

๑๒๐

คู่มือเรขาคณิต

ภาคหนึ่ง

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ ๕ - ๖

และเป็นคู่มือของครู

กระทรวงธรรมการอนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

ของ

นายกุหลาบ ประภาสโนบล ป.ม. เนติบัณฑิต

ประกาศนียบัตรนิติศาสตร์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เจ้าศาลจังหวัดกาฬสินธุ์

เคยเป็นครูใหญ่โรงเรียนประจำจังหวัดชัยภูมิ และครูใหญ่

โรงเรียนประจำจังหวัดลำพูน “จักรคำคณาทร”

พิมพ์ครั้งแรก ๑๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๗๕

ราคาเล่มละ ๓๐ สตางค์

พิมพ์จำหน่ายที่โรงพิมพ์ศรีทอง มุมถนนสุคนทาวรรณ ๒ พระนคร

ลิขสิทธิ์สงวน

คู่มือเรขาคณิต

ภาคหนึ่ง

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ - ๖

และเป็นคู่มือของครู

กระทรวงธรรมการอนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

ของ

นายกุหลาบ ประภาสโนบล ป.ม. เนติบัณฑิต

ประกาศนียบัตรนิติศาสตร์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ทำศาลจังหวัดกาฬสินธุ์

เคยเป็นครูใหญ่โรงเรียนประจำจังหวัดชัยภูมิ และครูใหญ่

โรงเรียนประจำจังหวัดลำพูน “จักรคำคณาทร”

พิมพ์ครั้งแรก ๑๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๗๕

ราคาเล่มละ ๗๐ สตางค์

พิมพ์จำหน่ายที่โรงพิมพ์ศรีหงส์ มุมถนนสุคนธาภิรมย์ พระนคร

ลิขสิทธิ์สงวน

ก 03313

คำนำ

คู่มือเรขาคณิตสำหรับเจ้าเขื่อน ขันเพื่อไว้สอนนักเรียน เมื่อครั้ง
ข้าพเจ้ารับราชการเป็นครูอยู่ โรงเรียนประจำจังหวัดชัยภูมิ และได้
ขออนุญาตกระทรวงธรรมการแล้ว กระทรวงธรรมการอนุญาตให้
ใช้ในโรงเรียนได้ แต่ข้าพเจ้ายังมีได้จัดพิมพ์ออกจำหน่าย บัดนี้
มีเพื่อนครูหลายคนขอร้องให้จัดพิมพ์ออกจำหน่าย เพื่อสะดวกแก่ครู
และเป็นประโยชน์แก่นักเรียนผู้สนใจเรียนโดยตนเองด้วย ข้าพเจ้า
จึงได้ขอให้โรงพิมพ์ศรีหงส์จัดพิมพ์จำหน่าย ตาม ความประสงค์ของ
เพื่อนครูต่อไป และหวังว่าคงเป็นประโยชน์แก่นักเรียนบ้างไม่มาก
ก็น้อย และขอแนะนำว่า เมื่อนักเรียนจะใช้เป็นคู่มือเรียนโดยตนเอง
นั้น ให้นักเรียนสร้างรูปใหม่และวัดตรวจสอบดูให้ถูกต้องตาม ใจหาย
ต้องการจริง ๆ ด้วย เพื่อจักได้ชำนาญ และเข้าใจดียิ่งขึ้น ถ้า
บกพร่องผิดพลาดประการใด ขอผู้รู้ทั้งหลายจงให้อภัยและทักท้วง
ด้วยจะขอบพระคุณที่สุด

ในที่นี้ ขอบพระคุณนายยม ศรีหงส์ ผู้เอื้อเฟื้อจัดพิมพ์
หนังสือขึ้นจนเป็นรูปสำเร็จด้วย

นายกุหลาบ ประภาสโนบล

ถ้าพูด

พฤศจิกายน ๒๔๗๘

๒๕๕
บัญชีเรื่อง

แบบผูกหัดที่ ๑

หน้า ๑

๑ ๑

๑ ๑

๑ ๒

๑ ๒

๑ ๓

๑ ๓

๑ ๔

๑ ๔

๑ ๕

๑ ๕

๑ ๖

๑ ๖

๑ ๗

๑ ๗

๑ ๘

๑ ๘

๑ ๙

๑ ๙

๑ ๑๐

๑ ๑๐

๑ ๑๑

๑ ๑๑

๑ ๑๒

๑ ๑๒

๑ ๑๓

๑ ๑๓

๑ ๑๔

๑ ๑๔

๑ ๑๕

๑ ๑๕

๑ ๑๖

๑ ๑๖

๑ ๑๗

๑ ๑๗

๑ ๑๘

๑ ๑๘

๑ ๑๙

๑ ๑๙

๑ ๒๐

๑ ๒๐

แบบฝึกหัดที่ ๑

เมื่อเรียนทฤษฎีบทที่ ๑-๒ แล้ว

๑. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันทำให้มุมเกิดขึ้นสี่มุม ถ้ามุมหนึ่งในจำนวนนี้เป็นมุมฉากแล้ว จงพิสูจน์ว่า มุมอื่นอีก ๓ มุมต่างก็เป็นมุมฉากด้วย

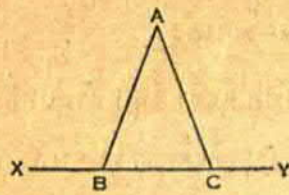
กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O .
 และให้ $\widehat{AOD}$ เป็นมุมฉาก
 จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{AOC}, \widehat{COB}, \widehat{BOD}$
 ต่างก็เป็นมุมฉาก
 พิสูจน์ $\because \widehat{AOD}$ เป็นมุมฉาก

$\therefore \widehat{AOC}$ ซึ่งเป็นมุมประชิดกับ $\widehat{AOD}$ เป็นมุมฉากด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๑)
 และ $\widehat{COB}, \widehat{BOD}$ ต่างก็เป็นมุมประชิดของ $\widehat{AOC}, \widehat{AOD}$
 $\therefore \widehat{COB}, \widehat{BOD}$ ต่างก็เป็นมุมฉากด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๑)
 Q. E. D.

๒. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ถ้าต่อด้าน BC ตรงออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่เกิดขึ้นนั้นเท่ากัน.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง, ซึ่งมี $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
 และต่อ BC ตรงไปทั้งสองข้างถึงจุด X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ABX} = \widehat{ACY}$



พิสูจน์ $\because$ $\widehat{ABX}$ เป็นมุมประกอบ

ของมุมฉากของ $\widehat{ABC}$

และ $\widehat{ACY}$ เป็นมุมประกอบของมุม

ฉากของ $\widehat{ACB}$

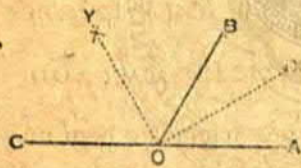
แต่ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (โดยโจทย์)

$\therefore \widehat{ABX} = \widehat{ACY}$

Q. E. D.

๓. เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า
เส้นตรงสองเส้นซึ่งแบ่งครึ่งมุมประชิดทั้งสองจะตั้งฉากกัน (หรืออีก
นัยหนึ่ง เส้นแบ่งครึ่งภายในและภายนอกจะตั้งฉากกัน)

กำหนดให้ BO ตั้งอยู่บนเส้นตรง AC ที่ O.



OX, OY เป็นเส้นแบ่งครึ่ง

มุมประชิด $\widehat{AOB}$ กับ $\widehat{BOC}$

จะต้องพิสูจน์ว่า OX กับ OY ตั้ง
ได้ฉากกันที่จุด O.

พิสูจน์ $\because \widehat{BOX} = \frac{1}{2} \widehat{BOA}$

และ $\widehat{BOY} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$

$\therefore \widehat{BOX} + \widehat{BOY} = \frac{1}{2} (\widehat{BOA} + \widehat{BOC})$

$\therefore \widehat{XOY} = \frac{1}{2}$ ของสองมุมฉาก

$=$ หนึ่งมุมฉาก

นั่นคือ XO กับ YO ตั้งฉากกันที่จุด O .

หรือถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก $\widehat{BOA}$

และ OY ,, ,, ภายใน $\widehat{BOC}$

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกและภายในจะตั้งฉากกัน

Q. E. D

๔. จงพิสูจน์ว่า $\widehat{AOX}$ และ $\widehat{BOY}$ ในรูปข้อ ๓. เป็นมุมประกอบมุมฉากซึ่งกันและกัน (ดูรูปข้อ ๓.)

พิสูจน์ $\widehat{XOY}$ เป็นมุมฉาก (พิสูจน์แล้วในข้อ ๓.)

$\therefore \widehat{BOX}$ กับ $\widehat{BOY}$ ก็เป็นมุมประกอบมุมฉากกัน.

แต่ $\widehat{BOX} = \widehat{AOX}$ และ $\widehat{BOY} = \widehat{COY}$

$\therefore \widehat{AOX}, \widehat{COY}$ ก็เป็นมุมประกอบมุมฉาก

Q. E. D

๕. ในรูปข้อ ๓. จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BOX}$ และ $\widehat{COX}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน และพิสูจน์ว่า $\widehat{AOY}, \widehat{BOY}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน.

พิสูจน์ $\therefore \widehat{COX}$ และ $\widehat{XOA}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

แต่ $\widehat{XOA} = \widehat{BOX}$

$\therefore \widehat{COX}$ กับ $\widehat{BOX}$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

และ $\widehat{AOY}$ กับ $\widehat{COY}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

แต่ $\widehat{COY} = \widehat{BOY}$

$\therefore \widehat{AOY}$ กับ $\widehat{BOY}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากด้วย

Q. E. D.

๖. ถ้า $\widehat{AOB} = 35^\circ$ จงหาว่า $\widehat{COY}$ เท่าไร (รูปข้อ ๓)

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} + \widehat{BOC} &= 180^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

$$\text{และ } \widehat{AOB} = 35^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \widehat{BOC} &= 180^\circ - 35^\circ \\ &= 145^\circ\end{aligned}$$

$$\text{แต่ } \widehat{COY} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$

$$\begin{aligned}\therefore \widehat{COY} &= \frac{1}{2} \text{ ของ } 145^\circ \\ &= 72\frac{1}{2} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๒

เมื่อเรียนบทฤษฎีบทที่ ๓ แล้ว

๑. เข็มยาวของนาฬิกาเรือนหนึ่งจะหมุนไปถึงองศา ถ้าเดินไปได้
(ก) ๕ นาที (ข) ๒๑ นาที (ค) $43\frac{1}{2}$ นาที (ง) ๑๖ นาที กับ
๑๐ วินาที และเข็มยาวจะใช้เวลานานเท่าไรจึงจะหมุนไป (จ) ๖ ชั่วโมง
(ฉ) ๒๒ ชั่วโมง

เวลา ๑ ชั่วโมง	เข็มยาวหมุนได้	360°
,, ๖๐ นาที	,, ,,	360°
(ก) ๕ ,,	,, ,,	$\frac{360^\circ}{60} \times 5 = 30^\circ$
(ข) ๒๑ ,,	,, ,,	$\frac{360^\circ}{60} \times 21 = 126^\circ$

(ก) $๔๓\frac{๑}{๒}$ นาที เริ่มยาวหมุนได้ $๖ \times ๔๓\frac{๑}{๒} = ๒๖๑$

(ง) $๑๖\frac{๑}{๖}$,, ,, ,, $๖ \times ๑๖\frac{๑}{๖} = ๙๗$

และ จักรหมุนนาน ๑ นาที

(จ) ๖๖ ,, ,, $\frac{๖๖}{๖} \times ๑ = ๑๑$,,

(ฉ) ๒๒๒ ,, ,, $\frac{๒๒๒}{๖} \times ๑ = ๓๗$,,

๒. นาฬิกาเรือนหนึ่งเริ่มเดินเมื่อเที่ยง ถามว่าเข็มสั้นจะเดินไปได้กี่องศา ถ้านาฬิกาเดินไปได้ (๑) ๓ ชั่วโมงกับ ๔๕ นาที (๒) ๕ ชั่วโมงกับ ๑๐ นาที และถ้าเข็มสั้นเดินไปได้ $๑๗๒\frac{๑}{๒}$ องศาจะเป็นเวลานานเท่าไร.

ใน ๑๒ ชั่วโมง เข็มชั่วโมงหมุนได้ ๓๖๐

,, ๑ ,, ,, ,, ๓๐

(๑) $๓\frac{๓}{๔}$,, ,, ,, $๓๐ \times ๓\frac{๓}{๔} = ๑๑๒\frac{๑}{๒}$

(๒) $๕\frac{๑}{๖}$,, ,, ,, $๓๐ \times ๕\frac{๑}{๖} = ๑๕๕$

และ (๓) ถ้าเข็มสั้นหมุนได้ $๑๗๒\frac{๑}{๒}$ ระยะเวลา $\frac{๑๗๒\frac{๑}{๒}}{๓๐} = \frac{๓๔๕}{๖๐} = ๕\frac{๓}{๔}$ ชม.

หรือ ๕ ชั่วโมง ๔๕ นาที

๓. โดกลมุ่รอบตัวเองหนึ่งรอบกินเวลา ๒๔ ชั่วโมง ถามว่าถ้าหมุนนาน ๓ ชั่วโมง ๒๐ นาที จะได้มุมกี่องศา และถ้าหมุนได้ ๑๓๐ องศา กินเวลานานเท่าไร ?

โลกหมุน ๑ รอบ คือ 360° ในเวลา ๒๔ ชม.

หรือในเวลา ๑ ชม. หมุนได้ 15°

(ก) $\therefore$,, $\frac{1}{3}$ ชม. ,, $15^{\circ} \times \frac{1}{3} = 5^{\circ}$

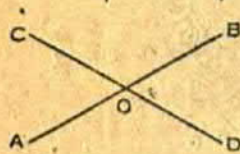
และ (ข) หมุน 180° กินเวลานาน $\frac{180}{15} = 12$ ชม. ๑๐ น.ท.

๔. ในรูปทฤษฎีบทที่ ๓

(ก) ถ้า $\widehat{AOC} = 35^{\circ}$ จงหาว่า $\widehat{COB}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{DOA}$ กางมุม
ละเท่าไร? (โดยไม่ต้องวัด)

(ข) ถ้า $\widehat{COB}$, $\widehat{AOD}$ รวมกันได้ 125° จงหาว่า $\widehat{COA}$, $\widehat{BOD}$ กาง
มุมละเท่าไร?

(ค) ถ้า $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$, $\widehat{BOD}$ รวมกันได้ 175° จงหาว่า มุมทั้ง ๔
ที่จุด O กางมุมละเท่าไร?



(ก) ถ้า $\widehat{AOC} = 35^{\circ}$

$\therefore \widehat{BOC} = 180^{\circ} - 35^{\circ} = 145^{\circ}$

(เพราะเป็นมุมประกอบของมุม
ฉากกับ $\widehat{AOC}$)

$\widehat{BOD} = 35^{\circ}$ เพราะเท่ากับ $\widehat{AOC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๓)

$\widehat{DOA} = 145^{\circ}$ เพราะเท่ากับ $\widehat{BOC}$

(ข) ถ้า $\widehat{COB} + \widehat{AOD} = 125^{\circ}$

$\widehat{COB} = \widehat{AOD}$

$\therefore \widehat{COB}$, $\widehat{AOD}$ ต่างก็เป็น $\frac{1}{2}$ ของ $125^{\circ} = 62.5^{\circ}$

$\widehat{COA}$ กับ $\widehat{COB}$ เป็นมุมประกอบของมุมฉาก

$$\therefore \widehat{COA} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$\widehat{BOD} = \widehat{COA} = 55^\circ$$

(ค) ถ้า $\widehat{AOC} + \widehat{COB} + \widehat{BOD} = 275^\circ$

$$\therefore \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ$$

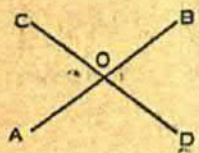
$$\therefore \widehat{BOD} = 275^\circ - 180^\circ = 95^\circ$$

$\therefore \widehat{AOD}$ เป็นมุมประกอบของมุมฉาก กับ $\widehat{BOD}$

$$\therefore \widehat{AOD} = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$

$$\text{คือ } \widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 95^\circ; \widehat{BOC} = \widehat{AOD} = 85^\circ$$

๕. ถ้าจากจุด O ซึ่งเป็นจุดหนึ่งในเส้นตรง AB มีเส้นตรง OC, OD สองเส้นลากไปจาก AB ข้างละเส้น และทำมุม $\widehat{COB}$ เท่ากับ $\widehat{AOD}$ จงพิสูจน์ว่า OC, OD เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน.



กำหนดให้ O เป็นจุดหนึ่งในเส้น AB .

ลาก OC, OD ไปข้างละเส้นของ AB

ให้ $\widehat{COB} = \widehat{AOD}$

จะต้องพิสูจน์ว่า OC, OD เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

พิสูจน์ $\therefore \widehat{BOC}, \widehat{COA}$ เป็นมุมประกอบของมุมฉาก

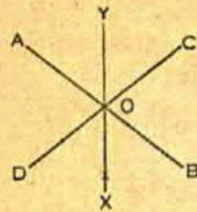
และ $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (โดยโจทย์)

$\therefore \widehat{AOD}, \widehat{AOC}$ ก็เป็นมุมประกอบของมุมฉาก

$\therefore CO$ และ OD เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน (ทฤษฎีบทที่ ๒)

Q.E.D.

๖. เส้นตรง AB, CD สองเส้นตัดกันที่จุด O ถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BOD จงพิสูจน์ว่าถ้าต่อ XO ตรงออกไปจะแบ่งครึ่ง $\angle AOC$



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O , OX เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BOD$ ต่อ XO ตรงออกไปถึง Y

จะต้องพิสูจน์ว่า OY จะแบ่งครึ่ง $\angle AOC$

พิสูจน์ $\therefore \angle AOY = \angle BOX$

$$\angle COY = \angle DOX$$

แต่ $\angle BOX = \angle DOX$ (โดยโจทย์)

$$\therefore \angle AOY = \angle COY \quad \text{ด้วย}$$

$\therefore OY$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle AOC$

Q.E.D.

๗. ถ้าเส้นตรง AB, CD สองเส้นตัดกันที่จุด O ถ้า $\angle BOD$ ถูกเส้นตรง OX แบ่งครึ่ง และ $\angle AOC$ ถูก OY แบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า OX, OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน (รูปเหมือนข้อ ๖)

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ O .

$\angle BOD$ ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรง OX

$\angle AOC$,, ,, ,, OY

จะต้องพิสูจน์ว่า OX, OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

พิสูจน์ $\angle COX, \angle DOX$ เป็นมุมประกอบของมุมฉาก

$\angle DOX = \angle COY$ เพราะต่างเป็นครึ่งหนึ่งของมุมเท่า $\angle BOD$ กับ $\angle AOC$

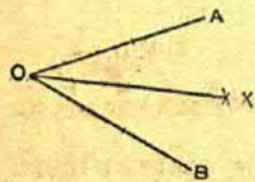
$\therefore \angle COX, \angle COY$ ก็เป็นมุมประกอบของมุมฉาก

$\therefore OX$ และ OY เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

Q.E.D.

๘. OX แบ่งครึ่งมุม $\angle AOB$ จงพิสูจน์โดยวิธีพิชิตรูปไปตามเส้นแบ่งครึ่งว่าอาจทำให้ OA ทัม OB ดังนี้

OA จะอยู่อย่างไรกับ OB ถ้า



(ก) $\angle AOX$ ใหญ่กว่า $\angle XOB$

(ข) $\angle AOX$ เล็กกว่า $\angle XOB$

กำหนดให้ $\angle AOB$ เป็นมุม ๆ หนึ่ง

OX เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle AOB$

จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้าพิชิตตามเส้น OX แล้ว OA จะต้องทัม OB ดังนี้

พิสูจน์ $\angle AOX = \angle BOX$

$\therefore OX$ เป็น แขนงร่วม ของ มุม ทั้ง สอง นั้ และอยู่ข้างเดียวกัน

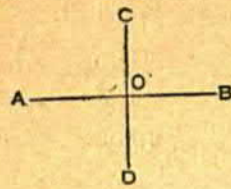
เมื่อพิชิตตรง OX แขนงที่เหลือคือ OA, OB จะทัมกันดังนี้

ถ้า $\angle AOX$ ใหญ่กว่า $\angle BOX$, OA จะอยู่ข้างนอก $\angle XOB$

ถ้า $\angle AOX$ เล็กกว่า $\angle BOX$, OA จะอยู่ข้างใน $\angle XOB$

Q.E.D.

๙. AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O จงพิสูจน์โดยวิธีพิชิตรูปไปตาม AB ว่าอาจทำให้ OC ทัม OD ได้



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสอง
เส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O
จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้าพับตาม AB แล้ว
 OC จะทับ OD ได้

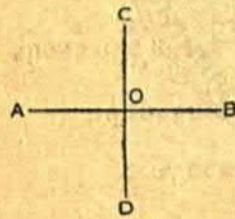
พิสูจน์ $\widehat{BOC} = \widehat{BOD}$ เพราะต่างเป็นมุมฉาก

$\therefore$ เมื่อพับ $\widehat{BOC}, \widehat{BOD}$ ตรงแนวร่วม OB ซึ่งอยู่ข้างเดียวกัน
แนวที่เหลื่อมคือ OC, OD ก็ทับกันพอดี

Q.E.D.

๑๐. เขียนเส้นตรง AOB ลงบนกระดาษแผ่นหนึ่ง แล้วพับ
กระดาษแผ่นนี้ที่ O ให้ OA ทับ OB สนิท จึงพิสูจน์ว่ารอยพับ
ของกระดาษนั้นตั้งฉากกับ AB

กำหนดให้ AOB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง



ให้ COD เป็นรอยพับที่ OA ทับ OB พอดี

$\therefore \widehat{AOC} = \widehat{COB}$ เพราะทับกันพอดี

เมื่อพับกระดาษ และ $\widehat{AOC}, \widehat{COB}$ เป็นมุม
ประชิดกัน

$\therefore \widehat{AOC}, \widehat{COB}$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

นั่นคือ CD เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB

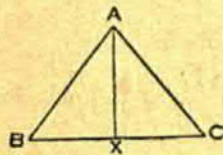
Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๓

เมื่อเรียนบทฤษฎีบทที่ ๔ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(๑) แบ่งครึ่งด้านฐาน (๒) ตั้งฉากกับฐาน

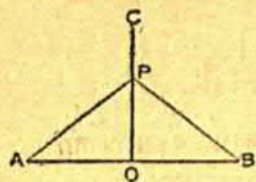
กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB=AC$ AX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด BAC ตัด BC ที่ X จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $BX=XC$ (๒) AX เป็นเส้นตั้งฉากกับ BC พิสูจน์ ใน $\triangle BAX$ กับ $\triangle CAX$

$$\therefore \begin{cases} BA=CA & (\text{โดยโจทย์}) \\ AX & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{BAX}=\widehat{CAX} & (\text{โดยโจทย์}) \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAX = \triangle CAX$ (โดยทฤษฎีบทที่ ๔)(๑) $BX=XC$; นั่นคือ AX แบ่งครึ่งฐานและ (๒) $\widehat{AXB} = \widehat{AXC}$ ซึ่งเป็นมุมประชิด $\therefore \widehat{AXB}; \widehat{AXC}$ ต่างก็เป็นมุมฉากนั่นคือ AX ตั้งฉากกับฐาน

Q.E.D.

๒. ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และให้ OC เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB ถ้า P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ใน OC จงพิสูจน์ว่า $PA=PB$



กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ
เส้นตรง AB

และให้ OC เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB

P เป็นจุด ๆ หนึ่งบน OC

จะต้องพิสูจน์ว่า $PA = PB$

พิสูจน์ ลาก PA, PB

ใน $\triangle APO$ กับ $\triangle BPO$

$$\therefore \begin{cases} \angle AOP = \angle BOP & (\text{เพราะต่างเป็นมุมฉาก}) \\ OP & \text{เป็นด้านร่วม} \\ AO = OB & (\text{โดย } O \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } AB) \end{cases}$$

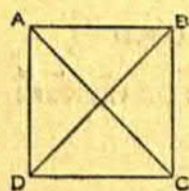
$\therefore \triangle APO = \triangle BPO$ ทุกอย่าง (โดยทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore PA = PB$

Q.E.D.

๓. สมมติไปพลางก่อนว่าด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน และมุมทั้งสี่ต่างก็เป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุม AC

และ BD ของ $\square$ จัตุรัส $ABCD$ ยาวเท่ากัน



กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ จัตุรัสรูปหนึ่ง

AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC = BD$

พิสูจน์ ใน $\triangle DAB$ กับ $\triangle CBA$

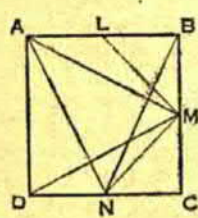
$$\therefore \begin{cases} DA = CB & (\text{ต่างก็เป็นด้านของ } \square \text{ จัตุรัส}) \\ AB \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{DAB} = \widehat{CBA} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAB = \triangle CBA$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$$\therefore AC = BD$$

Q.E.D.

๔. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, และ CD จงพิสูจน์ว่า



(๑) $LM = MN$

(๒) $AM = DM$

(๓) $AN = AM$

(๔) $BN = DM$

กำหนดให้ ABCD เป็น $\square$ จัตุรัสรูปหนึ่ง

L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, และ CD

ลาก AN, AM, BN, NM, ML, MD

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $LM = MN$

(๒) $AM = DM$

(๓) $AN = AM$

(๔) $BN = DM$

•

พิสูจน์ (๑) ในรูป $\triangle LBM$ กับ $\triangle MCN$

$$\therefore \begin{cases} LB = MC & (\text{ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า}) \\ BM = CN & (,, ,, ,,) \\ \widehat{LBM} = \widehat{MCN} & (\text{ต่างก็เป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle LBM = \triangle MCN$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$$\therefore LM = MN$$

(๒) ในรูป $\triangle ABM$ กับ $\triangle DCM$

$$\therefore \begin{cases} AB = DC & (\text{ต่างก็เป็นด้านของ } \square \text{ จัตุรัส}) \\ BM = CM & (\text{ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของ } BC) \\ \widehat{ABM} = \widehat{DCM} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore AM = DM$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๓) ใน $\triangle ABM$ กับ $\triangle ADN$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{ต่างเป็นด้านของ } \square \text{ จัตุรัส}) \\ BM = DN & (\text{ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า}) \\ \widehat{ABM} = \widehat{ADN} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore AM = AN$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๔) ใน $\triangle BCN$ กับ $\triangle DCM$

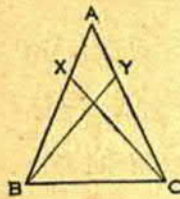
$$\therefore \begin{cases} BC = DC & (\text{ต่างก็เป็นด้านของ } \square \text{ จัตุรัส}) \\ CN = CM & (\text{ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า}) \\ \text{มุมที่ } C \text{ เป็นมุมร่วม} \end{cases}$$

๑๕

$\therefore BN = DM$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

Q.E.D.

๕. ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง จากด้าน AB, AC ซึ่งยาวเท่ากัน ตัด AX, AY ออกเท่า ๆ กัน แล้วลากเส้น BY, CX จงพิสูจน์ว่า $BY = CX$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

ซึ่ง $AB = AC$

ตัด AX เท่ากับ AY

ลาก XC, YB

จะต้องพิสูจน์ว่า $BY = CX$

พิสูจน์ ใน $\triangle BAY$ และ $\triangle CAX$

$\therefore \begin{cases} \hat{A} & \text{เป็นมุมร่วม} \\ AY = AX & \text{(โดยโจทย์)} \\ AB = AC & \text{(โดยโจทย์)} \end{cases}$

$\therefore BY = CX$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๔

เมื่อเรียนถึงทฤษฎีบทที่ ๕ แล้ว

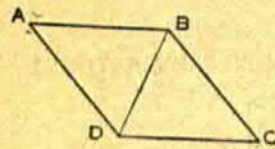
๑. $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง ซึ่งมีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน และ
มี BD เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า

$$(๑) \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$$

$$(๒) \widehat{CBD} = \widehat{CDB}$$

$$(๓) \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$$

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านเท่ารูปหนึ่ง



มี BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$

$$(๒) \widehat{CBD} = \widehat{CDB}$$

$$(๓) \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$$

พิสูจน์ (๑) $\because AB = AD$

$$\therefore \widehat{ABD} = \widehat{ADB} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕})$$

(๒) ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\widehat{CBD} = \widehat{CDB}$$

(๓) เติมนำใน (๑) และ (๒) บวกกันจะได้

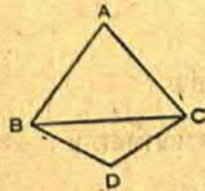
$$\widehat{ABD} + \widehat{CBD} = \widehat{ADB} + \widehat{CDB}$$

$$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$$

Q.E.D.

๒. ABC และ DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วสองรูปวางอยู่บนฐาน BC อันเดียวกัน แต่อยู่ตรงข้ามกัน จงใช้ทฤษฎีบทที่ ๕ พิสูจน์ว่า

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$



กำหนดให้ ABC และ DBC เป็น $\triangle$

หน้าจั่วสองรูป ตั้งอยู่บนฐาน BC อันเดียวกัน แต่อยู่ตรงข้ามกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

พิสูจน์ รูป $\triangle ABC$; $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (เพราะ $AB = AC$)

รูป $\triangle DBC$; $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$ (เพราะ $BD = DC$)

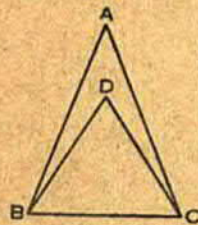
$$\therefore \widehat{ABC} + \widehat{DBC} = \widehat{ACB} + \widehat{DCB}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$

Q.E.D.

๓. ABC และ DBC เป็นรูป $\triangle$ หน้าจั่วของรูปคี่ อยู่บนฐาน BC ร่วมกัน และอยู่ข้างเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$



กำหนดให้ ABC และ DBC เป็น
 $\triangle$ หน้าจั่วของรูปคี่ อยู่บนฐาน BC ซั้นเดียวกัน
และอยู่ข้างเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

พิสูจน์ $AB = AC$; $BD = DC$ (โจทย์)

$$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{ACB}; \widehat{DBC} = \widehat{DCB} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕})$$

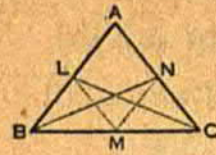
$$\therefore \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = \widehat{ACB} - \widehat{DCB}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$

Q.E.D.

๔. AB, AC เป็นด้านเท่าของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC และ L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, CA ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$(๑) LM = NM \quad (๒) BN = CL \quad (๓) \widehat{ALM} = \widehat{ANM}$$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

รูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB = AC$

L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, CA

ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $LM = NM$

(๒) $BN = CL$

(๓) $\widehat{ALM} = \widehat{ANM}$

พิสูจน์ (๑) ใน $\triangle LBM$ กับ $\triangle NCM$

$$\therefore \begin{cases} LB = NC & (\text{ครึ่งหนึ่งของด้านเท่า}) \\ BM = CM & (\text{ครึ่งหนึ่งของด้าน } BC) \\ \widehat{LBM} = \widehat{NCM} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕}) \end{cases}$$

$\therefore LM = NM$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๒) ใน $\triangle LBC$ กับ $\triangle NCB$

$$\therefore \begin{cases} LB = NC \\ BC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{LBC} = \widehat{NCB} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕}) \end{cases}$$

$\therefore LC = NB$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๓) $\triangle LBM = \triangle CNM$ ทุกอย่าง (ในข้อ (๑))

$\therefore \widehat{BLM} = \widehat{CNM}$

และ $\widehat{ALM}$, $\widehat{ANM}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $\widehat{BLM}$ กับ $\widehat{CNM}$ ตามลำดับ

$$\therefore \widehat{ALM} = \widehat{ANM}$$

Q.E.D.

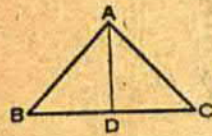
แบบฝึกหัดที่ ๕

เมื่อเวียนจบทฤษฎีบทที่ ๗ แล้ว

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งลากจากมุมยอดของ $\triangle$ หน้าจั่วมายังจุด

กึ่งกลางของฐาน (๑) แบ่งครึ่งมุมยอด

(๒) ตั้งฉากกับฐาน



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูป

หนึ่ง ซึ่ง $AB = AC$

D เป็นจุดกึ่งกลางของฐาน BC

ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) AD แบ่งครึ่งมุม $\widehat{BAC}$

(๒) AD ตั้งฉากกับฐาน BC

พิสูจน์ ใน $\triangle BAD$ กับ $\triangle CAD$

$$\therefore \begin{cases} BD = CD & (\text{โจทย์}) \\ DA & \text{เป็นด้านร่วม} \\ AB = AC & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD = \triangle CAD$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore (๑) \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

นคช AD แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$

และ $(๒) \widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ ซึ่งเป็นมุมประชิด

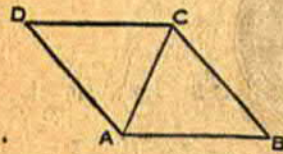
$\therefore \widehat{ADB}, \widehat{ADC}$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

นคช AD ตั้งฉากกับ BC

Q.E.D.

๒. ถ้า ABCD เป็น $\square$ ขนมหั้กปุ่น (คือ $\square$ ที่ด้านเท่ากันทุกด้าน) จงพิสูจน์ โดยลากเส้นทะแยงมุม AC ว่า

(๑) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (๒) AC แบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$



กำหนดให้ ABCD เป็น $\square$ ขนมหั้กปุ่นรูปหนึ่ง
ลากเส้นทะแยงมุม AC

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

(๒) AC เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$

พิสูจน์ ใน $\triangle DAC$ กับ $\triangle BAC$

$\therefore \begin{cases} AD = AB & (\text{เป็นด้านของ } \square \text{ ขนมหั้กปุ่น}) \\ CD = CB & (,, ,, ,,) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

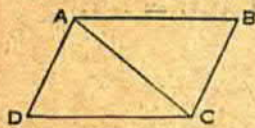
$\therefore \triangle DAC = \triangle BAC$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore (๑) \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

และ (๒) $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, และ $\widehat{BCA} = \widehat{DCA}$
 นั่นคือ AC แบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}$, $\widehat{BCD}$

Q.E.D.

๓. ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ยาวเท่ากัน คือ
 $AB = CD$; $AD = BC$ จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง
 มีด้านตรงข้าม $AB = CD$; $AD = BC$
 จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

พิสูจน์ ดาก AC

ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ADC$

$$\therefore \begin{cases} AB = DC & (\text{โจทย์}) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ AD = BC & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

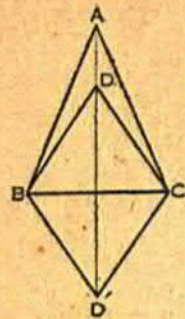
$\therefore \widehat{ADC} = \widehat{ABC}$

Q.E.D.

๔. ถ้า $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วตั้งอยู่บนฐาน BC
 ร่วมกัน จงพิสูจน์ โดยใช้ทฤษฎีบทที่ ๗ ว่า $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

(๑) ให้ $\triangle$ ตั้งอยู่บนทางเดียวกันของฐาน BC

(๒) ,, ^ ,, อยู่คนละข้างของฐาน BC



สองรูป

กำหนดให้ ABC, DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

(๑) สร้างอยู่บนฐาน BC อันเดียวกัน

(๒) อยู่คนละทางให้ชื่อว่า $BD'C$

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

(๒) $\widehat{ABD'} = \widehat{ACD'}$

พิสูจน์ (๑) ถ้า AD

ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

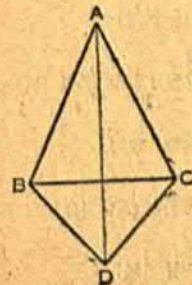
$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{โจทย์}) \\ BD = DC & (\text{โจทย์}) \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

(๒) เหมือนกับ (๑)

Q.E.D.

๕. ถ้า ABC, DBC เป็น รูป $\triangle$ หน้าจั่วสองรูปสร้างอยู่บนฐาน BC ร่วมกัน แต่อยู่คนละข้าง ถ้าลาก AD จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BAC}, \widehat{BDC}$ ต่างก็จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ ABC, DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

สองรูปสร้างอยู่บนฐาน BC ร่วมกันแต่อยู่คนละข้าง

ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{BAC}$ และ $\widehat{BDC}$ ต่างก็ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย AD

พิสูจน์ ใน $\triangle BAD$ กับ $\triangle CAD$

$$\therefore \begin{cases} BA = CA & (\text{โจทย์}) \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \\ BD = CD & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$\therefore \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ และ $\widehat{BDA} = \widehat{CDA}$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

นคธ $\widehat{BAC}, \widehat{BCD}$ ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

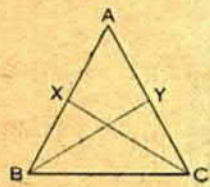
Q.E.D.

๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากจากปลายฐานของ $\triangle$ หน้าจั่วไปยังจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

ซึ่ง $AB = AC$

X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC ตามลำดับ



ถ้าคืบ

ลาก CX, BY

จะต้องพิสูจน์ว่า $CX = BY$

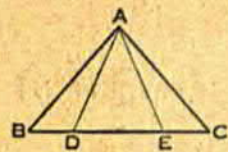
พิสูจน์ ใน $\triangle BYC$ กับ $\triangle BCX$

$$\therefore \begin{cases} YC = XB & (\text{ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า}) \\ BC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{YCB} = \widehat{XBC} & (\text{โดยทฤษฎีบทที่ ๕}) \end{cases}$$

$\therefore CX = BY$ (โดยทฤษฎีบทที่ ๕)

Q.E.D.

