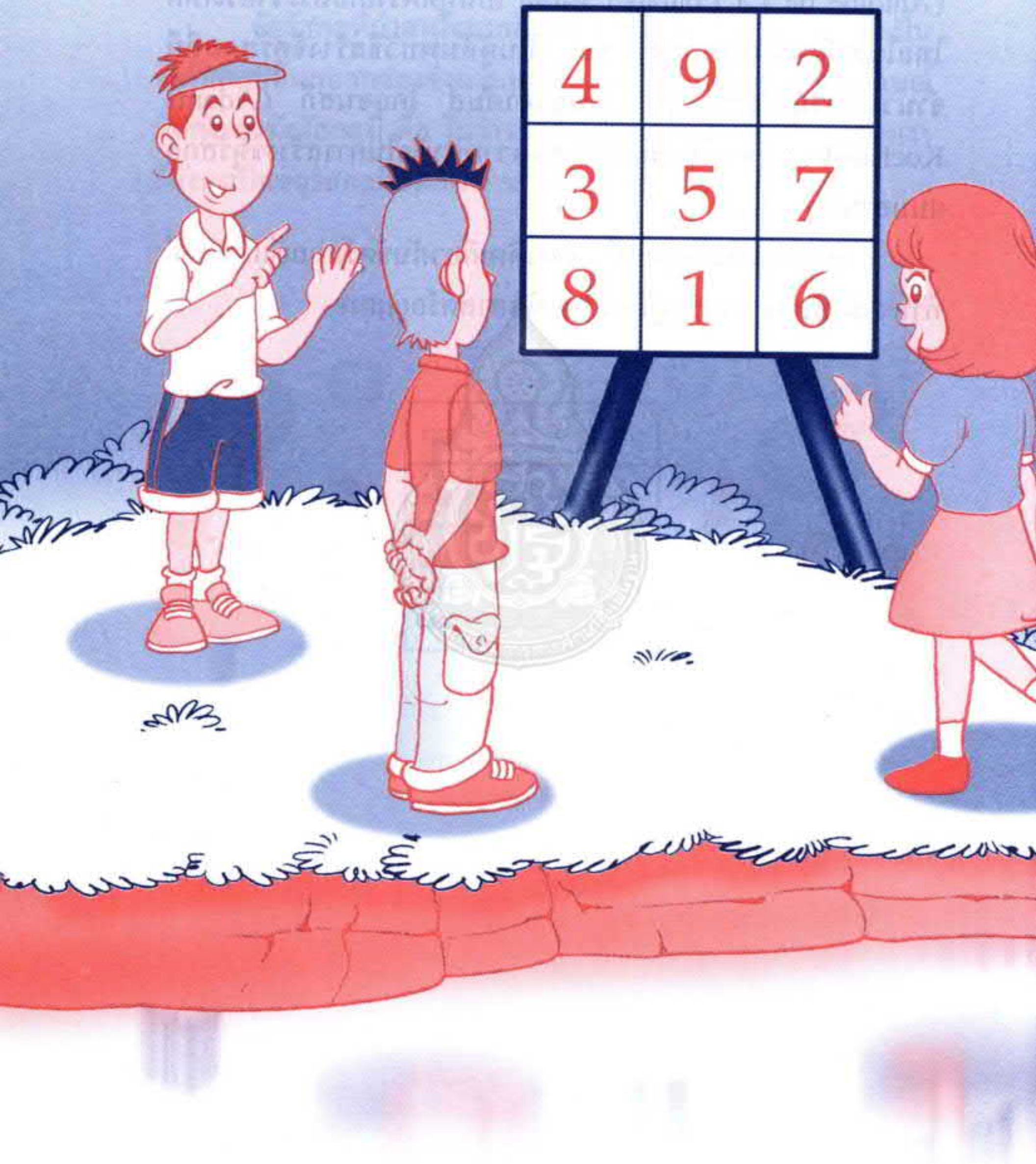


1118	8181	1888	8811
8888	1811	8118	1181
8111	1188	8881	1818
1881	8818	1111	8188

จัตุรัสกล IXOHOXI

ยังมีจัตุรัสกลอีกหลายรูปแบบ อังตัวเนต์ เดอ ลา ลูแบร์ (Antoine de La Loubire) ซึ่งเคย เป็นทูตฝรั่งเศสประจำประเทศไทยในสมัยพระเจ้าหลุยส์ที่ 14 เป็นผู้ค้นพบวิธีสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคี่ ต่อมาอาดัมส์ โคแซนสกี (Adams Kochansky) ชาวโปแลนด์ประสบความสำเร็จในการสร้างจัตุรัสกลแบบสามมิติ

ตราบจนถึงปัจจุบันนี้ แนวคิดเกี่ยวกับจัตุรัสกลยังเป็นสิ่งที่ท้าทายน่าพิศวง สำหรับผู้ที่สนใจคณิตศาสตร์อยู่เสมอ


4 9 2
3 5 7
8 1 6

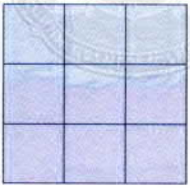
จัตุรัสกลเกิดจากการนำจำนวนมาเรียงกันเป็น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจำนวนที่จะประกอบกันเป็นจัตุรัสกลได้ คือ 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81... ตามลำดับ

2. สมบัติของจัตุรัสกล

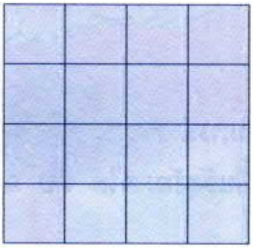
อันดับของจัตุรัสกล

จัตุรัสกลเกิดจากการนำจำนวนมาเรียงกันเป็น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังนั้น จำนวนที่จะประกอบกันเป็นจัตุรัสกลได้ คือ 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,... ตามลำดับ จัตุรัสกลใด ๆ ที่ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกเรียงกันไป โดยเริ่มต้นตั้งแต่ 1 เรียกว่า จัตุรัสกลมาตรฐาน จำนวนช่องหรือจำนวนในแต่ละแถว เรียกว่า อันดับ (order) ของจัตุรัสกล

จัตุรัสกลอันดับ 3 มีจำนวนได้ 9 จำนวน



จัตุรัสกลอันดับ 4 มีจำนวนได้ 16 จำนวน



ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่าอันดับต่ำที่สุดของจัตุรัสกลก็คือ 3 ซึ่งเป็นจัตุรัสกลที่ประกอบด้วยจำนวน 9 จำนวน จัตุรัสกลอันดับ 4 ก็จะประกอบด้วยจำนวน 16 จำนวน จัตุรัสกลอันดับ 5 ก็จะมีจำนวน 25 จำนวน ถ้าให้ n เป็นอันดับของจัตุรัสกล จำนวนในจัตุรัสกลทั้งหมดมีเท่ากับ n^2 จำนวน

ผลบวกกล

สมบัติประการสำคัญของจัตุรัสกล คือ ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถวในแนวตั้ง แนวนอน และแนวเส้นทแยงมุมเท่ากัน ผลบวกนี้จึงได้ชื่อว่าผลบวกกล

การหาผลบวกกลของจัตุรัสกลมาตรฐาน ทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะขอเสนอไว้สองวิธีดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 ผลบวกกล = $\dfrac{n^3 + n}{2}$

เมื่อ n คือ อันดับของจัตุรัสกล

วิธีที่ 2 ผลบวกกล = $\dfrac{1}{n} \left\{\dfrac{x(x+1)}{2}\right\}$

เมื่อ n คือ อันดับของจัตุรัสกล

x คือ จำนวนที่มากที่สุด

ตัวอย่างการหาผลบวกกลของจัตุรัสกลมาตรฐานที่มีอันดับเป็น 4

วิธีที่ 1 จัตุรัสกลอันดับ 4 มีผลบวกกล $= \frac{4^3 + 4}{2}$

$= \frac{68}{2} = 34$

วิธีที่ 2 จัตุรัสกลที่มีอันดับเป็น 4 จะประกอบด้วยจำนวน 16 จำนวน คือ 1, 2, 3, ..., 15, 16

จัตุรัสกลอันดับ 4 มีผลบวกกล $= \frac{1}{4}\left\{\frac{16(16+1)}{2}\right\}$

$= \frac{1}{4}\{8 \times 17\}$

$= \frac{136}{4} = 34$

เมื่อพิจารณาการคำนวณบรรทัดสุดท้าย คือ $\frac{136}{4}$

136 คือ ผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในจัตุรัสกล $1 + 2 + 3 + ... + 16 = 136$

เมื่อย้อนกลับไปดูสูตรการคำนวณหาผลบวกกลวิธีที่สอง จึงแสดงว่า

$\frac{x(x+1)}{2}$ คือผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในจัตุรัสกล

คำอธิบายเพื่อแสดงว่าผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในจัตุรัสกล

คือ $\frac{x(x+1)}{2}$ เป็นดังนี้

ให้ $1 + 2 + 3 + ... + x = s$ ①

จะได้ว่า $x + (x - 1) + (x - 2) + ... + 1 = s$ ②

ดังนั้น ถ้านำ ① + ② จะได้ $x + 1$ ทั้งหมด x จำนวน นั่นคือ

$$x(x + 1) = 2s$$

ดังนั้น $s = \frac{x(x+1)}{2}$

การสร้างจัตุรัสกล

จัตุรัสกลใด ๆก็ตามเมื่อสร้างเสร็จแล้ว เราก็สามารถสร้างจัตุรัสกลอื่น ๆ ขึ้นมาได้อีก โดยการบวก ลบ คูณ หรือหารจำนวนทุกจำนวนในจัตุรัสกลด้วยจำนวนเดียวกัน หรือโดยการหมุน (rotations) หรือการสะท้อน (reflections) ที่แกนสมมาตรแกนใดแกนหนึ่ง ดังตัวอย่าง

1) บวกลบทุกจำนวนด้วยจำนวนเดียวกัน

4	9	2
3	5	7
8	1	6

จัตุรัสกลมาตรฐานที่มีอันดับ 3 จะมีผลบวกเป็น 15

8	13	6
7	9	11
12	5	10

บวกด้วย 4 ทุกจำนวน
ผลบวกกล คือ
$15 + (3 \times 4) = 27$

3	8	1
2	4	6
7	0	5

ลบด้วย 1 ทุกจำนวน
ผลบวกกล คือ
$15 - (3 \times 1) = 12$

2) คูณหารทุกจำนวนด้วยจำนวนเดียวกัน

20	45	10
15	25	35
40	5	30

คูณด้วย 5 ทุกจำนวน
ผลบวกกล คือ $15 \times 5 = 75$

$1\frac{1}{3}$	3	$\frac{2}{3}$
1	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
$2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

หารด้วย 3 ทุกจำนวน
ผลบวกกล คือ $\frac{15}{3} = 5$

3) หมุนจัตุรัสกล

8	3	4
1	5	9
6	7	2

หมุนตามเข็มนาฬิกา $\frac{1}{4}$ รอบ

4) สะท้อนที่แกนสมมาตร

8	1	6
3	5	7
4	9	2

แกนสมมาตร

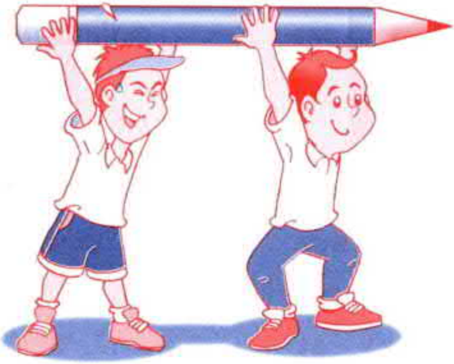
สะท้อนตามแกนสมมาตร
แนวนอน

จัตุรัสกลที่มีรากฐานจากจัตุรัสกลเดียวกัน

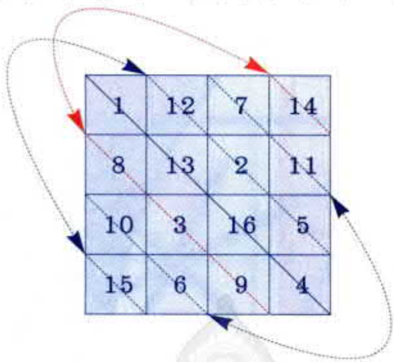
เส้นทแยงมุมหัก

จัตุรัสกลใด ๆ จะมีเส้นทแยงมุมหลักอยู่สองเส้น คือ เส้นที่ลากจากมุมล่างด้านซ้ายไปยังมุมขวาด้านบน และเส้นที่ลากจากมุมซ้ายด้านบนลงมายังมุมขวาด้านล่าง

