

คู่มือเรขาคณิตภาค ๑

(A KEY TO GEOMETRY PART I)

โดย

ร.อ.ท. ยม ไทยวุฒิปวงศ์

ครูคำนวณในวิชาเรขาคณิต





อ. ๐๓๓๑๔
๓ มิ. ๖๐

ก ๐๓๓๑๔

คู่มือเรขาคณิตภาค ๑
(KEY TO GEOMETRY PART I)

ของ

ร.อ.ท.ยม ไทยวุฒิพงศ์

ครูคำนวณในวชิราวุธวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ ๑,๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๗๘

ราคาเล่มละ ๗๕ สตางค์

จำหน่ายปลีกและส่งที่

ร้านสยามแบบเรียน

ตึกบำเพ็ญบุญ เจริญพานถ่าน

พระนคร.

พิมพ์ที่โรงพิมพ์หมื่นฟ้า ก ๐๓๓๑๔



ก

คำนำ

หนังสือคู่มือเรขาคณิตภาค ๓ นี้ ข้าพเจ้าได้จัดทำเพราะแต่แบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ ส่วนแบบฝึกหัดที่เกี่ยวกับการคำนวณและกราฟนั้น ข้าพเจ้าหาได้จัดทำไม่ เพราะรู้สึกว่าไม่จำเป็น และมีคำอธิบายอยู่ในหนังสือเรขาคณิตแล้ว

หน้าและข้อที่ข้าพเจ้ากล่าวไว้ในหนังสือเล่มนี้ หมายถึง หน้าและข้อในหนังสือเรขาคณิตของนาย **Hall & Stevens** แต่ถึงกระนั้นนักศึกษาท่านจะใช้เป็นคู่มือเรขาคณิตภาษาไทยของคุณพระต้นขวัญพัฒนา หรือของนาย ดังฮั่ว ก็ได้ เพียงแต่จัดหน้าเสียใหม่เท่านั้น.

วิธีพิสูจน์ในหนังสือเล่มนี้ ข้าพเจ้าได้ทำไว้เพื่อประโยชน์สำหรับผู้แรกเรียนเรขาคณิต และได้ทำตามความเห็นความคิดขณะที่กำลังสอนนักเรียนอยู่ ฉะนั้นอาจยาวเกินไปสำหรับบางท่าน และบางข้ออาจแตกต่างไปจาก **Key** ภาษาอังกฤษบ้าง.

อนึ่งหนังสือเดิมข้าพเจ้าได้เรียบเรียงเสร็จตั้งแต่
 ปตายุ พ.ศ. ๒๔๗๓ แต่มีอุปสรรคบางประการทำให้
 การพิมพ์ชะงักไป ภายหลังครุฑตายคน เห็นว่าคู่มือ
 เดิมจะมประโยชน์ต่อไป จึงแนะนำให้ข้าพเจ้าจัดการ
 พิมพ์ขึ้น ข้าพเจ้าก็ได้ปฏิบัติตาม ความประสงค์
 อนึ่ง

ในที่สุดนี้ข้าพเจ้าหวังว่าคงได้รับอภัยจากท่านผู้
 ได้พบข้อบกพร่องในหนังสือเดิม เพราะการพิมพ์ครั้ง
 นานข้าพเจ้ามีเวลาตรวจแก้ไขน้อยที่สุด