๗. จุดที่กำหนดให้ต้องจุดในฐานของ $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งมีระยะห่างจากสุดปลายฐานเท่ากัน จงพิสูจน์ว่าจุดทั้งสองมีระยะห่างจากจุดยอดเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง
มี BC เป็นฐาน D และ E เป็นจุดสอง
จุดบน BC ซึ่ง $BD = CE$

ลาก AD, AE

จะต้องพิสูจน์ว่า $AD = AE$

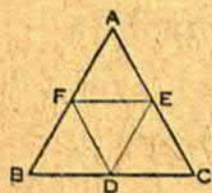
พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle AEC$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{โดยโจทย์}) \\ \angle ABD = \angle ACE & (\text{โดยทฤษฎีบทที่ ๕}) \\ BD = EC & (\text{โดยโจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore AD = AE \quad (\text{โดยทฤษฎีบทที่ ๔})$$

Q.E.D.

๘. จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ ที่เกิดขึ้นโดยลากเส้นจากจุดกึ่งกลางของด้านเท่าของ $\triangle$ ด้านเท่า จะเป็น $\triangle$ ด้านเท่าด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่ารูปหนึ่ง
 D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางของ BC, CA, AB ตาม
ลำดับ

ลาก ED, DF และ FE

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle DEF$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

พิสูจน์ ใน $\triangle FAE$ กับ $\triangle FBD$

$$\therefore \begin{cases} FA = FB \\ AE = BD \quad (\text{ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า}) \\ \widehat{FAE} = \widehat{FBD} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕ มททบทที่ ๒}) \end{cases}$$

$$\therefore FE = FD \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

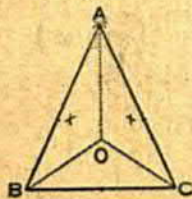
$$FD = DE$$

$\therefore \triangle DEF$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

Q.E.D.

๘. ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน $AB = AC$ มุมที่ B และ C ถูก BO, CO แบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า (๑) $BO = CO$, (๒) AO แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



ซึ่งมี $AB = AC$; BO, CO เป็นเส้นแบ่งครึ่ง
มุม B และมุม C

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $BO = CO$
(๒) AO แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$

พิสูจน์ (๑) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของมุมเท่า)

$\therefore OB = OC$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

(๒) ใน $\triangle ABO$ กับ $\triangle ACO$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ OB = OC \quad (\text{โดย (๑)}) \\ \widehat{ABO} = \widehat{ACO} \quad (\text{ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของมุมเท่า}) \end{cases}$$

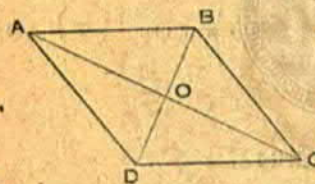
$$\therefore \widehat{BAO} = \widehat{CAO} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

$$\therefore AO \text{ แบ่งครึ่ง } \widehat{BAC}$$

Q.E.D.

๑๐. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงแยงมุมของ $\square$ ขนมน้อยรูป (ดูข้อ ๒) แบ่งครึ่งกันเป็นมุมฉาก.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ ขนมน้อยรูปหนึ่ง



เส้นตรงแยงมุม AC , BD ตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า AC , BD ตัดครึ่งกัน

ที่ O . และเป็นมุมฉากด้วย

พิสูจน์ $\triangle ABC = \triangle ADC$ โดยทฤษฎีบทที่ ๗ (ดูข้อ ๒)

$$\therefore \widehat{BAC} = \widehat{DAC}$$

ใน $\triangle BAO$ กับ $\triangle DAO$

$$\therefore \begin{cases} BA = DA \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{BAO} = \widehat{DAO} \end{cases}$$

$$\therefore BO = DO \text{ และ } \widehat{AOB} = \widehat{AOD} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

และ $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOD}$ เป็นมุมประชิดจึงต่างเป็นมุมฉาก

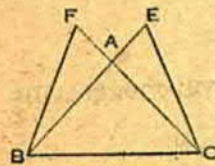
ในทำนองเดียวกัน $AO = OC$ และ $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ ก็เป็นมุมฉากด้วย

$\therefore AC$ และ BD ตัดกันที่ O และเป็นมุมฉากด้วย

Q.E.D.

๑๑. ด้านเท่า BA , CA ของรูป $\triangle$ หน้าจั่ว BAC ถูกคั่นโดย
ออกไปทางจุด A ไปที่จุด E และ F และ $AE = AF$ ลากเส้น
 FB , EC จงพิสูจน์ว่า $FB = EC$

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



A เป็นมุมยอด ต่อ BA , CA ตรงออกไป

ทาง A ถึงจุด E และ F ทำ $AE = AF$

ลาก BF , CE

จะต้องพิสูจน์ว่า $FB = EC$.

พิสูจน์ ใน $\triangle FAB$ กับ $\triangle EAC$

$$\therefore \begin{cases} FA = EA & (\text{โดยโจทย์}) \\ AB = AC \\ \widehat{FAB} = \widehat{EAC} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAB = \triangle EAC$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore FB = EC$

Q.E.D.

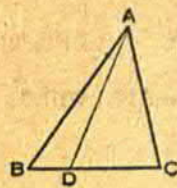
บทที่ ๒

เมื่อเรียนถึงทฤษฎีบทที่ ๘ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่า มุมสองมุมใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

รวมกันย่อมเล็กกว่าสองมุมฉาก โดยลากเส้นจากจุดยอด A ไปยังจุดใดจุดหนึ่งในฐาน BC.

กำหนดให้ BC เป็นฐานของ $\triangle ABC$ รูปหนึ่ง



D เป็นจุดใด ๆ บน BC ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ABC} + \widehat{ACB}$ เล็กกว่า ๒ มุมฉาก

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$, มุมภายใน ABD เล็กกว่ามุมภายนอก ADC

และใน $\triangle ADC$, มุมภายใน ACD เล็กกว่ามุมภายนอก ADB

$\therefore \widehat{ABD} + \widehat{ACD}$ ย่อมเล็กกว่า $\widehat{ADC} + \widehat{ADB}$

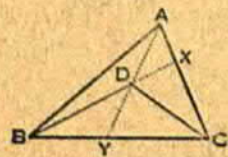
แต่ $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = ๒$ มุมฉาก

$\therefore \widehat{ABD} + \widehat{ACD}$ เล็กกว่า ๒ มุมฉาก

Q.E.D.

๒. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง และ D เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ในรูปสามเหลี่ยมนี้ ถ้าลากเส้น BD และ CD จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BDC}$ ใหญ่กว่า $\widehat{BAC}$ (๑) โดยต่อ BD ไปพบ AC (๒) โดยลากเส้น AD และต่อ AD ตรงออกไปทางด้านฐาน

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง



D เป็นจุดใด ๆ ภายใน $\triangle ABC$

ลาก BD, DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{BDC}$ ใหญ่กว่า $\widehat{BAC}$

(๑) โดยต่อ BD ตรงออกไปพบ AC ที่ X

(๒) โดยลาก AD และต่อตรงออกไปพบฐาน BC ที่ Y
 พิสูจน์ (๑) ค่อย BD ไปพบ AC ที่ X

ใน $\triangle DXC$, มุมภายนอก BDC ใหญ่กว่ามุมภายใน DXC
 (ทฤษฎีบทที่ ๘)

ใน $\triangle AXB$, มุมภายนอก DXC ใหญ่กว่ามุมภายใน BAC
 (ทฤษฎีบทที่ ๘)

$\therefore BDC$ ก็ใหญ่กว่า BAC มาก

(๒) ค่อย AD ตรงไปพบ BC ที่ Y

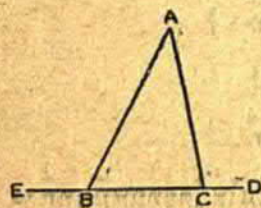
ใน $\triangle BAD$, มุมภายนอก BDY ใหญ่กว่ามุมภายใน BAD
 (ทฤษฎีบทที่ ๘)

ใน $\triangle DAC$, มุมภายนอก CDY ใหญ่กว่ามุมภายใน DAC
 (ทฤษฎีบทที่ ๘)

โดยวิธีนับวกผลนี้, BDC ทั้งหมดก็ใหญ่กว่า BAC ทั้งหมด.

Q.E.D.

๓. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของ $\triangle$ ใด ๆ ตรงออกไปทั้งสองข้าง
 จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่บังเกิดขึ้นรวมกันเข้าโดยค่าสองมุมฉาก.



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 ด้าน BC ถูกต่อตรงออกไปทั้งสองข้าง
 ถึง D และ E.

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ABE} + \widehat{ACD}$ ใหญ่
 กว่า ๒ มุมฉาก

พิสูจน์ $\widehat{ABE} + \widehat{ABC} = ๒$ มุมฉาก

$\widehat{ACB} + \widehat{ACD} = ๒$ มุมฉาก

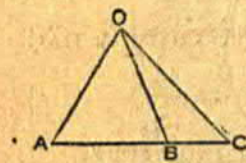
$\therefore \widehat{ABE} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{ACD} = ๔$ มุมฉาก

แต่ $\widehat{ABC} + \widehat{ACB}$ เด็กเท่าสองมุมฉาก (โดยทฤษฎีบทที่ ๘
บทแทรกที่ ๑)

$\therefore \widehat{ABE} + \widehat{ACD}$ ก็โตกว่า ๒ มุมฉาก

Q.E.D.

๔. จงพิสูจน์ว่า จากจุดภายนอกของเส้นตรงที่กำหนดให้ จะ
ลากเส้นตรงซึ่งมีความยาวเท่ากันไปยังเส้นตรงเส้นนั้นได้ไม่เกินสองเส้น
กำหนดให้ ABC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้



และ O เป็นจุดภายนอกที่กำหนดให้จุดหนึ่ง
จะต้องพิสูจน์ว่า ไม่สามารถลากเส้นตรง
จาก O มา ยัง เส้น ตรง ABC ได้เท่ากัน
มากกว่าสองเส้น

พิสูจน์ สมมติให้ OA, OB, OC เป็นเส้นตรงสามเส้น ซึ่งลาก
มาเท่ากันจาก O ยังเส้นตรง ABC

$\therefore OA = OB$ (โดยสร้าง)

$\therefore \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore OA = OC$ (โดยสร้าง)

$\therefore \widehat{OAB} = \widehat{OCB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore \widehat{OBA} = \widehat{OCB}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้โดยทฤษฎีบทที่ ๘

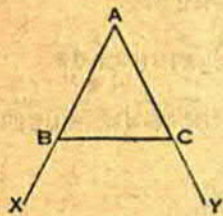
(คือ $\widehat{OBA}$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle OBC$)

ตามเหตุผลที่กล่าวมาข้างนี้จึงไม่สามารถลากเส้นจากจุด O มายัง
เส้นตรง ABC ได้เท่ากันมากกว่า ๒ เส้น

Q.E.D.

๕. จงพิสูจน์ว่า ถ้าต่อด้านเท่าสองด้านของ $\triangle$ หน้าจั่วตรง
ออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นนั้นก็เป็นมุมบ้าน.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



ซึ่ง $AB = AC$ และ

ด้าน AB, AC ถูกต่อตรงออกไป

ถึง X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{XBC}$ และ $\widehat{YCB}$ ต่าง
ก็เป็นมุมบ้าน

พิสูจน์ $\because \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และ $\widehat{ABC} + \widehat{ACB}$ เล็กกว่า ๒ มุมฉาก (โดยบทแทรกที่ ๑
ของทฤษฎีบทที่ ๘)

$\therefore \widehat{ABC}$, และ $\widehat{ACB}$ ต่างก็เป็นมุมน้อยกว่ามุมฉาก

แต่มุมภายนอก $\widehat{XBC}$, $\widehat{YCB}$ เป็นมุมประกอบของมุมฉากกับ
 $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ ตามลำดับ

$\therefore \widehat{XBC}$, $\widehat{YCB}$ ต่างก็เป็นมุมใหญ่กว่ามุมฉาก ก็
เป็นมุมบ้าน

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๗

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๒ แล้ว.

๑. จงพิสูจน์ว่าด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากรูปหนึ่งซึ่งมี B เป็นมุมฉาก AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากจะต้องพิสูจน์ว่า AC เป็นด้านยาวที่สุดพิสูจน์ รูป $\triangle$ หนึ่งต้องมีมุมแหลมอย่าง

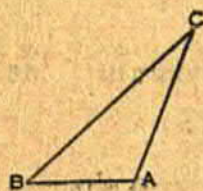
น้อยสองมุมเสมอ

 $\therefore ABC$ ซึ่งเป็นมุมฉากก็เป็นมุมใหญ่ที่สุด $\therefore AC$ ด้านตรงข้ามมุมฉากก็เป็นด้านยาวที่สุด

(ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

Q.E.D.

๒. จงพิสูจน์ว่าด้านยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมทำมุมแหลมกับด้านอื่นอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยม.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หนึ่ง BC เป็นด้านยาวที่สุดจะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ACB$ กับ $\angle ABC$ เป็นมุมแหลมพิสูจน์ $\therefore BC > AB$ หรือ AC

$\therefore \widehat{BAC} > \widehat{ABC}$ หรือ $\widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๙)

แต่ถ้าหากว่า $\widehat{ABC}$ หรือ $\widehat{ACB}$ เป็นมุมม้าน

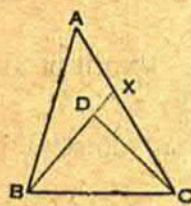
$\widehat{BAC}$ ก็เป็นมุมม้านด้วย

และ $\therefore \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$ ก็ใหญ่กว่า ๒ irect ซึ่งเป็นไปได้ตาม
บทแทรกที่ ๑ ของทฤษฎีบทที่ ๘

$\therefore \widehat{ABC}$ หรือ $\widehat{ACB}$ ก็เป็นมุมแหลม

Q.E.D.

๓. ถ้าลากเส้นตรงสองเส้น จากปลายทั้ง สอง ข้างของ ด้าน ใดๆ
หนึ่งของ $\triangle$ ไปยังจุดๆ หนึ่ง ในรูปสามเหลี่ยมนั้น จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง
ทั้งสองเส้นรวมกันเข้าจะสั้นกว่าด้านอื่นอีกสองด้านของ $\triangle$ รวมกัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

BD, CD เป็นเส้นตรงซึ่งลากจาก B และ C

ไปยัง D จุดภายใน $\triangle ABC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $BA + AC > BD + DC$

พิสูจน์ คือ BD ตรงออกไปพบ AC ที่ X

จาก $\triangle DXC$, $DX + XC > DC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

เอา BD บวกเข้าทั้งสองข้าง $\therefore DX + XC + BD > BD + DC$

หรือ $BX + XC > BD + DC$

จาก $\triangle BAX$, $BA + AX > BX$

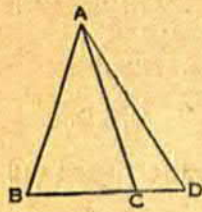
เอา XC บวกเข้าทั้งสองข้าง $\therefore BA + AX + XC > BX + XC$

หรือ $BA + AC > BX + XC$

$$\therefore BA + AC > BD + DC$$

Q.E.D.

๔. ถ้าข้อ BC ซึ่งเป็นฐานของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC ไปที่จุด D คงพิสูจน์ว่า AD ยาวกว่าด้านเท่าใดด้านหนึ่งของรูป $\triangle$ หน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง
BC เป็นฐานซึ่งถูกคั่นตรงไปถึงจุด D

ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า $AD > AC$ หรือ AB

พิสูจน์ $\because AB = AC$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และจาก $\triangle ACD$, มุมภายนอก $\angle ACB >$ มุมภายใน $\angle ADC$
(ทฤษฎีบทที่ ๘)

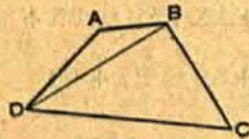
$\therefore \angle ABD$ ก็ใหญ่กว่า $\angle ADB$ ด้วย

$\therefore AD$ ก็ยาวกว่า AB (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

$\therefore AD > AC$ หรือ AB

Q.E.D.

๕. รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวที่สุดและสั้นที่สุดอยู่ตรงกันข้าม คงพิสูจน์ว่า มุมต่อมุมซึ่งอยู่ประชิดกับด้านสั้นที่สุดต่างก็
จะใหญ่กว่ามุมตรงข้ามของมัน



กำหนดให้ ABCD เป็น $\square$ รูปหนึ่ง
ซึ่งมี AB เป็นด้านสั้นที่สุด CD ยาวที่สุด

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{ABC} > \widehat{ADC}$ หรือ $\widehat{BAD} > \widehat{BCD}$
 พิสูจน์ ถ้าก BD

$$\therefore DA > AB \text{ (โคทย์)}$$

$$\therefore \widehat{ABD} > \widehat{ADB} \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๘)}$$

และ $\therefore DC > BC \text{ (โคทย์)}$

$$\therefore \widehat{DBC} > \widehat{BDC} \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๘)}$$

$$\therefore \widehat{ABD} + \widehat{DBC} > \widehat{ADB} + \widehat{BDC}$$

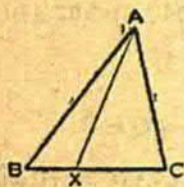
คือ $\widehat{ABC} > \widehat{ADC}$

ในทำนองเดียวกันถ้าลาก AC ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\widehat{BAD} > \widehat{BCD}$$

Q.E.D.

๖. รูป $\triangle ABC$ ถ้าด้าน AC ไม่ยาวกว่า AB จงพิสูจน์ว่า
 เส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งลากจากจุดยอด A ไปยังฐาน BC ยาวกว่า AB



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

ซึ่ง AC ไม่ยาวกว่า AB

จาก A ลาก AX พบ BC ที่ X

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB > AX$

พิสูจน์ $\therefore AC$ ไม่ยาวกว่า AB

$\therefore AC$ อาจเท่ากับ AB หรือสั้นกว่าก็ได้

ถ้า $AC = AB$, $\therefore \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และถ้า $AC < AB$, $\therefore \widehat{ACB} > \widehat{ABC}$ („ „ ๘)

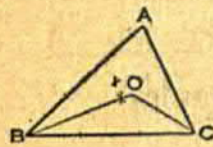
แต่มุมภายนอก $\widehat{AXB} >$ มุมภายใน $\widehat{ACB}$ („ „ ๘)

$\therefore \widehat{AXB}$ ก็ใหญ่กว่า $\widehat{ABC}$ ด้วย

$\therefore AB$ ก็ยาวกว่า AX (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

Q.E.D.

๗. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี OB, OC แบ่งครึ่ง $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่าถ้า AB ยาวกว่า AC เส้นแบ่ง OB ต้องยาวกว่า OC ด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB > AC, BO$ และ OC เป็นเส้นแบ่งครึ่ง B และ C

จะต้องพิสูจน์ว่า $BO > OC$

พิสูจน์ $\therefore AB > AC$ (โจทย์)

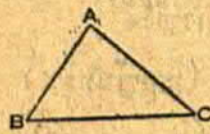
$\therefore \widehat{ACB} > \widehat{ABC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๙)

$\therefore \widehat{OCB} > \widehat{OBC}$ (ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของ $\widehat{ACB}$ และ $\widehat{ABC}$)

$\therefore OB > OC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

Q.E.D.

๘. จงพิสูจน์ว่าผลต่างของ ด้าน สอง ด้าน ของ รูป $\triangle$ รูปหนึ่ง จะสั้นกว่าด้านที่สาม



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องพิสูจน์ว่า $BC - AC < AB$

พิสูจน์ $\therefore BC < AB + AC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

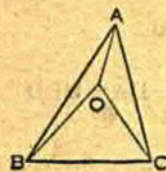
เอา AC หักออกจากสองทาง

$$\therefore BC - AC < AB + AC - AC$$

$$\text{คือ } BC - AC < AB$$

Q.E.D.

๙. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของ ระยะระหว่างจุด ๆ หนึ่งภายในรูป $\triangle$ กับจุดที่มุมทั้งสามของรูป $\triangle$ จะยาวกว่าครึ่งหนึ่งของเส้นดั้มรอบ (Perimeter) ของรูป $\triangle$ นั้น



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

O เป็นจุดภายในใด ๆ

ลาก AO, OC, OB

$$\text{จะต้องพิสูจน์ว่า } OA + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

$$\text{พิสูจน์ ใน } \triangle OAB, OA + OB > AB \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๑})$$

$$\text{ใน } \triangle OBC, OB + OC > BC \quad (,, ,, ๑๑)$$

$$\text{ใน } \triangle OCA, OC + OA > CA \quad (,, ,, ๑๑)$$

เอาทั้งสามบรรทัดนี้รวมกัน

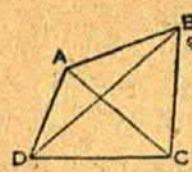
$$\therefore OA + OB + OB + OC + OC + OA > AB + BC + CA$$

$$2OA + 2OB + 2OC > AB + BC + CA$$

$$\therefore OA + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

Q.E.D.

๑๐. จงพิสูจน์ว่า เส้นดั้มรอบของรูปสี่เหลี่ยมจะยาวกว่าผลบวกของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมนั้น



กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี
 AC, DB เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB+BC+CD+DA > AC+BD$

พิสูจน์ จาก $\triangle ABC$

$$AB+BC > AC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๑})$$

$$\text{และจาก } \triangle ADC, CD+DA < AC$$

$$\therefore (\text{บวกกัน}) \quad AB+BC+CD+DA > 2AC$$

ในทำนองเดียวกันหาพิสูจน์ได้ว่า $AB+BC+CD+DA > 2BD$

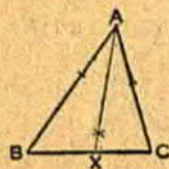
$\therefore$ โดยวิธีบวกกัน

$$2(AB+BC+CD+DA) > 2(AC+BD)$$

$$\therefore AB+BC+CD+DA > AC+BD$$

Q.E.D.

๑๑. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มีเส้นตรงเส้นหนึ่งแบ่งครึ่งมุม
 ยอด BAC และพบ BC ที่ X จงพิสูจน์ว่า AB ยาวกว่า BX และ AC
 ยาวกว่า CX และจงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๑๑ ไปด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

AX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A พบ BC ที่ X

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $AB > BX$

$$(๒) \quad AC > CX \quad \text{และ} \quad (๓) \quad AB+AC > BC$$

พิสูจน์ (๑) $\therefore$ มุมภายนอก $AXC > BAX$ (ทฤษฎีบทที่ ๘)

แต่ $\widehat{BAX} = \widehat{XAC}$ (โจทย์)

$\therefore \widehat{AXC} > \widehat{XAC}$ ด้วย

$\therefore AC > CX$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

(๒) ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

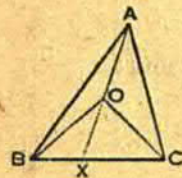
$$AB > BX$$

(๓) บวกกัน $AB + AC > CX + XB$

$$\therefore AB + AC > BC$$

Q.E.D.

๑๒. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของระยะระหว่างจุดจุดหนึ่งในรูป $\triangle$ รูปหนึ่งกับจุดที่มุมทั้งสามของรูป $\triangle$ นั้น จะสั้นกว่าเส้นล้อมรอบของรูป $\triangle$ นั้น



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

O เป็นจุดใด ๆ ใน $\triangle ABC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $OA + OB + OC < AB + BC + CA$

พิสูจน์ ค่อย AO ต่ตรงออกไปพบ BC ที่ X

$\therefore AC + CX > AX$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

เอา BX บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\therefore AC + CX + BX > AX + BX$$

$$\text{หรือ } AC + CB > AX + BX$$

และ $OX + XB > OB$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

เอา OA บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\therefore AX + XB > AO + OB$$

$$\therefore AC + CB > AO + OB$$

$$\text{หรือ } AO + OB < AC + CB$$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า $BO + OC < BA + CA$

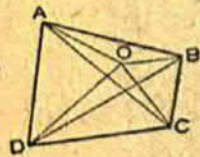
$$\text{และ } CO + OA < BA + BC$$

$$\text{บวกผลทั้งสามได้ } 2(OA + OB + OC) < 2(AB + BC + CA)$$

$$\therefore OA + OB + OC < AB + BC + CA$$

Q.E.D.

๑๓. จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจะสั้นกว่าผลบวกของเส้นตรงที่ลากจากมุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม มายังจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง และมีช้อยกเว้นประการใดบ้าง จงยกมาแสดงไว้ด้วย



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

O เป็นจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง

AC, BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า $BD + AC < OA + OB + OC + OD$

พิสูจน์ $\therefore OA + OC > AC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

และ $BO + OD > DB$ (,, ,, ๑๑)

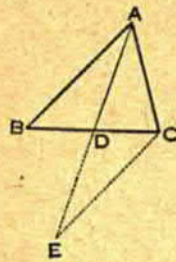
บวกกัน $OA + OC + OB + OD > AC + DB$

หรือ $AC + BD < OA + OC + OB + OD$

ช้อยกเว้นก็คือเมื่อจุด O มาอยู่ตรงเส้นทแยงมุมใดก็ตาม

Q.E.D.

๑๔. จงพิสูจน์ว่า ด้านสองด้านของรูป $\triangle$ รวมกันเข้าจะยาวกว่า ๒ เท่าของเส้นที่แบ่งครึ่งด้านที่สาม (ให้ข้อเส้นมีเส้นและสร้างรูปทำนองทฤษฎีบทที่ ๘)



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 AD เป็นเส้นมีเส้นแบ่งครึ่ง BC ที่จุด D
 จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + AC > 2AD$
 พิสูจน์ คือ AD ตรงออกไปถึงจุด E

ทำ DE ให้เท่ากับ AD

ลาก EC

ใน $\triangle ADB$ กับ $\triangle EDC$

$$\therefore \begin{cases} AD = DE & (\text{สร้าง}) \\ \angle ADB = \angle EDC & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \\ BD = DC & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB = \triangle EDC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

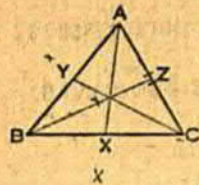
$$\therefore AB = CE$$

$$\text{แต่ } AC + CE > AE \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๑})$$

$$\therefore AC + AB > 2AD$$

Q. E. D.

๑๕. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นมีเส้นของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะสั้นกว่าเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนั้น.



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

มี AX, BZ, CY เป็นเส้นมีเดียน

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + BC + CA >$

$$AX + BZ + CY$$

พิสูจน์ $\therefore AB + AC > 2AX$ (โดยข้อ ๑๔)

และทำนองเดียวกัน $BA + BC > 2BZ$

และ $AC + CB > 2CY$

โดยบวกกัน

$$\therefore 2(AB + BC + CA) > 2(AX + BZ + CY)$$

$$\therefore AB + BC + CA > AX + BZ + CY$$

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๘

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๕ แล้ว

๑. ในรูปของทฤษฎีบทที่ ๑๕ ถ้า $\angle EGB = 55^\circ$ ถามว่า

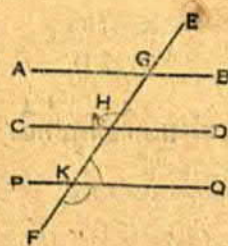
$\angle HIC, \angle HKQ, \angle QKF$ จะกางมุมละกี่องศา

วิธีทำ $\angle EGB$ กับ $\angle BGH$ เป็นมุมประกอบสอง

มุมฉากกัน

แต่ $\angle EGB = 55^\circ$

$$\therefore \angle BGH = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$



และ $\therefore AB // CD, GH$ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\widehat{BGH} = \widehat{GHC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore \widehat{GHC} = ๑๒๕^{\circ}$ ตอบ

และ $\therefore AB // PQ, EF$ เป็นเส้นตัด

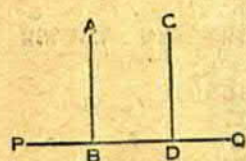
$\therefore$ มุมภายในนอก $\widehat{EGB} =$ มุมภายใน $\widehat{HKQ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore \widehat{HKQ} = ๕๕^{\circ}$ ตอบ

และ $\widehat{HKQ}$ กับ $\widehat{QKF}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน.

$\therefore \widehat{QKF} = ๑๘๐^{\circ} - ๕๕^{\circ} = ๑๒๕^{\circ}$ ตอบ

๒. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงทั้งหลายซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง
เส้นตรงเหล่านั้นย่อมขนานซึ่งกันและกัน.



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้น
ซึ่งตั้งฉากบน PQ ที่จุด B และ D

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB // CD$

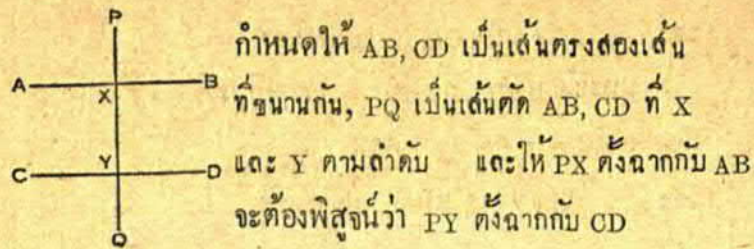
พิสูจน์ $\therefore \widehat{ABP}, \widehat{CDB}$ เป็นมุมฉาก (โจทย์)

$\therefore \widehat{ABP} = \widehat{CDB}$

$\therefore AB // CD$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

Q. E. D

๓. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงขนานสองเส้น หรือมากกว่า
นั้น และจะได้ฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่งของเส้นขนานเหล่านั้น จง
พิสูจน์ว่าเส้นตรงเส้นนั้นตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นอื่นๆ ด้วย.



พิสูจน์ $\therefore AB \parallel CD$, PQ เป็นเส้นตัด

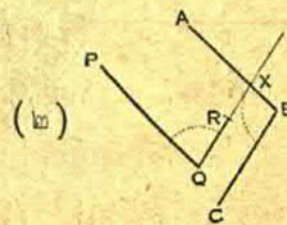
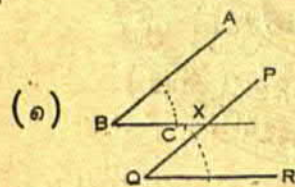
$\therefore$ มุมภายนอก $\widehat{PXB} =$ มุมภายใน $\widehat{PYD}$

แต่ $\widehat{PXB}$ เป็นมุมฉาก (โจทย์)

$\therefore \widehat{PYD}$ ก็เป็นมุมฉากด้วย

Q.E.D.

๔. จงพิสูจน์ว่า มุมซึ่งมีแขนขนานกันแขนต่อแขน จะเท่ากัน หรือมีนิยามก็เป็นมุมประกอบของมุมฉากซึ่งกันและกัน.



กำหนดให้ ABE, PQR เป็นมุมสองมุม

ซึ่งมีแขน $BA \parallel$ กับ QP

แขน $BC \parallel QR$

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $\widehat{ABC} = \widehat{PQR}$

หรือ (๒) $\widehat{ABC}$ กับ $\widehat{PQR}$ เป็นมุมประกอบของมุมฉากกัน

พิสูจน์ (๑) เมื่อ $\widehat{ABC}$ หรือ $\widehat{PQR}$ เป็นมุมแหลมหรือมุมบ้าน
ด้วยกันทั้งสอง

ต่อด้าน BC ตรงออกไปพบ PQ ที่ X (ถ้าจำเป็น)

$\therefore AB \parallel PQ, BX$ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\widehat{ABX} =$ มุมแย้ง $\widehat{BXQ}$

และ $BC \parallel QR, PQ$ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\widehat{BXQ} =$ มุมแย้ง $\widehat{XQR}$

$\therefore \widehat{ABX}$ หรือ $\widehat{ABC} = \widehat{XQR}$ หรือ $\widehat{PQR}$

(๒) เมื่อ $\widehat{PQR}$ เป็นมุมแหลม, $\widehat{ABC}$ เป็นมุมบ้าน

ต่อ QR ตรงออกไปพบ AB ที่ X (ถ้าจำเป็น)

$\therefore PQ \parallel AB, QX$ เป็นเส้นตัด

มุมแย้ง $\widehat{PQR} =$ มุมแย้ง $\widehat{QXB}$

และ $\therefore QR$ ขนานกับ BC, AB เป็นเส้นตัด

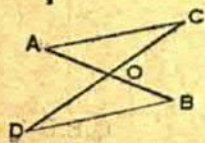
$\therefore$ มุมภายใน $\widehat{QXB}$ กับ $\widehat{XBC}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

(ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore \widehat{PQR}$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $\widehat{ABC}$

Q. E. D.

๕. AB กับ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O,
จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งลากต่อ AC และ BD ขนานกัน



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัด
กันที่จุด O.

ลาก AC, BD

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC \parallel BD$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOC$ กับ $\triangle BOD$

$$\therefore \begin{cases} OA = OB \\ OD = OC \end{cases} \text{ (โจทย์)}$$

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๓)}$$

$$\therefore \widehat{OAC} = \widehat{OBD} \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๔)}$$

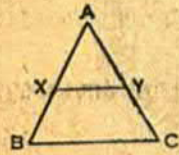
และเป็นมุมแย้งกันด้วย

$$\therefore AC \parallel BD \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)}$$

Q.E.D.

๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากขนานกับด้านฐานของรูป $\triangle$ หน้าจั่ว จะทำมุมเท่ากับด้านทั้งสองของรูปสามเหลี่ยม.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง
ซึ่ง $AB = AC$, XY ลากขนานกับ BC พบ AB, AC
ที่ X และ Y



จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{AXY} = \widehat{AYX}$

พิสูจน์ $\because XY \parallel BC, AB$ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมภายนอก $\widehat{AXY} =$ มุมภายใน $\widehat{ABC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

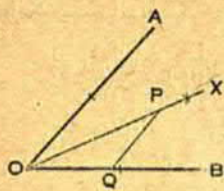
ในทำนองเดียวกัน $\widehat{AYX} = \widehat{ACB}$

แต่ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$$\therefore \widehat{AXY} = \widehat{AYX}$$

Q.E.D.

๗. ถ้าลากเส้นตรงจากจุดๆหนึ่งในเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมหนึ่งให้ชนกับแขนใดแขนหนึ่งของมุมนั้น จงพิสูจน์ว่ารูป - ที่บังเกิดขึ้นนั้นเป็น Δ หน้าจั่ว.



กำหนดให้ $\angle AOB$ เป็นมุมหนึ่ง

OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมนี้

P เป็นจุดๆหนึ่งใน OX

ลาก PQ ให้ชนกับ AO พบ OB ที่ Q

จะต้องพิสูจน์ว่า OQP เป็น Δ หน้าจั่ว

พิสูจน์ $\therefore PQ$ ชนกับ AO, OP เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\angle AOP = \text{มุมแย้ง } \angle OPQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

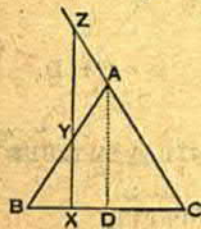
แต่ $\angle AOP = \angle POQ$ (โดยโจทย์)

$\therefore \angle POQ = \angle OPQ$

$\therefore \Delta OQP$ ก็เป็น Δ หน้าจั่ว ซึ่งมี $OQ = QP$

Q.E.D.

๘. จาก X ซึ่งเป็นจุดอยู่บนฐาน BC ของ Δ หน้าจั่ว ABC ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตั้งฉากกับฐานไปตัด AB ที่ Y และตัดเส้น CA ต่อที่ Z จงพิสูจน์ว่า ΔXYZ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น Δ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

BC เป็นฐาน, X เป็นจุดใดๆในฐาน BC

ลาก XYZ ให้ตั้งได้ฉากกับ BC และตัด AB ที่ Y

และพบ CA ต่อที่ Z

จะต้องพิสูจน์ว่า AZY เป็น Δ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ถ้าก AD ให้แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$ และพบฐาน BC ที่ D

ใน ΔBAD กับ ΔCAD

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{โจทย์}) \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} & (\text{สร้าง}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \widehat{ADB} = \widehat{ADC} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน

$$\therefore AD \text{ ตั้งฉากกับ } BC$$

$$\therefore ZYX \text{ ถี่ขนานกับ } AD \quad (\text{เพราะต่างก็ตั้งได้ฉากกับ } BC)$$

และมี BA เป็นเส้นตัด

$$\therefore \text{มุมแย้ง } \widehat{ZYA} = \widehat{YAD} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๔})$$

และมี ZC เป็นเส้นตัด

$$\text{มุมภายนอก } \widehat{DAC} = \text{มุมภายใน } \widehat{YZA} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๔})$$

$$\text{แต่ } \widehat{BAD} \text{ หรือ } \widehat{YAD} = \widehat{DAC} \quad (\text{โจทย์})$$

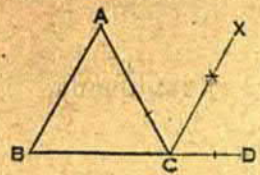
$$\therefore \widehat{ZYA} = \widehat{AZY}$$

$$\therefore AY = AZ \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๖})$$

$$\therefore \Delta AZY \text{ เป็น } \Delta \text{ หน้าจั่ว}$$

Q.E.D.