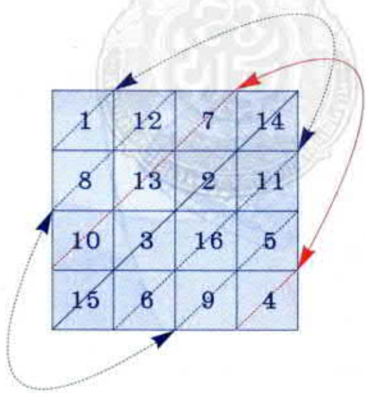
นอกจากเส้นทแยงมุมหลักทั้งสองแล้วยังมีเส้นทแยงมุมอีกชนิดหนึ่ง เรียกว่า เส้นทแยงมุมหัก (bopken diagonals) ซึ่งแสดงให้เห็นด้วยภาพต่อไป



ภาพแสดงจำนวนที่เส้นทแยงมุมหัก 3 เส้น ตัดผ่านได้แก่ (15, 12, 2, 5) , (10, 6, 7, 11) , (8, 3, 9, 14)

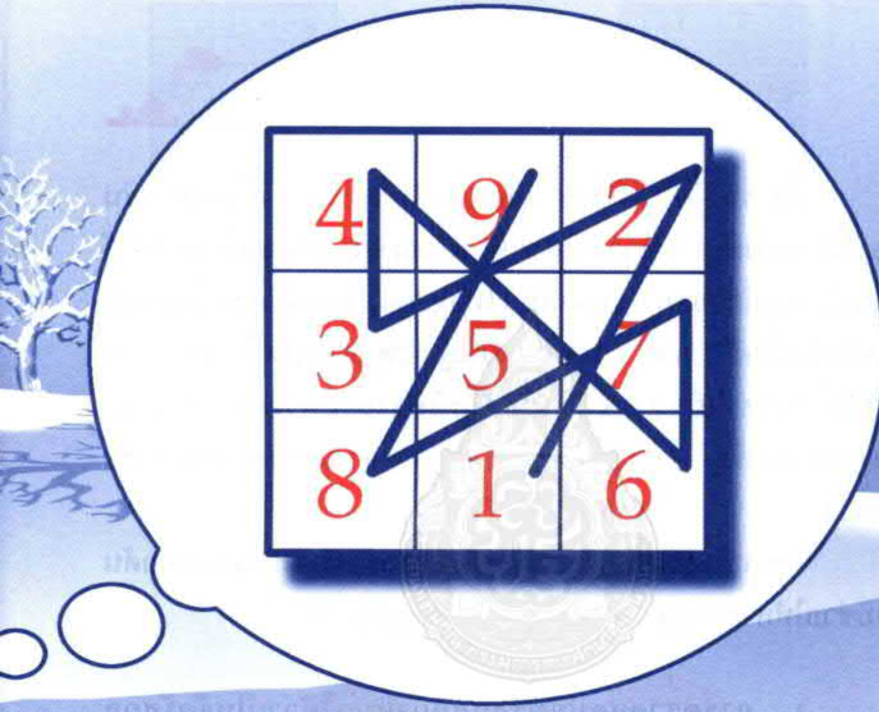


ภาพแสดงจำนวนที่เส้นทแยงมุมหักอีก 3 เส้นตัดผ่านได้แก่ (4, 10, 13, 7) , (9, 5, 8, 12) , (6, 16, 11, 1)



จากภาพแสดงให้เห็นว่าเส้นทแยงมุมหักแต่ละเส้นประกอบด้วยเส้นสองเส้นซึ่งขนานกับเส้นทแยงมุมหลัก โดยตัดผ่านจำนวนที่อยู่ต่างแถวทั้งแนวตั้งและแนวนอน

การนำจัตุรัสกลไปใช้



แบรกดัน (*Bragdon*) สถาปนิกชาวอเมริกัน ซึ่งเสียชีวิต ใน ปี ค.ศ. 1946 ผู้ค้นพบแนวคิดการสร้างลวดลายที่สวยงามจากจัตุรัสกล

3. การนำจัตุรัสกลไปใช้

จัตุรัสกลใดๆ ก็ตาม เมื่อลากเส้นโยงระหว่างจำนวน เช่น เรียงไปตามลำดับ ระหว่างจำนวนคู่ หรือระหว่างจำนวนคี่ จะก่อให้เกิดลวดลายที่สวยงาม แบรกดัน (Bragdon) สถาปนิกชาวอเมริกัน ซึ่งเสียชีวิตในปี ค.ศ. 1946 เป็นผู้ค้นพบแนวคิดนี้ แบรกดันได้ใช้ลวดลายที่เกิดจากจัตุรัสกลเป็นพื้นฐานในการออกแบบงานของเขาหลายชิ้น เช่น แบบปกหนังสือ ลวดลายของผ้าตัดเสื้อ เป็นต้น

จากความรู้ในสมบัติของจัตุรัสกลตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ย่อมช่วยให้สามารถเล่นกับจัตุรัสกลได้หลายรูปแบบ เช่น

1. **การตรวจสอบจัตุรัสกล**ที่กำหนดให้ว่าเป็นจัตุรัสกลหรือไม่

6	7	2
1	5	9
8	3	4

เป็นจัตุรัสกล

1	2	3
5	9	8
4	6	7

ไม่เป็นจัตุรัสกล

เพราะผลบวกแต่ละแถวไม่เท่ากัน

2. การหาจำนวนที่ขาดหายไปในจัตุรัสกล

		2
	5	
8		4

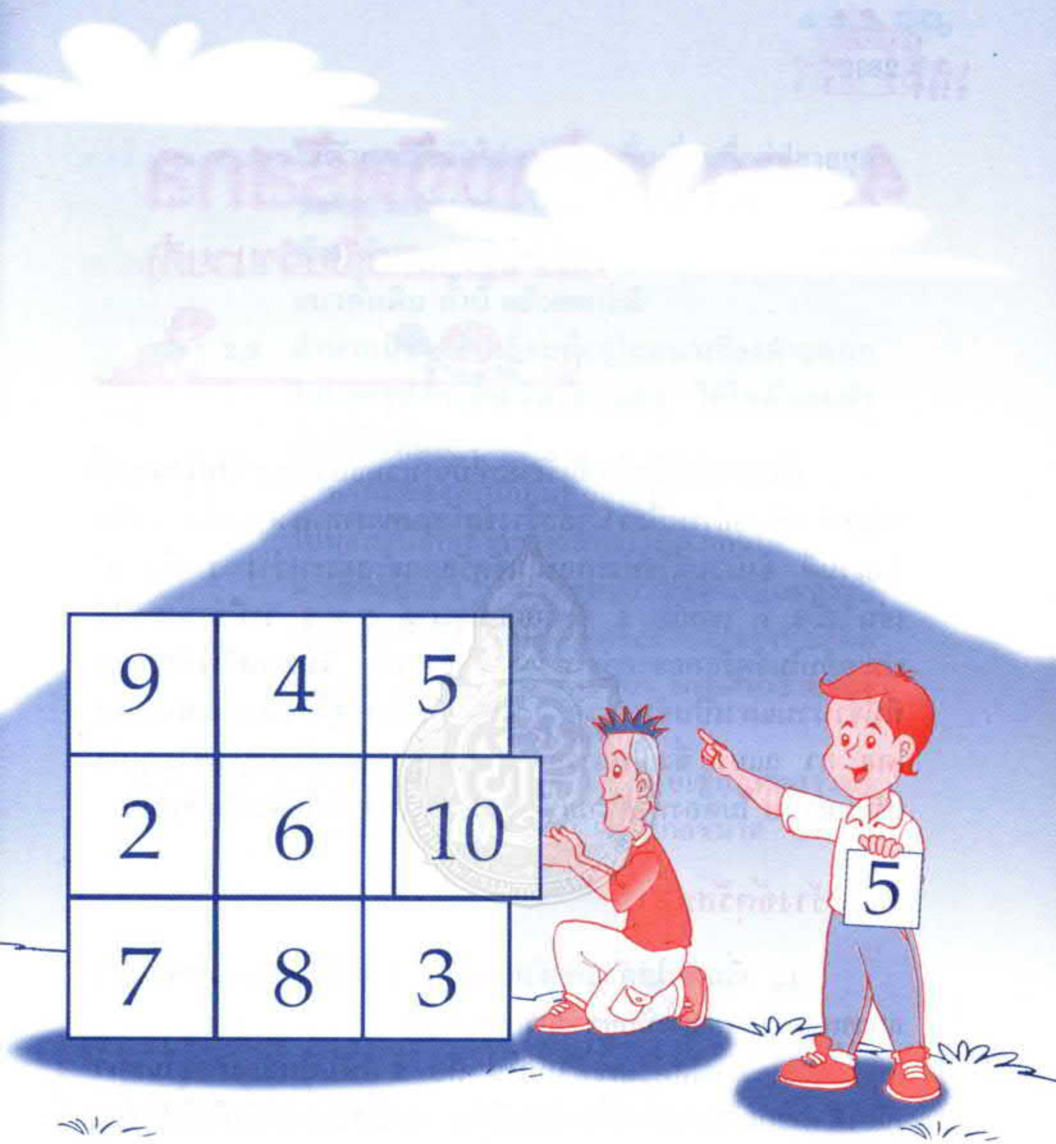
16		
	13	15

3. การหาลวดลาย

4	9	2
3	5	7
8	1	6

การสร้างจัตุรัสกล จะนำไปกล่าวในบทต่อไป

การสร้างจัตุรัสกล ที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคี่



วิธีสร้างจัตุรัสกลขนาด $n \times n$ **เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ จำนวนที่ใช้ประกอบในจัตุรัสกลจะอยู่ระหว่าง 1 ถึง n^2**

4. การสร้างจัตุรัสกล
(ที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคี่)

คำแนะนำวิธีสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถว (n) เป็นจำนวนคี่ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีสร้างจัตุรัสกลขนาด $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ จำนวนที่ใช้ประกอบในจัตุรัสกลจะอยู่ระหว่าง 1 ถึง n^2 เช่น เมื่อ n เท่ากับ 5 จัตุรัสกลมีขนาด 5×5 จะมีจำนวนที่ใช้ประกอบในจัตุรัสกลจะอยู่ระหว่าง 1 ถึง 25 วิธีการสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคี่ เป็นวิธีสร้างจัตุรัสกลตามแบบของ เดอ ลา ลูแบร์ ซึ่งเป็นการสร้างจัตุรัสกลโดยอาศัยการจดจำกฎการสร้างเท่านั้น ไม่ต้องทำความเข้าใจหรือศึกษาว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

การสร้างจัตุรัสกล

1. เริ่มต้นใส่ตัวเลขตัวแรก คือ 1 ลงในช่องกลางของแถวแนวนอนหรือแนวตั้งที่อยู่ตรงกรอบของรูป

2. การใส่ตัวเลขตัวถัดไป คือ 2 ให้ใส่ในช่องที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส การใส่ตัวเลขตัวถัดไป (2) มีได้ 3 แบบ คือ

   2.1 ถ้าหากไม่มีช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปที่ใส่ตัวเลขได้ นั่นคือ ตัวเลขตัวเดิมอยู่ในช่องที่เป็นขอบของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้

ใส่ตัวเลขตัวถัดไปลงในช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ปลายสุดของแถวแนวนอนหรือแนวตั้งที่อยู่ด้านขวา ด้านซ้าย ด้านบน หรือด้านล่างของแถวแนวนอนหรือแนวตั้งเดิม ทั้งนี้ แล้วแต่กรณี

2.2 ถ้าหากมีช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสว่างอยู่ ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปได้ทันที

2.3 ถ้าหากมีช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่จะใส่ตัวเลขได้ แต่มีตัวเลขอยู่แล้ว หรือช่องนั้นต่อจากมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้ใส่ตัวเลขถัดไปในช่องที่อยู่ติดกันด้านล่าง ด้านบน ด้านขวา หรือด้านซ้ายของตัวเลขตัวเดิม ทั้งนี้แล้วแต่กรณี

ต่อไปเป็นตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล โดยใช้กฎที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ตัวอย่างที่จะแสดงเป็นการสร้างจัตุรัสกลขนาด 5 × 5 โดยใช้ตัวเลข 1 - 25

วิธีที่ 1

18	25	2	9		
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

รูป ก.

	9	2	25	18	
17	15	8	1	24	17
23	16	14	7	5	23
4	22	20	13	6	4
10	3	21	19	12	10
	9	2	25	18	11

รูป ข.