ยม ไทบัวดีพงส์

วชิราวุธวิทยาลัย

๕ มีนาคม พ.ศ. ๒๔๗๘

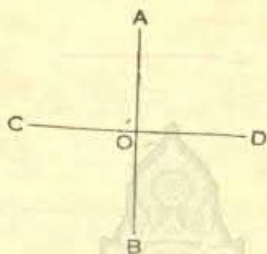
ก
บัญชีเรื่อง

คำนำ	หน้า	ก.
แบบฝึกหัดวาดด้วยเส้นแถมมุม	หน้า ๓๓	๓
	๓๕	๔
สามเหลี่ยมเท่ากัน	๓๘	๓๕
	๔๓	๓๖
	๔๖	๓๗
มุมในแถมมุมนอกของสามเหลี่ยม	๔๘	๔๓
สามเหลี่ยมไม่เท่ากัน	๔๙	๔๔
เส้นขนาน	๕๑	๖๔
บทพิสูจน์ที่ ๓๖	๕๓	๕๗
	๕๗	๘๓
สามเหลี่ยมเท่ากัน	๕๘	๘๒
ทวนเรื่องรูปสามเหลี่ยม	๕๕	๓๐๗
รูปสี่เหลี่ยมคานขนาน	๕๘	๓๓๓
เส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมคานขนาน		
	๖๐	๓๓๓

	หน้า ๖๔	หน้า ๓๔๔
การสร้างเงินตะมุมน	,, ๗๘	,, ๓๗๔
	,, ๗๔	,, ๓๗๒
การสร้างรูปตามเหลี่ยม	,, ๗๘	,, ๓๗๗
โลหะ	,, ๘๔	,, ๓๓๘
เบ็ดเตล็ด	,, ๘๘	,, ๓๐๔



๓. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันทำให้เกิดมุมขึ้น ๔ มุม และมุมใดมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ว่า มุมอีก ๓ มุมต่างก็เป็นมุมฉากด้วย



กำหนดให้ เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่จุด O ทำให้เกิดมุม AOC, AOD, DOB และ BOC ให้มุม BOC เป็นมุมฉาก

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle AOC$, $\angle AOD$ และ $\angle BOD$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\because$ มุมประชิด $BOC + AOC = ๒$ มุมฉาก
(บ.พ.๓)

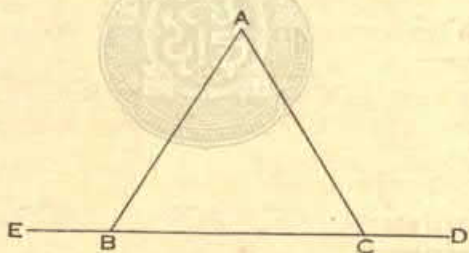
และ $\angle BOC = ๑$ มุมฉาก (กำหนดให้)

$\therefore \angle AOC = ๑$ มุมฉากด้วย

ในทำนองเดียวกัน $\angle AOD$ เป็นมุมประชิดกับ $\angle AOC$
 และ $\angle BOD$ เป็นมุมประชิดกับ $\angle BOC$
 $\therefore \angle AOD, \angle BOD$ ต่างก็เท่ากับ ๑ มุมฉาก

ช.ค.พ.

๔ ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ เท่ากัน ถ้าต่อด้าน BC ออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่เกิดขึ้นเท่ากัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หนึ่งซึ่ง $\angle ABC = \angle ACB$
 ต่อด้าน BC ออกไปทั้งสองข้าง ทำให้เกิดมุมภายนอก ABE, ACD

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABE = \angle ACD$

พิสูจน์ $\therefore$ มุม ประชิด $ABE + ABC = ๒$ มุม ฉาก
(บ.พ.๓)

และ มุม ประชิด $ACD + ACB = ๒$ มุม ฉาก
(บ.พ.๓)

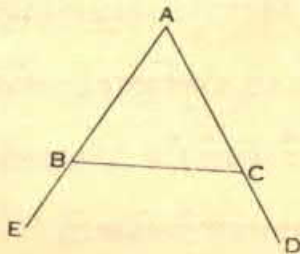
$\therefore \angle ABE + \angle ABC = \angle ACD + \angle ACB$ แต่
 $\angle ABC = \angle ACB$ (กำหนดให้)

เอาส่วนที่เท่ากันออกเสีย

$\therefore$ ส่วนที่เหลือคือ $\angle ABE = \angle ACD$

ช.ค.พ.