๔. ถ้าเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งมุมภายนอกของรูป Δ ขนานกับด้านตรงข้าม จงพิสูจน์ว่า Δ รูปนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
ซึ่งฐาน BC ถูกต่อออกไปถึงจุด D
ให้ CX แบ่งครึ่ง $\widehat{ACD}$ และขนานกับ AB ด้วย

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ $\because BA \parallel CX, BD$ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมภายใน $\widehat{ABC} =$ มุมภายนอก $\widehat{XCD}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ AC เป็นเส้นตัด

มุมแย้ง $\widehat{BAC} = \widehat{ACX}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $\widehat{ACX} = \widehat{XCD}$ (โดย)

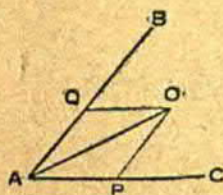
$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{BAC}$

$\therefore BC = AC$

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๑๐. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงสองเส้นซึ่งลากจากจุดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งมุม ต่างก็ให้รนาทกับแขนของมุมนั้นและไปจดแขนของมุมนั้นจะเท่ากัน และจงพิสูจน์ว่ารูป $\square$ ที่เกิดขึ้นจะเป็น $\square$ ขนมหัศวง



กำหนดให้ $\angle BAC$ เป็นมุมหนึ่ง

OA เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมนั้น

O เป็นจุดจุดหนึ่งบน OA

ลาก OP, OQ ขนานกับ BA, AC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $OQ = OP$

(๒) $\square APOQ$ เป็น $\square$ ขนมเบี้ยกปุน

พิสูจน์ $\because QO \parallel AP, AO$ เป็นเส้นตัด

มุมแย้ง $\widehat{QOA} = \widehat{OAP}$

และ $\because AQ \parallel PO, AO$ เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{QAO} = \widehat{AOP}$

แต่ $\widehat{QAO} = \widehat{OAP}$ (โจทย์)

$\therefore$ มุมทั้งสี่เท่ากันหมดคือ

$\widehat{QAO} = \widehat{QOA} = \widehat{OAP} = \widehat{AOP}$

ลองคิดว่าถ้าเราพับ $\triangle AOQ$ กับ $\triangle APO$ ตรง AO

เมื่อ $\widehat{QAO} = \widehat{OAP}$, AQ ต้องนอนบน AP

และเมื่อ $\widehat{QOA} = \widehat{AOP}$, OQ ต้องนอนบน OP

Q ซึ่งเป็นจุดร่วมของด้าน AQ กับ OQ ก็ต้องทับตรง P ซึ่งเป็น

จุดร่วมของด้าน AP กับ OP

$\therefore \triangle AOQ$ ก็ทับรูป $\triangle OAP$ สนิทพอดี

$\therefore AQ = AP$ และ $OQ = OP$

แต่ $\widehat{PAO} = \widehat{POA}$ (พิสูจน์มาแต่ก่อน)

$\therefore AP = PO$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

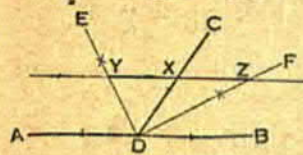
$\therefore AP = PO = OQ = QA$ ทั้ง ๔ ด้าน

$\therefore$ รูป $\square APOQ$ ก็เป็น $\square$ ขนมเบี้ยกปุน

(ยกเว้นถ้า $\widehat{ABC}$ เป็นมุมฉาก รูป $\square APOQ$ ที่เกิดขึ้นจะเป็น $\square$ จตุรัส)

Q.E.D.

๑๑. AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ D และมุมประชิดทั้งสองที่เกิดขึ้นถูกแบ่งครึ่ง ถ้ามีเส้น YXZ ลากจากจุด X ในเส้น CD ให้ขนานกับ AB และไปตัดเส้นแบ่งครึ่งทั้งสองที่ Y และ Z จงพิสูจน์ว่า $XY = XZ$



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรง
สองเส้นตัดกันที่ D

มุมประชิด $\widehat{ADC}, \widehat{CDB}$ ถูกแบ่งครึ่ง

ด้วย DE และ DF ตามลำดับ

X เป็นจุดใด ๆ ใน DC

ลาก YXZ ให้ขนานกับ AB พบ DE, DF ที่ Y และ Z ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = XZ$

พิสูจน์ $\because YX \parallel AB, YD$ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\widehat{XYD} = \widehat{YDA}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $\widehat{YDA} = \widehat{YDX}$ (โจทย์)

$\therefore \widehat{YDX} = \widehat{XYD}$

$\therefore XY = XD$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$XZ = XD$$

$$\therefore XY = XZ$$

Q.E.D.

๑๒. ไม้ตรง PA, QB ตั้งฉาก หมุน อยู่รอบ แกน P และ Q ตามลำดับ PA หมุนได้ ๑๒ รอบใน ๑ นาที QB หมุนได้ ๑๐ รอบใน ๑ นาที ถ้าไม้ตั้งฉากกันและชี้ไปในทางเดียวกันก่อนแล้วจึงหมุน จะใช้เวลานานเท่าใดไม้ทั้งสองจึงจะชนกัน

(๑) โดยชี้ไปในทางตรงข้าม (๒) ชี้ไปทางเดียวกัน



PA หมุน ๑ นาที ๑๒ รอบ
 PA ,, ๑ วินาที $\frac{๑๒}{๖๐} = \frac{๑}{๕}$,,
 ๑ รอบมี ๓๖๐°
 $\therefore \frac{๑}{๕} ,, ,, \frac{๓๖๐}{๕} = ๗๒^{\circ}$

ทำนองเดียวกัน QB หมุน ๑ นาที ๑๐ รอบ

QB ,, ๑ วินาทีได้ $\frac{๑๐}{๖๐} \times ๓๖๐^{\circ} = ๖๐^{\circ}$

ใน ๑ วินาที PA หมุนได้มากกว่า QB $๗๒^{\circ} - ๖๐^{\circ} = ๑๒^{\circ}$

ถ้า PA กับ QB จะหมุนให้ชี้ทางตรงข้ามเมื่อหยุด

และ PA ต้องหมุนให้มากกว่า QB ๑๘๐°

หมุนมากกว่า ๑๒° ในเวลา ๑ วินาที

,, ,, $๑๘๐^{\circ} ,, \frac{๑๘๐}{๑๒} = ๑๕$ วินาที ตอบ

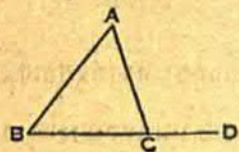
และถ้า PA จะหมุนให้กลับมายู่ทางเดียวกับ QB, PA ต้องหมุนให้มากกว่า QB ๓๖๐°

$\therefore$ ใน ๓๖๐° ต้องหมุนกินเวลา $\frac{๓๖๐}{๑๒} = ๓๐$ วินาที ตอบ

แบบฝึกหัดที่ ๗

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๖ แล้ว

๑. ต่อด้าน BC ของรูป $\triangle ABC$ ไปที่ D และถ้ามุมภายนอก $\angle ACD = 134^\circ$ และ $\angle BAC = 42^\circ$ จงหามุมภายในของรูป $\triangle$ ต้องมุมว่ามุมใดของค่า

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

BC ถูกต่อตรงไปถึงจุด D

ถ้า $\angle ACD = 134^\circ$, $\angle BAC = 42^\circ$ จะต้องหาว่า $\angle ABC$, $\angle ACB$ ตามมุมละเท่าใดวิธีหา $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

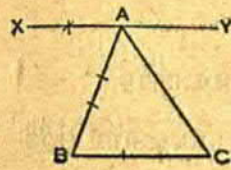
$$\therefore \angle ABC = \angle ACD - \angle CAB$$

$$= 134^\circ - 42^\circ = 92^\circ \quad \text{ตอบ}$$

และ $\angle ACB$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $\angle ACD$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ \quad \text{ตอบ}$$

๒. จงพิสูจน์ว่า มุมทั้งสามของรูป $\triangle$ รวมกันเข้าย่อมเท่ากับสองมุมฉาก โดยลากเส้นให้ผ่านจุดยอดขนานกับฐาน

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งจะต้องพิสูจน์ โดยลาก XY ขนานกับ BC ว่า

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

พิสูจน์ $\because XY$ ขนานกับ BC , AB เป็นเส้นตัด

$$\therefore \text{มุมแย้ง } \angle XAB = \angle ABC$$

และในทำนองเดียวกันมุมแย้ง $\widehat{YAC} = \widehat{ACB}$

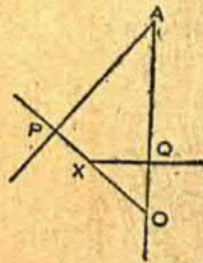
$$\therefore \widehat{XAB} + \widehat{BAC} + \widehat{YAC} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

$$\text{แต่ } \widehat{XAB} + \widehat{BAC} + \widehat{YAC} = 180^\circ \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑})$$

$$\therefore \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

Q.E.D.

๓. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงอื่นสองเส้นเส้นต่อเส้น
จงพิสูจน์ว่ามุมแหลมระหว่างเส้นตรงคู่แรก เท่ากับ มุมแหลมระหว่าง
เส้นตรงคู่หลัง



กำหนดให้ AP, AQ เป็นเส้นตรงสองเส้น
ตั้งฉากกับ XP, XQ ที่ P และ Q ตามลำดับ
และที่ A ให้เป็นมุมแหลม

ต่อ PX ตรงไปพบ AQ ต่อ (ถ้าจำเป็น) ที่ O
จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{PAQ} = \widehat{QXO}$

พิสูจน์ $\therefore \widehat{XQO}$ เป็นมุมฉาก

$\therefore \widehat{QXO}$ กับ $\widehat{QOX}$ เป็นมุมประกอบมุมฉาก

และ $\therefore \widehat{APX}$ เป็นมุมฉาก

$\therefore \widehat{PAO}$ กับ $\widehat{QOX}$ ก็เป็นมุมประกอบมุมฉากด้วย

$\therefore \widehat{QXO}$ กับ $\widehat{PAO}$ ต่างก็เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{QOX}$

$$\therefore \widehat{PAQ} = \widehat{QXO}$$

Q.E.D.

๔. จงหาว่ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าต่อไปนี้จะมีมุมภายในกี่องศา (๑) ๖ ด้าน (๒) ๘ ด้าน (๓) ๑๐ ด้าน

เมื่อ N เป็นจำนวนด้าน D เป็นจำนวนของมุมภายใน

$$\begin{aligned} \text{(๑) ตามสูตร } ND + ๓๖๐^{\circ} &= N \times ๑๘๐^{\circ} \\ ๖D + ๓๖๐^{\circ} &= ๖ \times ๑๘๐^{\circ} \\ ๖D + ๓๖๐^{\circ} &= ๑๐๘๐^{\circ} \\ ๖D &= ๑๐๘๐^{\circ} - ๓๖๐^{\circ} \\ &= ๗๒๐^{\circ} \\ \therefore D &= ๑๒๐^{\circ} \quad \underline{\text{ตอบ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(๒) } ND + ๓๖๐^{\circ} &= N \times ๑๘๐^{\circ} \\ ๘D + ๓๖๐^{\circ} &= ๘ \times ๑๘๐^{\circ} \\ ๘D &= ๑๔๔๐^{\circ} - ๓๖๐^{\circ} \\ \therefore D &= \frac{๑๐๘๐}{๘} = ๑๓๕^{\circ} \quad \underline{\text{ตอบ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(๓) } ND &= N \times ๑๘๐^{\circ} - ๓๖๐^{\circ} \\ ๑๐D &= ๑๐ \times ๑๘๐^{\circ} - ๓๖๐^{\circ} \\ \therefore D &= \frac{๑๔๔๐}{๑๐} = ๑๔๔^{\circ} \quad \underline{\text{ตอบ}} \end{aligned}$$

๕. ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มุมที่ B และ C ทางสองเท่า และด้านเท่าของมุมที่ A มุมเหล่านี้จะกางมุมใดกี่องศา

$$B = ๒A, C = ๓A$$

$$A + B + C = A + ๒A + ๓A = ๖A = ๑๘๐^{\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore A &= 30^\circ \\ B &= 30 \times 2 = 60^\circ \\ C &= 30 \times 3 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \text{ตอบ}$$

๖. มุมของ $\triangle$ หน้าจั่วเหล่านี้นางมุมละกี่องศา

(๑) มุมที่ฐานมุมหนึ่ง ๆ เป็นสองเท่าของมุมยอด

(๒) มุมที่ฐานมุมหนึ่ง ๆ เป็นสี่เท่าของมุมยอด

ให้ A เป็นมุมยอด, B และ C เป็นมุมที่ฐาน

(๑) $B=C=2A, \therefore A+B+C = A+2A+2A=5A=180^\circ$

$\therefore 5A=180^\circ \quad \therefore A=36^\circ, \quad \therefore B=C=72^\circ$

(๒) $B=C=4A, \therefore A+B+C = A+4A+4A=9A$

$\therefore 9A=180^\circ, \quad A=20^\circ$

$\therefore B=C=80^\circ$

๗. ถ้าตัดด้านฐานของ $\triangle$ ตรงออกไปทั้งสองข้าง และมุมภายนอกเป็น 95° และ 126° จงหามุมยอด แล้วสร้างรูป $\triangle$ ให้มีขนาดตามที่กล่าวมานี้ แล้ววัดดูผลที่ได้ว่าจะจริงหรือไม่

วิธีสร้าง ถากเส้นตรง AB ใด ๆ ให้ยาวพอสมควร

ที่ P ใน AB ทำ $\angle APK=95^\circ$, และที่ Q ใน BP ทำ $\angle BQL=126^\circ$

ถ้า PK กับ QL ตัดกันที่ R

PQR เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

มุมภายในที่ P และ Q ต่างก็เป็นมุมประกอบ ของมุมฉากกับมุม 95° และ 126° ตามลำดับ

$$\therefore \text{มุมภายใน } P = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$$

$$,, \quad Q = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$$

$$\text{จากนั้น } R = 180^\circ - (86^\circ + 54^\circ) = 40^\circ$$

๘. มุมที่ฐานของ Δ รวมกันเข้าเป็น 122° และผลต่างกันเป็น 60° จงหามุมทั้งสามของรูป Δ

ให้ A เป็นมุมยอด B, C เป็นมุมที่ฐาน

$$B + C = 122^\circ, B - C = 60^\circ$$

$$\therefore A = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$$

$$B + C = 122^\circ$$

$$B - C = 60^\circ$$

$$\text{บวกกัน } 2B = 182^\circ$$

$$\therefore B = 91^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore C &= 122^\circ - 91^\circ \\ &= 31^\circ \end{aligned}$$

๙. มุมที่ฐานของ Δ เป็น 84° และ 62° จงหา (๑) มุมยอด
(๒) มุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมที่ฐาน แล้วต่อบนจุดที่ได้โดยสร้างรูปและวัด.

ให้เส้นแบ่งครึ่งมุม B, C พบกันที่ K

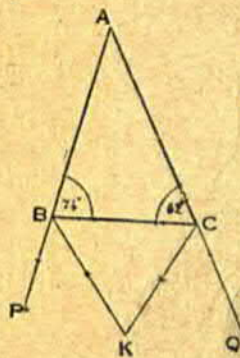
$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (84^\circ + 62^\circ) = 34^\circ$$

$$\widehat{KBC} = \frac{B}{2} = 42^\circ \text{ และ } \widehat{KCB} = \frac{C}{2} = 31^\circ$$

$$\therefore \widehat{BKC} = 180^\circ - (42^\circ + 31^\circ) = 107^\circ$$

(ให้นักเรียนสร้างรูปเองให้ถูก)

๑๐. มุมที่ B และ C ของ $\triangle ABC$ เป็น 74° และ 62° ถ้าต่อ AB, AC ออกไปจนหามุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก แล้วสร้างรูปสอบดูผลที่ได้ว่าจริงหรือไม่.



กำหนดให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่ง
มี $\widehat{B} = 74^\circ$, $\widehat{C} = 62^\circ$ และ AB, AC ถูกต่อ
ตรงออกไปถึง P และ Q แบ่งครึ่งมุม $\widehat{PBC}$,
 $\widehat{QCB}$ ด้วยเส้น BK, CK พบกันที่ K

$$\therefore \widehat{PBC} = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

$$\therefore \widehat{KBC} = 53^\circ$$

$$\text{และ } \widehat{QCB} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ, \therefore \widehat{KCB} = 59^\circ$$

$$\therefore \widehat{BKC} = 180^\circ - (53^\circ + 59^\circ) = 68^\circ$$

(ให้นักเรียนสร้างรูปให้ถูก)

๑๑. มุมสามมุมของ $\square$ รูปหนึ่งเป็น $114\frac{1}{2}^\circ$, 50° , และ $75\frac{1}{2}^\circ$
จงหามุมที่สี่ว่าเท่ากี่องศา

สมมติให้มุมที่สี่ทาง r องศา

$$\therefore 114\frac{1}{2}^\circ + 50^\circ + 75\frac{1}{2}^\circ + r = 4 \times 90^\circ$$

$$\therefore r + 240^\circ = 360^\circ$$

$$r = 120^\circ$$

๑๒. ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง มุมที่ B, C และ D เท่ากับ ๒A, ๓A, และ ๔A ตามลำดับ จงหามุมเหล่านั้นทุกมุมว่ามีมุมตรงกับของค่า.

$$A + B + C + D = ๓๖๐^{\circ}$$

$$\therefore A + ๒A + ๓A + ๔A = ๓๖๐^{\circ}$$

$$๑๐A = ๓๖๐^{\circ}$$

$$\therefore A = ๓๖^{\circ}$$

$$B = ๗๒^{\circ}, C = ๑๐๘^{\circ}, D = ๑๔๔^{\circ}$$

๑๓. มุมสี่มุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านไม่เท่าเป็น ๔๐° , ๗๘° , ๑๒๒° , และ ๑๓๕° จงหามุมที่ห้า.

$$\text{ตามสูตร มุมภายใน } n \text{ มุม} + ๔ \text{ มุมฉาก} = ๒n \text{ มุมฉาก}$$

$$๔๐^{\circ} + ๗๘^{\circ} + ๑๒๒^{\circ} + ๑๓๕^{\circ} + r^{\circ} + ๔ \text{ มุมฉาก} = ๒ \times ๕,$$

$$\therefore r^{\circ} + ๓๗๕^{\circ} + ๔ \text{ มุมฉาก} = ๑๐ \text{ มุมฉาก}$$

$$r^{\circ} + ๓๗๕^{\circ} = ๖ \text{ มุมฉาก}$$

$$r = ๕๔๐^{\circ} - ๓๗๕^{\circ}$$

$$\therefore \text{มุมที่ห้า} = ๑๖๕^{\circ} \quad \text{ตอบ}$$

๑๔. จากรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมี n ด้าน จงพิสูจน์ว่ามุมๆ หนึ่งเป็น $\frac{๒(n-๒)}{n}$ มุมฉาก (๑) พิสูจน์โดยบทแทรกที่ ๑ ของ ทฤษฎีบทที่ ๑๖ (๒) โดยลากเส้นจากจุดยอด A ไปยัง จุดอื่นๆ (เว้นแต่จุดยอดของจุดที่อยู่ถัด A ไป) การลากเส้นออกไป เหล่านี้จะแบ่งรูปหลายเหลี่ยมออกเป็นรูป $\Delta n - ๒$ รูป

(๑) n แทนจำนวนด้าน, D แทนจำนวนของค่าต่อมุม

ตามสูตร $nD + 4 \lfloor n = 2n \rfloor n$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖ เทรค ๑)

$$nD = (2n - 4) \lfloor n$$

$$D = \frac{2n - 4}{n} \text{ มุมฉาก}$$

$$= \frac{2(n - 2)}{n} \text{ มุมฉาก}$$

(๒) เมื่อตัดเป็น Δ จะได้จำนวนรูป $n - 2$ รูป

$$\Delta \text{ ๑ รูปมี } 2 \lfloor n$$

$$\Delta (n - 2) \text{ รูปมี } 2 (n - 2) \lfloor n$$

$\therefore$ มุมของรูป n ด้านทุกมุมรวมกันได้ $2(n - 2)$ มุมฉาก

$\therefore$ มุม ๑ มุมกว้าง $\frac{2(n - 2)}{n}$ มุมฉาก

๑๕. รูปหลายเหลี่ยมจะมีด้านกี่ด้าน ถ้ามุมหนึ่งๆ เป็น

(๑) 108° , (๒) 156°

ให้ n แทนด้าน, D แทนของค่าต่อมุม

(๑) ตามสูตร $nD + 360^\circ = 2n$ มุมฉาก

$$n \times 108^\circ + 360^\circ = 2n \text{ มุมฉาก}$$

$$108^\circ n + 360^\circ = 180^\circ n$$

$$180^\circ n - 108^\circ n = 360^\circ$$

$$72^\circ n = 360^\circ$$

$$n = 5 \text{ ด้าน} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

(๒) $n \times 156^\circ + 360^\circ = n \times 180^\circ$

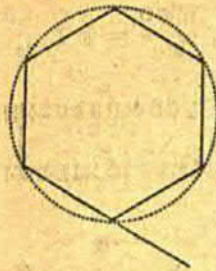
$$180^\circ n - 156^\circ n = 360^\circ$$

๖๑

$$24n = 360^\circ$$

$$n = 15 \text{ ด้าน } \underline{\text{ตอบ}}$$

๑๖. ถ้าต่อด้าน ๆ หนึ่งของรูป ๖ เหลี่ยมด้านเท่าตรงออกไป
จงพิสูจน์ว่า มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในของสามเหลี่ยมด้านเท่า.



ถ้าต่อด้านของรูป ๖ เหลี่ยมด้านเท่าตรงออกไป
ไปทางเดียวกันทุกด้านแล้ว มุมภายนอก ๖ มุม
จะเท่ากับ 360°

(โดยบทแทรกที่ ๒ ของทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$$\therefore \text{มุมภายนอก ๖ มุม} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\text{แต่มุมหนึ่งของ } \triangle \text{ ด้านเท่าภายในมุม} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$\therefore$ มุมภายนอกมุมหนึ่งก็เท่ากับมุมหนึ่งของรูป $\triangle$ ด้านเท่า
Q.E.D.

๑๗. จงหาขนาดของมุมภายนอกของ (๑) รูปแปดเหลี่ยม
ด้านเท่า (๒) สี่เหลี่ยมด้านเท่า ว่าเป็นมุมกี่องศา.

$$(๑) \text{ มุมภายนอก ๘ มุม} = 360^\circ \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖ แทรก ๒)}$$

$$,, \text{ ๑ } ,, = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$(๒) \text{ มุมภายนอก ๔ มุม} = 360^\circ$$

$$,, \text{ ๑ } ,, = 90^\circ$$

๑๘. ถ้ามุมภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าเป็น (๑) 30°

(๒) ๒๔° ถ้าว่ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มี ๒๔ ด้าน.

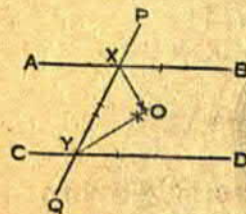
(๑) มุมภายนอก ๓๐° ด้านของรูปเหลี่ยมมี ๑ ด้าน

,, ,, ๓๖๐° ,, ,, ,, $\frac{๓๖๐}{๓๐} = ๑๒$,,

(๒) มุมภายนอก ๒๔° ด้านของรูปเหลี่ยมมี ๑ ด้าน

,, ,, ๓๖๐° ,, ,, ,, $\frac{๓๖๐}{๒๔} = ๑๕$,,

๑๕. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งพบกับเส้นตรงขนานสองเส้นและมุมภายในสองมุมข้างเดียวกันของเส้นตัดถูกแบ่งครึ่งทั้งสอง เส้นแบ่งครึ่งทั้งสองนั้นจะพบกันเป็นมุมฉาก.



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานสองเส้น
 PQ เป็นเส้นตัด AB ที่ X และ CD ที่ Y ;
 XO, YO เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BXY, \angle XYD$ ตามลำดับ พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle XOY$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\angle BXY + \angle XYD = ๑๘๐^{\circ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ $\angle OXY, \angle XYO$ ต่างก็เป็น $\frac{๑}{๒}$ ของ $\angle BXY, \angle XYD$ (โจทย์)

$\therefore \angle OXY + \angle XYO = ๙๐^{\circ}$

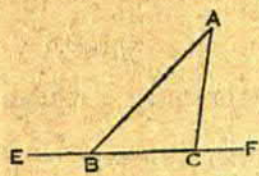
และ $\therefore \angle OXY + \angle XYO + \angle XOY = ๑๘๐^{\circ}$

$\therefore \angle XOY = ๙๐^{\circ}$

Q.E.D.

๒๐. ถ้าต่อด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมออกไปทั้งสองข้าง จง

พิสูจน์ว่าผลบวกของมุมภายนอกของมุมใดมุมหนึ่งด้วยมุมยอดของรูป $\triangle$ นั้น จะเท่ากับ ๒ มุมฉาก.



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

ฐาน BC ถูกต่อไปถึงสองทางถึง E และ F

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{EBA} + \widehat{ACF} - \widehat{BAC} = 180^\circ$

พิสูจน์ $\therefore \widehat{EBA} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

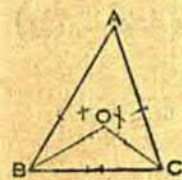
และ $\widehat{ACF} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$

$\therefore \widehat{EBA} + \widehat{ACF} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$
 $= \widehat{BAC} + 180^\circ$

$\therefore \widehat{EBA} + \widehat{ACF} - \widehat{BAC} = 180^\circ$

Q.E.D.

๒๑. รูป $\triangle ABC$ มุมที่ฐาน B และ C ถูกแบ่งครึ่งด้วย BO และ CO ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{A}{2}$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

$\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ ถูกแบ่งครึ่งด้วย BO , CO พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{A}{2}$

พิสูจน์ $\widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ$

$\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{OBC} - \widehat{OCB}$

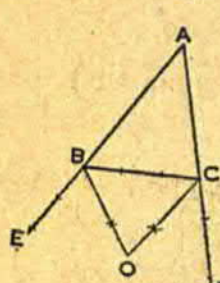
$= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC})$

$$\begin{aligned}
 &= 180^\circ - 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} \\
 &= 90^\circ + \frac{A}{2}
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

๒๒. รูป $\triangle ABC$ ด้าน AB, AC ถูกต่อตรงออกไป และมุมภายนอกทั้งสองถูก BO, CO แบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BOC} = 90^\circ - \frac{A}{2}$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

AB, AC ถูกต่อตรงออกไปถึง E, F ตามลำดับ

$\widehat{EBC}, \widehat{FCB}$ ถูกแบ่งครึ่งโดย OB, OC

ตามลำดับ พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{BOC} = 90^\circ - \frac{A}{2}$

พิสูจน์ $\therefore \widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$$\therefore \widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{OBC} - \widehat{OCB}$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{EBC} - \frac{1}{2} \widehat{FCB} \quad (\text{โจทย์})$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{ABC}) - \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{ACB})$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2} - 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$$

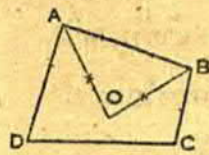
$$= \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{BAC}) \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๖})$$

$$= 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{A}{2}$$

Q.E.D.

๒๓. คงพิสูจน์ว่า มุมที่บังเกิดขึ้นจากเส้นแบ่งครึ่งของมุม
ประชิดของมุมของรูป □ จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของมุมที่เหลือ



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

AO, BO เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม A, B พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle AOB = \frac{1}{2} (C+D)$

$$\text{พิสูจน์ } \therefore \angle OAB = \frac{1}{2} \hat{A} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\angle OBA = \frac{1}{2} \hat{B} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\text{และ } \therefore \angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๖})$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA$$

$$= 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

$$\text{แต่ } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\therefore \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - \hat{C} - \hat{D}$$

$$\text{แต่ } \angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B})$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} (360^\circ - \hat{C} - \hat{D})$$

$$= 180^\circ - 180^\circ + \frac{C}{2} + \frac{D}{2}$$

$$= \frac{C}{2} + \frac{D}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (C+D)$$

Q.E.D.

๒๔. A เป็นจุดยอดของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC, BA ถูกต่อไปที่ D ให้ AD เท่ากับ BA และลากเส้น DC จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BCD}$ เป็นมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

A เป็นมุมยอด, BA ถูกต่อตรงไปถึง D

ทำ AD ให้เท่ากับ BA, ลาก DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{BCD}$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\because AC = AB, \therefore \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

และ $\because AC = AD, \therefore \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$

$\therefore \widehat{ACB} + \widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{ADC}$

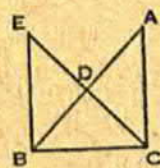
หรือ $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{ADC}$

แต่ $\widehat{BCD} + \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore \widehat{BCD} = 90^\circ$

Q.E.D.

๒๕. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากของรูป $\triangle$ มุมฉากไปยังมุมฉาก จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้ามมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากที่ C รูปหนึ่ง

D เป็นจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉาก AB

ลาก CD

จะต้องพิสูจน์ว่า $DC = \frac{1}{2} AB$

พิสูจน์ คือ CD ตรงออกไปถึงจุด E

ทำ DE ให้เท่ากับ DC

ลาก EB

ใน $\triangle BDE$ กับ $\triangle DAC$

$$\therefore \begin{cases} DE = DC & (\text{สร้าง}) \\ BD = DA & (\text{โจทย์}) \\ \widehat{BDE} = \widehat{ADC} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore \widehat{EBD} = \widehat{DAC}, EB = AC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

$$\therefore \widehat{EBD} + \widehat{DBC} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC}$$

แต่ $\widehat{DAC} + \widehat{DBC} =$ หนึ่งมุมฉาก ($\widehat{ACB}$ เป็นมุมฉาก)

$$\therefore \widehat{EBD} + \widehat{DBC} \text{ หรือ } \widehat{EBC} = \text{หนึ่งมุมฉาก}$$

ใน $\triangle EBC$ กับ $\triangle ABC$

$$\therefore \begin{cases} EB = AC \\ BC \text{ ด้านร่วม} \\ \widehat{EBC} = \widehat{ACB} \quad (\text{ต่างก็เป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$$\therefore EC = AB \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

$$\text{แต่ } DC = \frac{1}{2} EC$$

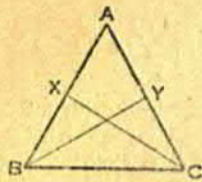
$$\therefore DC = \frac{1}{2} AB \text{ ด้วย}$$

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๑๐

(เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๑ แล้ว)

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงลากสองเส้นซึ่งลากจากปลายด้านฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปยังด้านตรงข้ามย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง
 BC เป็นฐาน, BY, CX เป็นเส้นลากจาก
 จุด B , และ C ไปยังฉากกับ AC, AB ตาม
 ลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $BY = CX$

พิสูจน์ ใน $\triangle XBC$ กับ $\triangle BYC$

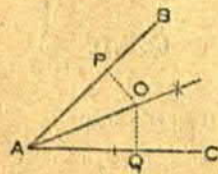
$$\therefore \begin{cases} \widehat{XBC} = \widehat{YCB} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕}) \\ \widehat{BXC} = \widehat{BYC} & (\text{ต่างก็เป็นมุมฉาก}) \\ BC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \triangle XBC = \triangle BYC$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore BY = CX$

Q.E.D

๒. ระยะจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งมุม ๆ หนึ่งไปที่แขนทั้งสองย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ $\widehat{BAC}$ เป็นมุม ๆ หนึ่ง
 O เป็นจุดใด ๆ บน AO ซึ่งเป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\widehat{A}$
 ลาก OP, OQ ให้ตั้งฉากกับ AB, AC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OP = OQ$

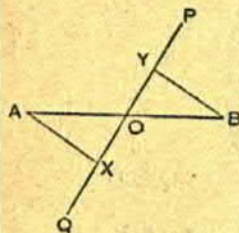
พิสูจน์ ใน $\triangle APO$ กับ $\triangle AQO$

$$\therefore \begin{cases} \widehat{APO} = \widehat{AQO} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \\ \widehat{OAP} = \widehat{OAQ} & (\text{โคจร}) \\ OA & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore OP = OQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

Q.E.D.

๓. เส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB มีเส้นตั้งฉาก AX, BY ลากจาก A และ B ไปตั้งฉากกับเส้นตรงนั้น จงพิสูจน์ว่า $AX = BY$



กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

O เป็นจุดกึ่งกลาง, PQ เป็นเส้นตรง

ลากผ่านจุด O

ลาก AX, BY ให้ตั้งฉากกับ PQ

จะต้องพิสูจน์ว่า $AX = BY$

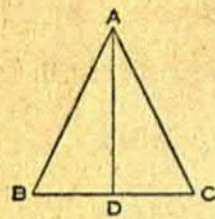
พิสูจน์ ใน $\triangle AXO$ กับ $\triangle BYO$

$$\therefore \begin{cases} \widehat{AOX} = \widehat{BOY} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \\ \widehat{AXO} = \widehat{BYO} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \\ AO = BO & (\text{โคจร}) \end{cases}$$

$\therefore AX = BY$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

Q.E.D.

๔. ถ้าเส้น แบ่ง ครึ่ง มุม ยอด ของสามเหลี่ยมตั้งฉากกับฐาน
รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A และ ตั้งฉาก
 กับฐาน BC ที่ D
 จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

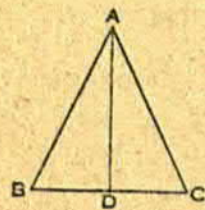
$$\therefore \begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{ADC} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \\ \widehat{BAD} = \widehat{DAC} & (\text{โคจร}) \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore AB = AC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่ว}$$

Q.E.D.

๕. ถ้าเส้นตั้งฉากลากจากจุดยอดของรูป $\triangle$ ไปที่ด้านฐานและ
แบ่งครึ่งฐานของรูป $\triangle$ นั้น $\triangle$ นั้นจะเป็น $\triangle$ หน้าจั่ว



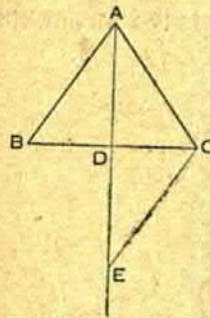
กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 AD เป็นเส้นลากจากมุมยอด A มา แบ่ง ครึ่ง
 ฐาน BC และตั้งฉากกับฐาน BC ที่จุด D
 จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ADC$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} BD = DC & (\text{โจทย์}) \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{BDA} = \widehat{ADC} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases} \\ \therefore AB = AC & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔}) \\ \therefore \triangle ABC & \text{เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่ว} \end{aligned}$$

Q.E.D.

๖. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle$ แบ่งครึ่งฐานด้วย รูป $\triangle$ นั้นเป็น $\triangle$ หน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A มาแบ่งครึ่งฐาน BC ที่จุด D
 จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว
 พิสูจน์ คือ AD ตรงออกไปถึง E ทำ DE ให้เท่ากับ AD

ลาก EC ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle CDE$

$$\therefore \begin{cases} DB = DC & (\text{โจทย์}) \\ AD = DE & (\text{สร้าง}) \\ \widehat{BDA} = \widehat{CDE} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore AB = EC \text{ และ } \widehat{BAD} = \widehat{CED} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

$$\text{แต่ } \widehat{BAD} = \widehat{DAC}, \therefore \widehat{CED} = \widehat{DAC}$$

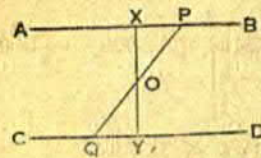
$$\text{และ } \therefore EC = AC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๖})$$

$$\therefore AB = AC$$

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๗. จงพิสูจน์ว่า จุดกึ่งกลางของเส้นตรงใด ๆ ซึ่งตัดเส้นตรงขนานกันสองเส้น และไปจุดเส้นขนานนั้น จะมีระยะห่างจากเส้นขนานทั้งสองเท่ากัน



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานกันสองเส้น

PQ เป็นเส้นตรง เส้นหนึ่งจุด เส้น

ขนานที่ P และ Q ; O เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ

จาก O ดลากเส้น XOY ให้ตั้งฉากกับคู่ขนาน

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX = OY$

พิสูจน์ ใน $\triangle OXP$ กับ $\triangle OQY$

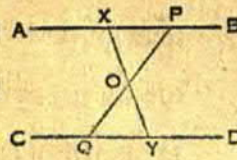
$$\therefore \begin{cases} \widehat{PXO} = \widehat{QYO} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \\ OP = OQ & (\text{โจทย์}) \\ \widehat{XOP} = \widehat{QOY} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore OX = OY \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

Q.E.D.

๘. เส้นตรงเส้นหนึ่งลากไปในระหว่างเส้นขนานสองเส้น และไปจุดเส้นขนานทั้งสองนั้น และเส้นตรงนั้นถูกแบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงอื่น ๆ ซึ่งลากผ่านจุดกึ่งกลางนั้น และไปจุดเส้นขนานทั้งสองจะถูกแบ่งครึ่งที่จุดนั้น

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสอง
เส้นขนานกัน, PQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
ตัดเส้นขนานที่ P และ Q



O เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ

ลาก XOY ผ่าน O และให้ตัดเส้นขนานที่ X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX = OY$

พิสูจน์ ใน $\triangle OXP$ กับ $\triangle OQY$

$$\therefore \begin{cases} OP = OQ & (\text{โจทย์}) \\ \angle XPO = \angle QY & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๔}) \\ \angle XOP = \angle QOY & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore OX = OY \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

Q.E.D.