1. เริ่มต้นใส่ตัวเลขตัวแรก คือ 1 ในช่องกลางของแถวแนวนอนบนสุด

2. การใส่ตัวเลขตัวถัดไปให้ใส่ในช่องที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูป จะเลือกเอาเฉียงไปทางขวาตามรูป ก. หรือเฉียงไปทางซ้ายตามรูป ข. ก็ได้ การใส่ตัวเลขตัวถัดไปมี 3 กรณี คือ

2.1 เมื่อไม่มีช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่จะใส่ตัวเลขได้ *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปลงในช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ปลายสุดของแถวแนวตั้งที่อยู่ถัดไปทางขวา ตามรูป ก. หรือทางซ้ายตามรูป ข. เช่น จาก 1 ไป 2* หรือที่ปลายสุดของแถวแนวนอนที่อยู่ด้านบน เช่น จาก 3 ไป 4

2.2 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสว่างอยู่ *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปทันที เช่น จาก 4 ไป 5*

2.3 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ในแนวเฉียงด้านออกไปนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่จะใส่ตัวเลขได้ แต่มีตัวเลขอยู่แล้ว หรือช่องนั้นต่อจากมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปในช่องที่ติดกันด้านล่าง เช่น จาก 5 ไป 6 จาก 15 ไป 16*

วิธีที่ 2

	10	4	23	17	
9	3	22	16	15	9
2	21	20	14	8	2
25	19	13	7	1	25
18	12	6	5	24	18
11	10	4	23	17	

รูป ค.

11	10	4	23	17	
18	12	6	5	24	18
25	19	13	7	1	25
2	21	20	14	8	2
9	3	22	16	15	9
	10	4	23	17	

รูป ง.

1. เริ่มต้นใส่ตัวเลขตัวแรก คือ 1 ในช่องกลางของแถวแนวตั้งริมขวาสุด

2. การใส่ตัวเลขตัวถัดไปดูตามแนวลูกศรเป็นเกณฑ์

   2.1 เมื่อไม่มีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไป *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปในช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ปลายสุดของแถวที่อยู่ถัดไปด้านบนตามรูป ค. และ ด้านล่างตามรูป ง. เช่น จาก 8 ไป 9* หรือที่ปลายสุดของแถวแนวตั้งที่อยู่ถัดไปทางขวา เช่น จาก 22 ไป 23

   2.2 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปได้ *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปทันที เช่น จาก 11 ไป 12*

2.3 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขได้ แต่มีตัวเลขอยู่แล้ว เช่น จาก 5 ไป 6 หรือช่องนั้นต่อจากมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เช่น จาก 15 ไป 16 *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปในช่องที่ติดกันด้านซ้ายมือ*

วิธีที่ 3

	9	2	25	18	11
10	3	21	19	12	10
4	22	20	13	6	4
23	16	14	7	5	23
17	15	8	1	24	17
	9	2	25	18	

รูป จ.

11	18	25	2	9	
10	12	19	21	3	10
4	6	13	20	22	4
23	5	7	14	16	23
17	24	1	8	15	17
	18	25	2	9	

รูป ฉ.

1. เริ่มต้นใส่ตัวเลขตัวแรก คือ 1 ในช่องกลางของแถวแนวนอนล่างสุด

2. การใส่ตัวเลขตัวถัดไปดูตามแนวลูกศรเป็นเกณฑ์

2.1 เมื่อไม่มีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไป *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปในช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ปลายสุดของแถวแนวตั้งที่อยู่ถัดไปทางซ้ายตามรูป จ. และทางขวาตามรูป ฉ.* เช่น จาก 24 ไป 25 หรือที่ปลายสุดของแถวแนวนอน เช่น จาก 3 ไป 4

2.2 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปได้ *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปทันที เช่น จาก 18 ไป 19*

2.3 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขได้ แต่มีตัวเลขอยู่แล้วหรือช่องสี่เหลี่ยมนั้นต่อจากมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส*ให้ใส่ตัวเลขถัดไปในช่องที่ติดกันด้านบน เช่น* จาก 15 ไป 16 จาก 20 ไป 21

วิธีที่ 4

	17	23	4	10	11
18	24	5	6	12	18
25	1	7	13	19	25
2	8	14	20	21	2
9	15	16	22	3	9
	17	23	4	10	

รูป ช.

	17	23	4	10	
9	15	16	22	3	9
2	8	14	20	21	2
25	1	7	13	19	25
18	24	5	6	12	18
	17	23	4	10	11

รูป ซ.

1. เริ่มต้นใส่ตัวเลขตัวแรก คือ 1 ในช่องกลางของแถวแนวตั้งริมซ้ายสุด

2. การใส่ตัวเลขตัวถัดไปดูตามแนวลูกศรเป็นเกณฑ์
   2.1 เมื่อไม่มีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไป *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปในช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ปลายสุดของแถวที่อยู่ถัดไปด้านล่างตามรูป ช. และด้านบนตามรูป ซ. เช่น จาก 8 ไป 9* หรือที่ปลายสุดของแถวแนวตั้งที่อยู่ถัดไปทางซ้าย เช่น จาก 22 ไป 23
   2.2 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปได้ *ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปทันที เช่น จาก 11 ไป 12*
   2.3 เมื่อมีช่องสี่เหลี่ยมให้ใส่ตัวเลขได้ แต่มีตัวเลขอยู่แล้ว *เช่น จาก 5 ไป 6 หรือช่องนั้นต่อจากมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เช่น จาก 15 ไป 16* ให้ใส่ตัวเลขตัวถัดไปในช่องที่อยู่ติดกันด้านขวามือ

การสร้างจัตุรัสกลของจินนี่ กอรตส์

จินนี่ กอรตส์ (Jeannie Gorts) เสนอแนะวิธีสร้างจัตุรัสกลขนาด 3×3 จำนวนที่ใช้ประกอบในจัตุรัสกลจะอยู่ระหว่าง 1 - 9 โดยอาศัยรูปแบบเป็นหลักในการสร้างมีขั้นตอน ดังนี้

1. หาตัวเลขสำหรับใส่ในช่องกลางของจัตุรัสกล โดยหารผลบวกกล ด้วยรากที่สองของจำนวนช่องที่ประกอบกันเป็นจัตุรัสกล

ผลบวกกลวิธีหนึ่ง หาได้โดยนำทุกจำนวนในจัตุรัสกลบวกกัน หารด้วยจำนวนแถว ตัวอย่างเช่น ผลบวกกลของจัตุรัสกลขนาด 3×3 ซึ่งใส่ตัวเลข 1 - 9 เป็นดังนี้

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{3} = \frac{45}{3}$$

ผลบวกกล = 15

แต่ จำนวนช่องที่ประกอบเป็นจัตุรัสกล คือ 9

ดังนั้น ตัวเลขที่ใส่ในช่องกลางของจัตุรัส คือ $\frac{15}{\sqrt{9}} = 5$

2. เมื่อได้ตัวเลขในช่องกลางของจัตุรัสกลแล้ว การหาตัวเลขใส่ในช่องอื่น ๆ ให้ยึดช่องกลางเป็นหลัก วิธีการพื้นฐานในการหาตัวเลขอื่น ๆ เป็นดังนี้

2.1 นำ 1 บวกกับจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 6 แล้วใส่ผลบวกในช่องที่ต่อจากมุมขวาด้านล่างของช่องกลาง

2.2 นำ 1 ลบออกจากจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 4 แล้วใส่ผลลบในช่องที่ต่อจากมุมซ้ายด้านบนของช่องกลาง

2.3 นำ 2 บวกกับจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 7 แล้วใส่ผลบวกในช่องที่อยู่ติดกันทางขวามือของช่องกลาง

2.4 นำ 2 ลบออกจากจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 3 แล้วใส่ผลลบในช่องที่อยู่ติดกันทางซ้ายมือของช่องกลาง

2.5 นำ 3 บวกกับจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 8 แล้วใส่ผลบวกในช่องที่ต่อจากมุมซ้ายด้านล่างของช่องกลาง

2.6 นำ 3 ลบออกจากจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 2 แล้วใส่ผลลบในช่องที่ต่อจากมุมขวาด้านบนของช่องกลาง

2.7 นำ 4 บวกกับจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 9 แล้วใส่ผลบวกในช่องที่อยู่ติดกันด้านบนของช่องกลาง

2.8 นำ 4 ลบออกจากจำนวน 5 ในช่องกลาง ได้ 1 แล้ว ใส่ผลลบในช่องที่อยู่ติดกันด้านล่างของช่องกลาง

จัตุรัสกลที่เกิดขึ้นโดยอาศัยวิธีการดังกล่าวแล้วข้างต้น แสดงให้เห็นได้ ดังนี้

5 - 1 = 4	5 + 4 = 9	5 - 3 = 2
5 - 2 = 3	5	5 + 2 = 7
5 + 3 = 8	5 - 4 = 1	5 + 1 = 6

วิธีการพื้นฐานที่อธิบายมาแล้ว นำไปใช้กับจัตุรัสกลที่ประกอบด้วยจำนวนนับใดๆ ที่เรียงกันอยู่ โดยที่ผลต่างระหว่างจำนวนที่เรียงกันอยู่ คือ 1 ในกรณีที่ผลต่างระหว่างจำนวนที่เรียงกันอยู่มากกว่า 1 วิธีการนี้ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ โดยการคูณจำนวนที่นำไปบวก หรือลบจากจำนวนในช่องกลางด้วย 2, 3, 4, 5, ... ทั้งนี้แล้วแต่กรณี

ตัวอย่าง การประยุกต์ใช้เมื่อต้องการสร้างจัตุรัสกล ขนาด 3×3 ซึ่งประกอบด้วยจำนวนคู่ตั้งแต่ 2-18 แสดงให้เห็นได้ ดังนี้

1. หาผลบวกกล

$$\text{ผลบวกกล} = \frac{2+4+6+8+10+12+14+16+18}{3}$$

$$= \frac{90}{3} = 30$$

ดังนั้น จำนวนสำหรับใส่ในช่องกลาง คือ

$$= \frac{30}{\sqrt{9}} = 10$$

2. การหาตัวเลขที่จะใส่ในช่องอื่นๆ ทำได้โดยนำ 2 คูณกับจำนวนที่จะนำไปบวกหรือลบจากจำนวนในช่องกลาง ตามวิธีการพื้นฐานดังกล่าวแล้วข้างต้น ซึ่งจะได้ดังนี้

2.1 ตัวเลขในช่องที่อยู่ต่อจากมุมขวาด้านล่างของช่องกลาง คือ 10 + 2 = 12

2.2 ตัวเลขในช่องที่อยู่ต่อจากมุมซ้ายด้านบนของช่องกลาง คือ 10 - 2 = 8

2.3 ตัวเลขในช่องที่อยู่ติดกันทางขวามือของช่องกลาง คือ 10 + 4 = 14

2.4 ตัวเลขในช่องที่อยู่ติดกันทางซ้ายมือของช่องกลาง คือ 10 - 4 = 6

2.5 ตัวเลขในช่องที่อยู่ต่อจากมุมซ้ายด้านล่างของช่องกลาง คือ 10 + 6 = 16

2.6 ตัวเลขในช่องที่อยู่ต่อจากมุมขวาด้านบนของช่องกลาง คือ 10 - 6 = 4

2.7 ตัวเลขในช่องที่อยู่ติดกันด้านบนของช่องกลาง คือ 10 + 8 = 18

2.8 ตัวเลขในช่องที่อยู่ติดกันด้านล่างของช่องกลาง คือ 10 - 8 = 2

8	18	4
6	10	14
16	2	12

จัตุรัสกลซึ่งประกอบด้วยจำนวนคู่ตั้งแต่ 2 ถึง 18

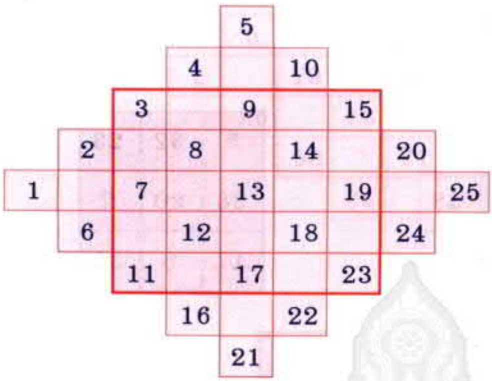
การสร้างจัตุรัสกลของแคปปอน

แคปปอน (Cappon) เสนอแนะวิธีสร้างจัตุรัสกลตามแบบของชาวยุโรป ดังแสดงตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกลขนาด 5 × 5 ให้เห็นได้ ดังนี้