๕. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มุม ABC และ ACB
เท่ากัน ถ้าต่อด้าน AB และ AC ให้โดยฐานไป จง
พิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่เกิดขึ้นเท่ากัน



กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\angle ABC = \angle ACB$ คือ ด้าน
 AB, AC ออกไป ทำให้เกิด มุมภายนอก CBE และ BCD
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle CBE = \angle BCD$

พิสูจน์ มุมประชิด $ABC + CBE = ๒$ มุมฉาก (บ.พ. ๑)

และ มุม ประชิด $ACB + BCD = ๒$ มุมฉาก
 (บ.พ. ๑)

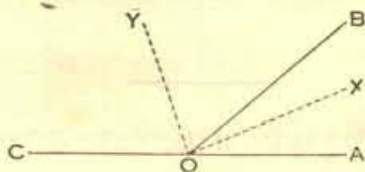
$\therefore \angle ABC + \angle CBE = \angle ACB + \angle BCD$ แต่
 $\angle ABC = \angle ACB$ (กำหนดให้)

เอาส่วนที่เท่ากันออกเสีย

$\therefore$ ส่วนที่เหลือ $\angle CBE = \angle BCD$

ช.ต.พ.

๖. จงพิสูจน์ว่าเส้นที่แบ่งครึ่งมุมประชิด ซึ่งเส้น
 ตรงเส้นหนึ่งตั้ง อยู่ บนเส้นตรง อีกเส้นหนึ่ง ตั้งฉากกัน
 คือเส้นที่แบ่งครึ่งมุมข้างใน และเส้นที่แบ่งครึ่งมุม
 ข้างนอก จะตั้งฉากซึ่งกันและกัน



กำหนดให้ เส้นตรง BO ตั้งอยู่บนเส้นตรง AC ทำให้เกิดมุมประชิด AOB, BOC ให้เส้นตรง OX และ OY แบ่งครึ่งมุม AOB และ COB

จะต้องพิสูจน์ว่า OX ตั้งฉากกับ OY

พิสูจน์ $\therefore \angle XOY = \frac{1}{2} \angle AOB$

และ $\angle BOY = \frac{1}{2} \angle BOC$

$\therefore \angle XOY + \angle BOY = \frac{1}{2} \text{ ของ } \angle AOB + \angle BOC$

แต่ $\angle AOB + \angle BOC = ๒ \text{ มุมฉาก}$

$\therefore \angle XOY + \angle BOY = \frac{1}{2} \text{ ของ } ๒ \text{ มุมฉาก}$

แต่ $\angle XOY + \angle BOY = \angle XOY$

$\therefore \angle XOY = \frac{1}{2} \text{ ของ } ๒ \text{ มุมฉาก} = ๑ \text{ มุมฉาก}$

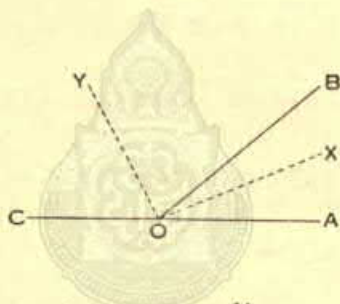
๖

หน้า ๑๓

ให้นักขย OX ตั้งฉากกับ OY

ช.ค.พ.

๗. จงพิสูจน์ว่ามุม AOX และ COY ในรูปของ
ข้อ ๖ เป็นมุมประกอบมุมฉาก (คือรวมกันเท่า ๓ มุม
ฉาก)



กำหนดให้ เส้นตรง BO ตั้งอยู่บนเส้นตรง AC
ทำให้เกิดมุมประชิด AOB, COB ให้เส้นตรง OX
และ OY แบ่งครึ่ง $\angle AOB$ และ $\angle BOC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle AOX$ และ $\angle COY$ เป็นมุมประ
กอบมุมฉาก

พิสูจน์ $\because \angle XOY = ๓ \text{ มุมฉาก}$ (ข้อ ๖)

แต่ $\angle COY + \angle XOY + \angle AOX = ๒$ มุมฉาก

เอา $\angle XOY$ ออกเสีย

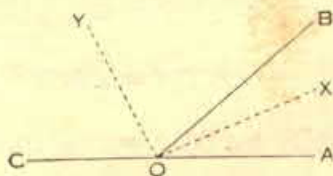
$\therefore$ ส่วนที่เหลือ $\angle AOX + \angle COY = ๑$ มุมฉาก

นั่นคือ $\angle AOX$ และ $\angle COY$ เป็นมุมประกอบ

มุมฉาก

ช.ต.พ.