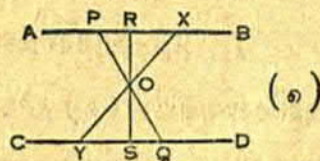
๑๘. ถ้าเส้นตรงสองเส้นลากผ่านจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งมีระยะห่างจาก
เส้นขนานสองเส้นเท่ากัน และตัดเส้นขนานทั้งสอง จงพิสูจน์ว่า
ส่วนของเส้นขนานที่ถูกตัดจะเท่ากัน

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานสองเส้น

O เป็นจุด ๆ หนึ่งที่มีระยะห่างจาก

AB กับ CD เท่า ๆ กัน

XOY กับ POQ เป็นเส้นตรงสอง



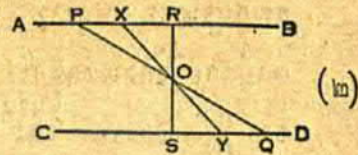
เส้นลากผ่านจุด O จดเส้นขนานที่ X, Y กับ P, Q

ลากเส้น ROS ผ่าน O ให้ตั้งฉากกับเส้นขนานที่ R และ S

จะต้องพิสูจน์ว่า $PX = YQ$

พิสูจน์ ใน $\triangle POR$ กับ

$\triangle OSQ$



$$\therefore \begin{cases} OR = OS & (\text{โจทย์}) \\ \angle PRO = \angle OSQ & (\text{ตั้งเป็นมุมฉาก}) \\ \angle POR = \angle SOQ & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore PR = SQ \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

ทำนองเดียวกันหาพิสูจน์ใน $\triangle ROX$ กับ $\triangle YOS$ ได้ว่า $RX = YS$
โดยวิธีบวกกันในรูปที่ ๑ หรือลบกันในรูปที่ ๒ ได้ $PX = YQ$

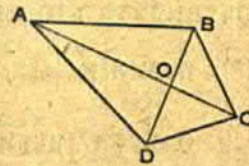
Q.E.D.

๑๐. ในรูป $\square ABCD$ ถ้า $AB = AD$ และ $BC = DC$ จง
พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุม AC แบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}$, $\widehat{BCD}$ และ AC ตัด BD
เป็นมุมฉาก.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

มี $AB = AD$; $BC = DC$

AC, BD เป็นเส้นทแยงมุมตัดกันที่ O



จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) AC แบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}$ กับ $\widehat{BCD}$

(๒) AC ตัด BD เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ (๑) ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ADC$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{โจทย์}) \\ BC = DC & (\text{โจทย์}) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC \text{ ทุกอย่าง} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๗})$$

$$\therefore \widehat{BAC} = \widehat{CAD}; \widehat{BCA} = \widehat{ACD}$$

$$\therefore AC \text{ ก็เป็นเส้นแบ่งครึ่ง } \widehat{BAD} \text{ กับ } \widehat{BCD}$$

$$(๒) \text{ ใน } \triangle AOB \text{ กับ } \triangle AOD$$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{โจทย์}) \\ \widehat{BAO} = \widehat{OAD} & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \\ AO & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB = \triangle AOD \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน

$$\therefore AO \text{ ก็ตั้งฉากกับ } BD \text{ หรือ } AC \text{ ตัด } BD \text{ เป็นมุมฉาก}$$

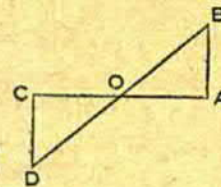
Q.E.D.

๑๑. พนักงานแผนกคนหนึ่งอยากทราบความกว้างของแม่น้ำ
แห่งหนึ่ง ซึ่งเขาข้ามไปไม่ได้ เขาค้างย่นอยู่ที่จุด A ริมฝั่งแม่น้ำ
แล้วเดินถึง B ซึ่งเป็นที่หมายแห่งหนึ่งอยู่ตรงข้ามคนละฝั่ง และ
เขาดึงเส้น AC ให้ตั้งฉากกับ AB แล้วทำเครื่องหมาย O ให้อยู่กึ่ง
กลาง AC จาก O เขาเดินตรงไป ให้ตั้งฉากกับ AC จนถึงจุด D ซึ่ง

เป็นจุดที่เขาได้เห็น O และ B เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน เราจึงวัด CD
จึงพิสูจน์ว่า CD เป็นความกว้างของแม่น้ำ.

พิสูจน์ ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle COD$

$$\therefore \begin{cases} OA = OC & (\text{สร้าง}) \\ \widehat{OAB} = \widehat{OCD} & (\text{มุมฉาก}) \\ \widehat{AOB} = \widehat{COD} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$



$$\therefore AB = CD$$

นั่นคือ วัด CD ก็ได้ความกว้างของแม่น้ำ

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๑๑

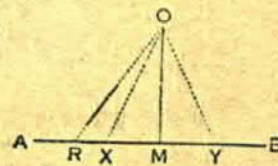
เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๘ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นเฉียง (obliques) ซึ่งทำมุมเท่ากันกับเส้นตั้งฉากจะยาวเท่ากัน.

กำหนดให้ OM ตั้งฉากกับ AB ที่จุด M

OX, OY เป็นเส้นเฉียง ซึ่ง

$$\widehat{XOM} = \widehat{MOY}$$



จะต้องพิสูจน์ว่า $OX = OY$

พิสูจน์ $\therefore OM$ เป็นเส้นตั้งฉาก

$\therefore \widehat{XOM}, \widehat{MOY}$ ต่างก็เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{OXM}, \widehat{OYM}$
(ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

แต่ $\widehat{XOM} = \widehat{MOY}$ (ใจหยัง)

$$\therefore \widehat{OXM} = \widehat{OYM}$$

$$\therefore OX = OY \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๖})$$

Q.E.D.

๒. เส้นเฉียงสองเส้น เส้นหนึ่งทำมุมกับเส้นตั้งฉากเล็กกว่า
เส้นเฉียงอีกเส้นหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า เส้นเฉียงที่ทำมุมกับเส้นตั้งฉาก
เล็กกว่าย่อมจะสั้นกว่าอีกเส้นหนึ่ง

ให้ OR กับ OY เป็นเส้นเฉียงอยู่คนละทางของ OM

$$\text{ถ้า } \widehat{YOM} < \widehat{MOR} \quad (\text{รูปข้อ ๑})$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $OY < OR$

พิสูจน์ $\widehat{ROM}$ เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{ORM}$

$\widehat{MOY}$ เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{OYM}$

แต่ $\widehat{MOY}$ เล็กกว่า $\widehat{ROM}$ (ใจหยัง)

$$\therefore \widehat{OYM} \text{ ก็ใหญ่กว่า } \widehat{ORM}$$

$$\therefore OR \text{ ก็ยาวกว่า } OY \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๐})$$

ถ้า OR กับ OX เป็นเส้นเฉียงอยู่ทางเดียวกันของ OM

และให้ $\widehat{XOM}$ เล็กกว่า $\widehat{ROM}$

ฉาก OY ให้อยู่คนละทางของ OM ทำ $\widehat{MOY} = \widehat{XOM}$

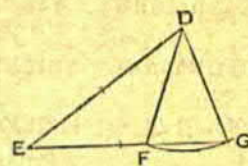
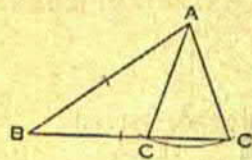
$$\therefore OY = OX \quad (\text{โดยข้อ ๑})$$

และ OR ยาวกว่า OY (โดยพิสูจน์ข้างบนนี้)

$$\therefore OR \text{ ก็ยาวกว่า } OX \text{ ด้วย}$$

Q.E.D.

๓. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้านด้านต่อด้าน และมีมุมตรงข้ามกับด้านเท่า ๆ กันด้วย จึงพิสูจน์ว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านเท่าอีกด้านหนึ่งย่อมเท่ากัน หรือมีลักษณะเป็นมุมประกอบสองมุมฉากซึ่งกันและกัน และถ้ามุมตรงข้ามกับด้านเท่า ๆ กันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกอย่าง.



กำหนดให้ $\triangle ABC, \triangle DEF$ เป็น $\triangle$ สองรูป ซึ่งมี $AB = DE$

$$AC = DF$$

$$\angle ABC = \angle DEF$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ACB = \angle DFE$ หรือเป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน

และถ้า $\angle ACB = \angle DFE$; $\triangle ABC = \triangle DEF$ ด้วย

พิสูจน์ ถ้า $\angle BAC = \angle EDF$, $\triangle ABC = \triangle DEF$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$$\therefore \angle ACB = \angle DFE$$

แต่ถ้า $\angle BAC$ ไม่เท่ากับ $\angle EDF$ ให้ $\angle BAC$ ใหญ่กว่า $\angle EDF$

ลาก DG ทำ $\angle EDG = \angle BAC$ ตัด EF ต่อที่ G

$$\therefore \triangle ABC = \triangle DEG \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

$$\therefore DG = AC, \angle DGF = \angle ACB$$

แต่ $DF = AC$ (โจทย์)

$$\therefore DG = DF$$

$$\therefore \widehat{DGF} = \widehat{DFG} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕})$$

และ $\therefore \widehat{DFE}$ เป็นมุมประกอบของมุมฉากกับ $\widehat{DFG}$
(ทฤษฎีบทที่ ๑)

$\therefore \widehat{DFE}$ ก็เป็นมุมประกอบของมุมฉากกับ $\widehat{DGF}$ ด้วย
แต่ $\widehat{DGF} = \widehat{ACB}$ (โดยพิสูจน์แล้ว)

$\therefore \widehat{DFE}$ ก็เป็นมุมประกอบของมุมฉากกับ $\widehat{ACB}$

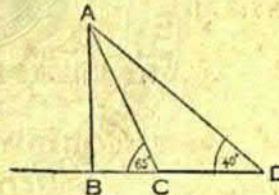
Q.E.D.

๔. AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งมีเส้นระดับ (Horizontal line)
เส้นหนึ่งลากจาก B ที่โคจรเส้นผ่านจุด C และ D ซึ่งห่างกัน ๒๗ ฟุต
 $\widehat{BCA}$ และ $\widehat{BDA}$ เป็น ๖๕° และ ๔๐° ตามลำดับ จงเขียนรูป (ใช้
มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๑๐ ฟุต) แล้ววัดหาส่วนสูงของเส้นตรง.

วิธีสร้าง ลากเส้นตรง CD ยาว ๒๗ ซม.

แทน ๒๗ ฟุต, แล้วต่อ DC ตรงไปที่ C

ทำมุม $\widehat{ACB} = ๖๕^{\circ}$, ที่ D ทำ $\widehat{CDA} = ๔๐^{\circ}$



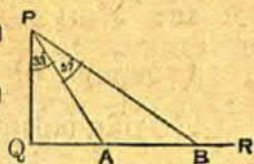
ให้ CA, DA พบกันที่ A ลาก AB ให้ตั้งฉากกับ CD และพบ DC ต่อที่ B
AB จึงแทนเส้นตรงวัดได้ ๓.๗ ซม. (ให้นักเรียนสร้างรูปเองให้ถูก)

$\therefore$ เส้นสูง ๓๗ ฟุต ตอบ

๕. PQ เป็นประภาคารแห่งหนึ่ง P เป็นยอดประภาคาร จาก
จุด P นี้เห็นเรือสองลำ A และ B ทอดสมออยู่ทางทิศใต้ของประภา
คาร และรู้ว่า $PQ = ๑๒๖$ ฟุต $\widehat{PAQ} = ๕๗^{\circ}$, $\widehat{PBQ}$ เท่ากับ ๓๓°

จงเขียนแผนผังใช้มาตราส่วน ๑" แทน ๑๐๐ ฟุต แล้ววัดหาระยะจาก A ถึง B ว่าเป็นกี่ฟุต.

ลาก PQ ให้ยาว ๑.๒๖ นิ้วแทนประภาคารแห่งหนึ่ง จาก Q ลาก QR ให้ได้ฉากกับ PQ, A และ B อยู่บนเส้น QR



เรารู้ว่า $\widehat{PAQ} = 57^{\circ}$

$$\therefore \widehat{QPA} = 90^{\circ} - 57^{\circ} = 33^{\circ}$$

ที่ P ให้ทำ $\widehat{QPA}$ ทาง 33° ตัด QR ที่ A

ในทำนองเดียวกันลาก PB ทำมุม $\widehat{QPB}$ ให้ต่าง $90^{\circ} - 33^{\circ} = 57^{\circ}$ ตัด QR ที่ B และวัด AB จะได้ ๑.๑๒ นิ้ว (ให้นักเรียนสร้างรูปเองให้ถูก)

$\therefore$ เรือ A กับเรือ B อยู่ห่างกัน ๑๑๒ ฟุต

๖. L เป็นประภาคารแห่งหนึ่ง A และ B เป็นเรือซึ่งดำอยู่ ห่างกัน ๖๐๐ หลา A อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ของ L และ B อยู่ ๑5° ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของ L ในเวลาเดียวกันนั้นเองได้เห็นเรือ B อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของ A จงเขียนแผนผัง (๑" แทน ๒๐๐ หลา) แล้ววัดหาระยะจากประภาคารกับเรือดำหนึ่งว่า ห่างกันเท่าไร

วิธีสร้าง กำหนดจุด A ดังก่อน
ลาก AB ให้ไปทางทิศตะวันออกเฉียง
ใต้ของ A ให้ AB ยาว ๓ นิ้ว แทน
ระยะระหว่างเรือสองลำ

ประการ L ตั้ง อยู่ทางทิศ ตะวัน
ออกเฉียงเหนือของ A

∴ AL ก็แบ่งครึ่งมุมระหว่าง AN กับ AE

และ B อยู่ทาง ๑๕° ตะวันออกเฉียงใต้ L

∴ ในทำนองเดียวกันถ้าลาก B ไป ประการ L ก็จะมี
๑๕° ตะวันตกเฉียงเหนือของ B

∴ BL ก็ทำ NBL ทาง ๑๕°

โดยวิธีวัด $AL = ๑.๗๓$ นิ้วใกล้ที่สุด

$LB = ๓.๔๖$ นิ้วใกล้ที่สุด

∴ เรือ A อยู่ห่าง จากประการ ๓๔๖ หลา } คอบ
,, B ,, ,, ,, ๖๙๒ หลา }
(รูปนี้ขอลงครึ่งหนึ่ง)

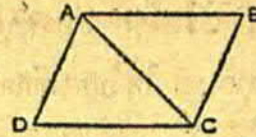
แบบฝึกหัดที่ ๑๒

เมื่อเวียนจบทฤษฎีบทที่ ๒๑ แล้ว

๑. ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมยาวเท่ากัน รูป □ นั้น
ย่อมเป็น □ ด้านขนาน

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

$$AB = CD, AD = BC$$



จะต้องพิสูจน์ว่า $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

พิสูจน์ ถ้าก AC

ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} AB = DC & (\text{โจทย์}) \\ AD = BC & (\text{โจทย์}) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ACD \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๗})$$

$$\therefore \widehat{BAC} = \widehat{ACD} \text{ และ } \widehat{ACB} = \widehat{CAD} \quad \text{ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน}$$

$$\therefore AB \parallel CD \text{ และ } BC \parallel AD \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๓})$$

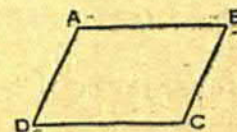
$$\therefore \square ABCD \text{ ก็เป็น } \square \text{ ด้านขนาน}$$

Q.E.D.

๒. ถ้ามุมตรงข้ามของรูป $\square$ เท่ากัน จงชี้ให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

$$\text{ซึ่งมี } \widehat{ABC} = \widehat{CDA}, \widehat{DAB} = \widehat{BCD}$$



จะต้องพิสูจน์ว่า $\square ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$$\text{พิสูจน์ } \therefore \widehat{ABC} = \widehat{CDA}, \widehat{DAB} = \widehat{BCD}$$

$$\therefore \widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \widehat{CDA} + \widehat{BCD}$$

$$\text{มุมรอบจุดประชิดของมุมรวมกัน} = \frac{1}{2} \text{ ของผลบวกของมุมทั้งสี่}$$

แต่มุมทั้ง ๔ รวมกัน = ๔ มุมฉาก

$\therefore$ มุมประชิดของมุมรวมกัน = ๒ มุมฉาก

$\therefore$ ด้านตรงข้ามก็ขนานกัน (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

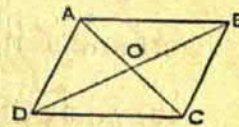
$\therefore$ รูป $\square$ นั้นก็เป็น $\square$ ด้านขนาน

Q.E.D.

๓. ถ้าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมแบ่งครึ่งกันและกัน จงพิสูจน์
ว่าสี่เหลี่ยมนี้เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดให้ ABCD เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

เส้นทแยงมุม AC, BD ตัดแบ่งครึ่งกันที่ O



จะต้องพิสูจน์ว่า ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน

พิสูจน์ ใน $\triangle AOD$ กับ $\triangle OBC$

$$\therefore \begin{cases} AO = OC & (\text{โจทย์}) \\ DO = OB & (\text{โจทย์}) \\ \angle AOD = \angle BOC & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOD = \triangle OBC$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore AD = CB$ และ $\angle OAD = \angle OCB$ ซึ่งเป็นมุมแย้ง

$\therefore AD$ ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

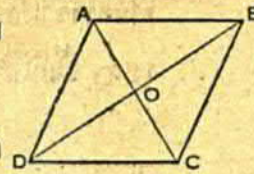
$\therefore AB$ กับ CD ก็ขนานกันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

$\therefore \square ABCD$ ก็เป็น $\square$ ด้านขนาน

Q.E.D.

๔. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ตัด
ครึ่งกันเป็นมุมฉาก

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น □ ขน
มเปียกปูนรูปหนึ่ง



AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุม ตัด
กันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $AO = OC$, $DO = OB$

และ AC กับ BD ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O

พิสูจน์ ใน $\triangle AOD$ กับ $\triangle ODC$

$$\therefore \begin{cases} AO = OC & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๒๑ บทแทรกที่ ๓}) \\ DO & \text{เป็นด้านร่วม} \\ AD = DC & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ODC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๗})$$

และเป็นมุมประชิดกัน, $\therefore$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

และ $\therefore AC$ กับ BD ก็ตัดครึ่งกันเป็นมุมฉากที่ O

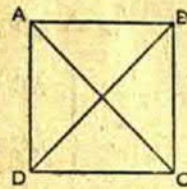
Q.E.D.

๕. ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน จง
พิสูจน์ว่า มุมทุกมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นต่างก็เป็นมุมฉาก

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

เส้นทแยงมุม $AC = BD$

จะต้องพิสูจน์ว่า มุมทุกมุมของ □ กางมุม



ละ 90°

พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ กับ $\triangle DCB$

$$\therefore \begin{cases} AD = BC \\ DC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ AC = BD \text{ (โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore \angle ADC = \angle DCB$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

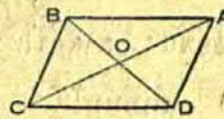
และ $\therefore AD$ ขนานกับ BC (โจทย์)

$\therefore \angle ADC$ กับ $\angle DCB$ ต่างก็เป็นมุมฉาก (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

Q.E.D

๖. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ยาวไม่เท่ากัน

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่งซึ่งไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก



AC, BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า AC ยาวไม่เท่า BD

พิสูจน์ $\therefore \angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และต่างก็ไม่เป็นมุมฉาก (โจทย์)

$\therefore \angle ADC$ ก็ไม่เท่ากับ $\angle BCD$

ใน $\triangle ADC$ กับ $\triangle BDC$

$$\therefore \begin{cases} AD = BC \\ DC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{ADC} \text{ ไม่เท่ากับ } \widehat{BCD} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC$ ก็ไม่เท่ากับ $\triangle BDC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore AC$ ก็ไม่เท่ากับ BD

Q.E.D.

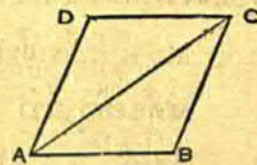
แบบฝึกหัดที่ ๑๓

(ว่าด้วยเส้นขนานและสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

๑. จงพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า ถ้าพหุรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
ไปตามเส้นทแยงมุมของมัน รูปด้านเหลี่ยมซึ่งอยู่คนละข้างกับ
รอยพับ อาจทำให้มันทับกันสนิท

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ ขนม
เปียกปูนรูปหนึ่ง

AC เป็นเส้นทแยงมุม



จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้าพับที่ AC รูป $\triangle$ ทั้งสองจะทับกันสนิท

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ADC$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ BC = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore \widehat{CAB} = \widehat{CAD}, \widehat{ACB} = \widehat{ACD}$

$\therefore$ เมื่อพับไปตาม AC; AB จะซ้อนทับ AD; CB ซ้อนทับ CD

B จุดร่วมของ AB, CB ซ้อนทับ D จุดร่วมของ AD, CD

เมื่อพับไปตามเส้นทแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่ง $\triangle$ ก็จะทับกันพอดี
(ภาษาอังกฤษเรียกว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็น
Axis of symmetry ภาษาไทยจะเรียกเส้นแกนก็งได้)

๓. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูป $\square$ จตุรัสต่างก็เป็นเส้นแกน
ซึ่งถ้าพับรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสไปตามเส้นนั้นแล้ว รูปที่พับจะทับกันสนิท
(Axis of symmetry) และจงบอกชื่อเส้นแกนอีกสองเส้นซึ่งถ้าพับรูป
สี่เหลี่ยมจตุรัสไปตามเส้นนั้นแล้ว รูปที่พับจะทับกันสนิท

เหมือนข้อ ๑ เราอาจพิสูจน์ได้ว่าเส้นทแยงมุมของ $\square$ จตุรัส
แบ่งครึ่งมุมที่ลากผ่าน และระยะนูนสามเหลี่ยมทางข้างเส้นทแยงมุม
ก็ทับกันสนิท เมื่อพับตรงเส้นทแยงมุม

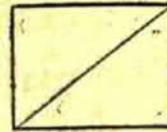
$\therefore$ เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัสจึงเป็นเส้นแกน (Axis of
symmetry)

เส้นแกน (Axis of symmetry) อื่น ๆ ก็คือ เส้นที่ลากต่อจุดกึ่ง
กลางของด้านตรงข้าม

Q.E.D.

๓. จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ต่างกึ่งแบ่งรูป $\square$ ผืนผ้าออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูป เท่ากัน ทุกประการ
เส้น ทแยงมุมเป็นเส้นแกนซึ่งถ้าพับรูปไปตามรอยนั้นจะทำให้ รูป สาม
เหลี่ยมสองรูปทับกันสนิทหรือไม่ และจะพับตามรอยเส้นแกนใดสอง
เส้นได้บ้าง จึงจะทำให้รูปที่พับแล้วทับกันสนิท

เส้นทแยงมุมของรูป $\square$ ผืนผ้าแบ่งรูป $\square$
ออกเป็น $\triangle$ สองรูปเท่ากันทุกอย่างก็จริง แต่
ว่าด้านประชิดยาวไม่เท่ากัน ฉะนั้นเมื่อพับรูป
ตรงเส้นทแยงมุม $\triangle$ จึงไม่ทับกันสนิท



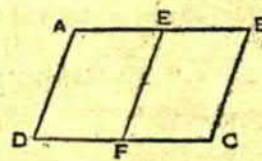
$\therefore$ เส้นทแยงมุมของรูป $\square$ ผืนผ้าจึงไม่เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

เส้นที่จะเป็นเส้นแกน (Axis of symmetry) ได้ คือเส้นที่ลากต่อ
จุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม

Q.E.D.

๔. ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานชนิดที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมี
เส้นแกนใดบ้าง ซึ่งเมื่อพับรูปไปตามเส้นนั้นแล้วจะทับกันสนิท จงยก
เหตุผลประกอบคำตอบ

ให้ ABCD เป็น $\square$ ด้านขนานรูปหนึ่ง
E, F เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, CD
เมื่อ DA กับ DC ไม่เท่ากัน



จะพับตรงเส้นทแยงมุม BD รูป $\triangle$ ก็ไม่ทับกันสนิท

$\therefore$ เส้นทแยงมุมจึงไม่ใช่เส้นแกน (Axis of symmetry)

และ $AE = DF$ (ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า AB, DC)

$\therefore EF$ ขนานกับ AD (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

$\therefore \widehat{BEF} = \widehat{BAD}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $\widehat{BAD}$ ไม่ใช่มุมฉาก (โจทย์)

$\therefore \widehat{BEF}$ ก็ไม่เป็นมุมฉาก

$\therefore \widehat{BEF}$ ก็ไม่เท่ากับ $\widehat{AEF}$

เมื่อพับครึ่ง EF ; EA ก็จะไม่ทับ EB

$\therefore$ เส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม ก็ไม่ใช่เส้นแกน (Axis of symmetry)

$\therefore$ รูปนี้ไม่มีเส้นแกนใดที่พับรูปไปตามเส้นนั้นแล้วจะทับกันสนิท

Q.E.D.

๕. ในรูป $\square ABCD$, $AB = AD$ และ $CB = CD$ แต่ด้าน
เหล่านี้ไม่เท่ากันทุกด้าน ถ้าวางเส้นทะแยงมุมเส้นใดบ้างจะเป็นเส้น
แกน ซึ่งถ้าพับรูปไปตามเส้นนั้นแล้วจะทับกันสนิทได้.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

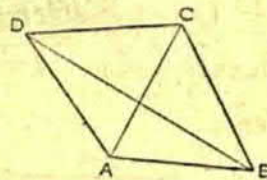
$AB = AD, CB = CD$

ด้านเหล่านี้ไม่เท่ากันทุกด้าน

จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นทะแยงมุมเส้นใดที่เป็นเส้นแกน

(Axis of symmetry)

พิสูจน์ $\therefore BA$ ไม่เท่ากับ BC



$\therefore$ ถ้าพับที่ BD ; BA ก็ไม่ทับ BC พอดี
ดังนั้น BD ก็ไม่ใช่เส้นแกน (Axis of symmetry)

แต่ใน $\triangle BAC$ กับ $\triangle DAC$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{โจทย์}) \\ CB = CD & (,,) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \widehat{BAC} = \widehat{DAC} ; \widehat{BCA} = \widehat{DCA}$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore \triangle BAC$ ก็ทับ $\triangle DAC$ พอดี เมื่อพับที่ AC

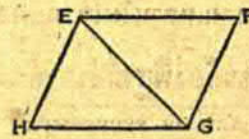
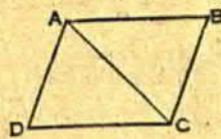
$\therefore AC$ ก็เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

Q. E. D.

๖. จงพิสูจน์ โดยวิธีข้างต้นกันว่า

(๑) รูป $\square$ ด้านขนานสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ถ้าด้าน
ประชิดสองด้านของรูปที่หนึ่งยาวเท่ากับด้านประชิดสองด้านของรูปที่
สองด้านต่อด้านและมีมุมเท่ากันอีก ๑ มุม.

(๒) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปจะเท่ากัน ถ้าด้านประชิดสอง
ด้านของรูปที่หนึ่ง เท่ากับด้านประชิดสองด้านของรูปที่สอง ด้าน
ต่อด้าน.



กำหนดให้ ABCD, EFGH เป็น $\square$ ด้านขนานสองรูปซึ่งมี

$$AB = EF, BC = FG, \text{ และ } \widehat{ABC} = \widehat{EFG}$$

จะต้องพิสูจน์ว่า รูป $\square ABCD$ วางทับรูป $\square EFGH$ ได้นิพจน์
พิสูจน์ ลาก AC, EG

ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle EFG$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} AB = EF \\ BC = FG \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \end{array} \right\} \quad (\text{โจทย์})$$

$\therefore \triangle ABC$ ก้ทับรูป $\triangle EFG$ ได้นิพจน์ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore AC = EG$

ใน $\triangle ADC$ กับ $\triangle EHG$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} AC = EG \quad \text{พิสูจน์แล้ว} \\ AD = EH \\ DC = HG \end{array} \right\} \quad (\text{ด้านตรงข้ามของ } \square \text{ ด้านขนานย่อมเท่ากัน})$$

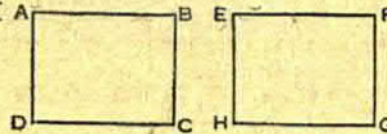
$\therefore \triangle ADC$ ก้ทับ $\triangle EHG$ ได้นิพจน์ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore \square ABCD$ ก้ทับรูป $\square EFGH$ ได้นิพจน์

(๒) ให้ $ABCD, EFGH$

เป็น $\square$ ฝั่งสองรูปมี

$AB = EF, BC = FG$

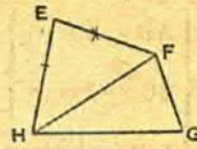
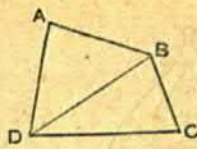


$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ (ต่างก็เป็นมุมฉาก)

$\therefore ABCD$ ก้ทับ $EFGH$ พอดี (ทั้งข้อ ๑ ข้างบน)

Q. E. D.

๗. รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$, $EFGH$ สองรูปมีด้าน AB , BC , CD , DA เท่ากับด้าน EF , FG , GH , HE ตามลำดับ และมี $\widehat{BAD} = \widehat{FEH}$ จึงพิสูจน์ว่า สี่เหลี่ยมทั้งสองอาจทับกันสนิท.



กำหนดให้ $ABCD$, $EFGH$ เป็น □ สองรูป มีด้าน AB , BC , CD , DA เท่ากับด้าน EF , FG , GH , HE ตามลำดับ และมี $\widehat{BAD} = \widehat{FEH}$

จะต้องพิสูจน์ว่า □ $ABCD$ อาจทับ □ $EFGH$ ได้สนิท

พิสูจน์ ยก $\triangle BAD$ ทับ $\triangle FEH$

ให้ A ทับ E , AB นอนบน EF , และ $\because \widehat{BAD} = \widehat{FEH}$

$\therefore AD$ ต้องนอนบน EH และ $\because AB = EF, AD = EH$

$\therefore$ จุด B และ D ต้องทับจุด F และ H พอดี

และรูป $\triangle DBC = \triangle HFG$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore \widehat{BDC} = \widehat{FHG}$ และ $\widehat{DBC} = \widehat{HFG}$

เช่นนี้ DC , BC ต้องนอนบน HG , FG ตามลำดับ

แต่ $DC = HG, BC = FG$

$\therefore$ จุด C ต้องทับจุด G พอดี

$\therefore$ □ $ABCD$ ต้องทับ □ $EFGH$ สนิท

Q.E.D.

๘. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงใดๆลากผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ไปหยุดที่ด้านตรงข้ามทั้งสอง เส้นตรงนั้นจะถูกแบ่งครึ่งที่จุดนั้น.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

BD เป็นเส้นทแยงมุมถูกแบ่งครึ่งที่ O

POQ เป็นเส้นตรงลากผ่าน O ไปจดด้าน

AB, DC ที่จุด P และ Q

จะต้องพิสูจน์ว่า $PO = OQ$

พิสูจน์ ใน $\triangle POB$ กับ $\triangle QOD$

$$\therefore \begin{cases} \angle POB = \angle QOD & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \\ \angle OBP = \angle ODQ & (,, ,, ๑๔) \\ BO = OD & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore PO = OQ \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

Q.E.D.

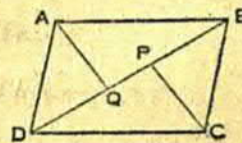
๙. จงพิสูจน์ว่าในรูป □ ด้านขนาน เส้นตั้งฉากสองเส้นลากจากมุมตรงข้ามคู่หนึ่ง ไปยังเส้นทแยงมุม ซึ่งต่อมุมอีกคู่หนึ่งจะยาวเท่ากัน.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

BD เป็นเส้นทแยงมุม

AQ, CP ลากตั้งฉากกับ BD

จะต้องพิสูจน์ว่า $AQ = PC$



พิสูจน์ ใน $\triangle ADQ$ กับ $\triangle CBP$

$$\therefore \begin{cases} \widehat{ADQ} = \widehat{CBP} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๔}) \\ \widehat{AQD} = \widehat{CPB} & (\text{ต่างก็เป็นมุมฉาก}) \\ AD = CB \end{cases}$$

$$\therefore AQ = PC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

Q.E.D.

๑๐. ถ้า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $AYCX$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนานรูปหนึ่ง

X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน

AD, BC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $AYCX$ เป็น $\square$ ด้าน

ขนาน

$$\text{พิสูจน์ } \therefore AX = \frac{1}{2} AD \quad \text{โดย}$$

$$\therefore YC = \frac{1}{2} BC \quad ,,$$

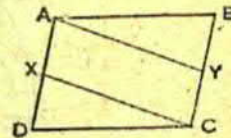
$$\text{แต่ } AD = BC \quad \text{และขนานกันด้วย}$$

$$\therefore AX = YC \quad \text{และขนานกันด้วย}$$

$$\therefore AY = XC \quad \text{และขนานกันด้วย} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๒๐})$$

$$\therefore AYCX \quad \text{เป็น } \square \text{ ด้านขนาน}$$

Q.E.D.



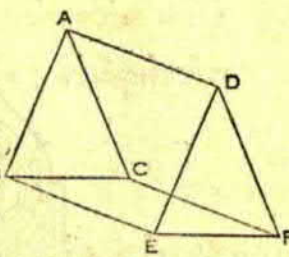
๑๑. ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้าน AB, BC ยาวเท่ากับและขนานกับ DE, EF ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AC เท่ากับและขนานกับ DF.

กำหนดให้ ABC, DEF เป็น

Δ สองรูป ซึ่งมี AB, BC ยาว

เท่ากับและขนานกับ DE และ EF

ตามลำดับ



จะต้องพิสูจน์ว่า AC เท่ากับและขนานกับ DF

พิสูจน์ ดาก BE, AD, CF

$\therefore$ AB เท่ากับและขนานกับ DE

$\therefore$ AD ก็เท่ากับและขนานกับ BE (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

ในทำนองเดียวกัน CF ก็เท่ากับและขนานกับ BE

$\therefore$ AD และ CF ต่างก็เท่ากันและขนานกัน (ทฤษฎีบทที่ ๑๕)

$\therefore$ AC กับ DF ก็เท่ากันและขนานกันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

Q.E.D.

๑๒. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่ง AB ขนานกับ DC และ AD เท่ากับ BC แต่ไม่ขนานกัน.

จงพิสูจน์ว่า (๑) $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{B} + \hat{D}$

(๒) เส้นทแยงมุม AC = เส้นทแยงมุม BD

(๓) รูปสี่เหลี่ยมนี้เมื่อพับไปตามเส้นตรงซึ่งต่อ

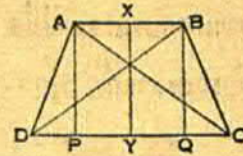
๙๖

จุดกึ่งกลางของ AB และ DC จะทับกันสนิท

กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

ซึ่ง AB ขนานกับ DC ; $DC > AB$

$AD = BC$; ตาก AC , BD



จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ = \widehat{B} + \widehat{D}$

(๒) $AC = BD$

(๓) เมื่อพับที่เส้นตรงต่อจุดกึ่งกลางของ AB

กับ DC รูปจะทับกันสนิท (เห็นแก่)

พิสูจน์ จาก A , B ตาก AP , BQ ให้ตั้งฉากกับ DC ที่ P และ Q

$\therefore ABQP$ เป็น □ ด้านขนาน

$\therefore AP = BQ$

ใน $\triangle APD$ กับ $\triangle BQC$

$$\therefore \begin{cases} AD = BC & (\text{โจทย์}) \\ AP = BQ \\ \widehat{APD} = \widehat{BQC} & (\text{ตรง}) \end{cases}$$

$\therefore \widehat{ADP} = \widehat{BCQ} ; PD = CQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๘)

(๑) $\therefore \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \widehat{BAD} + \widehat{ADC}$

แต่ $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore \widehat{BAD} + \widehat{BCD}$ หรือ $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

(๒) $\therefore DP = QC$

$$\therefore DP + PQ = QC + PQ \text{ หรือ } DQ = PC$$

ใน $\triangle BQD$ กับ $\triangle APC$

$$\therefore \begin{cases} BQ = AP \\ QD = PC \\ \widehat{BQD} = \widehat{APC} \quad (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$$\therefore BD = AC \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

(๓) ให้ X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, CD ตามลำดับ

และ Y ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ ด้วย (เพราะ $DP = QC$)

$$\therefore AX = \frac{1}{2} AB; PY = \frac{1}{2} PQ$$

$$\text{แต่ } AB = PQ$$

$$\therefore AX = PY$$

$$\therefore AP = XY \text{ และขนานกันด้วย} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๒๐})$$

$$\therefore XY \text{ ก็ตั้งฉากกับ } AB \text{ และ } CD \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๔})$$

$$\text{เมื่อ } XA = XB, YD = YC$$

$$\text{และ } \widehat{AXY} = \widehat{BXY}, \widehat{XYD} = \widehat{XYC} \text{ อยู่แล้ว}$$

เราพบรูปตรง XY เส้น XA, YD ตั้งฉากกับ XB, YC พอดี

และมีขนาดเท่ากัน อยู่แล้ว จุด A, D ก็ตั้งกับจุด B, C พอดี

$$\therefore XY \text{ ก็เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)}$$

Q. E. D.

๑๓. AP, BQ เป็นไม้ตรงสองอันยาวเท่ากัน ตั้งอยู่บนแกน A และ B ตามลำดับ ไม้สองอันนี้หมุนไปในทางเดียวกัน ทำนองเดียว

กับเข็มนาฬิกามีความเร็วเท่ากัน ไม่ต้องอินเมื่อจะเริ่มหมุนวน
กันอยู่แล้ว แต่ปลายไม้ทั้งสองจะไปในทางตรงข้าม จึงพิสูจน์ว่า

(๑) ไม้สองอันนี้จะวนกันเสมอ

(๒) เส้นตรงที่ต่อ PQ จะผ่านจุดคงที่จุดหนึ่งเสมอ

กำหนดให้ AP, BQ เป็นไม้สองอัน

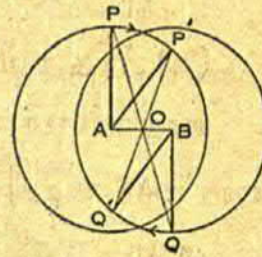
ยาวเท่ากันตั้งอยู่บนแกน A และ B

ตามลำดับ

และจะไปในทางตรงข้าม วนกัน

หมุนไปในทางเดียวกัน ตาม ลูกศร

มีความเร็วเท่ากัน



ให้ AP, BQ เป็นที่หยุดของ AP, BQ ในเวลาใด ๆ

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) ไม้สองอันนี้จะวนกันเสมอ

(๒) เส้นที่ต่อ PQ จะผ่านจุดหนึ่งคงที่เสมอ

พิสูจน์ $\because$ AP วนกับ BQ (โจทย์) และ AB เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{PAB} = \widehat{ABQ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

(๑) AP กับ BQ หมุนไปมีความเร็วเท่ากันเสมอ

$\therefore$ มุมระหว่าง AP กับ AP ใหม่ก็เท่ากับมุมระหว่าง BQ กับ

BQ ใหม่เสมอคือ $\widehat{PAP} = \widehat{QBQ}$

แต่ $\widehat{PAB} = \widehat{ABQ}$ (พิสูจน์แล้ว)

$\therefore \widehat{PAB} - \widehat{PAP} = \widehat{ABQ} - \widehat{QBQ}$

$\therefore \widehat{PAB} = \widehat{ABQ}$ ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore AP$ ก็ ขนานกับ BQ

$\therefore$ เส้น AP ก็ขนานกับ BQ เสมอไป

(๒) ถ้า PQ ตัด AB ที่ O

ใน $\triangle AOP$ กับ $\triangle BQO$

$$\therefore \begin{cases} \widehat{AOP} = \widehat{BOQ} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \\ \widehat{OAP} = \widehat{OBQ} & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \\ AP = BQ & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$\therefore AO = BO$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore O$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และเป็นจุดคงที่

และเส้นซึ่งลากต่อกันไปนั้นย่อมผ่านจุดคงที่ O เสมอ

Q.E.D.