1. ให้สร้างรูปพีระมิดบนด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5 × 5 แล้วใส่ตัวเลข 1 - 25 เรียงกันตามแนวเฉียง ซึ่งจะทำให้มีตัวเลขอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสช่องเว้นช่องตามแถว ดังรูป

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

2. ให้นำตัวเลขในรูปพีระมิดไปใส่ในช่องว่างที่อยู่ด้านตรงข้ามในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 5 × 5 ดังภาพ



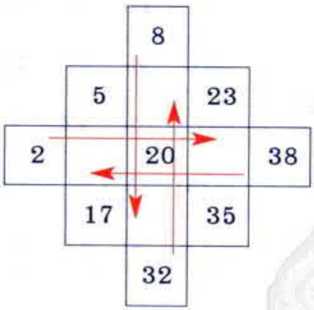
3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

จัตุรัสกลขนาด 5 × 5 สร้างตามแนวคิดของแคปปอน

ชุดของจำนวนที่มีลักษณะเป็นลำดับเลขคณิต (arithmetic progression) ชุดใดๆ สามารถนำไปสร้างจัตุรัสกลด้วยวิธีดังกล่าวได้ นอกจากนี้วิธีดังกล่าวยังใช้ได้สำหรับการสร้างจัตุรัสกล โดยใช้ลำดับเลขคณิต ชุดที่มีการข้ามจำนวนเป็นระยะเท่าๆ กัน เช่น มีการข้ามทุกๆ 3 จำนวน หลักเกณฑ์สำคัญ คือ ระยะในการข้ามจำนวนควรเท่ากับจำนวนแถวของจัตุรัสกล เช่น ถ้าเป็นจัตุรัสกลที่มี 3 แถว ลำดับเลขคณิต ชุดที่นำมาสร้างจัตุรัสกลได้ ต้องเป็นลำดับเลขคณิตชุดที่มีการข้ามทุกๆ 3 จำนวน เป็นต้น สำหรับจำนวนที่ข้ามจะเป็นเท่าไรก็ได้ เช่น 1, 2, 3, ...

ตัวอย่าง การสร้างจัตุรัสกลขนาด 3 × 3 โดยใช้ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้ คือ 2, 5, 8, (11, 14), 17, 20, 23, (26, 29), 32,

35, 38 ลำดับเลขคณิตชุดนี้เป็นตัวอย่างลำดับเลขคณิตชุดที่มีการข้ามจำนวน 2 จำนวน ในทุก ๆ 3 จำนวน วิธีการสร้างจัตุรัสกลแสดงให้เห็นได้ ดังนี้



5	32	23
38	20	2
17	8	35

จัตุรัสกลซึ่งประกอบด้วยชุดของจำนวน
ที่มีการข้ามจำนวน 2 จำนวน ในทุก ๆ 3 จำนวน

ตัวอย่าง การสร้างจัตุรัสกลขนาด 5 × 5 โดยกำหนดลำดับเลขคณิตให้เป็นการข้ามจำนวน 3 จำนวน ในทุก ๆ 5 จำนวน ดังนี้ คือ

2, 5, 8, 11, 14, (17, 20, 23), 26, 29, 32, 35, 38, (41, 44, 47), 50, 53, 56, 59, 62, (65, 68, 71), 74, 77, 80, 83, 86, (89, 92, 95), 98, 101, 104, 107, 110 เมื่อนำลำดับเลขคณิตนี้สร้างจัตุรัสกลขนาด 5 × 5 ได้ ดังนี้

				14				
			11		38			
		8		35		62		
	5		32		59		86	
2		29		56		83		110
	26		53		80		107	
		50		77		104		
			74		101			
				98				

8	74	35	101	62
86	32	98	59	5
29	110	56	2	83
107	53	14	80	26
50	11	77	38	104

จัตุรัสกลซึ่งประกอบด้วยชุดของจำนวน
ที่มีการข้ามจำนวน 3 จำนวนในทุก ๆ 5 จำนวน

ข้อสังเกตประการหนึ่งที่ได้จากการศึกษาจัตุรัสกลดังกล่าว คือ รูปบนสุดประกอบด้วย ลำดับเลขคณิตสองชุด ชุดแรกเริ่มจากมุมซ้ายสุดเฉียงขึ้นไปด้านบน ซึ่งประกอบด้วย กลุ่มของตัวเลข 5 กลุ่ม ดังต่อไปนี้ คือ

(2, 5, 8, 11, 14), (26, 29, 32, 35, 38), (50, 53, 56, 59, 62), (74, 77, 80, 83, 86) และ (98, 101, 104, 107, 110)

ส่วนชุดที่สองเริ่มจากมุมซ้ายสุดเฉียงลงมาด้านล่าง ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มของตัวเลข 5 กลุ่มเช่นกัน คือ

(2, 26, 50, 74, 98,) (5, 29, 53, 77, 101), (8, 32, 56, 80, 104), (11, 35, 59, 83, 107) และ (14, 38, 62, 86, 110)

ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า วิธีใส่ตัวเลขเพื่อสร้างจัตุรัสกลเป็นไปได้ 2 วิธี คือ ใส่ตัวเลขเรียงจากมุมซ้ายสุดเฉียงขึ้นไปด้านบน หรือใส่ตัวเลขเรียงจากมุมซ้ายสุดเฉียงลงมาด้านล่าง ถ้าใช้วิธีแรกให้เขียนตัวเลขชุดแรกทีละกลุ่มลงในแต่ละแถวเรียงกันไป ถ้าใช้วิธีหลังให้นำตัวเลขในแต่ละกลุ่มที่อยู่อันดับที่เดียวกันใส่ในแถวเดียวกัน เช่น แถวแรกใส่ตัวเลขที่อยู่อันดับที่ 1 ของแต่ละกลุ่ม ซึ่งได้แก่ 2, 26, 50, 74 และ 98 แถวสุดท้ายก็ใส่ตัวเลขที่อยู่อันดับที่ 5 ในแต่ละชุด ได้แก่ 14, 38, 62, 86, 110

การสร้างจัตุรัสกลของโธมัส แอตคินสัน

โธมัส แอตคินสัน (Tomas Atkinson) กล่าวว่าวิธีสร้างจัตุรัสกลโดยใช้ลำดับเลขคณิตเป็นวิธีการที่มีระบบ เขาจึงเสนอแนะวิธีสร้างจัตุรัสกลอีกวิธีหนึ่ง โดยใช้หลักการคล้ายๆ กัน แต่เริ่มจากการเลือกผลบวกแต่ละแนวก่อน ดังแสดงตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกลขนาด 5 × 5 ให้เห็นได้ ดังนี้

1. *กำหนดผลบวกแต่ละแนว* สมมติว่าเป็น 100 ตัวเลขในช่องกลางของจัตุรัสกล หาได้จากนำ 5 ไปหาร 100 ซึ่งเท่ากับ 20

2. เลือกจำนวนที่เป็นผลต่างระหว่างจำนวนสองจำนวนที่เรียงกันอยู่ในแนวเส้นทแยงมุม *สมมติว่าเลือก 7 เป็นผลต่างระหว่างจำนวนที่เรียงกันอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง และ 2 เป็นผลต่างระหว่างจำนวนที่เรียงกันอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่ง* ต่อจากนั้นให้นำตัวเลขไปใส่ในจัตุรัสกลตามแนวเส้นทแยงมุมทั้งสอง ซึ่งจะเป็นดังนี้

6				24
	13		22	
		20		
	18		27	
16				34

ผลต่างระหว่างจำนวนที่เรียงกันอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมนี้ คือ 2

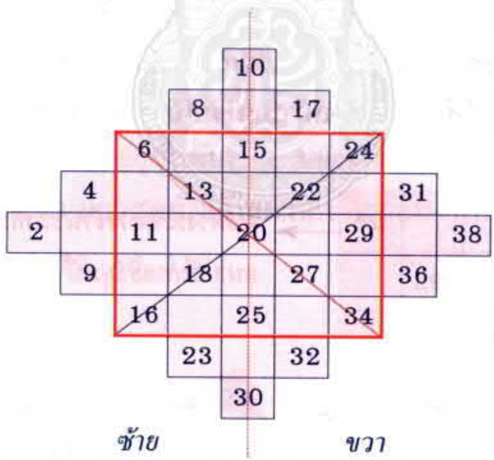
ผลต่างระหว่างจำนวนที่เรียงกันอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมนี้ คือ 7

3. การหาตัวเลขเพื่อใส่ในช่องว่างที่เหลือ ทำได้โดยการหาชุดของลำดับเลขคณิต 4 ชุด ที่เรียงกันในแนวขนานกับเส้นทแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่ง

สมมติว่า ใช้ชุดจำนวนที่อยู่บนเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้น ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข คือ 6, 13, 20, 27, 34 และ 16, 18, 20, 22, 24 เป็นหลัก ชุดของจำนวนที่อยู่ด้านขวามือของเส้นทแยงมุมนี้มีชุดของจำนวนที่มากขึ้น 2 ชุด โดยจำนวนแรกในแต่ละชุดเพิ่มขึ้น 2 คือ 22, 24 จำนวนในแต่ละชุดถัดไปเพิ่มขึ้นทีละ 7 คือ 27, 34

ในทำนองเดียวกันมีชุดของจำนวนที่อยู่ด้านซ้ายมือของเส้นทแยงมุมนี้ 2 ชุด แต่เป็นชุดของจำนวนที่น้อยลง จำนวนแรกในแต่ละชุดลดลง 2 คือ 16, 18 จำนวนแต่ละชุดถัดไปลดลงทีละ 7 คือ 6, 13

ผลการกระทำตามวิธีที่เสนอแนะเป็นดังนี้



4. ย้ายตัวเลขที่อยู่ภายนอกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้เข้าไปอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้วิธีเดียวกันกับวิธีที่เสนอโดยแคปปอน คือ จากภายนอกรูปไปยังภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่ด้านตรงกันข้าม เมื่อย้ายเสร็จแล้วจะเกิดเป็นจัตุรัสกล ดังนี้

				10				
			8		17			
		6		15		24		
	4		13		22		31	
2		11		20		29		38
	9		18		27		36	
		16		25		34		
			23		32			
				30				

6	23	15	32	24
31	13	30	22	4
11	38	20	2	29
36	18	10	27	9
16	8	25	17	34

จัตุรัสกลขนาด 5 × 5 สร้างตามแนวคิดของแอตคินสัน

การสร้างจัตุรัสกลของคีเปส

คีเปส (Keepes) เสนอแนะวิธีสร้างจัตุรัสกลอีกวิธีหนึ่ง โดยการนำเรื่องระบบจำนวนมาประยุกต์ใช้ร่วมกับความคิดเชิงตรรกศาสตร์ ดังจะอธิบายด้วยวิธีการให้ดูตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกลขนาด 3×3 ซึ่งประกอบด้วยชุดของจำนวนที่กำหนดให้ คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ลำดับขั้นตอนในการสร้างมีดังต่อไปนี้

1. หาผลบวกกลด้วยการนำทุกจำนวนรวมกัน หารด้วยจำนวนแถว

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

2. พิจารณาจำนวนคู่ และจำนวนคี่ที่มีอยู่ในชุดของจำนวนที่กำหนดให้ จะเห็นได้ว่ามีจำนวนคี่ 5 จำนวน ได้แก่ 1, 3, 5, 7, 9 และจำนวนคู่ 4 จำนวน คือ 2, 4, 6, 8

เนื่องจากแต่ละแถวในจัตุรัสกล ประกอบด้วยจำนวน 3 จำนวน และมีผลบวกเป็น 15 ซึ่งเป็นจำนวนคี่เสมอ ดังนั้นแสดงว่าจำนวนทั้งสามมีโอกาสเป็นไปได้ 2 กรณี คือ เป็นจำนวนคี่ทั้งหมด หรือจำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคี่ (โอกาสที่จะเป็นจำนวนคี่สองจำนวนเป็นไปไม่ได้ เพราะจะทำให้ผลบวกกลายเป็นจำนวนคู่) รูปแบบของจัตุรัสกลที่จะก่อให้เกิด 2 กรณีดังกล่าว มีอยู่แบบเดียว ดังแสดงให้เห็น ได้ดังนี้