๘. จงพิสูจน์ว่า มุม BOX และ COX เป็นมุมประกอบ ๒ มุมฉาก และ มุม AOY และ BOY ก็เป็นมุมประกอบ ๒ มุมฉากด้วย



กำหนดให้ เส้นตรง BO ตั้งอยู่บนเส้นตรง AC ทำให้เกิดมุมประชิด AOB, BOC ให้เส้นตรง OX และ

OY แบ่ง ครึ่งมุม AOB และ BOC

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $\angle BOX$ และ $\angle COX$ เป็น มุม

ประกอบ ๒ มุมฉาก

๒. $\angle AOY$ และ $\angle BOY$ เป็น มุม ประกอบ

๒ มุมฉาก

พิสูจน์ $\therefore \angle COX + \angle XOA = ๒$ มุมฉาก (บ.พ. ๓)

แต่ $\angle XOA = \angle BOX$

$\therefore \angle COX + \angle BOX = ๒$ มุมฉาก

นั่นคือ $\angle BOX$ และ $\angle COX$ เป็น มุม ประกอบ ๒

มุมฉาก

$\therefore \angle AOY + \angle COY = ๒$ มุมฉาก

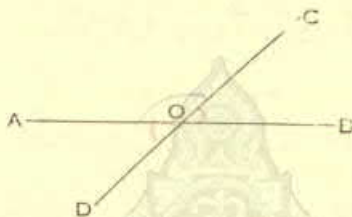
แต่ $\angle COY = \angle BOY$

$\therefore \angle AOY + \angle BOY = ๒$ มุมฉาก

นั่นคือ $\angle AOY$ และ $\angle BOY$ เป็น มุมประกอบ ๒

มุมฉาก

๕. ถ้าจากจุด O ในเส้นตรง AB ตากเส้น OC และ OD ๒ เส้นในทางตรงข้ามของ AB ทำให้มุม COB เท่ากับมุม AOD จงพิสูจน์ว่า OC, OD เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน



กำหนดให้ O เป็นจุดในเส้นตรง AB ตากเส้น OC, OD ๒ เส้นในทางตรงข้ามของ AB ให้ $\angle COB = \angle AOD$ จะต้องพิสูจน์ว่า OC และ OD เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน
พิสูจน์ $\because CO$ ตั้งอยู่บนเส้นตรง AB

$$\therefore \text{มุมประชิด } \angle AOC + \angle COB = \text{มุมฉาก (บ.พ.๑)}$$

$$\text{แต่ } \angle COB = \angle AOD \quad (\text{กำหนดให้})$$

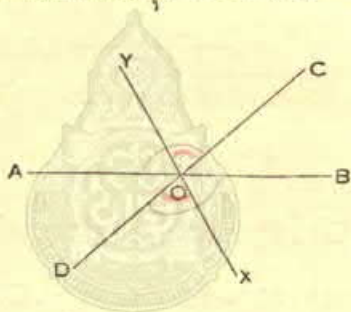
$$\therefore \angle AOC + \angle AOD = \text{มุมฉาก}$$

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิด

$\therefore$ OC และ OD เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน (บ.พ.๒)

ซ.ค.พ.