๑๔. จงคำนวณหามุมต่าง ๆ ของ $\triangle ABC$ จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คือ มุม A ซึ่งเป็นมุมภายในเท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของมุม A ซึ่งเป็น

มุมภายนอก และ $3B = 4C$

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

มุม A ภายใน = $\frac{3}{5}$ ของมุม A ภายนอก

$$3B = 4C$$

$$A = ?, B = ?, C = ?$$

มุมภายใน $A = 180^\circ - \text{มุมภายนอก } A$

$$\therefore \frac{m}{57} \text{ ของมุมภายใน } A = 180^\circ - \text{มุมภายใน } A$$

$$\frac{m}{57} \text{ ของ } A \text{ นอก} + A \text{ นอก} = 180^\circ$$

$$\frac{10}{57} \text{ ของ } A \text{ นอก} = 180^\circ$$

$$\therefore A \text{ นอก} = \frac{180 \times 57}{10} = 1026^\circ = B + C \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)}$$

$$\therefore A \text{ ใน} = 180^\circ - 1026^\circ = 54^\circ \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๑)}$$

$$\text{แต่ } B = \frac{4}{3} C$$

$$B + C = 1026^\circ$$

$$\frac{4}{3} C + C = 1026^\circ$$

$$\frac{7}{3} C = 1026^\circ$$

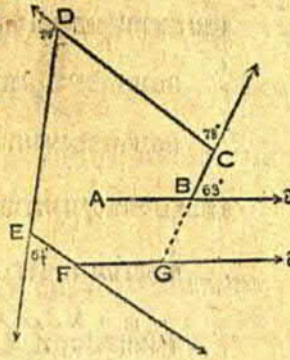
$$\therefore C = \frac{1026}{7} \times 3 = \frac{3078}{7} = 54^\circ$$

$$\therefore B = 1026^\circ - 54^\circ = 972^\circ$$

$$\underline{\text{ตอบ } A = C = 54^\circ, B = 972^\circ}$$

๑๕. เรือยอชต์หนึ่งแล่นผ่านไปทางทิศตะวันตก แล้วเปลี่ยน
 ทางเดินของมันครึ่งหนึ่ง 63° ครึ่งที่สอง 72° ครึ่งที่สาม ๑๑๙°
 $๕๕^\circ ๖๔'$ เพื่อแล่นรอบเกาะแห่งหนึ่ง เรือยอชต์จะต้องเปลี่ยน
 ทางเดินอีกกี่องศาจึงจะเดินไปทางทิศตะวันออกเหมือนอย่างเดิม

ให้ B, C, D, E เป็นจุดแทนตำแหน่งที่
เรือยอชเปลี่ยนทางเดิน เป็นมุม ๖๓° ,
 ๗๘° , ๑๑๘° , ๖๔° ตามลำดับ และ F
เป็นตำแหน่งที่เปลี่ยนทางเดินไปทาง อ ทิศ
ตะวันออกครั้งสุดท้าย



จะต้องหาว่า เปลี่ยนทางเดินที่ F
กี่องศา

วิธีหา คือ CB ตรงมาพบ FO ที่จุด G

$\therefore$ AB ขนานกับ FG

$\therefore \angle CBG = \angle BGF = ๖๓^{\circ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และรูป CDEFG เป็นรูป ๕ เหลี่ยม

ผลบวกของมุมภายในของรูป ๕ เหลี่ยม = ๓๖๐° (ทฤษฎีบทที่ ๑๖ บท
แทรกที่ ๒)

$$\text{แต่มุมภายในของ } Q, C, D, E = ๖๓^{\circ} + ๗๘^{\circ} + ๑๑๘^{\circ} + ๖๔^{\circ} \\ = ๓๒๓^{\circ}$$

$$\therefore \text{มุมภายในของ } F = ๓๖๐^{\circ} - ๓๒๓^{\circ} = ๓๖^{\circ}$$

$\therefore$ เรือต้องเปลี่ยนทางเดิน ๓๖° ตอบ

๑๖. ถ้าผลบวกของมุมภายในของรูป ๕ เหลี่ยม เท่า กับ ผลบวก
ของมุมภายนอก ถามว่ารูปเหลี่ยมนั้นกี่ป้าน เพราะอะไร

วิธีทำ ผลบวกของมุมภายนอก = $๔ \angle$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖
บทแทรกที่ ๒)

แต่ผลบวกมุมภายในนอก = ผลบวกของมุมภายใน (โคจร)

$$\therefore \text{ผลบวกของมุมภายใน} = 4 \text{ ฏ}$$

$$\therefore \text{ผลบวกของมุมภายในกับภายในนอก} = 8 \text{ ฏ}$$

$$\text{แต่ผลบวกของมุมภายในกับมุมภายในนอก ๑ มุม} = 2 \text{ ฏ}$$

$$\therefore \text{จำนวนมุมของรูปนี้} = \frac{8}{2} = 4 \text{ มุม}$$

$$\therefore \text{ตั้งรูปนี้ที่มี ๔ ด้าน} \quad \text{ตอบ}$$

๑๗. จงใช้ไม้โปรแทคเตอร์สร้างรูป ๕ เหลี่ยม ABCDE ให้ $\widehat{B} = 110^\circ$, $\widehat{C} = 115^\circ$, $\widehat{D} = 120^\circ$, $\widehat{E} = 152^\circ$ แล้วใช้ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียนวัดสอบดูว่า AE ขนาน กับ BC จริงหรือไม่ และอ้างบทพิสูจน์ประกอบความจริงข้อนี้ด้วย

(ให้นักเรียนเขียนรูปเอง)

$$\text{ผลบวกของมุมภายในของ ๕ เหลี่ยม} = (2 \times 5) - 4 = 6 \text{ ฏ}$$

(ทฤษฎีบทที่ ๑๖ บทแทรกที่ ๑)

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 110 + 115 + 120 + 152 = 497^\circ$$

$$\therefore \widehat{A} = 540^\circ - 497^\circ = 43^\circ$$

$$\text{และ } \widehat{EAB} + \widehat{ABC} = 43^\circ + 110^\circ = 153^\circ$$

$$\therefore \text{AE ขนานกับ BC} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๓})$$

Q.E.D.

๑๘. A และ B เป็นจุดกึ่งกลางของจุด AP และ BQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวไม่จำกัดลากไปทาง P และ Q AP และ BQ ตั้งอยู่

บนแกน A และ B AP เริ่มหมุนจาก AB ไปรอบ A หมุนอย่างเร็ว
นาฬิกา หมุนไปโดยสม่ำเสมอวินาทีละ $๗\frac{๑}{๒}$ และ BQ เริ่มหมุน
ไปในเวลาเดียวกัน จาก BA หมุนรอบ B หมุนไปทางตรงข้ามกับ
เข็มนาฬิกาวินาทีละ $๓\frac{๓}{๔}$

(๑) จะเป็นเวลาที่วินาทีก่อนที่ AP และ BQ จะขนานกัน

(๒) จงหามุมระหว่าง AP และ BQ เมื่อหมุนไปได้ ๑๒
วินาที โดยสร้างรูปและคำนวณ

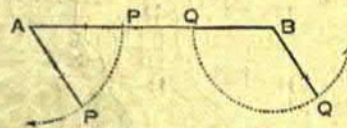
(๓) มุมระหว่าง AP และ BQ จะเล็กลงวินาทีละกี่องศา

กำหนดให้ AP, BQ เป็น

เส้นตรงสองเส้นตั้งอยู่บน แกน A,

B ยาวพอสมควร และ AP, BQ

หมุนตามลูกศรวินาทีละ $๗\frac{๑}{๒}$, $๓\frac{๓}{๔}$ ตามลำดับ



จะต้องหาว่า (๑) ก่อนที่ AP จะขนานกับ BQ นั้น เป็นเวลา
เท่าไร (๒) หามุมระหว่าง AP กับ BQ เมื่อหมุนไป

ได้ ๑๒ วินาที โดยสร้างรูปและคำนวณ

(๓) มุมระหว่าง AP และ BQ เล็กลงวินาทีละ
เท่าไร

วิธีทำ (๑) เส้นตรง AP จะขนานกับ BQ ได้ต่อเมื่อ
 $\widehat{PAB} + \widehat{ABQ} = ๑๘๐^{\circ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

ในเวลา ๑ วินาที AP หมุนมาทำ $\widehat{BAP}$ ได้ $๗\frac{๑}{๒}$

และ ,, ๑ ,, BQ ,, ,, $\widehat{ABQ}$,, $๓\frac{๓}{๔}$

∴ เวลา ๑ วินาที AP กับ BQ หมุนออกทำมุมได้ $๗\frac{๑}{๒}^{\circ}$ + $๓\frac{๓}{๔}^{\circ} = ๑๑\frac{๑}{๔}^{\circ}$ และ AP กับ BQ ต้องหมุนออกทำมุมได้ ๑๘๐° จึงจะชนกัน

∴ AP และ BQ ต้องหมุนในเวลา $\frac{๑๘๐}{๑๑\frac{๑}{๔}} = ๑๖$ วินาที

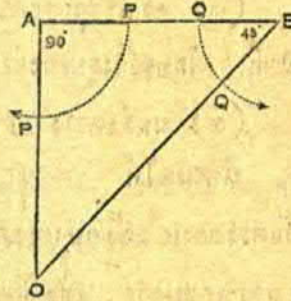
(๒)

๑ วินาที AP หมุนได้ $๗\frac{๑}{๒}^{\circ}$

๑๒ ,, AP ,, $๗\frac{๑}{๒} \times ๑๒ = ๘๔^{\circ}$

๑ ,, BQ ,, $๓\frac{๓}{๔}^{\circ}$

๑๒ ,, BQ ,, $๓\frac{๓}{๔} \times ๑๒ = ๔๕^{\circ}$



มุมระหว่าง AP และ BQ ก็คือ $\angle AOB$

$\angle AOB = ๑๘๐^{\circ} - \angle BAP - \angle ABQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$= ๑๘๐^{\circ} - ๘๔^{\circ} - ๔๕^{\circ}$

$= ๕๑^{\circ}$ ตอบ

(๓) มุมระหว่าง AP และ BQ คือ $\angle AOB$ น้อยลงเล็กน้อยจนกระทั่งเท่ากับ $\angle OAB$ กับ $\angle ABO$ เพิ่มขึ้น เพราะว่า $\angle OAB + \angle ABO + \angle BOA$ ย่อมได้คงที่เสมอ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

แต่ $\angle OAB, \angle ABO$ เพิ่มขึ้นวินาทีละ $๗\frac{๑}{๒}^{\circ} + ๓\frac{๓}{๔}^{\circ} = ๑๑\frac{๑}{๔}^{\circ}$

∴ $\angle AOB$ ก็ลดลงวินาทีละ $๑๑\frac{๑}{๔}^{\circ}$ ตอบ

แบบฝึกหัดที่ ๑๔

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๒๒ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้าน ๆ หนึ่งของรูป $\triangle$ ให้ขนานกับด้านฐาน จะแบ่งครึ่งด้านที่สาม

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

Z เป็นจุดกึ่งกลางของ AB จาก Z ลาก

ZY ขนานกับ BC พบ AC ที่ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $AZ = YC$

พิสูจน์ ลาก YX ให้ขนานกับ AB พบ BC ที่ X

และ $\therefore ZY$ ขนานกับ BX (โดยย)

$\therefore ZYXB$ จึงเป็น $\square$ ด้านขนาน

$\therefore YX = ZB$ (ทฤษฎีบทที่ ๒๑)

แต่ $AZ = ZB$ (โดยย)

$\therefore YX = AZ$

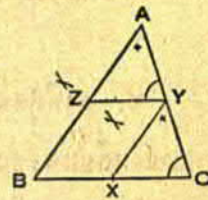
และ $\therefore ZY \parallel BC, AC$ เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{AYZ} = \widehat{YCX}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ $\therefore AB \parallel YX, AC$ เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{ZAY} = \widehat{XCY}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

ใน $\triangle AZY$ กับ $\triangle YXC$



$$\therefore \begin{cases} ZA = YX \\ \widehat{ZAY} = \widehat{XYC} \\ \widehat{AYZ} = \widehat{YCX} \end{cases}$$

$\therefore \triangle AZY = \triangle YXC$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$$\therefore AY = YC$$

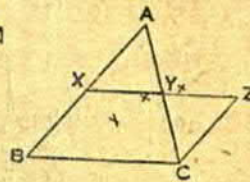
Q.E.D.

๒. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของ ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สาม

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งซึ่ง

X, Y เป็น จุด กึ่งกลาง ของ AB, AC

ตามลำดับ



ลาก XY

จะต้องพิสูจน์ว่า XY ขนานกับ BC

พิสูจน์ ค่อย XY ตรงไปถึง Z ทำ YZ ให้เท่ากับ XY

ลาก ZC

ใน $\triangle AXY$ กับ $\triangle YZC$

$$\therefore \begin{cases} AY = YC & (\text{โจทย์}) \\ XY = YZ & (\text{สร้าง}) \\ \widehat{AXY} = \widehat{ZYC} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore XA = ZC, \widehat{XAY} = \widehat{YCZ} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$$

แต่ $\widehat{XAY}$ กับ $\widehat{YCZ}$ เป็นมุมแย้งกัน

$\therefore AX$ ก็ขนานกับ ZC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

แต่ $AX = \frac{๑}{๒} AB = BX$

$\therefore XB = ZC$ และขนานกันด้วย

$\therefore XZ$ ก็ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

Q.E.D.

๓. จงพิสูจน์ว่าเส้นซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป $\triangle$ จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม (ในรูปข้อ ๒)

พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ ๒ เมื่อได้ XB เท่ากับและขนานกับ ZC แล้ว XZ ก็เท่ากับและขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

แต่ $XY = YZ = \frac{๑}{๒} XZ$

$\therefore XY$ ก็เป็น $\frac{๑}{๒}$ ของ BC ด้วย

Q.E.D.

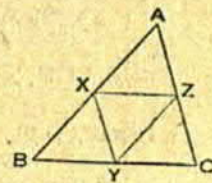
๔. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง สามเส้นซึ่งลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านของรูป $\triangle$ จะแบ่ง $\triangle$ นั้นออกเป็นรูปสามเหลี่ยม ๔ รูปเท่ากันทุกประการ

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของ

AB, BC, CA ตามลำดับ

ลาก XZ, XY, YZ



จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle AXZ = \triangle XBY = \triangle XZY = \triangle ZYC$

พิสูจน์ $\therefore \left. \begin{array}{l} XB \text{ ขนานกับ } ZY \\ XZ \text{ ,, } BY \end{array} \right\} \text{ (ข้อ ๒)}$

$\therefore$ XZYB เป็น $\square$ ด้านขนาน XY เป็นเส้นทแยงมุม

$\therefore \triangle XBY = \triangle XYZ$ (ทฤษฎีบทที่ ๒๑)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle AXZ, \triangle ZYC$ ต่างก็เท่ากับ $\triangle XYZ$

$\therefore \triangle AXZ = \triangle XBY = \triangle XZY = \triangle ZYC$

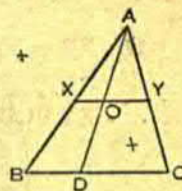
Q.E.D.

๕. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงใดๆ ที่ลากจากจุดยอดของรูป $\triangle$ ไปยังฐาน จะถูกเส้นตรงซึ่งต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านอื่นสองด้านของรูป $\triangle$ นั้นแบ่งครึ่ง.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

XY ลากต่อจุดกึ่งกลางของ AB, AC

AOD ลากผ่าน XY ที่ O พบ BC ที่ D



จะต้องพิสูจน์ว่า $AO = OD$

พิสูจน์ $\therefore$ X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC

$\therefore$ XY ขนานกับ BC (ข้อ ๒)

ใน $\triangle ABD$, XO ลากจากจุด X กึ่งกลางของ AB ขนานกับฐาน BD

ไปพบ AD ที่ O ย่อมแบ่งครึ่ง AD ที่ O (ข้อ ๑)

$\therefore AO = OD$

Q.E.D.

๖. ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม AD, BC จงพิสูจน์ว่า BX และ DY แบ่งเส้นทแยงมุม AC

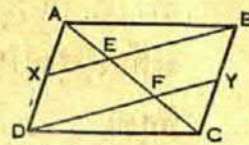
ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนานรูปหนึ่ง

X, Y , เป็นจุดกึ่งกลางของ AD, BC

ลาก XB, DY และ AC

จะต้องพิสูจน์ว่า XB, DY แบ่ง AC



ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ สมมติให้ AC พบ XB ที่ E และ DY ที่ F

$\therefore XD = BY$ (ข้างก็เป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า)

และ XD ขนานกับ BY ด้วย

$\therefore XB$ ก็เท่ากับและขนานกับ DY (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

ใน $\triangle ADF$ $\therefore X$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ XE ขนานกับ DF

$\therefore AE = EF$ (โดยข้อ ๑)

ใน $\triangle CEB$, $\therefore Y$ เป็นจุดกึ่งกลางของ BC และ YF ขนานกับ BE

$\therefore CF = EF$ (โดยข้อ ๑)

$\therefore AC$ ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันที่ E และ F

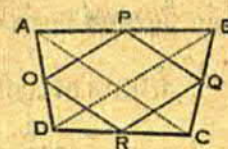
Q.E.D.

๗. ถ้าจุดกึ่งกลางของด้านประชิดของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง
สี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

O, P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางของ

ด้าน DA, AB, BC, CD ตามลำดับ



จะต้องพิสูจน์ว่า $OPQR$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

พิสูจน์ $\because P, Q$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC

$\therefore PQ$ ขนานกับ AC (ข้อ ๒)

ทำนองเดียวกัน OR ก็ขนานกับ AC

$\therefore OR$ ก็ขนานกับ PQ (ทฤษฎีบทที่ ๑๕)

ทำนองเดียวกัน OP ก็ขนานกับ QR

$\therefore OPQR$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

Q.E.D.

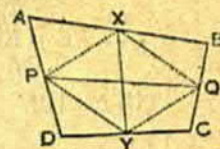
๘. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง

X, Q, Y, P เป็นจุดกึ่งกลาง

ของ AB, BC, CD, DA ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า XY กับ PQ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



สร้าง ตาเส้น PX, XQ, QY, YP

พิสูจน์ $XQYP$ เป็น $\square$ ด้านขนาน (ข้อ ๗)

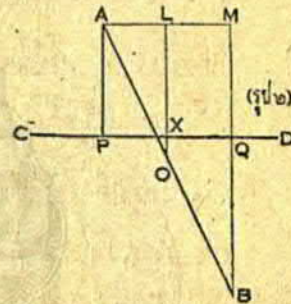
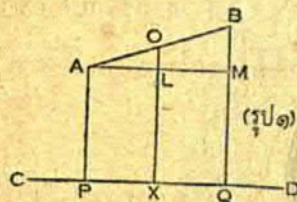
XY กับ PQ เป็นเส้นทะแยงมุม

$\therefore XY$ กับ PQ ตัดครึ่งซึ่งกันและกัน (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ เทรท ๓)

Q.E.D.

๔. เดินตั้งฉาก AP, BQ, OX จากจุด A, B และจาก O ซึ่ง
เป็นจุดกึ่งกลางของ A และ B ไปยังเส้นตรง CD ถ้า AP วัดได้ ๔.๒
ซม. และ BQ วัดได้ ๕.๘ ซม. ตามลำดับ จงหาความยาวของ OX
และวัดสอบดูผลที่ได้ว่าจะจริงหรือไม่ จงพิสูจน์ว่า

$OX = \frac{1}{2}(AP + BQ)$ หรือ $\frac{1}{2}(BQ - PA)$ แล้วแต่ A และ B
จะอยู่ข้างเดียวกันหรือคนละข้างของ CD



กำหนดให้ A, B เป็นจุดสองจุด O เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง
A กับ B ; CD เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

จาก A, O และ B ถาก AP, OX และ BQ ตั้งฉากกับ CD ที่จุด
P, X และ Q ตามลำดับ

ให้ AP ยาว ๔.๒ ซม. BQ ยาว ๕.๘ ซม.

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) OX ยาวเท่าไร (วัดสอบดูด้วย)

(๒) $OX = \frac{1}{2}(AP + BQ)$ ถ้า A, B อยู่

ทางเดียวกัน

๑๑๒

$$\text{หรือ } OX = \frac{1}{2}(BQ - PA) \quad \text{ถ้า } A, B$$

อยู่คนละข้าง

พิสูจน์ จาก A ตาก ALM ให้ขนานกับ CD ตัด OX, BQ (หรือ
ทศ) ที่ L และ M ตามลำดับ

และ AP, OX, BQ ต่างก็ขนานกัน เพราะต่างตั้งได้ฉากกับ CD

$\therefore$ ALXP, LMQX เป็น $\square$ ด้านขนาน

$$\therefore AP = LX = MQ \text{ และ } LX = \frac{1}{2}(AP + MQ)$$

ใน $\triangle ABM$, O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, OL ตากขนานกับ MB

$$\therefore OL = \frac{1}{2}BM \quad (\text{ข้อ ๓ หรือบทแทรกของทฤษฎีบทที่ ๒๒})$$

$\therefore$ ในรูปที่ ๑ โดยวิธีบวก

$$OX = OL + LX = \frac{1}{2}(BM + AP + MQ) = \frac{1}{2}(AP + BQ)$$

และ $\therefore$ ในรูปที่ ๒ โดยวิธีลบ

$$OX = OL - LX = \frac{1}{2}(BM - (MQ + AP)) = \frac{1}{2}(BQ - AP)$$

$$OX = \frac{1}{2}(๕.๘ + ๔.๒) = ๕ \text{ ซม.} \quad \text{รูปที่ ๑}$$

$$\text{หรือ } OX = \frac{1}{2}(๕.๘ - ๔.๒) = .๘ \text{ ซม.} \quad \text{รูปที่ ๒}$$

Q.E.D.

๑๐. เส้นตรงขนานกันสามเส้นตัดเส้นขวางสองเส้นออกมีระยะ
เท่ากัน จงพิสูจน์หาความยาวของเส้นขนานสามเส้นซึ่งอยู่ระหว่างเส้น
ขวาง เส้นที่อยู่กลางจะเป็นส่วนเฉลี่ย (Arithmetic mean) ของอีก
สองเส้น (สรุปในทฤษฎีบทที่ ๒๒)

กำหนดให้ AB, CD, EF เป็นเส้นขนานสามเส้น ตัดเส้นขวาง
สองเส้นคือ XZ กับ PR มีระยะ $XY = YZ, PQ = QR$

จะต้องพิสูจน์ว่า QY เป็นส่วนเฉลี่ย (Arithmetic mean) ของ
 PX กับ RZ

พิสูจน์ $\therefore$ PXM, QYN, RZN เป็น $\square$ ด้านขนาน

$\therefore PX = QM$ และ $QY = RN$

$MY = NZ$ (ทฤษฎีบทที่ ๒๒)

$\therefore PX + RZ = QM + QY + NZ$

$= QM + QY + MY$

$= 2QY$

$\therefore QY = \frac{1}{2}(PX + RZ)$

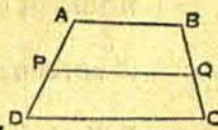
$\therefore QY$ เป็นส่วนเฉลี่ย (Arithmetic mean) ของ PX กับ RZ
Q.E.D.

๑๑. ด้านขนานของรูป $\square$ คางหมูรูปหนึ่งยาว a ซม. และ
 b ซม. จงพิสูจน์ว่าเส้นต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านเฉลี่ยจะขนาน
กับด้านขนาน และเส้นต่อนี้จะยาว $\frac{1}{2}(a + b)$ ซม.

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ คางหมูรูปหนึ่ง

AB ขนานกับ DC , P และ Q เป็นจุด

กึ่งกลางของด้าน AD, BC ตามลำดับ และ



ให้ AB ยาว a ซม. BC ยาว b ซม.

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) PQ ขนานกับ AB หรือ DC

$$(๒) PQ = \frac{๑}{๒} (a + b) \text{ ซม.}$$

พิสูจน์ เส้นที่ลากจาก P ขนานกับ AB ย่อมแบ่งครึ่ง BC คือผ่าน Q

$\therefore PQ$ ก็ขนานกับ AB (ทฤษฎีบทที่ ๒๒)

$\therefore PQ$ ก็เป็นส่วนเฉลี่ยระหว่าง AB กับ DC (ข้อ ๑๐)

$$\therefore PQ = \frac{๑}{๒} (a + b)$$

Q.E.D.

๑๒. OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้นและมีจุด α จุดอยู่บนเส้น OX คือจุด ๑, ๒, ๓, ๔, ๕ จุดทั้ง ๕ นี้ มีระยะห่างเท่า ๆ กัน จากจุดทั้ง ๕ นี้ลากเส้นตรงขนานกันไปถึง OY จงวัดหาความยาวของเส้นขนานเหล่านี้ และหาส่วนเฉลี่ยของเส้นเหล่านี้เปรียบเทียบกับส่วนเฉลี่ยกับความยาวของเส้นขนานเส้นที่สาม จงพิสูจน์โดยวิธีเรขาคณิตว่าเส้นขนานเส้นที่สามเป็นส่วนเฉลี่ย (mean) ของเส้นทั้งห้า

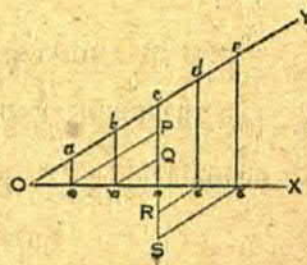
ถ้าลากเส้นขนาน $(2n + ๑)$ เส้น (ให้มีจำนวนคี่ไม่ใช่คู่) เส้นใดจะเป็นส่วนเฉลี่ย (mean) ของเส้นขนานเหล่านี้

กำหนดให้ OX, OY เป็น

เส้นตรงสองเส้น

๑, ๒, ๓, ๔ และ ๕ เป็นจุดอยู่

บน OX ระยะห่างเท่า ๆ กัน



จาก $๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e$ ให้ขนาดกันและตัด OY
ที่ a, b, c, d, e ตามลำดับ

จะต้องการหา (๑) ความยาวของเส้นเหล่านี้ คือ

$๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e$ โดยวัด

(๒) เปรียบเทียบส่วนเฉลี่ยความยาว

ของ $๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e$ กับ $๓c$

(๓) พิสูจน์ว่า $๓c$ เป็น (mean) ของเส้นทั้งหมด

คือหัวเท่าของ $๓c = ๑a + ๒b + ๓c$

$+ ๔d + ๕e$

วิธีทำ (๑) ให้วัดจากรูปแรกตอบ

(๒) สร้างรูปให้ถูกต้องแล้ววัดจะได้ผลอย่าง (๓)

(๓) พิสูจน์ จาก ๑, ๒, ๔, ๕ ตากเส้นให้

ขนาดกัน OY ให้พบ $๓c$ (ถ้าจำเป็นให้ต่อ)

ที่ P, Q, R, S ตามลำดับ

ใน $\triangle ๑๓P$ กับ $\triangle ๓๕S$

$$\therefore \begin{cases} \angle ๑๓ = \angle ๕ & (\text{โดยทฤษฎี}) \\ \widehat{\angle ๑๓P} = \widehat{\angle ๓๕S} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \\ \widehat{P๑๓} = \widehat{๓๕S} & (,, ,, ๑๔) \end{cases}$$

$$\therefore ๓P = ๓S \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๗})$$

$\therefore \square aP$ กับ $\square c๕$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$$\therefore ๑a = cP; cS \text{ หรือ } c๓ + ๓S = ๕e$$

$$\begin{aligned}
 \therefore da + \epsilon e &= cP + mc + mS \\
 &= mc - mP + mc + mS \\
 &= mc + mc \quad (\text{เพราะ } mP = mS) \\
 &= 2 \text{ เท่าของ } mc
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$2b + \epsilon d = 2 \text{ เท่าของ } mc$$

$$\therefore \text{ หักเท่าของ } mc \text{ ก็ยาว} = da + 2b + mc + \epsilon d + \epsilon e$$

$$\therefore mc \text{ ก็เป็นส่วนเฉลี่ยของเส้นทั้ง } \epsilon$$

ในทำนองเดียวกันถ้ามี $(2n + 1)$ เส้น

เส้นที่ $(n + 1)$ ก็เป็นส่วนเฉลี่ยของเส้นขนานทั้งหมด

Q.E.D.

๑๓. เส้นตั้งฉากจากจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปยังเส้นใด ๆ ซึ่งอยู่ภายนอกของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของเส้นตั้งฉากจากมุมตรงข้ามคู่หนึ่ง จะเท่ากับผลบวกของเส้นตั้งฉากจากมุมตรงข้ามของอีกคู่หนึ่ง.

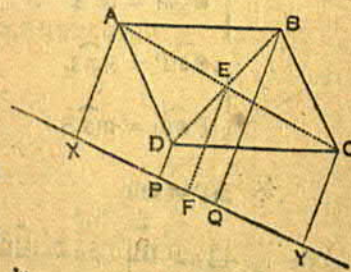
กำหนดให้ ABCD เป็น □

ด้านขนานรูปหนึ่ง

AX, CY กับ DP, BQ เป็นเส้น

ตั้งฉากจากมุมไปยังเส้น

ตรงที่กำหนดให้ภายนอกรูป □ นี้



จะต้องพิสูจน์ว่า $AX + CY = DP + BQ$

พิสูจน์ ตากเส้นตรงขนานกับ XY ที่ E

และลาก EF ให้ตั้งฉากกับ XY ที่ F

$\therefore E$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AC (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรก ๓)

และ AX, EF, CY ต่างก็ตั้งฉากกับ XY จึงขนานกัน

$\therefore EF$ ก็ยาว $= \frac{1}{2}(AX + CY)$ (ข้อ ๘ ของแบบฝึกหัดที่ ๕)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$EF = \frac{1}{2}(DP + BQ)$$

$$\therefore \frac{1}{2}(AX + CY) = \frac{1}{2}(DP + BQ)$$

$$\therefore AX + CY = DP + BQ$$

Q.E.D.

๑๔. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด ๆ หนึ่งบนฐานของรูป $\triangle$ หน้าจั่วไปยังด้านเท่าสองด้าน จะเท่ากับเส้นตั้งฉากลากจากปลายด้านฐาน ไปที่ด้านตรงข้าม.

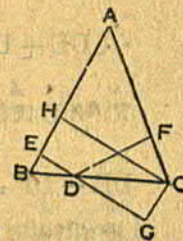
กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

ซึ่งมี $AB = AC$, D เป็นจุด ๆ หนึ่ง

อยู่บนฐาน BC ลาก DE, DF ให้ตั้งฉาก

กับ AB, AC ที่ E และ F และจาก C ลาก CH

ให้ตั้งฉากกับ AB ที่จุด H



จะต้องพิสูจน์ว่า $DE + DF = CH$

พิสูจน์ ลาก CG ให้ $//$ กับ AB ให้พบ ED ที่ต่อออกไปที่ G

$\therefore HG$ เป็น $\square$ ด้านขนาน (โดยสร้าง)

$\therefore EH = GC, EG = HC$

และ $\therefore AB$ ขนานกับ CG, BC เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{BCG}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (,, , &)

$\therefore \widehat{BCG} = \widehat{ACB}$

ใน $\triangle DFC$ กับ $\triangle CDG$

$\therefore \begin{cases} \widehat{DCF} = \widehat{DCG} & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \\ DC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{DFC} = \widehat{DGC} & (\text{เท่ากันเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$

$\therefore DF = DG$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore ED + DF = ED + DG = EG$

แต่ $EG = HC$ (พิสูจน์แล้ว)

$\therefore DE + DF = CH$

ถ้าจุด D เคลื่อนไปอยู่บน BC ต่อทาง C แล้ว จะได้ผลดังนี้คือ

$DE - DF = CH$

หรือถ้าเคลื่อนมาทาง B จะได้ $DF - ED = CH$

Q.E.D.

๑๕. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นตั้งฉากลากจากจุดใดจุดหนึ่งภายในรูป $\triangle$ ด้านเท่าไปยังด้านทั้งสาม จะเท่ากับเส้นตั้งฉากลากจากจุดยอดจุดใดจุดหนึ่ง ไปยังด้านตรงข้าม และผลบวกนั้นจะไม่เปลี่ยนแปลง.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่ารูปหนึ่ง

O เป็นจุดหนึ่งภายใน $\triangle ABC$

ลาก OX, OY, OZ ตั้งฉากกับ

BC, CA, AB ตามลำดับ

จาก A ลาก AH ให้ตั้งฉากกับ BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX + OY + OZ = AH$ และคงที่

พิสูจน์ ลาก POQ ให้ขนานกับ BC ตัด AH ที่จุด G

$\therefore \triangle APQ, \triangle AQP$ ต่างก็เท่ากับ $\triangle ABC, \triangle ACB$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ $\widehat{APQ} = \widehat{BAC}$ ด้วยเพราะเป็น $\triangle$ ด้านเท่า

ลาก PM ให้ตั้งฉากกับ AC ที่จุด M

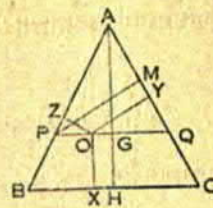
ใน $\triangle APM$ กับ $\triangle APG$

$$\therefore \begin{cases} \widehat{AMP} = \widehat{AGP} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \\ \widehat{PAM} = \widehat{PAG} & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \\ AP & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore PM = AG$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

และ $\therefore OZ + OY = PM$ (โดยข้อ ๑๔ แบบผกผัน)

$\therefore OZ + OY = AG$

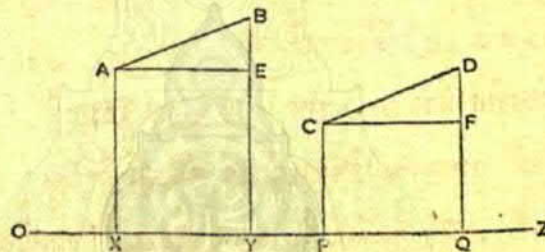


$$\begin{aligned}\therefore OX + OY + OZ &= AG + OX \\ &= AG + GH \quad (\text{OH เป็น } \square \text{ ด้านขนาน}) \\ &= AH\end{aligned}$$

O จะไปอยู่ในที่ใด ๆ ใน Δ นี้ ผลบวกก็จะได้เท่ากับ AH ซึ่ง
เป็นจำนวนคงที่เสมอ.

Q.E.D.

๑๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ยาวเท่ากันและขนานกันจะมีจุดที่
ทอดออกไป (Projection) บนเส้นตรงเส้นอื่นเท่ากัน.