คู่	คี่	คู่
คี่	คี่	คี่
คู่	คี่	คู่

3. ต่อไปให้พิจารณาชุดของจำนวนคี่ คือ 1, 3, 5, 7, 9 จะเห็นได้ว่าจำนวนที่รวมกันได้ 15 แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ 1, 5, 9 และ 3, 5, 7 ดังนั้น จำนวนเหล่านี้จึงต้องอยู่แถวกลางทั้งในแนวนอนและแนวตั้งของรูปสี่เหลี่ยม โดย 5 ต้องอยู่ในช่องกลางสุดของรูป เพราะเป็นตัวร่วมของจำนวนที่ต้องอยู่ในแถวเดียวกัน คือ 1 กับ 9 และ 3 กับ 7 ความน่าจะเป็นของจำนวนดังกล่าวเป็นไปได้ ดังนี้

	1	
3	5	7
	9	

	1	
7	5	3
	9	

	3	
9	5	1
	7	

	3	
1	5	9
	7	

	9	
7	5	3
	1	

	9	
3	5	7
	1	

	7	
1	5	9
	3	

	7	
9	5	1
	3	

4. ต่อไปให้พิจารณาแถวแนวนอนหรือแนวตั้งที่มี 9 อยู่ด้วย เพื่อให้ผลบวกในแถวแนวนอนหรือแนวตั้งนั้นเท่ากับ 15 อีก 2 จำนวนที่ต้องเลือกจากกลุ่ม 2, 4, 6, 8 มาใส่ต้องเป็น 2 กับ 4 ต้องใส่ 2 ในแถวแนวนอนหรือแนวตั้งเดียวกับ 7 เพราะถ้าใส่ในแถวแนวนอนหรือแนวตั้งเดียวกับ 3 ก็จะรวมกันเป็น 5 แสดงว่าอีกจำนวนหนึ่งต้องเป็น 10 ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ 10 ไม่ใช่จำนวนที่กำหนดให้

5. ช่องว่างที่เหลือสามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยการบวกและลบ โดยอาศัยสมบัติของจัตุรัสกลนี้ คือ ผลบวกแต่ละแถวเท่ากับ 15 เมื่อคำนวณเสร็จ จะได้จัตุรัสกลที่มีลักษณะ ดังภาพ

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ในกรณีที่ชุดของจำนวนที่กำหนดให้แตกต่างไปจากที่ยกตัวอย่างมาแล้ว ให้ใช้ความคิดเชิงตรรกศาสตร์ทำนองเดียวกัน เช่น ชุดของจำนวนกำหนดให้ คือ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ซึ่งเป็นชุดของจำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนคู่ 5 จำนวน คือ 2, 4, 6, 8, 10 และจำนวนคี่ 4 จำนวน คือ 3, 5, 7, 9 การเลือกว่าช่องใดจะต้อง

ใส่จำนวนคู่หรือคี่ต้องต่างไปจากเดิม เพราะผลบวกแต่ละแถวเป็นจำนวนคู่ หลังจากใช้กระบวนการคิดแบบเดียวกัน รูปแบบของจัตุรัสกล และจัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้มีลักษณะ ดังภาพ

คี่	คู่	คี่
คู่	คู่	คู่
คี่	คู่	คี่

9	4	5
2	6	10
7	8	3

การสร้างจัตุรัสกล ที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคู่

การสร้างจัตุรัสกลที่มี 4 แถว

การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 6, 10, 14, ...

การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 8, 12, 16, ...

5. การสร้างจัตุรัสกล
(ที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคู่)

การสร้างจัตุรัสกลที่มี 4 แถว

การสร้างจัตุรัสกลที่มี 4 แถว ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกเรียงกัน ตั้งแต่ 1 ถึง 16 ทำได้ง่าย โดยเขียนตัวเลข 1 - 16 เรียงกัน เริ่มจากมุมบนซ้ายไปทางขวา และเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก เมื่อหมดแถวให้เริ่มต้นแถวใหม่ในลักษณะเดียวกัน จากนั้นอาจเลือกดำเนินการตามวิธีใดวิธีหนึ่งใน 3 วิธีต่อไปนี้ ก็จะได้จัตุรัสกลตามต้องการ

วิธีที่ 1 ให้สลับที่ตัวเลขในตำแหน่งต่าง ๆ คือ

มุมซ้ายบน กับมุมขวาล่าง คือ 1 กับ 16

มุมขวาบน กับมุมซ้ายล่าง คือ 4 กับ 13

ตรงกลาง กับตรงกลาง คือ 6 กับ 11 และ 7 กับ 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

วิธีที่ 2 ให้ผันกลับ (reverse) ตัวเลขทุกตำแหน่งในแนวเส้นทแยงมุมแต่ละเส้น

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

วิธีที่ 3 ให้สลับที่ตัวเลขตามตำแหน่งที่กำหนดให้ คือ
แถวที่ 1 ช่องที่ 2 กับ แถวที่ 4 ช่องที่ 3 คือ 2 กับ 15 ตามลำดับ
แถวที่ 1 ช่องที่ 3 กับ แถวที่ 4 ช่องที่ 2 คือ 3 กับ 14 ตามลำดับ
แถวที่ 2 ช่องที่ 1 กับ แถวที่ 3 ช่องที่ 4 คือ 5 กับ 12 ตามลำดับ
แถวที่ 2 ช่องที่ 4 กับ แถวที่ 3 ช่องที่ 1 คือ 8 กับ 9 ตามลำดับ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 6, 10, 14, ...

ราล์ฟ สเตรคี (Ralph Strachey) เป็นผู้เสนอวิธีการสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถว ตามสูตร $n = 2(2m + 1)$

เมื่อ m คือ จำนวนเต็มบวกใดๆ เช่น 1, 2, 3, ... ดังนั้น n ก็จะเป็น 6, 10, 14, ... ลำดับขั้นตอนในการสร้างมีดังนี้

A	C
D	B

1. แบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน สมมติว่า คือ A, B, C, D

2. ในส่วน A ให้สร้างจัตุรัสกลด้วยวิธีของ เดอร์ ลา ลูแบร์ โดยใช้ 1 ถึง u^2 เมื่อ $u = \frac{n}{2}$, $n = 6, 10, 14, \ldots$

3. ในส่วน B, C, D ให้สร้างจัตุรัสกลด้วยวิธีเดียวกัน โดยใช้จำนวน ดังนี้

ส่วน B ใช้ $u^2 + 1$ ถึง $2u^2$

ส่วน C ใช้ $2u^2 + 1$ ถึง $3u^2$

ส่วน D ใช้ $3u^2 + 1$ ถึง $4u^2$

4. ให้นำตัวเลขที่อยู่ในส่วน A และ D ที่อยู่ในตำแหน่งที่สอดคล้องกันสลับที่กัน ตัวเลขที่ต้องสลับที่กัน มีดังนี้

แถวกลาง (แนวนอน)	ตัวเลขที่ต้องสลับที่กัน เริ่มจากตัวเลขในช่องที่สองนับจากซ้ายสุด จำนวนช่องในแถวกลางที่ต้องสลับที่กัน เท่ากับ m
แถวอื่นๆ (แนวนอน)	ตัวเลขที่ต้องสลับที่กัน เริ่มจากตัวเลขในช่องซ้ายสุด จำนวนช่องในแต่ละแถวที่ต้อง สลับที่กัน เท่ากับ 2m

5. ให้นำตัวเลขที่อยู่ในส่วน C และ B ที่อยู่ในตำแหน่งที่สอดคล้องกันสลับที่กัน ตัวเลขที่ต้องสลับที่กัน คือ ตัวเลขทุกตัวในแถว แนวตั้งที่ m - 1 นับจากขวามือสุด

ตัวอย่าง การสร้างจัตุรัสกล ตามขั้นตอน ที่กล่าวมาแล้ว

ให้ $m = 1$

เพราะฉะนั้น $n = 2(2 \times 1 + 1)$

$= 6$

แสดงว่าจัตุรัสกลที่เกิดขึ้นมีขนาด 6×6

ต่อไปหาตัวเลขไปใส่ในแต่ละส่วนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการหา u

จากสูตร $u = \frac{n}{2}$ ซึ่งทำให้ได้ $u = \frac{6}{2} = 3$

ตัวเลขในส่วน A คือ 1 ถึง u^2 หรือ 1 ถึง 9

ตัวเลขในส่วน B คือ $u^2 + 1$ ถึง $2u^2$ หรือ 10 ถึง 18

ตัวเลขในส่วน C คือ $2u^2 + 1$ ถึง $3u^2$ หรือ 19 ถึง 27

ตัวเลขในส่วน D คือ $3u^2 + 1$ ถึง $4u^2$ หรือ 28 ถึง 36

เมื่อนำตัวเลขที่หาได้ไปใส่ในแต่ละส่วนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามวิธีของ เดอ ลา ลูแบร์ จะได้ดังนี้

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

ขั้นต่อไปนี้คือการสลับที่ตัวเลขที่อยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ ตามคำอธิบายในข้อ 4 และ 5 ตำแหน่งของตัวเลขในส่วน A และ D ที่ต้องสลับกัน แสดงให้เห็นดังในภาพ สำหรับในกรณีนี้ตัวเลขในส่วน C และ B ไม่ต้องสลับที่กัน เพราะตัวเลขในแถวแนวตั้งที่ต้องสลับที่กัน คือ m - 1 ซึ่งเท่ากับ 0 เพราะ m = 1

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

หลังจากการสลับที่ตัวเลขในตำแหน่งต่าง ๆ แล้ว ผลที่ได้ คือจัตุรัสกล ดังนี้

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

เพื่อทบทวนความเข้าใจ จึงขอแสดงลำดับขั้นตอนในการสร้างจัตุรัสกล ตามวิธีดังกล่าวมาแล้วอีกครั้งหนึ่ง แต่ครั้งนี้เป็นการแสดงด้วยภาพเพียงอย่างเดียว ภาพที่แสดงเป็นการสร้างจัตุรัสกลขนาด 10×10 นั่นคือ เมื่อ $m = 2$ ภาพซ้ายมือแสดงตำแหน่งของตัวเลขที่ต้องสลับที่กัน ภาพขวามือแสดงจัตุรัสกลที่เสร็จสมบูรณ์แล้ว

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

การสร้างจัตุรัสกลตามแนวคิดของสเตรคี

การสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 8, 12, 16,...

การสร้างจัตุรัสกลตามวิธีที่เสนอโดยสเตรคี สร้างได้เฉพาะจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 6, 10, 14, ... เท่านั้น ส่วนจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็นคู่อื่นๆ ไม่สามารถสร้างได้ จึงได้มีผู้พยายามคิดค้นหาวิธีสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็นจำนวนคู่อื่นๆ บุคคลผู้หนึ่งในจำนวนนี้ คือ โฮเวิร์ด อีฟส์ (Howard Eves) ซึ่งเสนอแนะวิธีสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 4 และ พหุคูณของ 4 ได้แก่ 8, 12, 16, ... หรือพูดอีกอย่างหนึ่งหมายถึง วิธีสร้างจัตุรัสกลที่มีจำนวนแถวเป็น 4n เมื่อ n คือ 1, 2, ... ลำดับขั้นตอนในการสร้าง อธิบายด้วยการแสดงตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกลขนาด 4×4 ดังนี้

1. ให้ลากเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วเติมตัวเลข 1 - 15 ลงช่องต่างๆ โดยให้ใส่ตัวเลขเฉพาะช่องที่ไม่มีเส้นทแยงมุมตัดผ่าน การเริ่มต้นใส่ตัวเลขให้เริ่มจากมุมบนด้านซ้ายไปทางขวา โดยเรียงลำดับจากน้อยไปมาก เมื่อหมดแถวให้เริ่มต้นแถวใหม่ในลักษณะ เดียวกัน ดังแสดงให้เห็นได้ ดังนี้

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

2. หมุนจัตุรัสตามเส้นทแยงมุมดังภาพแล้วให้เติมตัวเลขลงในช่องทุกช่องที่เส้นทแยงมุมตัดผ่าน โดยเริ่มต้นจากมุมล่างด้านขวาเรียงไปทางซ้ายตามเส้นทแยงมุม เมื่อหมดแถวให้เริ่มต้นแถวใหม่ในลักษณะเดียวกัน ดังภาพ

16			13
	11	10	
	7	6	
4			1

3. เมื่อนำตัวเลขของจัตุรัสในข้อ 1 และข้อ 2 มาเขียนรวมกัน จะเกิดเป็นจัตุรัสกล ดังนี้