๖. เส้นตรงสองเส้น AB, CD ตัดกันที่จุด O
ถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BOD จงพิสูจน์ว่า ถ้าต่อ
XO ออกไปก็จะแบ่งครึ่งมุม AOC ด้วย



กำหนดให้ เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่จุด O
ให้เส้นตรง OX แบ่งครึ่ง $\angle BOD$ และต่อ XO ถึงจุด Y
จะต้องพิสูจน์ว่า OY แบ่งครึ่ง $\angle AOC$

พิสูจน์ $\therefore$ เส้นตรง XY และ CD ตัดกันที่จุด O

$\therefore \angle COY =$ มุมตรงข้าม $\angle XOD$ (พ.บ. ๓)

แต่ $\angle XOD =$ ครึ่งหนึ่งของ $\angle BOD$ (กำหนดให้)

$\therefore \angle COY =$ ครึ่งหนึ่งของ $\angle BOD$

แต่เส้นตรง AB ตัดกับ CD ที่จุด O

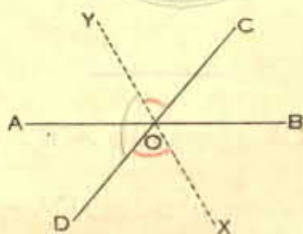
$\therefore \angle AOC = \angle BOD$ (ป.พ.๓)

$\therefore \angle COY =$ ครึ่งหนึ่งของ $\angle AOC$

นั่นคือ OY แบ่งครึ่ง $\angle AOC$

ช.ค.พ.

๗. เส้นตรงสองเส้น AB, CD ตัดกันที่จุด O ถ้ามุม BOD ถูกแบ่งครึ่งโดยเส้น OX และมุม AOC โดย OY จงพิสูจน์ว่า OX และ OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน



กำหนดให้ เส้นตรง AB, CD ตัดกันที่จุด O และให้เส้นตรง OX และ OY แบ่งครึ่ง $\angle BOD$ และ $\angle AOC$

จะต้องพิสูจน์ว่า OX และ OY เป็นเส้นตรง อันเดียวกัน

พิสูจน์ $\because$ เส้นตรง AB, CD ตัดกันที่จุด O

$\therefore \angle AOC =$ มุมตรงข้าม BOD (บ.พ. ๓)

แต่ OY และ OX แบ่งครึ่งมุม AOC, BOD

$\therefore \angle COY = \angle DOX$

แต่ $\angle COY + \angle YOD = ๒$ มุมฉาก (บ.พ. ๓)

$\therefore \angle DOX + \angle YOD = ๒$ มุมฉากด้วย

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิด

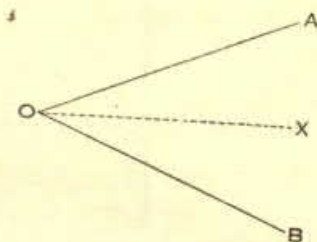
$\therefore OX$ และ OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

ช.ค.พ.

๓. ถ้า OX แบ่งครึ่งมุม AOB จงพิสูจน์ โดยวิธีพบรูปตามแนวเส้น แบ่งครึ่งว่า OA จะทับ OB ดังนี้

OA จะทับ OB อย่างไรถ้า ๑. $\angle AOX$ ใหญ่กว่า

$\angle XOY$ ๒. $\angle AOX$ เล็กกว่า $\angle XOY$



เมื่อพิพัตตามแนวเส้นแบ่งครึ่ง แล้ว จะมี มุม ๒
มุม คือ $\angle AOX$ และ $\angle BOX$ มุม ทั้ง สอง นี้ เท่ากัน
เส้น OX รวมและอยู่ ในข้างเดียวกัน

∴ แขนก่เลื้อย OA กับ OB จะต้องทับกันสนิท

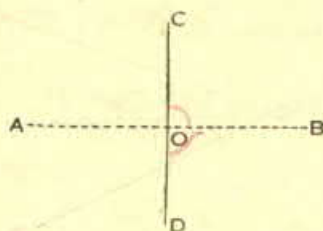
แต่ถ้ามุม $\angle AOX$ ใหญ่กว่ามุม $\angle BOX$