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นเท่ากันและขนานกัน

XY, PQ เป็น Projection ของ AB และ CD บนเส้นตรง OZ

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = PQ$

พิสูจน์จาก A, C ลาก AE, CF ให้ขนานกับ OZ พบ BY และ
DQ ที่ E และ F ตามลำดับ

$\therefore \square AEYX, \square CFQP$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$\therefore AE = XY, CF = PQ$

AB กับ CD ขนานกัน

และ AE กับ CF ขนานกัน

$\therefore$ มุมในระหว่าง AB, AE ก็เท่ากับมุมในระหว่าง CD กับ CF

นคอ $\widehat{BAE} = \widehat{DCF}$ (ข้อ ๔ แบบฝึกหัดที่ ๘)

ใน $\triangle ABE$ กับ $\triangle CDF$

$$\therefore \begin{cases} AB=CD \\ \widehat{BAE}=\widehat{DCF} \\ \widehat{AEB}=\widehat{CFD} \quad (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore AE = CF$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore XY = PQ$

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๑๕

เมื่อเรียน Diagonal Scales แล้ว

๑. จงเขียนเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๑.๒๕ นิ้ว ๒.๗๒ นิ้ว และ ๓.๐๘ นิ้ว

๒. จงเขียนเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๒.๖๘ นิ้ว แล้ววัดหาความยาวของเส้นตรงเส้นนี้เป็น ซม. และ มม. ให้ได้ผลใกล้เคียงกับความจริงที่สุด (มียู่จะเขียนในหนังสือเรขาคณิตของ ร.ช.ค. ดังยู่ ดิมปีนัท ป.ม. เนติบัณฑิต หน้า ๑๑๕ — ๑๑๗ แล้ว)

๓. จงเขียนเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๕.๗ ซม. แล้ววัดหาความยาวของเส้นนี้เป็น นิ้ว (ให้ได้ใกล้เคียงกับส่วนร้อยของนิ้วที่สุดที่จะได้) แล้วคำนวณตอบผลที่ได้ ให้ ๑ ซม. = ๓๙.๓๗ นิ้ว เมื่อเขียน ๕.๗ ซม. แล้ววัดเป็นนิ้วจะได้ ๒.๒๔ นิ้ว

วิธีคำนวณ ๑ ซม. = ๐.๓๙๓๗ นิ้ว

$$\begin{aligned} ๕.๗ \text{ ,,} &= ๐.๓๙๓๗ \times ๕.๗ \text{ นิ้ว} \\ &= ๒.๒๔๔ \text{ นิ้ว} \end{aligned}$$

๔. จงวัดดูว่า ๓.๑๕ นิ้ว จะเท่ากับกี่ ซม. และ มม. จงคำนวณดูว่า ๑ ซม. เท่ากับกี่นิ้ว (ทำให้ถูกต้องเพียงทศนิยมสองตำแหน่ง)

โดยวิธีวัด ๓.๑๕ นิ้ว = ๘.๐๐ ซม.

$$\begin{aligned} ๑ \text{ ซม.} &= \frac{๓.๑๕ \text{ นิ้ว}}{๘} \\ &= ๐.๓๙ \text{ นิ้ว} \end{aligned}$$

๕. จงเขียนเส้นตรงสองเส้นยาว ๒.๘ ซม. และ ๖.๒ ซม. ตามลำดับ แล้ววัดดูว่ายาวเส้นตรงกี่นิ้ว เมื่อได้เท่าไรแล้วจงหาค่าของ ๑ นิ้วดูว่าเท่ากับกี่ ซม. และ มม. แล้วหาส่วนเฉลี่ยจากผลที่ได้ด้วย

โดยวิธีวัด ๒.๘ ซม. = ๑.๑๔ นิ้ว

$$\therefore ๑ \text{ นิ้ว} = \frac{๒.๘}{๑.๑๔} = ๒.๕๔๓ \text{ ซม.}$$

และวัด ๖.๒ ซม. = ๒.๔๔ นิ้ว

$$\therefore ๑ \text{ นิ้ว} = \frac{๖.๒}{๒.๔๔} = ๒.๕๔๑ \text{ ซม.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ส่วนเฉลี่ย } ๑ \text{ นิ้ว} &= \frac{๒.๕๔๓ + ๒.๕๔๑}{๒} \\ &= \frac{๕.๐๘๔}{๒} = ๒.๕๔๒ \end{aligned}$$

$$= ๒.๕๔ \text{ ตอบ}$$

๖. ระยะทาง ๑๐๐ ไมล์เขียนลงในแผนที่ยาว ๑ นิ้ว จงเขียนเส้นตรงแทนระยะ ๓๓๖ ไมล์ และ ๕๐๘ ไมล์ อย่างละเส้น

ระยะทาง ๑๐๐ ไมล์ เขียนลงในแผนที่ ๑ นิ้ว

,, ๓๓๖ ,, ,, ,, ๓๓๖ ,,

,, ๔๐๘ ,, ,, ,, ๔๐๘ ,,

แต่ให้วัดจาก Diagonal Scales เขียนลงไป

๗. ถ้าระยะ ๑ นิ้วในแผนที่แทนระยะ ๑ กิโลเมตร จงเขียน
เส้นตรงแทนระยะ ๘๕๐ เมตร, ๒๔๘๐ เมตร และ ๑๐๑๐ เมตร
เส้นตรงยาว ๐.๘๕ นิ้ว ๒.๔๘ นิ้ว ๑.๐๑ นิ้ว

๘. แผนผังแห่งหนึ่งใช้มาตราส่วน ๑ นิ้ว แทน ๑๐๐ ลูกโซ่
(Links) จงวัดเส้นตรงเส้นหนึ่งแทนระยะ ๔๑๗ ลูกโซ่ว่าเป็นกี่ ซม.

และ มม.

เส้นตรงยาว = ๔.๑๗ นิ้ว

วัด = ๑.๐๖ ซม.

๙. เส้นตรงเส้นหนึ่งในแผนที่ แทน ระยะ ๔๒.๕ กม. ใช้
มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๕ กม. จงหาความยาวของเส้นตรงนั้น

๕ กม. แทน ๑ ซม.

∴ ๔๒.๕ ,, ,, $\frac{๔๒.๕}{๕} = ๘.๕$ ซม.

โดยวิธีวัด ๘.๕ ซม. = ๓.๓๕ นิ้ว

๑๐. ระยะทางจากถนนคอนกรีตถึงออกัสฟอร์ด (เป็นเส้นตรง)
ยาว ๕๕ ไมล์ ถ้าระยะนี้เขียนลงในแผนที่เพียง ๒.๗๕ นิ้ว แผนที่
ใช้มาตราส่วนเท่าไร และระยะ ๑ นิ้วแทนกี่ไมล์ ระยะ ๑ ซม. แทน
กี่ กม.

$$(๑ \text{ ชม.} = ๐.๓๔๓๗ \text{ นิ้ว, } ๑ \text{ กม.} = \frac{๕}{๘} \text{ ไมล์})$$

$$๒.๗๕ \text{ นิ้ว แทน } ๕๕ \text{ ไมล์}$$

$$\therefore ๑ \text{ ,, ,, } \frac{๕๕}{๒.๗๕} = ๒๐ \text{ ไมล์}$$

$$\text{แต่ } ๑ \text{ ชม.} = ๐.๓๔๓๗ \text{ นิ้ว}$$

$$\text{และ } ๑ \text{ กม.} = \frac{๕}{๘} \text{ ไมล์ (ใกล้ที่สุด)}$$

$$\therefore ๐.๓๔๓๗ \text{ นิ้ว แทน } (๒๐ \times ๐.๓๔๓๗ \times \frac{๘}{๕}) \text{ กม.}$$

$$\text{นั่นคือ } ๑ \text{ ชม. แทน } ๑๒.๖ \text{ กม.}$$

๑๑. แผนที่ในฝรั่งเศสใช้มาตราส่วน ๑ นิ้ว แทน ๓๕ ไมล์
จากปารีสถึงคาเลส์เขียนไว้อย่าง ๔.๒ นิ้ว จงหาระยะทางว่าเป็นกี่ไมล์
และกิโลเมตร และบอกมาตราส่วนเป็นมาตราเมตริกด้วย (๑ กม.
= $\frac{๕}{๘}$ ไมล์ คอบเป็น กม. ใกล้ความจริง)

$$๔.๒ \text{ นิ้ว แทน } (๓๕ \times ๔.๒) \text{ ไมล์} = ๑๔๗ \text{ ไมล์}$$

$$\therefore \text{เท่ากับ } (๑๔๗ \times \frac{๘}{๕}) = ๒๓๕ \text{ กม. ใกล้ที่สุด}$$

$$\text{โดยวิธีวัด } ๔.๒ \text{ นิ้ว} = ๑๐.๗ \text{ ชม.}$$

$$\therefore ๑๐.๗ \text{ ชม. แทน } ๒๓๕ \text{ กม.}$$

$$\therefore ๑ \text{ ,, ,, } \frac{๒๓๕}{๑๐.๗} = ๒๒ \text{ กม. ใกล้ที่สุด}$$

๑๒. ระยะทางจากเฮลซิงเคอร์ถึงป้อมพิฆาต ๓๗ $\frac{๑}{๒}$ ไมล์ เขียน
ลงในแผนที่แห่งหนึ่งยาวเพียง ๒ $\frac{๑}{๒}$ นิ้ว และระยะจากดินคันถึงยอร์ก

๑๒๕

ยาว ๔๔ ซม. เขียนลงในแผนที่ที่ฉากแผ่นหนึ่งยาวเพียง ๗ ซม. จง

เปรียบเทียบมาตราส่วนของแผนที่สองแผ่นนี้ว่า ๑ นิ้วแทนกี่ไมล์

แผนที่แผ่นที่ ๑ ใช้มาตราส่วน $\frac{๒๑}{๒}$ นิ้ว ต่อ $๓๗\frac{๑}{๒}$ ไมล์

$$\therefore ๑ \text{ ,, ,, } \frac{๓๗\frac{๑}{๒}}{\frac{๒๑}{๒}} \text{ ไมล์}$$

$$= \frac{๓๕}{๒} \times \frac{๒}{๕} = ๑๕ \text{ ไมล์}$$

แผนที่ ๒ ใช้มาตราส่วน ๗ ซม. ต่อ ๔๔ ซม.

$$๑ \text{ ซม.} = ๓๕๓๗ \text{ นิ้ว}$$

$$๗ \text{ ,,} = ๗ \times ๓๕๓๗ \text{ นิ้ว}$$

$$๑ \text{ กม.} = \frac{๕}{๘} \text{ ไมล์}$$

$$๔๔ \text{ ,,} = ๔๔ \times \frac{๕}{๘} \text{ ไมล์}$$

$$\therefore ๗ \times ๓๕๓๗ \text{ นิ้ว} \text{ คือ } ๔๔ \times \frac{๕}{๘} \text{ ไมล์}$$

$$๑ \text{ ,, ,,} = \frac{๔๔ \times ๕}{๔ \times ๗ \times ๓๕๓๗} \text{ ไมล์}$$

$$= \frac{๕๕}{๒ \cdot ๗๕๕๘} \text{ ,,}$$

$$\therefore ๑ \text{ นิ้ว} = ๒๐ \text{ ไมล์ (ใกล้เคียงที่สุด)}$$

๑๓. จงสร้าง Diagonal Scale อันหนึ่ง ใช้มาตราส่วน ๒ ซม.

แทน ๑ หก ให้ได้จุดขึ้นแสดง หก ฟุต และนิ้วได้

วิธีสร้าง ตากเส้นตรง OX ให้ยาวพอสมควร แบ่ง OX ออก

เป็น ๕ หรือ ๖ ส่วนเท่าๆ กัน ส่วนหนึ่งๆ ให้ยาว ๒ ซม. ที่ O ตาก

OY ให้ตั้งฉากกับ OX กระจายยาวพอเหมาะ แล้วแบ่ง OY ออกเป็น
 ๑๒ ส่วนเท่า ๆ กัน จากส่วนแบ่งใน OY นี้ ดึงเส้นตรงขนาน
 กับ OX และแบ่งส่วนแบ่งที่หนึ่งของ OX ออกเป็น ๓ ส่วนเท่า ๆ กัน
 ส่วนที่หนึ่งลากเส้นตรงต่อ Y ส่วนที่สองที่สามลากให้ขนานกันไป
 ตามลำดับ เป็นอันเสร็จ

แบบฝึกหัดที่ ๑๖

เมื่อเรียนถึงบทสร้างที่ ๗ แล้ว

๑. จงสร้างมุม ๖๐° หนึ่งมุม (ด้วยไม้บรรทัด และ วงเวียน)
 แล้วแบ่งครึ่งมุมนั้นครึ่งหนึ่ง เมื่อเสร็จแล้ว ให้แบ่งซ้ำออกให้เป็นสี่ส่วน
 เท่า ๆ กัน

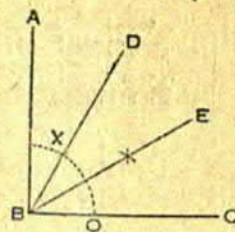
วิธีสร้าง สร้างรูป $\triangle$ ด้านเท่า ABC โดยกำหนด AB ให้ยาว
 พอสมควร ที่ A และ B รัศมี AB เขียนส่วนโค้งตัดกันที่ C ฉะนั้น
 $\triangle ABC$ ก็เป็น $\triangle$ ด้านเท่า และมุม A, B, C ก็เท่ากัน (ทฤษฎี
 บทที่ ๕) ผลบวกของมุมทั้งหมดยกเท่ากับ ๑๘๐° (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)
 ฉะนั้นก็ทางมุมละ ๖๐°

แล้วแบ่งมุม ABC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันตามบทสร้างที่ ๑
 แล้วแบ่งครึ่งมุมที่แบ่งออกอีกหนึ่ง

๒. จง แบ่งมุมฉากมุมหนึ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน (ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียน) จงแสดงถึงวิธีแบ่งมุม 45° ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน (โดยใช้วิธีแบ่งครึ่ง)
(ยังไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับใช้แบ่งมุม ๆ หนึ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน)

(๑) ให้ $\angle ABC$ เป็นมุมฉากมุมหนึ่ง
จะต้องสร้าง แบ่ง $\angle ABC$ ออกเป็นสามส่วน
เท่า ๆ กัน

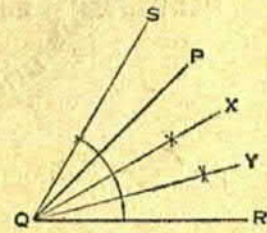
วิธีสร้าง ที่ B สร้างมุมให้ทาง 60°
อย่างข้อ ๑ คือ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่ O



O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเดิม เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งเดิมที่ X ตัด BXD $\therefore \angle DBC = 60^\circ$ $\angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

และแบ่ง $\angle DBC$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย BE โดยบทสร้างที่ ๑ $\therefore \angle ABC$ ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันด้วย DB, EB

(๒) ให้ $\angle PQR$ เป็นมุม 45° ที่กำหนด
ให้ จะต้อง แบ่ง มุม $\frac{45^\circ}{3}$ ออก เป็น สาม ส่วน
เท่า ๆ กัน



วิธีสร้าง ที่ Q ทำ $\angle SQR$ ให้ทาง 60°
และให้ QS อยู่ทางเดียวกับ QP แล้วแบ่ง $\angle SQR$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย QX และแบ่ง $\angle XQR$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย QY

$\therefore \angle PQR$ ก็ถูกแบ่งออกเป็น สาม ส่วน เท่า ๆ กัน ด้วย XQ, YQ เพราะมุมเหล่านั้นมุมละ 15°

๓. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๖.๗ ซม. แล้วแบ่งออกเป็น ๕ ส่วนเท่า ๆ กัน วัดส่วนหนึ่ง ๆ ว่ายาวกี่นิ้ว (ให้ใกล้กับส่วนร้อยของนิ้ว) แล้วคำนวณดูว่าที่วัดนั้นได้จริงหรือไม่

$$(๑ \text{ ซม.} = ๐.๓๙๓๗ \text{ นิ้ว})$$

ให้ใช้บรรทัดที่ ๗ แบ่งออกเป็น ๕ ส่วนแล้ววัดของวัดเป็นนิ้วดู

$$\text{วิธีคำนวณ} \quad \text{ส่วนหนึ่งยาว} = \frac{๑}{๕} \times ๖.๗ \text{ ซม.}$$

$$\text{แต่ } ๑ \text{ ซม.} = ๐.๓๙๓๗ \text{ นิ้ว}$$

$$\therefore \frac{๖.๗}{๕} \text{ ซม.} = \frac{๖.๗}{๕} \times ๐.๓๙๓๗$$

$$= ๐.๕๓ \text{ นิ้ว} \quad \text{ใกล้ที่สุด}$$

๔. จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๓.๗๒ นิ้วออกเป็น ๗ ส่วนเท่า ๆ กัน แล้ววัดดูว่าส่วนหนึ่ง ๆ ยาวกี่ ซม. และกี่ มม. แล้วคำนวณดูว่าจะได้เท่าที่จริงหรือไม่

ใช้บรรทัดตามบรรทัดที่ ๗ เหมือนข้อ ๓ แล้วให้วัดดู

$$\text{วิธีคำนวณ} \quad \text{ส่วนหนึ่ง} = \frac{๑}{๗} \times ๓.๗๒ \text{ นิ้ว}$$

$$= \frac{๑}{๗} \times \frac{๓.๗๒}{๐.๓๙๓๗} \text{ ซม.}$$

$$= ๑.๓๔๔ \text{ ซม.}$$

$$= ๑.๓ \text{ ซม.} \quad (\text{ใกล้ มม. ที่สุด})$$

๕. ที่จุด X บนเส้นตรง AB จงลากเส้น XP ให้ตั้งฉากกับ AB และทำ XP ให้ยาว ๑.๘ นิ้ว ลากเส้นเฉียง PQ ยาว ๓.๐ นิ้ว จาก P พบกับ AB ที่ Q จงวัดหาความยาวของ XQ

$$\text{ตอบ } ๒.๔ \text{ นิ้ว}$$

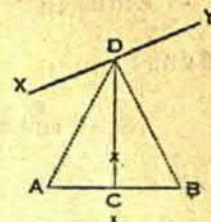
๖. ในเส้นตรง XY จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีระยะเท่ากันจากจุด A และจุด B ที่กำหนดให้ เมื่อไรจึงจะหาไม่ได้

กำหนดให้ XY เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

A, B เป็นจุดสองจุด

จะต้องหา จุด ๆ หนึ่ง ใน XY ที่อยู่ห่าง

จาก A และ B เท่า ๆ กัน



วิธีหา ถ้า AB แบ่งครึ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ C

ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB ที่ C พบ XY ที่ D

ดังนั้นจุด D เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ ลาก AD, DB

ใน $\triangle ADC$ กับ $\triangle DCB$

$$\therefore \begin{cases} AC = CB \\ CD \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{DCA} = \widehat{DCB} \text{ (เป็นมุมฉาก)} \end{cases}$$

$$\therefore AD = DB \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๔)}$$

$\therefore D$ ก็อยู่ห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน

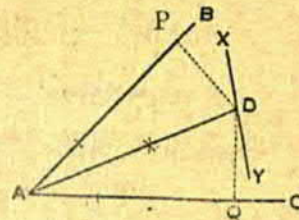
วิธีหาจะเป็นไปไม่ได้คือเมื่อ XY ขนานกับ CD

หรือ XY ตั้งฉากกับ AB

๗. ในเส้นตรง XY จงหาจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งมีระยะเท่า ๆ กันจาก
เส้นตรง AB, AC ซึ่งตัดกัน เมื่อไรจึงจะหาไม่ได้

กำหนดให้ XY เป็นเส้นตรง
เส้นหนึ่ง

AB, AC เป็นเส้นตรงสองเส้นพบ
กันที่ A



จะต้องหา จุด ๆ หนึ่ง ใน XY ซึ่งอยู่ห่างจาก AB และ AC
เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง แบ่ง $\angle BAC$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย AD พบ
 XY ที่ D

$\therefore$ จุด D เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ จาก D ถลาก DP, DQ ให้ตั้งฉากกับ AB, AC ที่จุด P
และ Q ตามลำดับ

ใน $\triangle APD$ กับ $\triangle ADQ$

$$\therefore \begin{cases} \angle APD = \angle AQD & (\text{ต่างก็เป็นมุมฉาก}) \\ \angle PAD = \angle DAQ & (\text{สร้าง}) \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

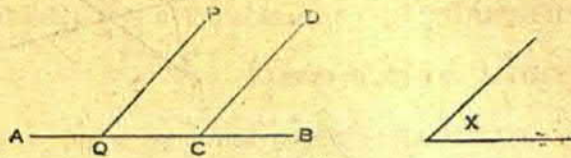
$\therefore DP = DQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore D$ ก็อยู่ห่างจาก AB และ AC เท่า ๆ กัน

$\therefore D$ จึงเป็นจุดที่ต้องการ

ถ้า XY ขนานกับเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAC$ จะหาจุดบน XY ซึ่งอยู่ห่าง
จาก AB และ AC เท่า ๆ กันไม่ได้

๘. จากจุด P ที่กำหนดให้ จงเขียนเส้นตรง PQ ทำมุมกับ
เส้นตรง AB ที่กำหนดให้ ให้เท่ากับมุม ๆ หนึ่งที่กำหนดให้



กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
และ X เป็นมุม ๆ หนึ่งที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง จาก P ถากเส้นตรง PQ ทำมุมกับ AB ให้เท่า
กับมุม X ที่กำหนดให้

วิธีสร้าง ให้ C เป็นจุดใด ๆ ใน AB ทำ $\widehat{BCD}$ ให้เท่า
เท่ากับ $\widehat{X}$ ที่กำหนดให้ (บทสร้างที่ ๕)

จาก P ถาก PQ ให้ขนานกับ DC ตัด AB ที่ Q (บทสร้างที่ ๖)

$\therefore PQ$ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because PQ$ ขนานกับ DC , AB เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{PQB} = \widehat{DCB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

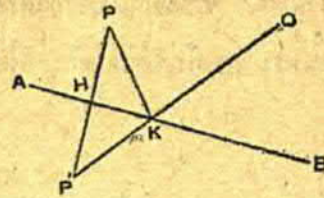
แต่ $\widehat{DCB} = \widehat{X}$ (สร้าง)

$\therefore \widehat{PQB} = \widehat{X}$

$\therefore PQ$ เป็นเส้นที่ต้องการ

๙. จากจุด P และจุด Q ที่กำหนดให้สองจุดอยู่ข้างเดียวกันของ
เส้นตรง AB จงเขียนเส้นตรงสองเส้นพบนันท์ AB และต่างก็ทำ
มุมเท่ากับ AB

กำหนดให้ P, Q เป็นจุดสองจุด
ที่กำหนดให้ อยู่ทางเดียวกันของเส้น
ตรง AB ที่กำหนดให้



จะต้องสร้าง ลากเส้นตรงจาก

P และ Q มาพบกันที่ AB ต่างก็ทำมุมกับ AB เท่ากัน

วิธีสร้าง ลาก P ลาก PH ให้ตั้งฉากกับ AB

ต่อ PH ตรงออกไปถึง P' ทำให้ HP' ให้เท่ากับ PH ลาก $P'Q$
ตัด AB ที่ K

ลาก PK

$\therefore PK, QK$ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle PHK$ กับ $\triangle HP'K$

$$\therefore \begin{cases} PH = HP' & (\text{สร้าง}) \\ HK & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \angle PHK = \angle KHP' & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore \angle PKH = \angle H'KP' \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๔})$

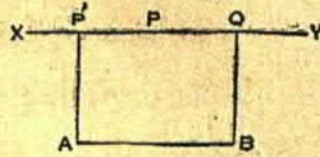
และ $\therefore \angle H'KP' = \angle QKB \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓})$

$\therefore \angle PKH = \angle QKB$

$\therefore PK$ กับ QK ทำมุมกับ AB เท่ากันที่ K จึงเป็นเส้นที่
ต้องการ

๑๐. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด P ที่กำหนดให้ ให้เส้น
ตั้งฉากซึ่งลากจากจุด A และ B ไปยังเส้นตรงนั้นยาวเท่ากัน จะ
สร้างได้เสมอหรือไม่

กำหนดให้ P, A, B เป็นจุดที่
 กำหนดให้สามจุด
 จะต้องสร้าง ลากเส้นตรงเส้น
 หนึ่งผ่าน P ให้เส้นตั้งฉากจาก A และ B ไปยังเส้นตรงนั้นยาว
 เท่ากัน



วิธีสร้างที่ ๑ ลาก AB แล้วลาก XPY ให้ขนานกับ AB (บท
 สร้างที่ ๖) แล้วลาก AP', BQ ให้ตั้งฉากกับ XY

XY เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ PB เป็น $\square$ ด้านขนาน

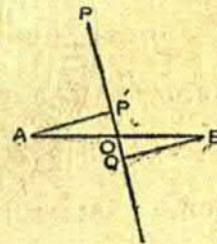
$\therefore AP' = BQ$

XPY จึงเป็นเส้นที่ต้องการ

วิธีสร้างที่ ๒ แบ่ง AB ออกเป็นสองส่วน

เท่า ๆ กันที่ O ลาก PO

และจาก A และ B ลาก AP', BQ ให้
 ตั้งฉากกับ PO หรือ PO ต่อ



$\therefore PO$ เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle AP'O$ กับ $\triangle BOQ$

$$\therefore \begin{cases} AO = BO & (\text{สร้าง}) \\ \angle AOP' = \angle BOQ & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \\ \angle AP'O = \angle OQB & (\text{ค่าเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore AP' = BQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore PPO$ จึงเป็นเส้นที่ต่อจาก

จุดสร้างนี้ ถ้าจุด A, B และ P อยู่บนเส้นตรงอันเดียวกันแล้ว
สร้างไม่ได้

แบบฝึกหัดที่ ๑๗

เมื่อเรียนจบบทสร้างที่ ๑๐ แล้ว

๑. จงสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งซึ่งมีด้านเป็น ๗.๕ ซม., ๖.๒ ซม.

และ ๕.๓ ซม.

จงเขียนเส้นตั้งฉากซึ่งลากจากจุดยอดตรงข้ามมาที่ด้านทั้งสามนี้
และวัดเส้นตั้งฉากว่ายาวเท่าไร

(สังเกตเส้นตั้งฉาก ถ้าเขียนอย่างถูกต้อง จะมาพบกันที่จุด
จุดหนึ่ง จะได้แสดงให้เห็นในภาค ๓) ให้นักเรียนสร้างวัดเอง

๒. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ ให้ $a = ๓.๐๐"$, $b = ๒.๕๐"$,
 $c = ๒.๗๕"$

แบ่งครึ่งมุม A ด้วยเส้นตรงที่ลากมาจากด้านฐานที่ X วัด BX, XC
(ให้ใกล้กับส่วนของครึ่ง) และคำนวณหาค่าของ $\frac{BX}{CX}$ เพื่อยกคณีย
ของค่าหนึ่ง แล้วเปรียบเทียบกับผลที่ได้กับค่าของ $\frac{c}{b}$

๑๓๕

โดยวิธีวัด $BX = ๑.๕๗$ นิ้ว, $XC = ๑.๔๓$ นิ้ว

$$\therefore \frac{BX}{CX} = \frac{๑.๕๗}{๑.๔๓} = ๑.๐๔๘$$

$$\text{และ } \frac{c}{b} = \frac{๒.๗๕}{๒.๕} = ๑.๑๐$$

๓. ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว ๓๑.๕ หลา กับ ๒๖.๐ หลา และมีมุมในระหว่างด้านเป็น ๓๕° จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน ๑ นิ้วแทน ๑๐๐ หลา) แล้ววัดหาความยาวของด้านที่สาม

ลาก BC ให้ยาว ๓๑.๕ นิ้ว แทน ๓๑๕ หลา

ที่ B ทำ $\widehat{CBA}$ ให้ทาง ๓๕° และตัด AB ให้เท่ากับ ๒๖.๖ นิ้ว แทน ๒๖๐ หลา แล้ววัด AC ได้ ๒๖.๐๐ นิ้ว

ระยะห่างด้านที่สามของสามเหลี่ยมยาว ๒๐.๐ หลา

๔. ABC เป็นรูป $\triangle$ ด้านฐาน BC ยาว ๗.๕ เมตร และมีมุมที่ B และ C เป็น ๔๗° และ ๖๘° ตามลำดับ จงเขียนแผนผังของนาฬิก (มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๑๐ ม.) จงหาขนาดของ $\widehat{A}$ โดยไม่ต้องวัด แล้วจึงวัดแผนผังหาความยาวของด้านทั้งสองของนาฬิก แล้ววัดเส้นตั้งได้ฉากลากจาก A มายัง BC

$$\widehat{A} = ๑๘๐^{\circ} - ๔๗^{\circ} - ๖๘^{\circ} = ๖๕^{\circ}$$

ลาก BC ให้ยาว ๗.๕ ซม. ที่ B และ C ทำ $\widehat{CBA}$, $\widehat{BCA}$ ให้ทาง ๔๗° , ๖๘° ตามลำดับ

โดยวิธีวัดจากแผนผัง $AB = ๗.๗$ ซม. $AC = ๖.๑$ ซม. และเส้นตั้งได้ฉากลากจาก A มายัง BC = ๕.๖ ซม.

∴ ด้านของนาฬิกา ๗๗ เมตร, ๖๑ เมตร และเดินตั้งได้ฉาก
ยาว ๕๖ เมตร

๕. เรือยอชลำหนึ่งออกจากท่าเดินไปทางทิศตะวันออกเฉียง
เหนือชั่วโมงละ ๔ นอต (Knots) เมื่อเดินไปได้ ๒๐ นาทีก็เปลี่ยน
เดินไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ ๓๕ นาทีแล้ววกกลับเดิม ถามว่าเรือ
อยู่ห่างจากท่าเท่าไร และเรือจะต้องเดินกลับทางไหน

จงเขียนแผนที่แสดงทางเดินของเรือไว้มาตราส่วน ๒ ซม. แทน

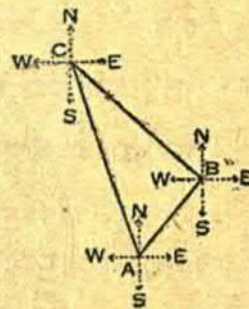
๑ นอต

กำหนดให้ A, B, C เป็นจุดสามจุด
ซึ่งเรือเปลี่ยนทางเดิน

๒๐ นาทีเรือเดินไปได้ ๔ นอต

๒๐ ,, ,, ,, $\frac{4}{60} \times ๒๐ = ๓$,,

๓๕ ,, ,, ,, $\frac{4}{60} \times ๓๕ = ๒\frac{๑}{๔}$,,



ฉะนั้นจึงลาก AB ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือให้ยาว ๒ ซม.

ที่ B ลาก BC ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือให้ยาว $๑๐\frac{๑}{๒}$ ซม.

โดยวิธีวัด CA = ๑๒.๑ ซม.

$\angle SCA = ๑๕^{\circ}$ ราวๆ นั้น

∴ ระยะทางจากท่าถึง C ใกล้เคียง ๖.๐๕ นอต

และทางที่เรือจะเดินกลับนั้นคือ ๑๕° ตะวันออกของทิศใต้
[รูปที่เขียนนี้ไว้มาตราส่วนเพียงครึ่งหนึ่งของที่กำหนดให้]

๖. จงเขียนรูป $\triangle$ มุมฉากรูปหนึ่ง ให้ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

$c = ๑๐ \cdot ๖๐$ ซม. และด้าน $a = ๕ \cdot ๖๐$ ซม. แล้ววัดความยาวของด้าน b และจงหาค่าของ $\sqrt{c^2 - a^2}$ เมื่อเสร็จแล้วจงเปรียบเทียบผลทั้งสองว่าเป็นอย่างไรกัน.

ให้สร้างตามวิธีบทสร้างที่ ๑๐

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2 - a^2} &= \sqrt{๑๐ \cdot ๖๐^2 - ๕ \cdot ๖๐^2} = \sqrt{(๑๐ \cdot ๖ + ๕ \cdot ๖) (๑๐ \cdot ๖ - ๕ \cdot ๖)} \\ &= \sqrt{๑๖ \cdot ๓ \times ๕ \cdot ๐} = \sqrt{๘๑} = ๙ \text{ ซม.}\end{aligned}$$

เมื่อสร้างรูปให้ถูกต้องแล้ว b จะได้ ๙ ซม. เท่ากัน (ดูทฤษฎีบทที่ ๒๙)

๗. จงสร้างรูป $\triangle$ รูปหนึ่งจากสิ่งที่กำหนดให้ $\hat{B} = ๓๔^\circ$
 $b = ๕ \cdot ๕$ ซม. $c = ๘ \cdot ๕$ ซม. จงแสดงให้เห็นว่าสร้างได้สองรูป
แล้ววัดหาค่าของ a กับ C ของ $\triangle$ ทั้งสองรูป และแสดงให้เห็นว่า
มุม C ทั้งสองมุมเป็นมุมประกอบของมุมฉากซึ่งกันและกัน.

สร้างตามบทสร้างที่ ๙

มุม C ทั้งสองจะเป็นมุมประกอบของมุมฉากกัน เพราะว่า
 $AC_1 = AC_2 \therefore \widehat{AC_1C_2} = \widehat{AC_2C_1}$, แต่ $\widehat{ACB}$ กับ $\widehat{AC_1C_2}$ เป็นมุม
ประกอบของมุมฉากกัน.

$\therefore \widehat{AC_2B}, \widehat{AC_1B}$ ก็เป็นมุมประกอบของมุมฉากกัน.

๘. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $\hat{A} = ๕๐^\circ$, $b = ๖ \cdot ๕$ ซม.
จงสร้างรูปสามเหลี่ยมว่าจะสร้างได้กี่รูปในข้อหนึ่ง ๆ.

- ๑) $a = ๗$ ซม. ๒) $a = ๖$ ซม.
 ๓) $a = ๕$ ซม. ๔) $a = ๔$ ซม.

ลากเส้นตรง AX ให้ยาวพอสมควร ที่ A ทำมุม XAY ให้ทาง ๕๐° จาก AY ตัด AC ออกให้ยาว ๖.๕ ซม. C เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้ความยาวของ a ในข้อ ๑-๔ เป็นรัศมีเขียนส่วน โค้งตัด AX ที่จุดต่าง ๆ ตามแต่จะตัดได้.

๑) ตัด AX ได้สองแห่ง แต่ที่ตัดทำมุมของ $\triangle$ ทาง ๕๐° ได้เพียงรูปเดียว อีกรูปหนึ่งทาง ๑๓๐°

ฉะนั้นจึงสร้าง $\triangle$ ได้เพียงรูปเดียว

๒) ขอบตัดได้ ๒ แห่ง ที่ทำให้รูป $\triangle$ มีมุม A ทาง ๕๐°

$\therefore$ จึงสร้างได้ ๒ รูป

๓) ตัดหนึ่งเดียวคือ ส่วน โค้งเพียงสัมผัสเส้น AX เท่านั้น

ฉะนั้นจึงสร้างได้รูปเดียว

๔) ส่วนโค้งไม่ตัด AX เลย ฉะนั้นจึงสร้าง $\triangle$ ไม่ได้

๙. ถนนตรงสองสายตัดกันเป็นมุมฉากที่ A มีคลองแห่งหนึ่งยาวเป็นเส้นตรงขวางถนนทั้งสองสาย ถนนสองสายนี้มีสะพานข้ามคลองที่ B และ C ระยะระหว่างสะพานเป็น ๔๖๑ หลา และระยะจาก A ทัดกันถึงสะพาน B เป็น ๒๖๑ หลา จงเขียนแผนผังและวัดระยะจาก A ถึง C ว่าเท่าไร

จะเห็นได้ว่าต้องสร้าง $\triangle$ มุมฉากให้ A เป็นมุมฉาก AB, BC ยาว $๒๖๑, ๔๖๑$ หลา เราสร้างได้โดยใช้บทสร้างที่ ๑๐ และใช้

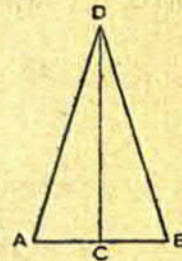
มาตราส่วน ๑ นิ้วต่อ ๑๐๐ หลา จากรูปจะวัด AC ได้ ๓.๘ นิ้ว

∴ ระยะ AC ก็ไกล ๓๘๐ หลา

๑๐. จงสร้างรูป $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งลงบนฐานยาว ๔ ซม. ส่วนสูงของรูป $\triangle$ นั้น ๖.๒ ซม. จงพิสูจน์ว่าด้านสองด้านเท่ากัน และวัดด้านทั้งสอง (ให้ได้อ่านจนใกล้เคียงกับมิลลิเมตร)

กำหนดให้ AB เป็นฐานที่กำหนดให้ยาว ๔ ซม.

จะต้องสร้าง $\triangle$ หน้าจั่วบนฐาน AB นี้ และให้มีส่วนสูง ๖.๒ ซม.



วิธีสร้าง แบ่ง AB ออกเป็น ๒ ส่วนเท่าๆ กันที่ C ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB ให้ CD ยาว ๖.๒ ซม. ลาก DA, DB

∴ ABD เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ และวัดด้านเท่าได้ ๖.๕ ซม.

พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ กับ $\triangle DCB$

$$\therefore \begin{cases} AC = CB & (\text{สร้าง}) \\ DC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \angle ACD = \angle DCB & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \end{cases}$$

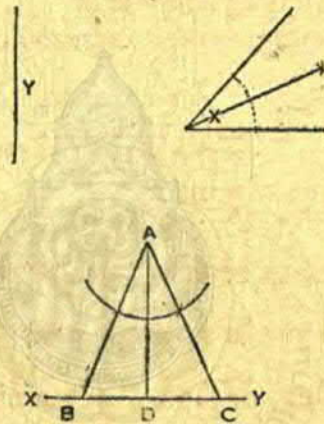
∴ $AD = DB$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

∴ $\triangle ABD$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๑๑. (๑) จงสร้างรูป $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งให้มีมุมยอดเท่ากับมุมที่กำหนดให้มุมหนึ่ง และเส้นตั้งฉากจากจุดยอดมายังฐานยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง.