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

จัตุรัสกลที่เกิดขึ้นโดยใช้วิธีดังกล่าวนี้มีความแตกต่างจากจัตุรัสกลของ ดูเรอร์ เพียงเล็กน้อย คือ ถ้าสลับที่ระหว่างแถวแนวตั้งที่ 2 และ 3 ก็จะได้จัตุรัสกลเช่นเดียวกับจัตุรัสกลของ ดูเรอร์

การสร้างจัตุรัสกลด้วยวิธีการนี้ สามารถนำไปประยุกต์สร้างจัตุรัสกลอื่นๆ ที่มีขนาด 4n ได้ ดังตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกลขนาด 8×8 ดังนี้

1. เติมตัวเลขในช่องต่าง ๆ ทุกช่องโดยใส่ตัวเลขเฉพาะช่องที่ไม่ถูกตัดผ่านโดยเส้นทแยงมุม

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

2. หมุนจัตุรัสตามเส้นทแยงมุมดังภาพ แล้วใส่ตัวเลขในช่องทุกช่องที่ถูกตัดผ่านโดยเส้นทแยงมุม

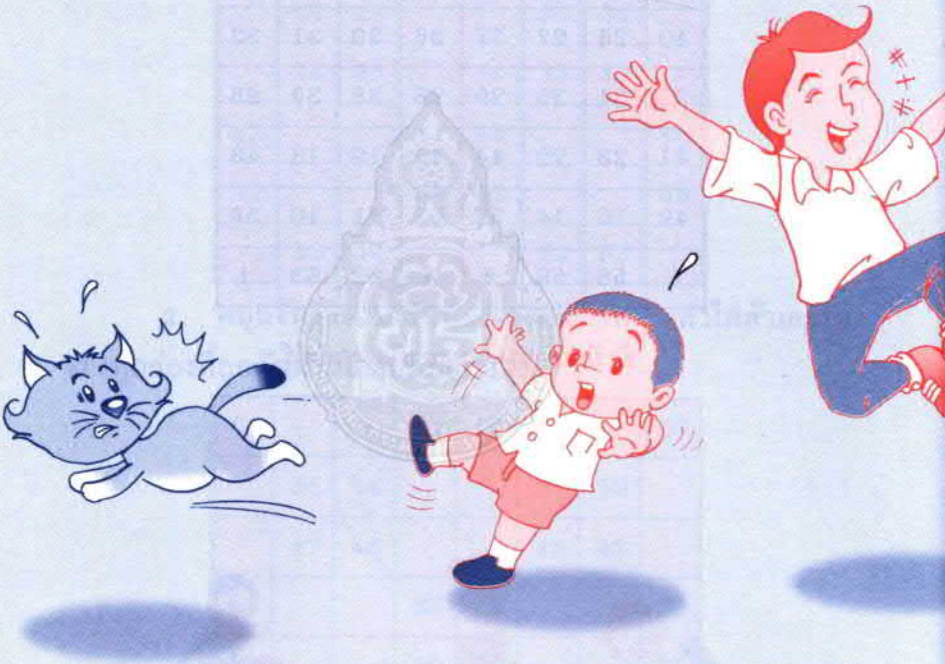
64			61	60			57
	55	54			51	50	
	47	46			43	42	
40			37	36			33
32			29	28			25
	23	22			19	18	
	15	14			11	10	
8			5	4			1

3. นำตัวเลขจาก 2 ภาพข้างต้นมาเขียนรวมกันได้เป็นจัตุรัสกล

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

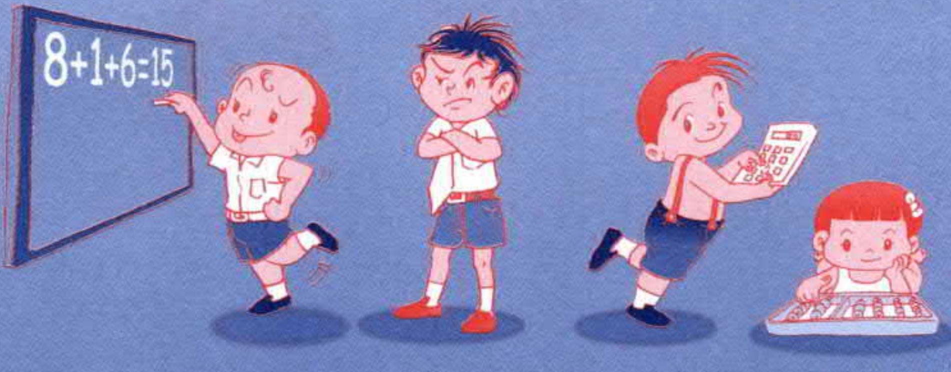
จัตุรัสกลสร้างตามแนวคิดของอีฟส์

6. กิจกรรม



กิจกรรมที่ 1

ให้เติม 1 - 9 ลงในแต่ละช่อง โดยไม่ให้ซ้ำกันเลย เมื่อนำจำนวน ทุกจำนวนแต่ละแถวในแนวนอน แนวตั้ง หรือแนวเส้นทแยงมุมมารวมกัน ผลบวกจะได้ 15 เสมอ



กิจกรรมที่ 2

1	12	14	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	5	3	10

.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

ให้ลากเส้นต่อจุดสองจุดในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทางขวามือเข้าด้วยกัน โดยให้จุดปลายทั้งสองของเส้นอยู่ตรงตำแหน่งของจำนวน (ดูจากรูปจัตุรัสซ้ายมือ) ที่ทำให้ผลบวก เป็น 17

เมื่อทำเสร็จแล้ว ให้สังเกตลวดลายที่เกิดขึ้น

...+...= 17

กิจกรรมที่ 3

ให้สร้างจัตุรัสกล โดยการเติมตัวเลขลงในช่องว่าง เพื่อทำให้ผลบวกของทุกจำนวนในแต่ละแถว ตามแนวนอน แนวตั้ง หรือแนวเส้นทแยงมุม เป็น 369

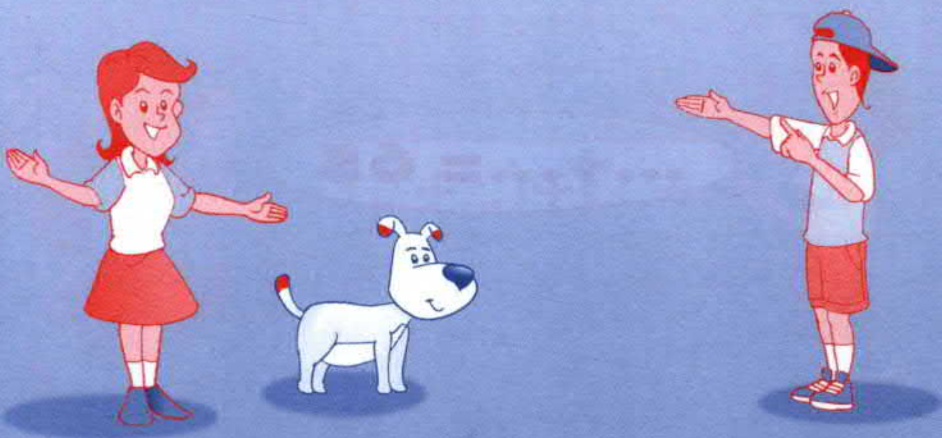
77	58		20	1	72	53	34	15
6	68	49	30	11		63	44	25
16	78	59	40	21	2		54	35
26	7	69		31	12	74	55	45
	17	79	60	41	22	3	65	46
37		8	70	51	32	13		
47	28	18	80	61	42	23	4	66
57	38	19	9	71	52	33	14	76
67	48	29	10		62	43	24	5

กิจกรรมที่ 4

กำหนดตัวเลข 6 - 21 วางเรียงกัน ดังรูป

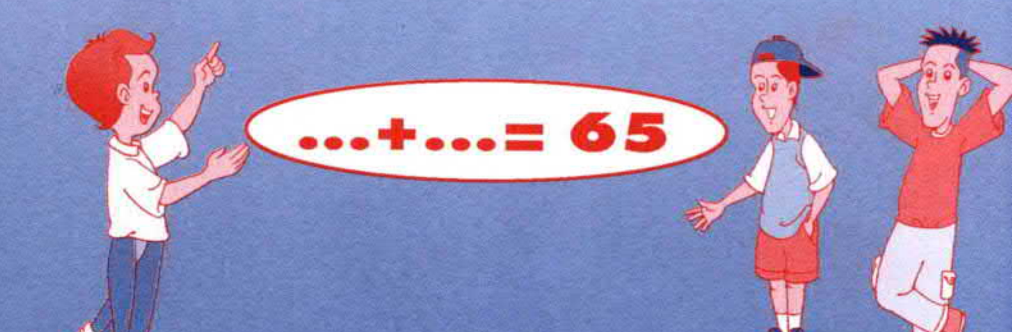
6	7	8	9
10	11	12	13
14	15	16	17
18	19	20	21

ให้สร้างจัตุรัสกล โดยการสลับที่ตัวเลขที่กำหนดให้



กิจกรรมที่ 5

กำหนดตัวเลข 1 - 25 ให้พยายามสร้างจัตุรัสกล ที่มีผลบวกของทุกจำนวนในแต่ละแถว ตามแนวนอน แนวตั้ง หรือแนวเส้นทแยงมุม เป็น 65



กิจกรรมที่ 6

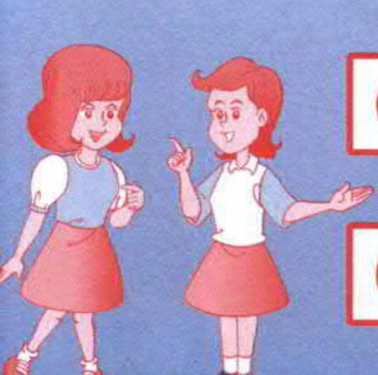
1	14	12	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	3	5	10

จัตุรัสกลข้างบนนี้มีสมบัติพิเศษเพิ่มเติมขึ้นจากจัตุรัสกลโดยทั่วไป คือ เมื่อนำจำนวนที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2 × 2 สองรูปที่วางเรียงต่อกันอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหญ่มารวมกัน ผลบวกจะได้เท่ากับ 34

สมบัติพิเศษดังกล่าว แสดงให้เห็นได้ ดังนี้

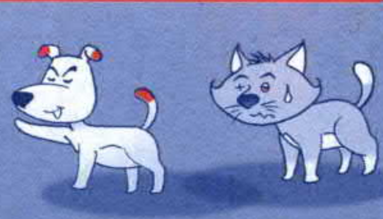
(...... + ...) + (...... + ...) = 34

(...... + ...) + (...... + ...) = 34



(...+...)+(...+...)=34

(...+...)+(...+...)=34



กิจกรรมที่ 7

จัตุรัสกลข้างล่างนี้มีสมบัติพิเศษ คือ ผลบวกของจำนวนที่อยู่ตามแนวเส้นทแยงมุมทั้งสอง เท่ากับผลบวกของจำนวนที่เหลือทั้งหมด

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

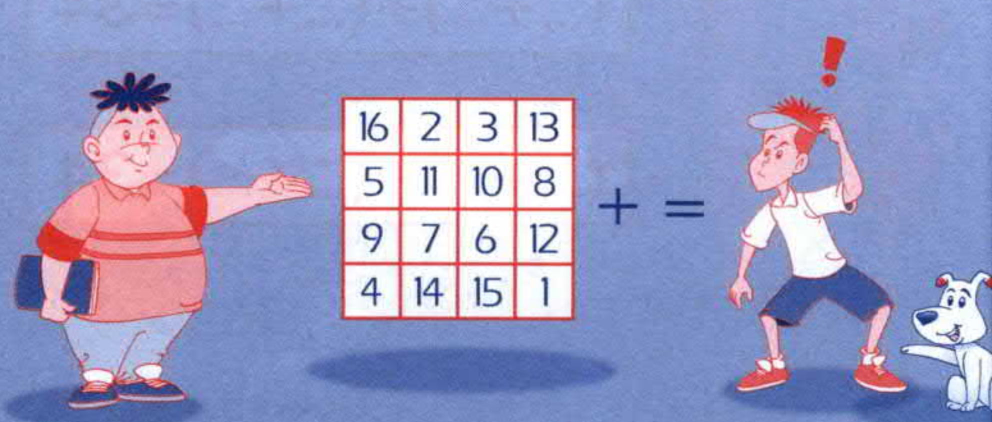
สมบัติดังกล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นได้ ดังนี้

ผลบวกของจำนวนเลขที่อยู่ตามแนวเส้นทแยงมุมทั้งสอง

...... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... = ...