OA จะอยู่ ข้างนอกมุม $\angle XOB$

แต่ถ้ามุม $\angle AOX$ เล็กกว่ามุม $\angle BOX$

OA จะอยู่ ข้างในมุม $\angle XOB$

๘. AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันและ
ตั้งฉากกันที่จุด O จงพิพจน์ โดยวิธีพิพัตตามแนว
เส้นตรง AB ว่าเส้น OC จะทับ OD

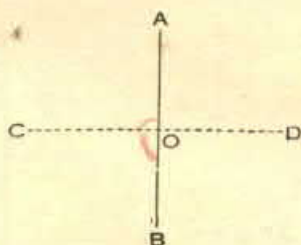


เมื่อ AB กับ CD ตัดกันมุม BOC และมุม BOD ต่างก็เป็นมุมฉากและเท่ากัน

เมื่อพิจารณาตามแนวเส้น AB จะมีมุมสองมุม BOC, BOD ซึ่งเท่ากันและมีเส้น OB ร่วม ทั้งอยู่ในข้างเดียวกันด้วย

∴ เส้นที่เหลือนั่นคือ OC กับ OD ก็ต้องทับกันสนิท

๑๐ เส้นตรง AOB ตากษณบนแผ่นกระดาษ
แล้วก็พับแผ่นกระดาษนั้นที่จุด O ให้เส้นตรง OA ทับ
เส้นตรง OB จึงพิสูจน์ว่าแนวกระดาษที่พับนั้นตรงฉาก
กับเส้นตรง AB



เขียนเส้นตรง AOB บนแผ่นกระดาษ แล้วพับ
ตรงจุด O ให้ AO ทับ OB เมื่อคลี่กระดาษออก ตรง
รอยพับจะเป็นเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งให้ชื่อว่า COD

$\therefore \angle AOC$ ทับ $\angle COB$ สันทีเมื่อกระดาษยัง
พับอยู่

$$\therefore \angle AOC = \angle COB$$

แต่มุมทั้งสองเป็นมุมประชิดรวมกัน = ๒ มุมฉาก

$\therefore$ มุมหนึ่งก็เป็นมุมฉาก

นั่นคือ CD ตั้งฉากกับ AB

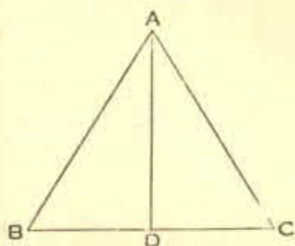
๓. จงพิสูจน์ว่าเส้นที่แบ่งครึ่งมุมยอดของสาม
เหลี่ยมหน้าจั่ว ๓. จะแบ่งครึ่งฐาน ๒. จะตั้งฉาก
กับฐาน

กำหนดให้ เส้นตรง

AD แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ของ

$\triangle$ หน้าจั่ว

ABC ซึ่งมีด้าน $AB=AC$



จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. AD แบ่งครึ่งฐาน BC

๒. AD ตั้งฉากกับฐาน BC

พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ADC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \quad (\text{กำหนดให้}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle BAD = \angle CAD \end{array} \right.$

(กำหนดให้)

$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore BD = DC$

พิสูจน์ ๒. $\angle BDA$ กับ $\angle CDA$ รวมกัน = ๒ มุมฉาก

(บ.พ. ๑)

$\therefore \angle BDA, \angle CDA$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

นั่นคือ AD แบ่งครึ่ง และ ตั้งฉากกับฐาน BC

ช.ต.พ.