(๒) และสร้างรูป $\triangle$ ด้านเท่ารูปหนึ่งให้เส้นตั้งฉากจากจุดยอดมายังด้านตรงข้ามยาว b ซม. แล้ววัดด้านของรูป $\triangle$ นั้นว่ายาวเท่าไร (ให้ได้จำนวนใกล้เคียงกับมิลลิเมตร)



(๑) ให้ X เป็นมุมที่กำหนดให้

Y เป็นเส้นส่วนของสูงที่ลากจากจุดยอดมาตั้งฉากกับฐาน
จะต้องสร้าง $\triangle$ หน้าจั่ว ให้มุมยอด $A = \widehat{X}$

ส่วนของสูง $AD = Y$

วิธีสร้าง ลาก AD ให้เท่ากับ Y

ที่ D ลาก XDY ให้ตั้งได้ฉากกับ AD

ที่ A ทำมุม $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \frac{\widehat{X}}{2}$

∴ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ADC$

$$\therefore \begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{ADC} & (\text{ต่างเป็นมุมฉาก}) \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} & (\text{สร้าง}) \end{cases}$$

∴ $AB = AC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

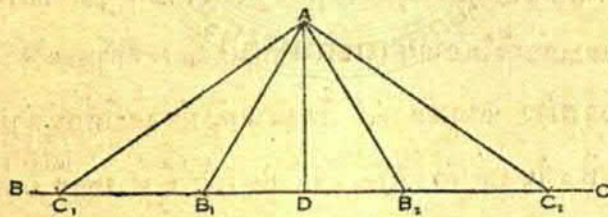
∴ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว มีมุมยอด $\widehat{A} = \widehat{X}$, $AD = Y$ ตามที่กำหนดให้

(๒) ถ้า AD ให้ยาว ๖ ซม. แล้วสร้างเหมือน (๑)

ให้ $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} = 30^\circ$

∴ มุมของ $\triangle$ ที่กางมุมละ 60° จึงเป็น $\triangle$ ด้านเท่า

๑๒. สร้าง $\triangle ABC$ ซึ่งมีเส้นตั้งฉากจาก A มาที่ BC ยาว ๕.๐ ซม. และด้าน AB, AC ยาว ๕.๘ ซม. และ ๘ ซม. ตามลำดับ แล้ววัดด้าน BC



ถ้า AD ให้ยาว ๕ ซม. แทนเส้นตั้งฉากจากมุมยอด A มายัง

ฐาน จาก D ถ้า BDC ให้ตั้งฉากกับ AD A เป็นจุดศูนย์กลาง วงกลมที่มี ๕.๘ ซม. เส้นตั้งฉากตัด BC ที่ B_1, B_2 และวงกลมที่มี ๘ ซม.

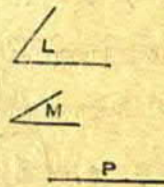
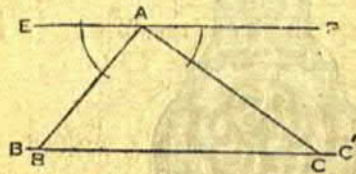
เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่ C_1, C_2

$\therefore \triangle AB_1C_1, \triangle AB_1C_2, \triangle AB_2C_1, \triangle AB_2C_2$ ต่างก็เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

โดยวิธีวัด ฐาน $B_1C_1 = B_2C_2 = ๔ \cdot ๕$ ซม.

$B_2C_1 = B_1C_2 = ๑๐ \cdot ๕$ ซม.

๑๓. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ ที่มีมุมที่ B และ C เท่ากับ $\widehat{L}$ และ $\widehat{M}$ ที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉากจาก A มาที่ BC เท่ากับเส้น P ที่กำหนดให้



ให้ L, M เป็นมุม ๒ มุม P เป็นเส้นตั้งฉากหนึ่งที่กำหนดให้

จะต้องสร้างรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง มุมที่ฐานเท่ากับ $\widehat{L}, \widehat{M}$ ที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉากจากมุมยอดเท่ากับเส้น P ที่กำหนดให้

วิธีสร้าง ตากเส้น $B'C'$ ให้ขนานกับ EF และให้อยู่ห่างกันเท่ากับ P ที่ A ใน EF ทำ $\widehat{EAB} = \widehat{L}$ พบ $B'C'$ ที่ B และที่ A ทำ $\widehat{FAC} = \widehat{M}$ พบ $B'C'$ ที่ C (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ EF ขนานกับ BC AB, AC เป็นเส้นตัด

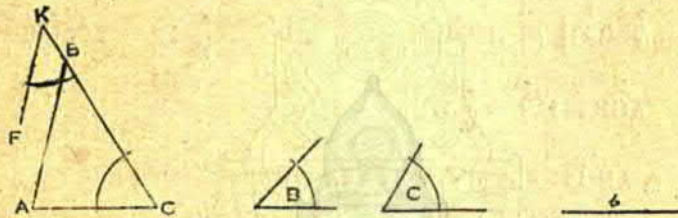
$\therefore \widehat{EAB} = \widehat{ABC}$ และ $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{L}$, $\widehat{ACB} = \widehat{M}$ และ A อยู่ห่างจาก BC เท่ากับ P

$\therefore \triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๔. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ (โดยไม่ใช้ไม้โปรเทคเตอร์)

กำหนด $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ และด้าน b ให้



ให้ B, C เป็นมุมที่กำหนดให้ b เป็นความยาวของด้าน AC ที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง รูป $\triangle$ รูปหนึ่งให้เท่ากับส่วนที่กำหนด

สร้าง ลาก AC ให้ยาว = b, ที่ C ทำ $\widehat{KCA}$ ให้เท่าเท่ากับ $\widehat{C}$

ที่ K ทำ $\widehat{FKC}$ เท่ากับ $\widehat{B}$ ให้ F เข้ามาทาง A อยู่

ลาก AB ให้ขนานกับ FK ตัด CK ที่ B

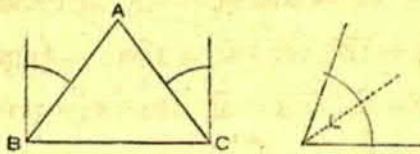
$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ FK // AB, KC เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{FKB} = \widehat{ABC} = \widehat{B}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๕. จงสร้างรูป $\triangle$ หน้าจากรูปหนึ่งลงบนฐานที่กำหนดให้ และให้มุมยอดเท่ากับ $\widehat{L}$ ที่กำหนดให้



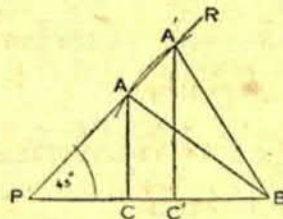
ให้ $\widehat{L}$ เป็นมุมยอดที่กำหนดให้ BC เป็นฐานที่กำหนดให้
 จะต้องสร้าง $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งให้มีด้านตามกำหนดให้
 วิธีสร้าง ที่ B ทำมุม $\widehat{CBA} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{L}$ และที่ C ก็ทำ
 $\widehat{ACB} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{L}$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{ เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่วซึ่งมีมุมยอด} &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180^\circ - 2B \\ &= 180^\circ - 2\left(90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{L}\right) \\ &= 180^\circ - 180^\circ + \widehat{L} = \widehat{L} \end{aligned}$$

๑๖. จงสร้างรูป $\triangle$ มุมฉากรูปหนึ่งซึ่งมีด้านตรงข้ามกับมุม
 ฉาก C เท่ากับด้านที่กำหนดให้ และผลบวกของ a กับ b เท่ากับ
 ด้านที่กำหนดให้อีกด้านหนึ่ง.

เช่น ถ้า $c = 5.3$ ซม. และ $a + b = 57.3$ ซม.

จงวัดหาความยาวของด้าน a กับ b และหาค่าของ $\sqrt{a^2 + b^2}$



วิธีสร้าง ถ้า $PB = (a+b) = ๗.๓$ ซม. ที่ P ตาก PR
ให้ $\angle BPR = ๔๕^\circ$

B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $c = ๕.๓$ ซม. เขียนส่วนโค้งตัด
PR ที่ A และ A' ตาก AC, A'C' ซึ่งได้ฉากกับ PB ที่ C, C' ตาม
ลำดับ

$\therefore ACB$ หรือ $A'CB$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \angle APC = ๔๕^\circ$ และ $\angle ACP$ หรือ $\angle A'CP$ เป็นมุมฉาก

$\therefore \angle PAC$ หรือ $\angle PA'C' = ๔๕^\circ = \angle APC$ หรือ $\angle A'PC'$

$\therefore AC = CP$ หรือ $A'C' = C'P$

$\therefore AC + CB$ หรือ $A'C' + C'B = PB = ๗.๓$ ซม.

(ถ้า c ยาวกว่าเส้นตั้งได้ฉากจาก B มายัง PR สร้างได้ ๒ รูป)

(,, c นั้น ,, ,, B ,, PR ,, ไม่ได้เลย)

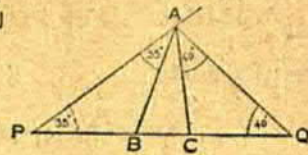
(,, c เท่ากับ ,, ,, B ,, PR ,, ได้รูปเดียว)

โดยวิธีวัด ด้านทั้งสองของ $\triangle$ ที่เหลือยาว ๔.๕ ซม. ๒.๘ ซม.

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{(๔.๕)^2 + (๒.๘)^2} \\ &= \sqrt{๒๘.๐๘} \\ &= ๕.๓ \text{ ซม.}\end{aligned}$$

๑๗. จงสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งให้มีเส้นล้อมรอบยาวเท่ากับเส้นตรง
ที่กำหนดให้ และมุมที่ฐานสองมุม เท่ากับมุมที่กำหนดให้สองมุม
มุมต่อมุม ตัวอย่างเช่น $a+b+c = ๘$ ซม., $B = ๗๐^\circ$, $C = ๘๐^\circ$

วิธีสร้าง ตาก PQ ให้ยาวเท่ากับ
ความยาวของด้านทั้งสาม = ๘ ซม.



จาก P ตาก PA ทำ $\widehat{APQ} = \widehat{B}$
 $\widehat{B} = 35^\circ$

และจาก Q ตาก QA ทำ $\widehat{PQA} = \widehat{C} = 40^\circ$

ที่ A ทำ $\widehat{PAB} = \widehat{APB}$ พบ PQ ที่ B

และที่ A ทำ $\widehat{CAQ} = \widehat{AQC}$ พบ PQ ที่ C

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \widehat{APB} = \widehat{PAB}$ (สร้าง)

$\therefore AB = BP$

ทำนองเดียวกัน $AC = CQ$

$\therefore AB + BC + CA = PB + BC + CQ = PQ =$ ความยาว
ของด้านที่กำหนดให้ = ๘ ซม.

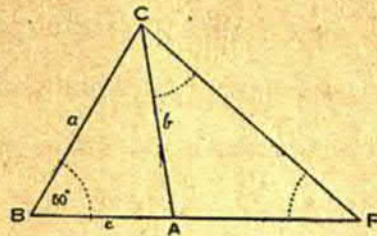
$\widehat{ABC} = \widehat{APB} + \widehat{PAB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)
 $= 70^\circ$

ทำนองเดียวกัน $\widehat{ACB} = 80^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๘. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $a = 6 \cdot x$
ซม. $c + b = 10$ ซม. และ $\widehat{B} = 60^\circ$ และวัดหาความยาว
ของ b และ c

๑๔๗



สร้าง ทำ $\widehat{CBF} = 60^\circ$ ตัด $BC = 6.5$ ซม. $BF = 10$ ซม.

ลาก FC , และจาก C ลาก CA , ทำ $\widehat{ACF} = \widehat{AFC}$

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \widehat{AFC} = \widehat{ACF}$

$$AF = AC$$

$$\therefore BA + AC = BA + AF = 10 \text{ ซม.}$$

$\therefore \triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

$$\text{วัด } b = 5.5 \text{ ซม.}, \quad c = 4.2 \text{ ซม.}$$

๑๘. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ จากสิ่งกำหนดให้ต่อไปนี้ $a = 7$ ซม. $c - b = 1$ ซม. และ $\widehat{B} = 55^\circ$ แล้ววัดหาความยาวของ b และ c

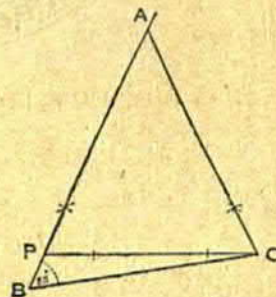
สร้าง ทำ $\widehat{PBC} = 55^\circ$

$$\text{ตัด } BC = 7 \text{ ซม.} \quad BP = 1 \text{ ซม.}$$

ลาก PC

ที่ C ทำมุม $\widehat{ACP}$ เท่ากับ $\widehat{CPA}$ พบ BP ตัดที่ A

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ



พิสูจน์ $\therefore \widehat{PCA} = \widehat{APC}$ (ตรง))

$\therefore AC = AP$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

และ $\therefore BA - AC = BP = ๑$ ซม.

$\therefore ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ตั้งการ

โดยวิธีวัด $AB = ๘.๓$ ซม. $AC = ๗.๓$ ซม.

แบบฝึกหัดที่ ๑๘

เมื่อเรียนจบบทส้างที่ ๑๓ แล้ว

๑. จงสร้างรูป $\square$ ขนมเมื่อกปุ่นให้ มีด้าน เท่ากับด้าน PQ ที่กำหนดให้ และมีเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งยาวเท่ากับ PQ ด้วย และจงหามุมเหล่านั้นว่าทางมุมใดที่องศา (อย่าวัด) ให้ยกเหตุผลประกอบคำตอบด้วย

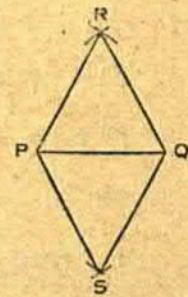
วิธีสร้าง บนฐาน PQ สร้างรูป $\triangle$ ด้าน

เท่า PQR กับ PQS

$\therefore PRQS$ เป็น $\square$ ขนมเมื่อกปุ่นที่ตั้งการ

พิสูจน์ $\therefore \square PRQS$ มีด้านเท่ากันหมดทั้ง

สี่ด้าน



และ $\therefore \widehat{RPQ} = \widehat{PQS}$ (ต่างก็กาง ๖๐°) และเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore PR$ ขนานกับ SQ

$\therefore$ PQRS เป็น $\square$ ขนมนียกปูน

$\widehat{R}$ และ $\widehat{S}$ เป็นมุม 60° เพราะต่างเป็นมุมของ $\triangle$ ด้านเท่า

$\widehat{RPS} = \widehat{RQS} = 120^\circ$ เพราะต่างก็เป็น ๒ เท่าของ มุม ของรูป $\triangle$ ด้านเท่า

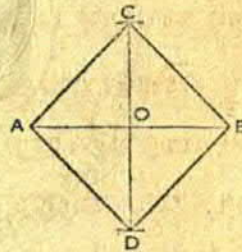
๒. จงสร้างรูป $\square$ จตุรัสตรงบนด้าน ๆ หนึ่งยาว ๒.๕ นิ้ว จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน และวัดเส้นทแยงมุม (ให้ใกล้เคียงกับส่วนร้อยของนิ้ว) เพื่อสอบดูว่าสร้างรูปถูกหรือไม่
(ดูแบบฝึกหัดที่ ๓ ข้อ ๓)

๓. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสตรงบนเส้นทแยงมุม ยาว ๖ ซม. และวัดความยาวของด้านของรูปนี้ว่ายาวด้านละเท่าไร แล้วคิดเฉลี่ยหาผลที่ได้

ให้ AB เป็นเส้นทแยงมุมที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง $\square$ จตุรัสตรงตามกำหนดนี้

วิธีสร้าง แบ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ O



ลาก OD ให้ตั้งฉากกับ AB

ทำ $OC = OD = OA$

ลาก AC, CB, BD, DA

$\therefore \square$ ACBD เป็น $\square$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\triangle AOC = \triangle OCB = \triangle BOD = \triangle DOA$
(ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore AC=CB=BD=DA$ จึงเป็น $\square$ ด้านเท่า

$$\widehat{ACO} = \widehat{CAO} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๕})$$

$$\text{และ } \widehat{ACO} + \widehat{CAO} = ๙๐^{\circ} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๖})$$

$$\therefore \widehat{ACO} \text{ หรือ } \widehat{CAO} \text{ ก็เท่ากับ } ๔๕^{\circ}$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } \widehat{BCO} = ๔๕^{\circ}$$

$$\therefore \widehat{ACB} = ๙๐^{\circ}$$

ทำนองเดียวกันมุมอื่นๆ ของ $\square$ ก็ทั้งหมดละ ๙๐°

$\therefore \square$ นี้เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้านเท่าซึ่งเรียกว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัส

๔. สร้าง $\square$ ด้านขนาน ABCD ให้ด้าน $AB = ๕.๗$ ซม. และ

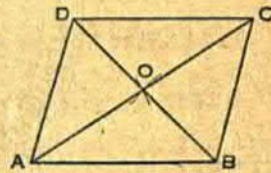
เส้นทแยงมุม AC, BD ยาว ๘ ซม. และ ๖ ซม. ตามลำดับ จงวัด

หาความยาวของด้าน AD

วิธีสร้าง ตาก AB ให้ยาว ๕.๗ ซม.

บนฐาน AB สร้าง $\triangle OAB$ ให้ OA

ยาว ๔ ซม. BO ยาว ๓ ซม. คือ AO



ตรงไปถึง C ทำ $OC = AO$ คือ BO ตรงไปถึง D ทำ $OD = OB$

$\therefore \square ABCD$ เป็น $\square$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle AOD$ กับ $\triangle COB$

$$\therefore \begin{cases} OD = OB & (\text{สร้าง}) \\ AO = OC & (,,) \\ \widehat{DOA} = \widehat{COB} & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$\therefore \widehat{ODA} = \widehat{OBC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕) ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore AD$ ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

ในทำนองเดียวกัน DC ก็ขนานกับ AB

$\therefore \square ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนานที่ค้องการ

โดยวิธีวัด $AD = ๔.๔$ ซม.

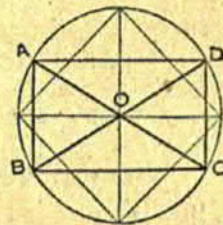
๕. เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งยาวเท่ากัน (ยาวเส้นละ ๖.๐ ซม.) เส้นทั้งสองแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันเป็นมุม ๖๐° จงชี้ให้เห็นว่า สิ่ง ที่ กำหนดให้ทำประการ ซึ่งไม่ อาศัย กัน ได้กำหนดไว้ให้ แล้วในข้อนี้

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมและบอกว่าเป็นสี่เหลี่ยมอะไร แล้วพิสูจน์คำตอบของท่านด้วย และจงวัดเส้นล้อมรอบ ถ้ามุมในระหว่างเส้นทแยงมุมทวนเป็น ๙๐° เส้นล้อมรอบนั้นจะทวนร้อยละเท่าไร ?

สิ่งที่กำหนดให้ทำประการ โดยไม่อาศัย กัน ก็คือ เซกเมนต์ ทั้งสี่ที่เกิดขึ้นโดยเส้นทแยงมุมตัดกัน และมุม ที่ เส้น ทแยงมุมตัดกันอีกประการหนึ่ง

วิธีสร้าง (๑) O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๓ ซม. เขียนวงกลมลากเส้นผ่านศูนย์กลาง AOC, BOD ให้ $\widehat{DOC} = ๖๐^\circ$

ฉะนั้น $ABCD$ เป็น $\square$ ที่ค้องการ มีเส้น



กระเบื้องมุมยาวด้านละ ๖ ซม. ติดกันเป็นมุม 60° รูปสี่เหลี่ยม
นี้เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เราพิสูจน์หาค่าขอบได้ดังนี้

ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle DOC$

$$\therefore \begin{cases} AO = OC & (\text{โจทย์}) \\ BO = OD & (\text{โจทย์}) \\ \angle AOB = \angle DOC & (\text{ทฤษฎีบทที่ ๓}) \end{cases}$$

$\therefore \angle BAO = \angle OCD$ (ทฤษฎีบทที่ ๔) ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore AB$ ขนานกับ DC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

ทำนองเดียวกัน AD ขนานกับ BC

$\therefore \square ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน .

โดยวิธีวัด $AB = ๓$ ซม. $AD = ๕.๒$ ซม.

$\therefore$ ด้านทั้งสี่ของ $\square$ ยาว ๒ ($AB+AD$) = ๑๖.๔ ซม.

(๒) ถ้ามุมในระหว่างด้านกระเบื้องมุม 60° เป็นมุม ๙๐°

จะวัดด้านยาวได้ด้านละ ๔.๒๔ ซม.

$\therefore$ ทั้งสี่ด้านยาวประมาณ $๔.๒๔ \times ๔ = ๑๖.๙๖$

$\therefore$ ความยาวของด้านทวิชน $๑๖.๙๖ - ๑๖.๔ = ๐.๕๖$

$\therefore$ ทวิชนร้อยละ $\frac{๐.๕๖}{๑๖.๔} \times ๑๐๐ = ๓.๔$ เปอร์เซ็นต์

๖. $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง $AB = ๕.๖$ ซม. $BC = ๒.๕$ ซม.

$CD = ๔.๐$ ซม. และ $DA = ๓.๓$ ซม.

จงแสดงให้เห็นว่าดังที่กำหนดให้เมื่อสร้างรูป $\square$ แล้ว สี่เหลี่ยม
ที่สร้างยังไม่มีความแน่นอน

และจงสร้างรูป $\square$ เมื่อ (๑) $\hat{A} = 30^\circ$ (๒) $\hat{A} = 60^\circ$
 ทำไมจึงสร้างไม่ได้ในเมื่อ $\hat{A} = 100^\circ$ และอย่างน้อยที่สุดมุม
 A จะเท่าไร จึงจะสร้างรูป $\square$ นี้ไม่ได้ จงสร้างรูปแสดงไว้ด้วย
 ในเมื่อไม่กำหนดขนาดของมุมให้เช่นนั้น อาจสร้างได้หลายอย่าง
 แต่มันจะให้ $\square$ BAD ใหญ่เล็กเพียงใด

$\therefore$ รูป $\square$ จึงไม่มีขนาดแน่นอน
 วิธีสร้าง เมื่อกำหนด $\hat{A}$ ให้ $30^\circ, 60^\circ$ นั้นให้จุดบดสร้างที่ ๑๑
 ถ้า $\hat{A} = 100^\circ$, BD ต้องยาวกว่า 6.5 ซม. จากนั้นส่วนโค้ง
 ซึ่ง D, B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 4.0 ซม. และ 2.5 ซม. จะ
 เขียนให้ ตัดกันไม่ได้

ถ้า $BD = 6.5$ ซม. ส่วน โค้งต้องเส้นนี้จะตัดกันบน BD เมื่อ
 BD ยาวกว่า 6.5 ซม. ไปแล้วย่อมสร้างไม่สำเร็จ และเมื่อสั้นลงมาถึง
 6.5 ซม. ก็สร้างได้เป็นรูป $\triangle$ ที่มี $AD = 3.3$ ซม. $AB = 5.6$ ซม.
 $DB = 6.5$ ซม. โดยวิธีวัด $\hat{A} = 90^\circ$

$\therefore$ อย่างน้อยที่สุดมุม A ทาง 90° จึงสร้าง $\square$ นี้ไม่ได้ (คือ
 ถ้ามุม A เล็กกว่า 90° ลงมาอีกก็สร้าง $\square$ ได้) ให้นักเรียนสร้างเอง

๗. จงแสดงวิธีสร้างรูป $\square$ รูปหนึ่ง เมื่อรู้ความยาวของด้าน
 ๓ ด้าน และเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง จากบรรดาสิ่งที่เรารู้เหล่านี้
 ไหนจะต้องมีลักษณะเป็นอย่างไร จึงจะสร้างรูปได้ตามที่กำหนดให้
 จงแสดงวิธีของท่าน โดยสร้างรูป $\square ABCD$ เมื่อ

(๑) $AB = ๓.๐"$, $BC = ๑.๗"$, $CD = ๒.๕"$, $AD = ๒.๘"$
และเส้นทแยงมุม $BD = ๒.๖"$ แล้ววัดหาความยาวของ AC

(๒) $AB = ๓.๖$ ซม., $BC = ๗.๗$ ซม., $CD = ๖.๘$ ซม.
 $DA = ๕.๑$ ซม. และเส้นทแยงมุม $AC = ๘.๕$ ซม. แล้ววัดมุม
ที่ B และ D

วิธีสร้าง ถ้า BD ให้ยาวเท่ากับเส้นทแยงมุมที่กำหนดให้
บนฐาน BD สร้าง Δ ๒ รูปให้อยู่รูปละทางของ BD และให้ด้านยาว
ของด้านของรูป Δ ทั้งสองรูปนี้ เท่ากับส่วนของด้านของรูป $\square$ ที่
กำหนดให้ เราจะได้รูป $\square$ ตามต้องการ

ให้เทียบข้อ ๑ ของแบบฝึกหัดนี้

ตามทฤษฎีบทที่ ๑๑ ว่า ด้านใดด้านหนึ่งของรูป Δ ต้องสั้นกว่า
อีก ๒ ด้านรวมกัน และมันต้องยาวกว่าผลต่างของอีก ๒ ด้านด้วย

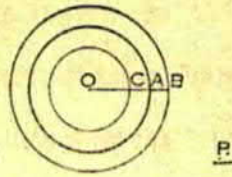
ในที่นี้จึงเห็นว่า BD ต้องยาวกว่าผลต่างของด้าน BA กับ AD
หรือด้าน BC กับ CD และต้องสั้นกว่าผลบวกของ BA กับ AD หรือ BC
กับ CD จึงจะสร้าง $\square$ ได้สำเร็จ

แบบฝึกหัดที่ ๑๗

เมื่อเรียนจบบทสร้างที่ ๑๕ แล้ว

๑. จงหาโดสของจุด ๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนไปมีระยะห่างจากเส้น
รอบวงของวงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่งเท่ากันเสมอ

ให้ A เป็นวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมี O เป็น
จุดศูนย์กลางที่กำหนดให้ จะต้องหาโดัดของ
จุด ๆ หนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ไปมีระยะห่างจากเส้น
รอบวงของวงกลม A เท่ากับระยะ P ที่กำหนดให้เสมอ



วิธีหา ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับผลบวกหรือผลลบของ
รัศมีของวงกลมที่กำหนดให้กับ P (คือ $AO + P$ หรือ $AO - P$)
เขียนวงกลม B หรือ C

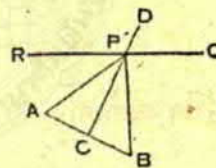
เส้นรอบวงของวงกลม B หรือ C นั้นเป็นโดัดที่ต้องการ เพราะอยู่
ห่างจากเส้นรอบวง A เท่า ๆ กันตลอด และเท่ากับระยะ P ที่กำหนด
ให้ด้วย

๒. จุด P เคลื่อนไปตามเส้นตรง RQ จงหาที่ซึ่งจุด P มีระยะ
ห่างเท่ากันจากจุด A และ B ที่กำหนดให้สองจุด

ให้ RQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

A, B เป็นจุดสองจุดที่กำหนดให้

จะต้องหาว่า จุด P จะอยู่ตรงไหน



ใน RQ จึงมีระยะห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน

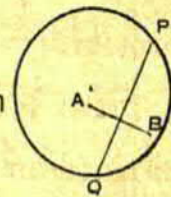
วิธีสร้าง ถ้า AB แบ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ C

ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB พบ RQ ที่ P

∴ P เป็นจุดที่ต้องการ เพราะจุดทุก ๆ จุดบน CD จะอยู่ห่าง
จากจุด A และ B เท่า ๆ กัน (บทสร้างที่ ๑๔)

๓. A กับ B เป็นจุดคงที่ของจุดอยู่ภายในวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมนี้ให้มีระยะห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน และจุดเช่นนั้นมักจุด.

ให้ A, B เป็นจุด ๒ จุดอยู่ในวงกลมวงหนึ่ง
จะต้องหาจุดบนเส้นรอบวงซึ่งมีระยะห่างจาก
A และ B เท่า ๆ กัน



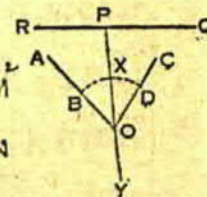
วิธีสร้าง ตาก AB แบ่งครึ่ง AB เป็นมุมฉากให้เส้นแบ่งครึ่งพบ
เส้นรอบวงที่ P และ Q

∴ จุด P และ Q เป็นจุดที่ต้องการสองจุด
เพราะว่า P จะอยู่ห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน
และ Q ,, ,, ,, A ,, B ,, ,,

(บทสร้างที่ ๑๔)

๔. จุด P เคลื่อนไปตามเส้นตรง RQ จงหาจุดซึ่ง P มีระยะ
ห่างจากเส้นตรง AB และ CD ที่กำหนดให้เท่ากัน.

ให้ RQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
AB, CD เป็นเส้นตรงอีกสองเส้นที่กำหนดให้
จะต้องสร้าง หาจุด P บน RQ ให้อยู่ห่าง
จาก AB, CD เท่า ๆ กัน



วิธีสร้าง ต่อบ AB, CD ไปพบกันที่ O

แบ่งครึ่งมุม AOC ทั้งภายในและภายนอก ด้วยเส้น OX, OY

ตามลำดับ และให้เฉยไปพบ RQ ที่ P

จุดทุกจุดบน OX, OY ย่อมอยู่ห่างจาก ABO, CDO เท่า ๆ กัน
(บทสร้างที่ ๑๕)

∴ P ก็อยู่ห่างจาก AB, CD เท่า ๆ กัน

๕. A และ B เป็นจุดคงที่ซึ่งอยู่ห่างกัน ๖ ซม. จงหาจุด
๒ จุด ซึ่งมีระยะห่างจาก A ๔ ซม. จาก B ๕ ซม.

ให้ A และ B เป็นจุดสองจุด
อยู่ห่างกัน ๖ ซม.

จะต้องการ จุดสองจุดซึ่งอยู่ห่างจาก
A ๔ ซม. จาก B ๕ ซม.

วิธีสร้าง A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๔ ซม.

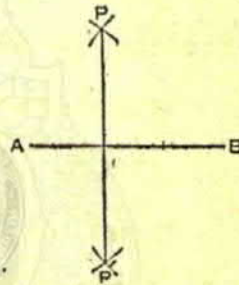
เขียนส่วนโค้ง, B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๕ ซม.

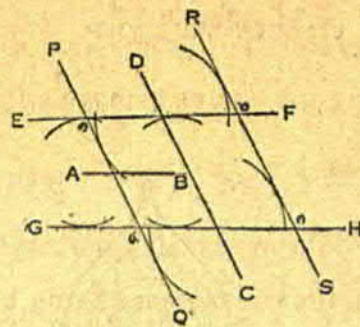
เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด P และ P'

∴ จุด P และ P' เป็นจุดที่ต้องการ

เพราะว่า P หรือ P' อยู่ห่างจาก A ๔ ซม. จาก B ๕ ซม.

๖. AB และ CD เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้สองเส้น จงหาจุด
ซึ่งมีระยะห่างจาก AB ๓ ซม. จาก CD ๔ ซม. ทำได้กี่วิธี หรือหา
ได้กี่จุด.





จุดทุกจุดซึ่งอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม. ต้องอยู่บนเส้นตรง EF, GH ซึ่งขนานกับ AB อยู่คนละทาง และอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม.

ทำนองเดียวกันจุดทุก ๆ จุดซึ่งอยู่ห่างจาก CD ๔ ซม. ก็อยู่บน PQ, RS ซึ่งขนานกับ CD และอยู่ห่างจาก CD ๔ ซม. คนละข้าง

เส้นขนาน EF, GH ตัดกับเส้นขนาน PQ, RS ๔ แห่ง ที่ ๑, ๒, ๓, ๔ ตามลำดับ

จึงหาได้ ๔ จุดซึ่งเป็นจุดที่ต้องการ

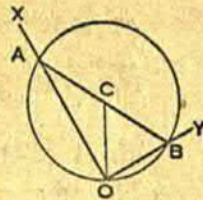
คืออยู่ห่างจาก AB ๓ ซม., CD ๔ ซม. ทั้ง ๔ จุด

[รูปที่เขียนให้ดูนี้ใช้มาตรวจส่วน ๒ : ๑]

๗. มีครึ่งท่อนหนึ่งมีขนาดยาวตามที่กำหนดให้ เกิดข้อที่ไปมาอยู่ในระหว่างไม้บรรทัดตรงสองอันวางตั้งฉากกัน.

จงหาเส้นโค้งของจุดกึ่งกลางของไม้ท่อนท่อนนั้น และพิสูจน์ให้เห็นว่า เส้นโค้งเส้นนั้นเป็น $\frac{1}{2}$ ของเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง

ให้ XO, OY เป็นเส้นตรงสองเส้น
ตั้งฉากกัน แทนไม้บรรทัด ให้ AB เป็น
ไม้ท่อนหนึ่ง C เป็นจุดกึ่งกลางของ AB
ตามบทที่ว่าที่ ๑๐ เราจะเห็นว่า เส้นซึ่งลาก
ต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉากไปยังมุมฉากย่อมเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ของ
เส้นตรงข้ามมุมฉากนั้น



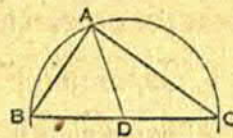
$$\therefore OC = \frac{1}{2} AB = \text{จำนวนครึ่งที่}$$

$\therefore$ C ก็ตั้งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง
ที่ O รัศมีเท่ากับจำนวนครึ่งที่ OC

C จะต้องอยู่ในระหว่าง $\widehat{XOB}$ เสมอ ไม่ออกนอกเขตที่มุมนี้ได้
ฉะนั้น โค้งส่วนของมันก็จะอยู่ในมุมฉาก คือ $\frac{1}{2}$ ของ เส้น รอบ วงของวงกลม
วงหนึ่ง

๔. รูป Δ มุมฉากจำนวนหนึ่งสร้างอยู่บนด้านตรงข้ามกับมุม
ฉากโดยใช้ด้านตรงข้ามกับมุมฉากเป็นด้านฐานซึ่งกำหนดให้ จงหา
เส้นโคจรของจุดยอดของรูป Δ เหล่านั้น.

ให้ ABC เป็น Δ มุมฉากรูปหนึ่ง
ตั้งอยู่บนฐาน BC ซึ่งเป็นด้านตรงข้าม
มุมฉาก

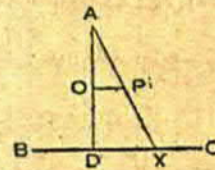


จะต้องหา โคจรของจุดยอด A ของ ΔABC นี้
วิธีสร้าง แบ่ง BC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ D ลาก DA
ฉะนั้น $AD = \frac{1}{2} BC$ (ข้อ ๒ x แบบฝึกหัดที่ ๔)

∴ โลกัศของจุด A ก็คือวงกลมวงหนึ่งซึ่ง D เป็นจุดศูนย์กลาง
รัศมี $\frac{1}{2}$ ของฐาน BC

๔. A เป็นจุดคงที่ และ X เป็นจุดเคลื่อนที่ได้บนเส้นตรง BC
ซึ่งเป็นเส้นคงที่ จงหาเส้นโลกัศของ P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ
AX และพิสูจน์ว่าเส้นโลกัศนั้นเป็นเส้นตรงขนานกับ BC

ให้ A เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง
BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
ซึ่งมี X เป็นจุดเคลื่อนได้ใน BC
P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX



จะต้องหา โลกัศของจุด P และพิสูจน์ว่าเส้นโลกัศนั้นเป็นเส้น
ขนานกับ BC

วิธีสร้าง ถ้า AD ให้ตั้งฉากกับ BC ที่ D, ถ้า AX

แบ่งครึ่ง AD ที่ O, แบ่งครึ่ง AX ที่ P ถ้า OP

และเส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป Δ ย่อม
ขนานกับฐาน (ข้อ ๒ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

∴ OP ขนานกับ DX หรือ BC

ในทำนองเดียวกันจุดทุกจุดซึ่ง P เคลื่อนที่บนเส้นตรงผ่าน O แล้ว
ก็ขนานกับ BC

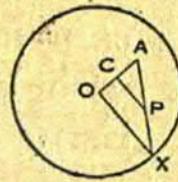
∴ OP ก็เป็นโลกัศที่คงการ

และโลกัศนี้เป็นเส้นตรงที่ขนานกับ BC

๑๐. A เป็นจุดคงที่ X เป็นจุดเคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่ง จงหาเส้นโค้งของ P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AX และพิสูจน์ว่าโค้งนี้เป็นวงกลม

ให้ A เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง X เป็นจุดเคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่ง O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมรัศมีพอสมควร P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX

จะพิจารณา โค้งของจุด P และพิสูจน์ว่าโค้งนี้เป็นวงกลม



วิธีสร้าง ตาก OA, แบ่ง OA ออกเป็นสองส่วนเท่าๆกันที่ C
ตาก AX, ,, AX ,, ,, P
ตาก CP

เส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป $\triangle$ ย่อมเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน (ข้อ ๓ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

$\therefore CP = \frac{1}{2} OX =$ จำนวนคงที่ เพราะ OX เป็นรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้

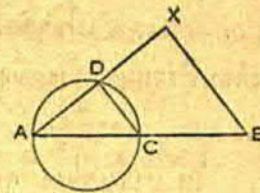
P จึงอยู่ห่างจาก C เป็นจำนวนคงที่เท่าเดิม
นั่นแหละคือ โค้งของมันเป็น เพราะฉะนั้น โค้งนี้คือวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมี C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเป็น ครึ่ง หนึ่งของ รัศมี ของ วงกลมที่กำหนดให้

๑๑. AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง AX เป็นเส้นตรงลากจากจุด A ไปตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด B ถ้า BX หมุนรอบ B จงหาเส้น โค้งของจุดกึ่งกลางของ AX

ให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

AX ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลาก ผ่าน

จุด B



BX หมุนรอบ B

จะค้นหาโลกซ์ของจุดกึ่งกลางของ AX

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ C และแบ่งครึ่ง AX ที่ D

ลาก DC , DC ก็ขนานกับ BX (ข้อ ๒ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

$\therefore DC$ ก็ตั้งฉากกับ AD ด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore$ โลกซ์ที่ควรหาทุก ๆ จุดของมุมฉาก ของ รูป $\triangle$ มุม

ฉาก ซึ่งสร้างบนด้าน AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

(ต่อไปให้ใช้ข้อ ๔ ของแบบฝึกหัดนี้)

๑๒. เส้นตรง OX, OY สองเส้นตัดกัน เป็นมุมฉาก P เป็นจุด ๆ หนึ่ง ในระหว่างมุม XOY ลากเส้นตั้งฉาก PM, PN จาก P ไปที่ OX, OY ตามลำดับ จงหาโลกซ์ของ P เมื่อ

(๑) $PM + PN$ เท่ากันเสมอ ไม่เปลี่ยนแปลง (เป็นต้นว่า $= ๕$ ซม.)