ผลบวกของจำนวนเลขที่เหลือทั้งหมด

...... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... = ...

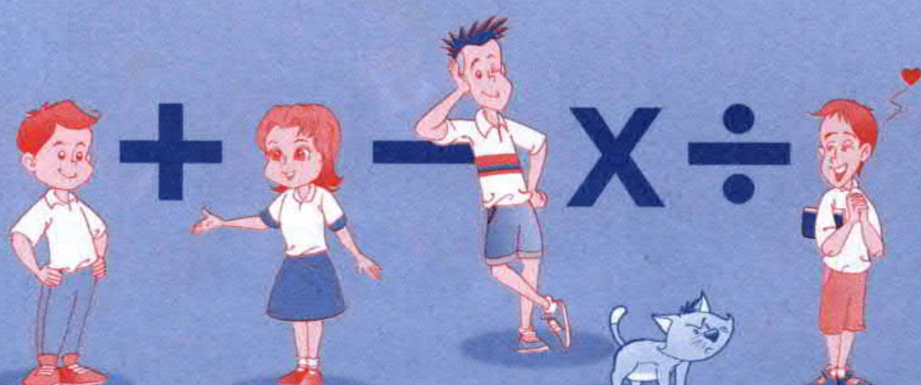


กิจกรรมที่ 8

เราสามารถสร้างจัตุรัสกลขึ้นใหม่ได้ โดยการบวก ลบ คูณ หรือหารจำนวนในจัตุรัสกลที่กำหนดให้ ด้วยจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ข้างล่างนี้เป็นจัตุรัสกลที่กำหนดให้ จงทำกิจกรรม 8.1, 8.2 และ 8.3 เพื่อตรวจสอบข้อความดังกล่าวแล้วข้างต้น

25	11	12	22
14	20	19	17
18	16	15	21
13	23	24	10



กิจกรรมที่ 8.1

ให้นำ 5 ลบออกจากจำนวนทุกจำนวนในจัตุรัสกลที่กำหนดให้ไว้ในกิจกรรมที่ 8 เมื่อทำเรียบร้อยแล้ว โปรดตรวจสอบว่าผลที่ได้เป็นจัตุรัสกลหรือไม่

ผลบวกในแต่ละแถว คือ ......

แสดงว่า ☐ เป็นจัตุรัสกล

☐ ไม่เป็นจัตุรัสกล

กิจกรรมที่ 8.2

ให้นำ 2 คูณกับจำนวนทุกจำนวนในจัตุรัสกลที่กำหนดให้ไว้ในกิจกรรมที่ 8 เมื่อทำเสร็จแล้ว โปรดตรวจสอบว่าผลที่ได้เป็นจัตุรัสกลหรือไม่

ผลบวกในแต่ละแถว คือ ......

แสดงว่า ☐ เป็นจัตุรัสกล

☐ ไม่เป็นจัตุรัสกล

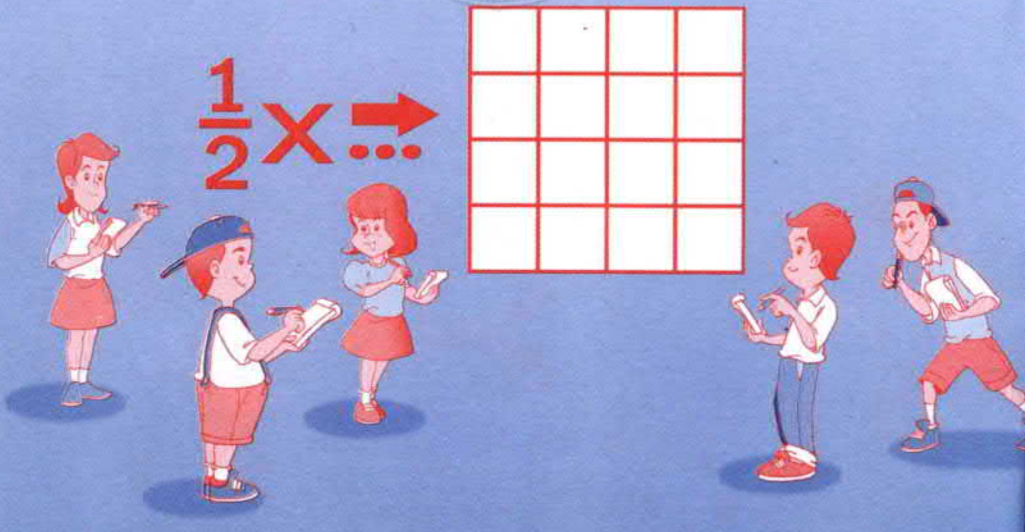
กิจกรรมที่ 8.3

ให้นำ $\frac{1}{2}$ คูณกับจำนวนทุกจำนวนในรูปจัตุรัสกลที่กำหนดให้ไว้ในกิจกรรมที่ 8 เมื่อทำเสร็จแล้ว โปรดตรวจสอบว่าผลที่ได้เป็นจัตุรัสกลหรือไม่

ผลบวกในแต่ละแถว คือ ......

แสดงว่า ☐ เป็นจัตุรัสกล

☐ ไม่เป็นจัตุรัสกล

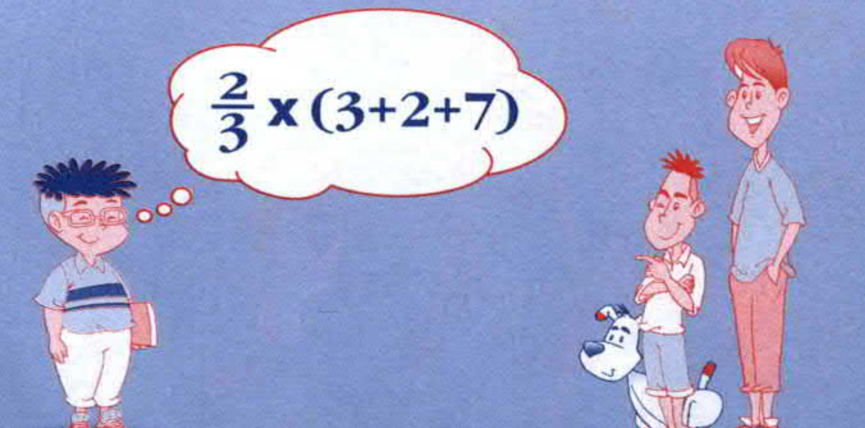


กิจกรรมที่ 9

จากจัตุรัสกลที่กำหนดให้ข้างล่างนี้

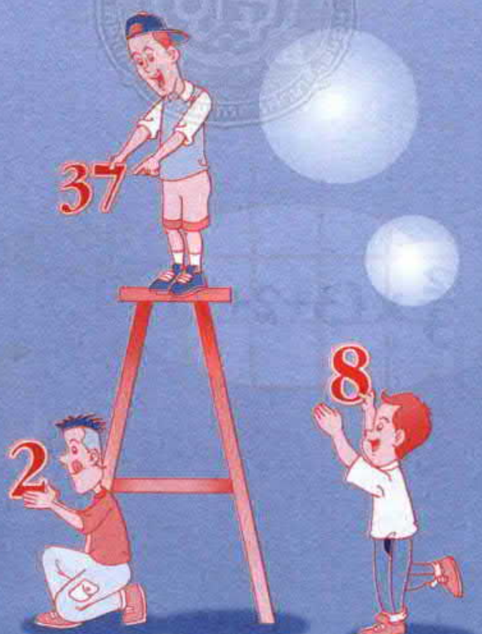
3	2	7
8	4	0
1	6	5

ให้สร้างจัตุรัสกลขึ้นใหม่ โดยให้จำนวนในแต่ละช่องของจัตุรัสกลใหม่ เท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของผลบวกในแต่ละแถวของจัตุรัสกลเดิมลบด้วยจำนวนในแต่ละช่องของจัตุรัสกลเดิม



กิจกรรมที่ 10

ให้สร้างจัตุรัสกล โดยใช้ตัวเลข 2 - 37



กิจกรรมที่ 11

ให้สร้างจัตุรัสกล โดยใช้ชุดของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คือ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17

กิจกรรมที่ 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

จากตารางร้อยที่กำหนดให้ จงสร้างจัตุรัสกลตามขั้นตอน ต่อไปนี้

ก. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมรอบตัวเลข 16 ตัว ในตารางร้อย

ข. นำตัวเลขทั้ง 16 ตัว มาสลับที่กันจนเกิดเป็นจัตุรัสกล

กิจกรรมที่ 13

ให้สร้างจัตุรัสกล โดยใช้ชุดของจำนวนทั้ง 5 ชุด ที่กำหนดให้

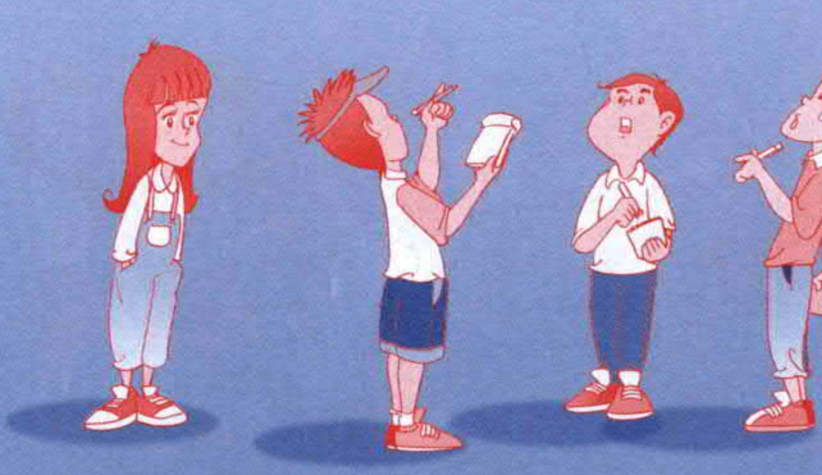
(2, 5, 8, 11, 14)

(15, 18, 21, 24, 27)

(28, 31, 34, 37, 40)

(41, 44, 47, 50, 53)

(54, 57, 60, 63, 66)



กิจกรรมที่ 14

1	14	12	7
8	11	13	2
15	4	6	9
10	5	3	16

จัตุรัสกลข้างบนนี้มีสมบัติพิเศษแตกต่างจากจัตุรัสกลอื่น ๆ คือ เมื่อนำจำนวนใดจำนวนหนึ่งในจัตุรัสกลมารวมกับอีกจำนวนหนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางในแนวเส้นตรงเดียวกัน เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน ผลบวกจะเท่ากับ 17 เสมอ