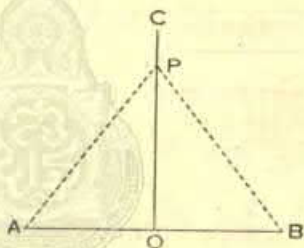
๒. ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB และ
ให้ OC ตั้งฉากกับเส้นนั้น ถ้า P เป็นจุดใดจุดหนึ่ง
บนเส้น OC จงพิสูจน์ว่า $PA = PB$

กำหนดให้ O เป็นจุด

กึ่งกลางของเส้นตรง AB

ฉากเส้น OC ตั้งฉากกับ

AB ที่จุด O และให้ P เป็น



จุดใดจุดหนึ่งบนเส้น OC คือ PA และ PB

จะต้องพิสูจน์ว่า $PA = PB$

พิสูจน์ ใน $\triangle POA$ และ $\triangle POB$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AO = OB \quad (\text{กำหนดให้}) \\ PO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle AOP = \angle BOP \end{array} \right.$

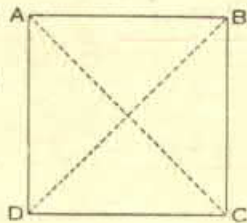
(มุมฉาก)

$$\therefore \triangle AOP = \triangle POB \quad \text{ทุกประการ} \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

$$\therefore PA = PB$$

ช.ต.พ.

๓. ให้ ด้านทั้งสี่ ของ รูปสี่เหลี่ยม จักรสี่ เท่ากัน
 แต่ละมุมทั้ง ๔ เป็นมุมฉาก จึงพิสูจน์ว่า ในรูปสี่เหลี่ยม
 จักรสี่ ABCD นั้นมีเส้นทแยงมุม AC และ BD เท่ากัน
กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยม
 จักรสี่รูปหนึ่ง มีด้าน AB, BC, CD
 และ DA เท่ากัน หมด ทุก ด้าน
 และมีมุมเป็นมุมฉากทุกมุม ถ้า
 เส้นทแยงมุม AC, BD



จะต้องพิสูจน์ว่า $AC = BD$

พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ และ $\triangle BDC$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AD = BC & (\text{กำหนดให้}) \\ DC \text{ เป็นฐานร่วม} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle ADC = \angle BCD & (\text{มุมฉาก}) \end{cases}$$

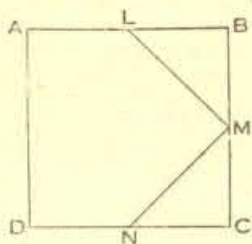
$\therefore \triangle ABC = \triangle BDC$ ทุกประการ (บ.พ. <)

$\therefore AC = BD$

ท.ค.พ.

๔. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส L,M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB,BC และ CD จงพิสูจน์ว่า
 ๑. $LM = MN$ ๒. $AM = DM$
 ๓. $AN = AM$ < , $BN = DM$

กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง ซึ่งมี
 ด้านเท่ากันทุกด้าน และมุม
 เป็นมุมฉากทุกมุม ให้
 L,M และ N เป็นจุดกึ่ง
 กลางของด้าน AB,BC และ



CD ตามลำดับต่อเส้น LM,MN,AN,AM,DM และ BN

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $LM = MN$ ๒. $AM = DM$

๓. $AN = AM$ < , $BN = DM$

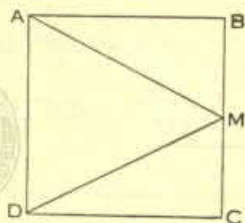
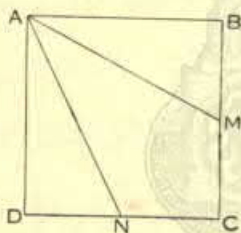
พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle LBM$ และ $\triangle MNC$

$$\therefore \begin{cases} LB = NC \text{ (ครึ่งหนึ่งของด้านเท่ากัน)} \\ BM = MC \text{ (M เป็นจุดกึ่งกลางของ BC)} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle LBM = \angle MNC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle LBM = \triangle MNC$$

ทุกประการ
(บ.พ.๔)

$$\therefore LM = MN$$



พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle ABM$ และ $\triangle DMC$

$$\therefore \begin{cases} AB = DC \text{ (ด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัส)} \\ BM = MC \text{ (M เป็นจุดกึ่งกลางของ BC)} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle ABM = \angle DCM \end{cases}$$