(๒) $PM - PN$ เท่ากันเสมอ ไม่เปลี่ยนแปลง (เป็นต้นว่า $= ๒.๕$ ซม.)

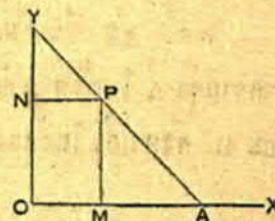
เมื่อทำเสร็จแล้วจงพิสูจน์มาให้ดูด้วย

ให้ OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้น

ตัดกันเป็นมุมฉาก P เป็นจุด ๆ หนึ่ง

อยู่ระหว่างมุม YOX แต่ว่าเส้นตั้งฉาก

PN, PM ซึ่งลากจาก P ไปยัง OY, OX



บวกกันหรือลบกันต้องเท่ากันเสมอ

จะค้นหาโดกัศของจุด P เมื่อ

(๑) $PM + PN$ เท่ากันเสมอเป็นต้นว่า ๕ ซม.

(๒) $PM - PN$ เท่ากันเสมอเป็นต้นว่า ๒.๕ ซม.

วิธีสร้าง (๑) วิชหาจุด P นั้น ต้องตัด OM จาก OX ให้
สั้นกว่า ๕ ซม. แล้วจาก M ตาก MP ให้ตั้งฉากกับ OX และให้ MP
ยาวเท่ากับ ๕ ซม. - OM, แล้วลาก PN ให้ตั้งฉากกับ OY

$\therefore$ MN เป็น $\square$ ผืนผ้า, $NP = OM$

$\therefore PM + PN = PM + OM = ๕$ ซม.

จาก OX ตัด OA ให้ยาวเท่ากับ ๕ ซม.

ลาก PA

$\therefore$ PA เป็น โดกัศของจุด P ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore MP = MA$ (ต่างก็เท่ากับ ๕ ซม. - OM)

P จะเลื่อนไปอยู่ตรงไหนใน PA, PM ก็เท่ากับ MA อยู่

และ $PN + PM = OA = ๕$ ซม. เสมอ

$\therefore$ PA จึงเป็น โดกัศของจุด P

และในเมื่อ $MP = MA$, $\widehat{MPA}$ จึง $= \widehat{MAP}$ และ $= ๔๕^{\circ}$ เพราะ
 $\widehat{PMA}$ เป็นมุมฉาก, A จึงเป็นจุดคงที่ และ $\widehat{OAP}$ ก็คงที่ ๔๕°

ฉะนั้น โดกัศของจุด P จึงอยู่บนเส้นตรงที่ทำมุม $\widehat{OAP}$ ทาง ๔๕°
และตัด OX, OY มีระยะจาก O ๕ ซม. เท่ากัน

(๒) จาก OY ตัด OB ให้ยาว ๒.๕ ซม.

ที่ B ทำ $\widehat{YBP} = ๔๕^{\circ}$

BP เป็นโตกส์ที่ต้องการ

พิสูจน์ ถ้า PM, PN ตั้งฉากกับ OX, OY

$\therefore NM$ เป็น $\square$ ผืนผ้า PM จึง $= NO$

และ $\widehat{PNB}$ เป็นมุมฉาก, $\widehat{NBP} = ๔๕^{\circ}$

$\therefore \widehat{NPB} = ๔๕^{\circ} = \widehat{NBP}$

$\therefore NB = NP$

$\therefore PM - PN = ON - BN = OB = ๒.๕$ ซม.

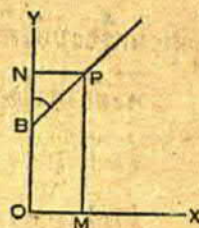
$\therefore$ จุด P จะอยู่ที่ใดบนเส้นตรง ซึ่งลากจาก B ห่างจาก O ๒.๕ ซม. เป็นมุม ๔๕° กับ BY แล้ว $PM - PN$ ก็คงได้เป็นจำนวนคงที่ คือ ๒.๕ ซม. เสมอ

$\therefore BP$ ก็เป็นโตกส์ที่ต้องการ

๑๓. เส้นตรง OX, OY สองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O P เป็นจุดเคลื่อนที่ได้ อยู่ในระหว่างมุม XOY ลากเส้น PM, PN จาก P ตั้งฉากกับ OX, OY ตามลำดับ จงหาเส้นโตกส์ของ P (โดยไม่ต้องพิสูจน์) เมื่อ

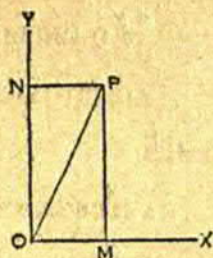
(๑) $PM = ๒PN$

(๒) $PM = ๓PN$



๑๖๕

ให้ OX, OY ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O
 P เป็นจุดเคลื่อนที่ได้ในระหว่าง $\angle XOY$
 PM, PN เป็นเส้นตั้งฉากลากจาก P
 มายัง OX, OY
 จะค้นหาโลกซ์ของจุด P เมื่อ



(๑) $PM = 2 PN$

(๒) $PM = 3 PN$

วิธีสร้าง (๑) จาก OX ตัด OM ให้ยาวพอสมควร ที่ M
 ลาก MP ให้ตั้งฉากกับ XO

ทำ MP ให้ยาวเท่ากับ $2 OM$

ลาก OP

ฉะนั้น OP เป็นโลกซ์ที่ต้องการ

(๒) ทำนองเดียวกับ (๑) คือทำ MP ให้เท่ากับ $3 OM$

๑๔. จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีระยะห่างจากจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง
 ระยะระหว่างจุดสองจุดนั้นก็กำหนดให้ไว้ด้วยเหมือนกัน และจุดที่
 จะหา นั้น ต้อง มี ระยะ ห่าง เท่ากัน จากเส้นตรงซึ่งขนานกันสองเส้นซึ่ง
 กำหนดให้

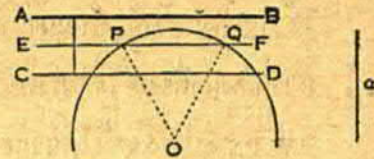
เมื่อไร โจทย์ข้อนี้จะหาได้สองจุด เมื่อไรจะหาได้จุดเดียว
 และเมื่อไรจะหาไม่ได้เลย

๑๖๖

ให้ O เป็นจุดๆ หนึ่ง

AB, CD เป็นเส้นขนานกัน

สองเส้น



a เป็นความยาวระยะหนึ่ง

จะต้องหา จุดซึ่งอยู่ห่างจาก O เท่ากับ a ที่กำหนดให้ และอยู่ห่างจากเส้นขนาน AB, CD เท่า ๆ กันด้วย

วิธีสร้าง ตากเส้นตั้งได้ฉาก ระหว่างเส้นขนาน AB กับ CD แล้วแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

ตาก EF ผ่านจุดแบ่งครึ่งให้ขนานกับ AB, CD

จุดที่ตัดการจะอยู่บนเส้น EF นี้ จึง จะอยู่ห่างจากเส้น ขนานเท่า ๆ กัน

O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี a เขียนวงกลมตัด EF ที่ P, Q

$\therefore$ จุด P และ Q เป็นจุดที่ต้องการ เพราะอยู่ห่างจาก O เท่ากับ a และอยู่ห่างจากเส้นขนานเท่า ๆ กันด้วย

จะได้สองจุดเมื่อ a ยาวกว่าเส้นตั้งได้ฉากตากจาก O ไปยัง EF

„ จุดเดียว „ a ยาวเท่ากับ „ „ O „ EF

จะได้ไม่ได้เลย „ a สั้นกว่า „ „ O „ EF

๑๕. S เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง มีระยะห่าง จากเส้นตรง MX ที่

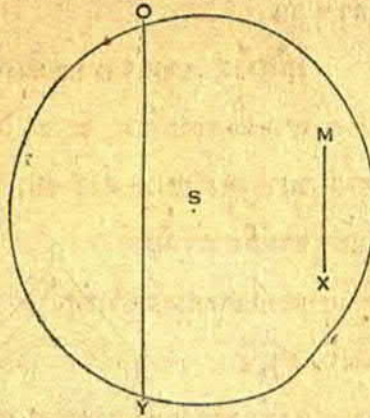
กำหนดให้ ๒ นิ้ว จงหาจุดสองจุดซึ่งมีระยะห่างจาก S เป็น $๒ \frac{๓}{๔}$ นิ้ว

และห่างจาก MX $๒ \frac{๓}{๔}$ นิ้ว

(ใช้ ๑" : ๑ ซม.)

ให้ MX เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
S เป็นจุดๆหนึ่ง อยู่ห่าง
จาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้ว

จะต้องการ จุดสองจุดซึ่ง
อยู่ห่างจาก S $2\frac{3}{4}$ นิ้ว และอยู่
ห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้ว

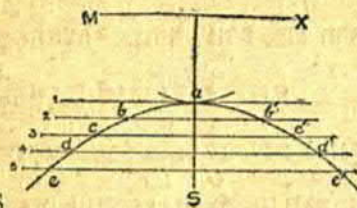


วิธีสร้าง ลากเส้น ขนาน
กับ MX ให้ห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้ว ฉะนั้นจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจาก MX
 $2\frac{3}{4}$ นิ้ว ก็ต้องอยู่บนเส้นขนานทั้งสองข้างนี้

และจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจาก S $2\frac{3}{4}$ นิ้ว ก็ต้องอยู่บนเส้นรอบวง
ซึ่ง S เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $2\frac{3}{4}$ นิ้ว และถ้าเส้นรอบวงตัดเส้น
ขนานที่ O, Y, O, Y ก็เป็นจุดร่วมที่อยู่ห่างจาก S และจาก MX
 $2\frac{3}{4}$ นิ้ว เท่าๆ กัน

๑๖. จงหาจุดชุดหนึ่ง ซึ่งมี ระยะห่างเท่าๆ กันจากจุด S ที่
กำหนดให้ และห่างเท่าๆ กันจากเส้นตรง MX ที่กำหนดให้ จง
เขียนด้วยไม้ค้ำด้วยมือผ่านจุดทั้งหลายที่ได้

ให้ MX เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
S เป็นจุดๆหนึ่ง
จะต้องการ จุดจำนวนหนึ่ง
ให้อยู่ห่างจาก MX และอยู่ห่างจาก S



เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง หากว่า S อยู่ห่างจาก MX ๕ ซม.

ลากเส้นขนานที่ ๑, ๒, ๓, ๔, ๕ ให้ห่างจาก MX ๒.๕ ซม.
๓.๐ ซม. ๓.๕ ซม. ๔.๐ ซม. และ ๔.๕ ซม. ตามลำดับ และ
ให้อยู่ทางเดียวกันกับ S

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๒.๕ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนาน
เส้นที่ ๑ ที่ a

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๓.๐ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนาน
เส้นที่ ๒ ที่ b, b'

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๓.๕ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนาน
เส้นที่ ๓ ที่ c, c'

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๔.๐ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนาน
เส้นที่ ๔ ที่ d, d'

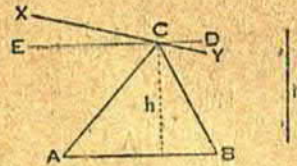
S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๔.๕ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนาน
เส้นที่ ๕ ที่ e, e'

แล้วลาก edcbab'c'd'e' เป็นเส้นโค้ง

จุดเหล่านี้จะอยู่ห่างเท่า ๆ กัน จากจุด S และ อยู่ห่างเท่า ๆ กัน
จาก MX ด้วย จึงเป็นจุดชุดที่ต้องการ

๑๗. จงสร้างรูป Δ รูปหนึ่งลงบนฐานที่กำหนดให้ และให้
รูป Δ ที่สร้างมีมุมส่วนสูงเท่ากับส่วนสูงที่กำหนดให้ และยังมีจุด
ยอดอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย

ให้ AB เป็นฐานที่กำหนดให้
 h เป็นส่วนสูงของ $\triangle$ ที่กำหนดให้
 XY เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้

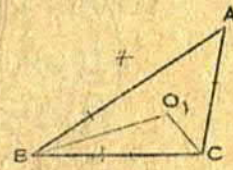


จะต้องสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งให้ AB เป็นฐาน ส่วนสูง $= h$, และ
 ให้มุมยอดอยู่ใน XY

วิธีสร้าง ตากเส้นตรง ED ให้ขนานกับ AB และให้อยู่ห่าง
 จาก AB เท่ากับ h ที่กำหนดให้ ให้เส้นขนานนี้ตัด XY ที่ C
 ตาก AC, CB ; $\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ มีส่วนสูง $= h$ และ
 มุมยอดอยู่บน XY ที่กำหนดให้

๑๘. จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีระยะห่างเท่า ๆ กันจากด้านสามด้าน
 ของรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง

ให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 จะต้องสร้าง หาจุด ๆ หนึ่งซึ่งห่างจาก
 AB, BC, CA เท่า ๆ กัน



วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง $\angle B, \angle C$ ด้วย BO, CO พบกันที่ O
 $\therefore O$ เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ จุดทุก ๆ จุดบน CO ต้องอยู่
 ห่างจาก AC, BC เท่า ๆ กัน
 และ จุดทุก ๆ จุดบน BO ต้องอยู่ห่าง
 จาก BC, BA เท่า ๆ กัน

(บทสร้างที่ ๑๕)

แต่ O เป็นจุดรวม $\therefore O$ จึงเป็นจุดที่อยู่ห่างจาก AB, BC, CA เท่าๆ กัน

๑๘. เส้นตรง OX และ OY ตัดกันเป็นมุมฉาก Q และ R เป็นจุดอยู่บนเส้น OX, OY ตามลำดับ จงหาเส้นโค้งของจุดกึ่งกลางของ QR เมื่อ

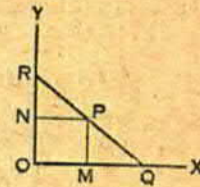
(๑) $OQ + OR$ เท่ากันเสมอ (ไม่เปลี่ยนแปลง)

(๒) $OQ - OR$,, ,, (,, ,,)

ให้ OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้น

ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O ; Q, R เป็นจุดอยู่

บน OX, OY ตามลำดับ



จะต้องการ โค้งของจุดกึ่งกลางของ QR

เมื่อ (๑) $OQ + OR$ เท่ากันเสมอไม่เปลี่ยนแปลง

(๒) $OQ - OR$,, ,, ,,

วิธีสร้าง (๑) แบ่ง QR ออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กันที่ P . ตาก

PM, PN ตั้งฉากกับ OX, OY ตามลำดับ

$\therefore PM, PN$ ต่างก็ขนานกับ RO, OQ ตามลำดับ

$\therefore PM = \frac{1}{2} RO; PN = \frac{1}{2} OQ$ (ข้อ ๓ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

$\therefore PM + PN = \frac{1}{2} (RO + OQ)$

หรือ $OQ + OR = 2(PM + PN) = \text{จำนวนคงที่ (โจทย์)}$

$\therefore$ โค้งของจุด P ก็คือ เส้นตรงซึ่งลากผ่าน P ไปตัด OX

กับ OY เป็นมุมฉาก เพราะ $OQ + OR$ จะเป็นจำนวนคงที่เสมอ
(ให้ดูข้อ ๑๒ แบบฝึกหัดนี้)

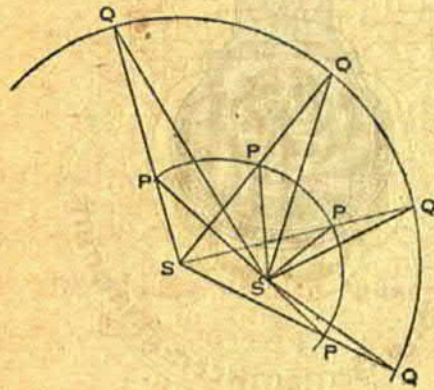
(๒) เหมือน (๑). เพราะว่า $OQ - OR = ๒ (PN - PM)$
ซึ่งเป็นจำนวนคงที่เสมอ

๒๐. S และ S' เป็นจุดคงที่ของจุด จงหาจุด P ชุดหนึ่ง. เมื่อ

(๑) $SP + S'P$ เท่ากันเสมอ (เช่น ๓.๔ ซม.)

(๒) $SP - S'P = , , , ,$ (เช่น ๑.๘ ซม.)

เขียนด้วยไม้ค้ำด้วยมือผ่านจุดทั้งหมดที่ทำได้จะเห็น



ให้ S, S' เป็นจุดคงที่ของจุด

จะต้องการ จุด P . ชุดหนึ่ง เมื่อ

(๑) $SP + S'P =$ จำนวนคงที่ (เช่น ๓.๔ ซม.)

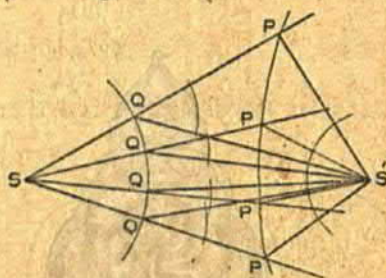
(๒) $SP - S'P = , , , ,$ (เช่น ๑.๘ ซม.)

วิธีสร้าง (๑) จาก S ตาก SQ ไปหลาย ๆ ทางให้ SQ ยาวเท่า
กับ ๓.๔ ซม. แล้วลาก $S'Q$

แล้วจากเส้นโค้งจุด P ที่หาได้ให้หมด

$\therefore SP + PS' = SP + PQ = SQ = \text{m.đ. TM.}$ **คงที่เสมอ**

(10)



จาก S ตาม $S'P$ ทัด SQ ต่อที่ P ทำ $QS'P = S'QP$

$$\therefore \widehat{PQS} = \widehat{PSQ} \quad (\text{ตัวรอง})$$

$\therefore SP - PS' = SP - QP = SQ = ๑.๘$ ซม. คงที่เสมอ

∴ จุด P ทุกจุดก็อยู่บนเส้นนี้ซึ่งเป็น โค้งตัดของ P

แบบผูกคัท ๒๐

(ใจทัยระคน)

ด. A เป็นจุดๆ หนึ่ง BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง คงตกเส้น

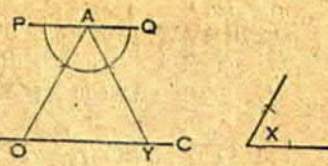
ตรงเส้นหนึ่งจากจุด A ให้ทำมุมกับเส้นตรง BC เท่ากับมุม X ที่กำหนดให้
จะลากเส้นตรงเส้นหนึ่งได้ดังนี้.

ให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่ง

BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

X เป็นมุม ๆ หนึ่งที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง ลากเส้นจาก B



A ไปทำมุมกับ BC ให้เท่า กับ X

วิธีสร้าง ที่ A ลาก PAQ ให้ขนานกับ BC

และที่ A ทำ $\widehat{PAO} = \widehat{QAY} = X$ พบ BC ที่ O และ Y ตามลำดับ

AO, AY เป็นเส้นตรงที่ตัดกัน

พิสูจน์ PAQ ขนานกับ BC; AO, AY เป็นเส้นตัด

$\therefore \widehat{PAO} = \widehat{AOY} = \widehat{AYO} = X$

$\therefore$ AO, AY จึงเป็นเส้นตรงที่ตัดกัน

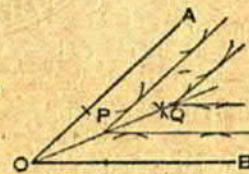
๒. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้แบ่งครึ่ง $\widehat{AOB}$ โดยไม่ใช้จุด

ยอด O ในการลากเส้นแบ่งครึ่งนั้น

วิธีสร้าง ลากเส้นขนานกับ AO, OB

ให้อยู่ห่างจาก AO, OB เท่า ๆ กัน ตัด

กันที่ P



อีกครึ่งหนึ่งลากเส้นขนานอย่างคว่ำก่อน

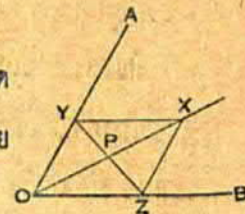
ตัดกันที่ Q ลาก PQ

$\therefore$ PQ จะเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\widehat{AOB}$ (บทสร้างที่ ๑๕)

๓. P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ภายใน $\widehat{AOB}$ จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง

ผ่านจุด P ไปจุดเส้น OA, OB และให้เส้นตรงเส้นนั้นถูกแบ่งครึ่งที่
จุด P ด้วย.

ให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ระหว่าง $\widehat{AOB}$
จะต้องลาก เส้นตรงให้ผ่านจุด P ให้จุด
 AO, OB และมีระยะจาก P เท่า ๆ กันด้วย
วิธีสร้าง ลาก OP



ต่อ OP ไปถึง X ทำ $PX = OP$

จาก X ลาก XY, XZ ให้ขนานกับ BO, AO

พบ OA ที่ Y , พบ OB ที่ Z ลาก YPZ

$\therefore YPZ$ เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because OZXY$ เป็น $\square$ ด้านขนาน (สร้าง)

$\therefore$ เส้นทแยงมุม OX, YZ ตัดครึ่งซึ่งกันและกัน (ทฤษฎีบท
ที่ ๒๑ แทรกที่ ๓)

$\therefore YZ$ ก็ลากผ่าน P และถูกแบ่งครึ่งที่ P

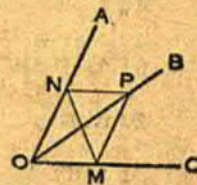
๔. OA, OB, OC เป็นเส้นตรงสามเส้นพบกันที่ O จงลาก
เส้นขวางเส้นหนึ่งไปจุด OA, OC และให้ OB แบ่งครึ่งเส้นขวางนั้นด้วย.

ให้ AO, OC, OB เป็นเส้นตรงสามเส้น

พบกันที่จุด O

จะต้องสร้าง ลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง

ให้ผ่าน OB จด OA, OC และให้ถูกแบ่งครึ่งที่ OB



สร้าง ให้ P เป็นจุดใดๆ อยู่บน OB , จาก P ตาก PM, PN ให้ขนานกับ AO, CO พบ CO ที่ M , AO ที่ N ตามลำดับ
ตากล NM .

$\therefore NM$ เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore OMPN$ เป็น $\square$ ด้านขนาน (โดยสร้าง)

$\therefore$ เส้นทะแยงมุม OP, MN แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรกที่ ๓)

$\therefore NM$ จึงเป็นเส้นที่ต้องการ

[P อยู่ที่ไหนก็ได้ใน OB ฉะนั้นจึงอาจสร้างได้หลายรูป]

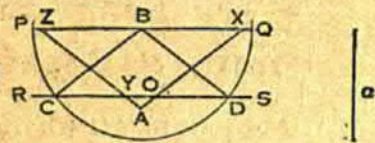
๕. A เป็นจุดๆ หนึ่ง PQ, RS เป็นเส้นขนานสองเส้น จงตากลเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด A และผ่านเส้นขนานทั้งสองเส้นนี้ ให้ส่วนของเส้นตรงซึ่งอยู่ในระหว่างเส้นขนาน PQ, RS เท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง.

เมื่อไร โจทย์นี้จะตากลได้สองเส้น เมื่อไรตากลได้เส้นเดียว เมื่อไรตากลไม่ได้เลย

ให้ A เป็นจุดๆ หนึ่ง

PQ, RS เป็นเส้นขนานสองเส้น

a เป็นความยาวระยะหนึ่ง



จะต้องสร้าง จาก A ตากลเส้นตรงตัดเส้นขนานสองเส้นให้ส่วนที่อยู่ในเส้นขนานมีระยะเท่ากับ a ที่กำหนดให้

วิธีสร้าง กำหนดจุด B เป็นจุดใด ๆ ใน PQ , B เป็นจุดศูนย์

กวางวิเศษ a เรือนสูง โค้งค้ำ RS ที่ C และ D

ลาก BC, BD

จาก A ลากเส้นตรงให้ขนานกับ CB, BD ตัดเส้นขนาน RS, PQ
ที่ O, X และ Y, Z ตามลำดับ

ฉะนั้นเส้นตรง AOX กับเส้น AYZ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ
พิสูจน์ ZBDY และ BXOC เป็น $\square$ ด้านขนาน (สร้าง)

$$\therefore ZY = BD = BC = XO = a$$

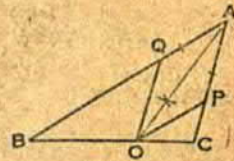
$\therefore$ AYZ หรือ AOX จึงมีส่วนที่อยู่ในระหว่างเส้นขนานเท่ากับ a
จะลากจาก A ได้สองเส้น เส้นเดียวหรือลากไม่ได้โดยนั้นเมื่อ
 a ยาวกว่า เท่ากันหรือสั้นกว่าเส้นตั้งได้ลาก ซึ่งลากระหว่าง
เส้นขนานคั่น

๖. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปหนึ่งลงในรูป $\triangle ABC$
ให้รูป $\square$ ขนมเปียกปูนที่สร้างลงนั้นมีมุม ๆ หนึ่ง เท่ามุม A ดังนี้

ให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องสร้าง $\square$ ขนมเปียกปูนบรรจุใน

$\triangle ABC$ ให้มุมหนึ่งเท่ากับมุม A ดังนี้



วิธีสร้าง แบ่ง $\angle A$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

ด้วย AO ให้ AO พบ BC ที่ O

จาก O ลาก OP, OQ ให้ขนานกับ BA, CA พบ AC ที่ P, AB ที่ Q

$\therefore \square APOQ$ เป็น $\square$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\square APOQ$ เป็น $\square$ ด้านขนาน โดยสร้าง

๑๗๗

$$\widehat{QAO} = \widehat{AOP} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๐})$$

$$\text{แต่ } \widehat{QAO} = \widehat{OAP} \quad (\text{สร้าง})$$

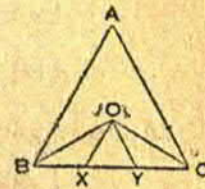
$$\therefore \widehat{AOP} = \widehat{OAP}$$

$$\therefore AP = PO \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๖})$$

$$\therefore APOQ \text{ เป็น } \square \text{ ขนมนเบี้ยกลุ่่น}$$

๗. จงใช้คุณสมบัติของรูป $\triangle$ ด้านเท่าแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้
ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

ให้ BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง จะต้อง
แบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยใช้คุณสมบัติ
ของ $\triangle$ ด้านเท่า



วิธีสร้าง บนฐาน BC สร้าง $\triangle$ ด้านเท่า ABC แบ่งครึ่ง
B, C ด้วย BO, CO พบกันที่ O

ลาก OX, OY ขนานกับ AB, AC พบ BC ที่ X, Y ตามลำดับ

$\therefore$ จุด X, Y เป็นจุดที่แบ่ง BC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ $\therefore$ OX ขนานกับ AB, OB เป็นเส้นตัด

$$\therefore \widehat{ABO} = \widehat{BOX} \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๔})$$

$$\text{แต่ } \widehat{ABO} = \widehat{OBX} = ๓๐^{\circ} \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore \widehat{OBX} = \widehat{BOX} = ๓๐^{\circ}$$

$$\therefore OX = BX$$

$$\text{และ } \widehat{OXY} = \widehat{OBX} + \widehat{BOX} = 60^\circ \quad (\text{ทฤษฎีบทที่ ๑๖})$$

ในทำนองเดียวกัน $OY = YC$

$$\text{และ } \widehat{OYX} = 60^\circ = \widehat{OXY}$$

$$\therefore \widehat{XOY} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$\therefore \triangle OXY$ จึงเป็น $\triangle$ ด้านเท่า

$$\therefore BX = XY = YC$$

๘. จงสร้างรูป $\triangle$ รูปหนึ่งจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(๑) กำหนดจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูป $\triangle$

(๒) กำหนดความยาวของด้านสองด้าน และความยาวของเส้นมีเดียหนึ่งซึ่งแบ่งครึ่งด้านที่สาม

(๓) กำหนดความยาวของด้าน ๆ หนึ่ง และความยาวของเส้นมีเดียสองเส้นซึ่งแบ่งครึ่งด้านอื่นสองด้าน

(๔) กำหนดความยาวของเส้นมีเดียสามเส้น

(๑) ให้ X, Y, Z เป็นจุดสามจุด ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้านสามด้านของรูป $\triangle ABC$

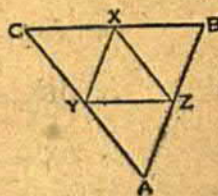
จะต้องสร้าง $\triangle ABC$ ให้ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม

วิธีสร้าง ลาก XY, YZ, ZX

ลาก BXC ขนานกับ YZ

„ BZA „ XY

„ CYA „ XZ



พบกันที่ A, B, C

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $CYZX, XYZB$ เป็น $\square$ ด้านขนาน โดยสร้าง

$\therefore ZY = BX = XC$ (ทฤษฎีบทที่ ๒๑)

$\therefore X$ เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

ในทำนองเดียวกัน Z, Y เป็นจุดกึ่งกลางของ BA, AC

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๒. ให้ b, c เป็นความยาวของด้านสองด้าน

X เป็นความยาวของมีเดียแบ่งครึ่ง

ด้านที่สาม

จะต้องสร้าง รูป $\triangle$ รูปหนึ่งให้มี

ความยาวเท่ากับที่กำหนดให้ข้างบน

วิธีสร้าง สร้างรูป $\triangle ABE$ ให้

$AB = c, BE = b.$

$AE = 2X$ แล้วสร้าง $\square$ ด้านขนาน ให้ AE เป็นเส้นทะแยง

มุม, ตาก BC ตัด AE ที่ D

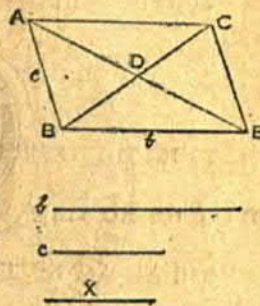
ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \square ABEC$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$\therefore AC = BE = b$ ที่กำหนดให้

และ $AD = DE = X$ เป็นความยาวของมีเดียที่กำหนดให้

และ $BD = DC$ (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรก ๓)

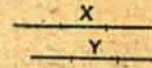
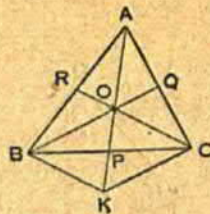


$\therefore AD$ เป็นมีเดียน

$\therefore \triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

(๓) ให้ BC เป็น

ด้าน ๆ หนึ่ง และให้ X, Y
เป็นเส้น มีเดียน สองเส้น ที่
แบ่งครึ่งด้านที่เหลือ



จะต้องสร้าง $\triangle$ ตามที่กำหนดให้

วิธีสร้าง บน BC สร้าง $\triangle OBC$ ให้ $BO = \frac{2}{3} X$

$$OC = \frac{2}{3} Y$$

แล้วสร้าง $\square$ ด้านขนาน $BOCK$ ให้ BC เป็นเส้นทะแยงมุม

ลาก OK ตัด KO ไปถึง A ทำ $OA = OK$

ลาก AB, AC ตัด BO พบ AC ที่ Q , ตัด CO พบ AB ที่ R

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle ABK$, O เป็นจุดกึ่งกลางของ AK, OR ถ้า
ขนานกับฐาน KB ย่อมาแบ่งครึ่ง AB (ข้อ ๑ แบบฝึกหัดที่ ๔)

$\therefore CR$ ก็เป็นเส้นมีเดียนแบ่งครึ่ง AB

ในทำนองเดียวกันจาก $\triangle AKC$, BQ ก็เป็นเส้นมีเดียนแบ่งครึ่ง AC

และ $\square BOCR$ เป็น $\square$ ด้านขนาน OK, BC เป็นเส้นทะแยง
มุม ตัดกันที่ P

ข้อ ๑

$$\therefore OP = PK \quad \text{และ} \quad BP = PO$$

$\therefore AP$ ก็เป็นมีเดียนแบ่งครึ่ง BC

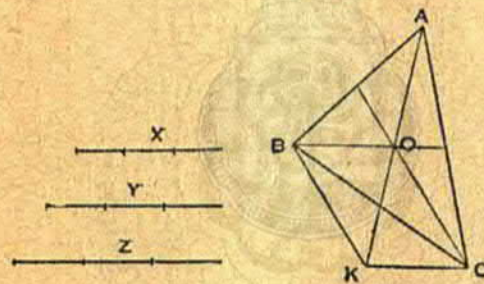
$$\text{แต่} \quad OP = PK = \frac{1}{2} OK = \frac{1}{2} OA$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน} \quad OR = \frac{1}{2} OC \quad \text{และ} \quad OQ = \frac{1}{2} OB$$

$$\text{แต่} \quad OC = \frac{2}{3} Y \quad \text{และ} \quad OB = \frac{2}{3} X$$

$$\therefore CR = Y \quad \text{และ} \quad BQ = X$$

$\therefore \triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ



(๔) ให้ X, Y, Z เป็นความยาวของมีเดียน ๓ เส้น
จะต้องสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งให้มีมีเดียนเท่าที่กำหนดให้

วิธีสร้าง สร้างรูป $\triangle OKC$

$$\text{ให้} \quad CK = \frac{2}{3} X$$

$$OK = \frac{2}{3} Y$$

$$CO = \frac{2}{3} Z$$

๑๘๒

แต่ตัวว่าง □ ด้านขวา OCKB ให้ OK เป็นเส้นทแยงมุม และ
ต่อ KO ตรงออกไปถึง A ทำ $OA = OK$

ลาก AB, BC, CA

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ เหมือน (๓)

จบภาคหนึ่ง



นายยิ้ม ศรีหงส์ ผู้พิมพ์โฆษณา

โรงพิมพ์ศรีหงส์ ถนนมุนีถนนอนุสาวรีย์ พ.ศ. ๒๔๗๘

หนังสือที่นายกลดาบ ประภาสโนบต เรียบเรียงและมีจำหน่าย
ที่โรงพิมพ์ศรีหงส์ คือ

๑. คู่มือเรขาคณิตภาค ๑ สำหรับ ม. ๔, ๕, ๖ เล่มละ ๗๐ สต.
 ๒. เลขคณิตสำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕ ,, ๕๐ ,,
 ๓. พีชคณิตเล่ม ๑ สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๔ ,, ๕๐ ,,
 ๔. พีชคณิตเล่ม ๒ ,, ,, ๕ ,, ,,
 ๕. พีชคณิตเล่ม ๓ ,, ,, ๖ จะจัดการพิมพ์ต่อไป
- เลขคณิต ชั้นมัธยมปีที่ ๕ ได้เรียบเรียงจาก ตำราต่างประเทศ
หลายเล่ม จึงมีแบบฝึกหัดมาก สะดวกแก่ครูที่จะให้นักเรียนเลือก
ทำ และเหมาะสำหรับนักเรียนจะได้เรียนโดยตนเองด้วย เพราะ
มีคำอธิบายและตัวอย่างไว้อย่างชัดเจน

พีชคณิตได้เรียบเรียง เป็นภาษาไทย ถ้วน ๆ มีคำอธิบายและ
ตัวอย่างชัดเจน อ่านเข้าใจง่าย แม้จะเรียนโดยตนเอง ก็สะดวก
ผู้เรียบเรียงได้อาศัยหลักของท่านอาจารย์ช้อยดลลลล และเพิ่มแบบ
ฝึกหัดขึ้นอีกบ้างตามสมควร เพื่อให้ครูเลือกให้นักเรียนทำได้ และ
สะดวกแก่นักเรียนจะได้เรียนโดยตนเองเป็นพิเศษ ตั้งแต่เล่ม ๒ ขึ้นไป
ได้บรรจุกราฟไว้ด้วย จึงนับว่าสะดวกแก่นักเรียนมาก เพราะไม่
ต้องซื้อตำราหลายเล่ม ทั้งกราฟก็ได้ใช้ภาษาไทยถ้วน ๆ อ่านเข้าใจ
ง่าย เว้นแต่บางคำที่หาภาษาไทยใช้ไม่ได้จริง ๆ จึงใช้ทับศัพท์ แต่
ก็มีเป็นจำนวนน้อยที่สุด และพีชคณิตเล่ม ๒ นี้ผู้เรียบเรียงได้ใช้ทดลอง
สอนด้วยตนเองแล้วถึง ๕ ปี จึงได้ขอ อนุญาตกระทรวงธรรมการพิมพ์
จำหน่าย ฉะนั้นจึงสามารถรับรองได้ว่าไม่แพ้ของต่างประเทศ ไม่เชื่อ
โปรดทดลอง

โปรดรวบรวมกันให้พอ ๖ เล่ม แล้วไปซื้อ หรือ สั่งที่โรงพิมพ์
ศรีหงส์ ท่านจะได้ราคาเพียง ๕ เล่ม ถ้าซื้อมากกว่านี้เชิญตกลง
เป็นพิเศษ

๑. ๖๑

(สำเนา)



ใบอนุญาตให้ ใช้แบบเรียน



ฉบับที่ ๘/๘๖๘

วันที่ ๒๓ เดือนเมษายน พ.ศ. ๒๔๖๘

หนังสือแบบเรียนคู่มือเรขาคณิตภาค ๑ ของนายกุหลาบ
ประภาสโนบล ป.ม. (เนติบัณฑิต) พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง จำนวน
หนึ่งพันฉบับ ใน พ.ศ. ๒๔๖๘

เจ้าหน้าที่ได้ตรวจแล้ว อนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

(ลงนาม) สนิทสงครามชัย

รัฐมนตรีว่าการกระทรวงธรรมการ

(ใช้ได้เฉพาะในการพิมพ์คราวนี้เท่านั้น และห้ามมิให้นำใบอนุญาต
นี้ไปพิมพ์ในหนังสือเรื่องอื่นที่มีได้รับอนุญาตเป็นอันขาด)