จงตรวจสอบสมบัติดังกล่าวแล้วข้างต้น

...... + ... = 17

...... + ... = 17

...... + ... = 17

...... + ... = 17

...... + ... = 17

...... + ... = 17

...... + ... = 17

...... + ... = 17

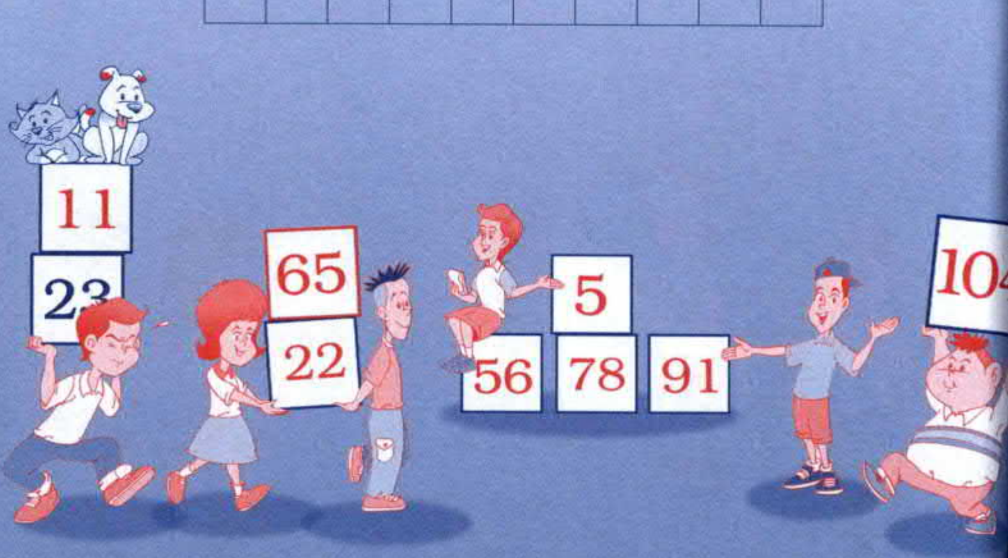
กิจกรรมที่ 15

ให้สร้างจัตุรัสกล โดยใช้ตัวเลขที่กำหนดให้ คือ

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80

กิจกรรมที่ 16

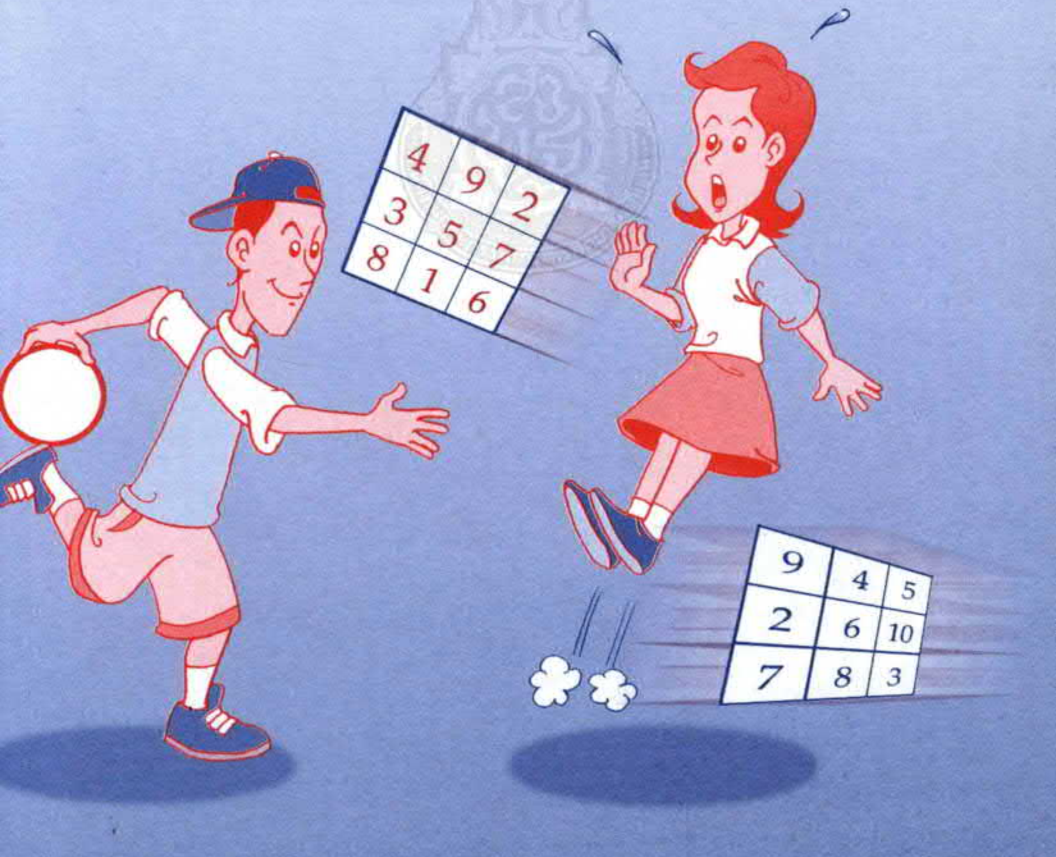
ให้สร้างจัตุรัสกลขนาด 10×10 โดยใช้ตัวเลข 5 - 104



กิจกรรมที่ 17

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

จากจัตุรัสกลที่กำหนดให้ข้างบนนี้ จงลากเส้นตรงต่อจุดเรียงตามลำดับจำนวน แล้วสังเกตลวดลายที่เกิดขึ้น



กิจกรรมที่ 18

ให้สร้างจัตุรัสกล ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ใช้ตัวเลข 1 - 9 สร้างจัตุรัสขนาด 3×3 ดังตัวอย่างภาพ

7	4	1
8	5	2
9	6	3

2. บิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ดังภาพ

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

3. สลับที่จำนวนคี่ที่อยู่ตรงกันข้าม ซึ่งจะได้ดังนี้

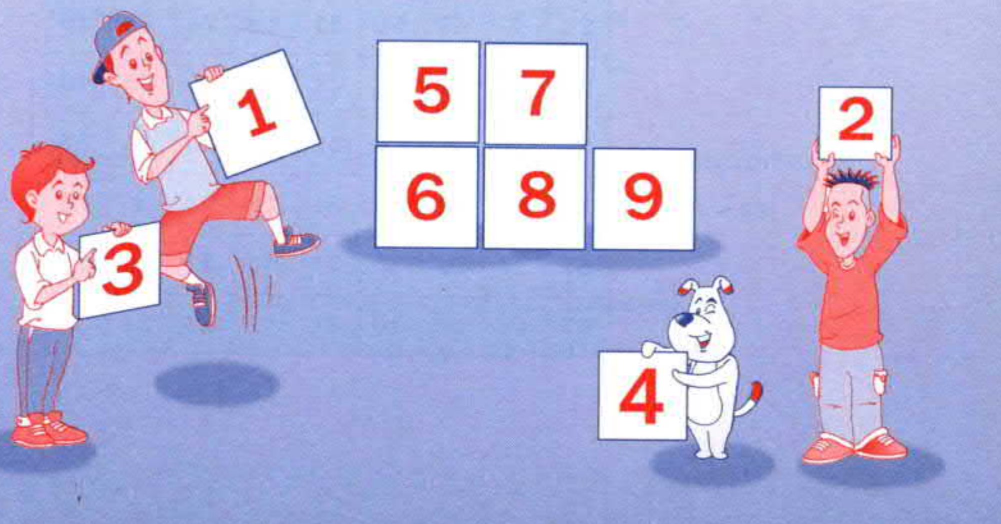
		9		
	4		2	
3		5		7
	8		6	
		1		

4. บีบรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ทางด้านบนและล่างให้เปลี่ยนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะทำให้ได้จัตุรัสกล ดังภาพ

4	9	2
3	5	7
8	1	6

ต่อไปขอให้สร้างจัตุรัสกลด้วยตนเอง เริ่มต้นจากข้อ 2 โดยเปรียบเทียบการสลับที่จำนวนคี่ที่อยู่ตรงกันข้าม แล้วจึงบีบรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทางด้านบนและล่างให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะทำให้ได้จัตุรัสกล ดังต่อไปนี้

......	......	......
......	......	......
......	......	......



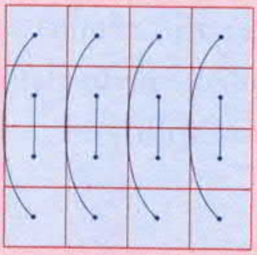
เฉลย

กิจกรรมที่ 1 จัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

8	1	6
3	5	7
4	9	2

กิจกรรมที่ 2

1	12	14	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	5	3	10



กิจกรรมที่ 3

77	58	39	20	1	72	53	34	15
6	68	49	30	11	73	63	44	25
16	78	59	40	21	2	64	54	35
26	7	69	50	31	12	74	55	45
36	17	79	60	41	22	3	65	46
37	27	8	70	51	32	13	75	56
47	28	18	80	61	42	23	4	66
57	38	19	9	71	52	33	14	76
67	48	29	10	81	62	43	24	5

กิจกรรมที่ 4 จัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

21	7	8	18
10	16	15	13
14	12	11	17
9	19	20	6

กิจกรรมที่ 5

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

กิจกรรมที่ 6 $(4 + 14) + (5 + 11) = 34$

$(13 + 3) + (12 + 6) = 34$

กิจกรรมที่ 7 ผลบวกของจำนวนเลขที่อยู่ตามแนวเส้นทแยงมุมทั้งสอง คือ

$(16 + 11 + 6 + 1) + (4 + 7 + 10 + 13) = 68$

ผลบวกของจำนวนเลขที่เหลือทั้งหมด คือ

$2 + 3 + 5 + 8 + 9 + 12 + 14 + 15 = 68$

กิจกรรมที่ 8.1

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

ผลบวกในแต่ละแถว คือ 50

แสดงว่า ☑ เป็นจัตุรัสกล

กิจกรรมที่ 8.2

50	22	24	44
28	40	38	34
36	32	30	42
26	46	48	20

ผลบวกในแต่ละแถว คือ 140

แสดงว่า ☑ เป็นจัตุรัสกล

กิจกรรมที่ 8.3

$12\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	6	11
7	10	$9\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$
9	8	$7\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	12	5

ผลบวกในแต่ละแถว คือ 35

แสดงว่า ☑ เป็นจัตุรัสกล

กิจกรรมที่ 9

5	6	1
0	4	8
7	2	3

กิจกรรมที่ 10

36	2	7	27	20	25
4	33	8	22	24	26
32	10	3	23	28	21
9	29	34	18	11	16
31	6	35	13	15	17
5	37	30	14	19	12

กิจกรรมที่ 11 จัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

15	1	11
5	9	13
7	17	3

กิจกรรมที่ 12 จัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

1	33	32	4				
24	12	13	21				
14	22	23	11				
31	3	2	34				

กิจกรรมที่ 13 จัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

44	63	2	21	40
60	14	18	37	41
11	15	34	53	57
27	31	50	54	8
28	47	66	5	24

กิจกรรมที่ 14

$1 + 16 = 17$

$14 + 3 = 17$

$12 + 5 = 17$

$7 + 10 = 17$

$8 + 9 = 17$

$11 + 6 = 17$

$13 + 4 = 17$

$2 + 15 = 17$

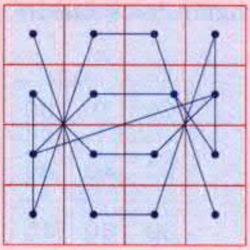
กิจกรรมที่ 15 จัตุรัสกลแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

70	0	50
20	40	60
30	80	10

กิจกรรมที่ 16

96	103	5	12	19	71	78	55	62	44
102	84	11	18	20	77	59	61	68	45
8	85	92	24	26	58	60	67	74	51
89	91	23	25	7	64	66	73	75	32
90	97	29	6	13	65	72	79	56	38
21	28	80	87	94	46	53	30	37	69
27	9	86	93	95	52	34	36	43	70
83	10	17	99	101	33	35	42	49	76
14	16	98	100	82	39	41	48	50	57
15	22	104	81	88	40	47	54	31	63

กิจกรรมที่ 17



กิจกรรมที่ 18

6	1	8
7	5	3
2	9	4

บรรณานุกรม

Andrews, W.S. 1960. Magic squares and cubes. New York : Dover.

Ball, W.W.R. 1956. Mathematical recreations and essays. New York : Macmillan

Brandes, L. 1960. Yes, math can be fun ! . Maine : Weston Walch.

Dudeney, H.E. 1917. Amusements in mathematics. Thomas Nelson and Sons.

Fults, J. 1974. Magic squares. Illinois : Open Court.

Kraitchik, M. 1953. Mathematical recreations. New York : Dover.

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

รองอธิบดีกรมวิชาการ (นายประสาท สอ้านวงศ์)
ผู้อำนวยการศูนย์พัฒนาหนังสือ (นายสุชาติ วงศ์สุวรรณ)

ผู้เขียน

นางสาวดวงเดือน อ่อนน่วม

ผู้ตรวจ

นายประสาท สอ้านวงศ์
นางสาวสิริพร ทิพย์คง
นางสาวเยาวลักษณ์ เตียรณบรรจง

บรรณาธิการ

นางสาวเยาวลักษณ์ เตียรณบรรจง

ผู้ช่วยบรรณาธิการ

ว่าที่ร้อยตรีสันต์ชัย ประชาวรากุล
นางสาวเจนจิรา ทิพย์ชะ

ปกและภาพประกอบ

นายประทีป ไชยวิวัฒน์กุล

ผู้ประสานงาน

นายสุพจน์ แก้วพวง
นายสุชาติ สิงห์ประเสริฐ

พิมพ์ที่โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว นายชาติชัย พาราสุข ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา พ.ศ. 2546

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ
เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในสถานศึกษา

กรมวิชาการได้จัดทำหนังสือ เรื่อง ความน่าพิศวงของจัตุรัสกล เพื่อใช้เป็นหนังสือประกอบการเรียนรู้ การค้นคว้า และอ้างอิง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กระทรวงศึกษาธิการได้พิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้หนังสือนี้ในสถานศึกษาได้

ประกาศ ณ วันที่ 2 มิถุนายน พ.ศ. 2546

(นายอำรุง จันทวานิช)
รองปลัดกระทรวง ปฏิบัติราชการแทน
ปลัดกระทรวงศึกษาธิการ