(มุมฉาก)

$$\therefore \triangle ABM = \triangle DMC \text{ ทุกประการ}$$

(บ.พ.๔)

$$\therefore AM = DM$$

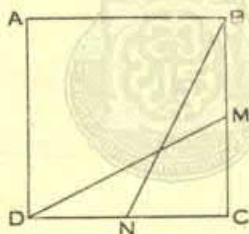
พิสูจน์ ๓. ใน $\triangle ADN$ และ $\triangle ABM$

$$\therefore \begin{cases} AD = AB \text{ (ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)} \\ DN = BM \text{ (ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน)} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle ADN = \angle ABM \end{cases}$$

(มุมฉาก)

$$\therefore \triangle ADN = \triangle ABM \text{ ทุกประการ (บ.พ.๔)}$$

$$\therefore AN = AM$$



พิสูจน์ ๔. ใน $\triangle BNC$ และ $\triangle DMC$

$$\therefore \begin{cases} BC = DC \text{ (ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัส)} \\ NC = MC \text{ (ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน)} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle BCN = \angle DCM \end{cases}$$

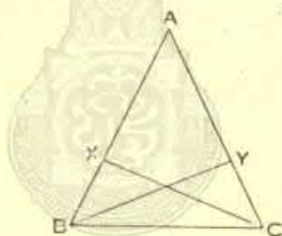
(มุมฉาก)

$\therefore \triangle BNC = \triangle DMC$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore BN = DM$

ช.ค.พ.

๕. ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จากด้าน AB , AC ซึ่งเท่ากันตัด AX และ AY ให้เท่ากัน ตากเส้น BX และ CY จงพิสูจน์ว่า $BY = CX$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วซึ่งมีด้าน $AB = AC$

จากด้าน AB และ AC ตัด AX และ AY

ให้เท่ากัน ตากเส้น BX และ CY

จะต้องพิสูจน์ว่า $BY = CX$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABY$ และ $\triangle ACX$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ AY = AX & (\text{กำหนดให้}) \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า} \angle BAY = \angle CAX \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABY = \triangle ACX \text{ ทุกประการ (บ.พ. ๔)}$$

$$\therefore BY = CX$$

ข.ค.พ.

๑. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งมีด้านเท่ากัน
ทุกด้าน ดึงเส้นทแยงมุม BD จึงพิสูจน์ว่า

$$๑. \angle ABD = \angle ADB \quad ๒. \angle CBD = \angle CDB$$

$$๓. \angle ABC = \angle ADC$$

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งมีด้านเท่ากัน ทุก
ด้าน ดึงเส้นทแยงมุม BD

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $\angle ABD = \angle ADB$

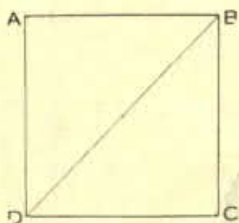
$$๒. \angle CBD = \angle CDB \quad ๓. \angle ABC = \angle ADC$$

พิสูจน์ ๑. ในรูป $\triangle ABC$

$$\therefore AB = AD \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

พิสูจน์ ๒ ในรูป $\triangle CBD$



$$\therefore BC = CD \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

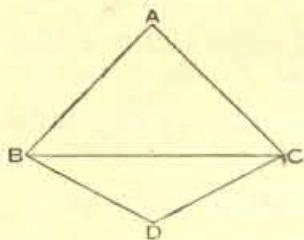
พิสูจน์ ๓ แต่ $\angle ABC =$
 $\angle ABD \quad (\text{พิสูจน์ ๒})$

$$\therefore \angle ABD + \angle CBD = \angle ADB + \angle CDB$$

$$\text{นวกคช } \angle ABC = \angle ADC$$

ท.ค.พ.

๒. $\triangle ABC, \triangle DBC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วของรูปตั้ง
 อยู่ ในทางตรงข้ามของฐาน BC อันเดียวกัน จึงพิสูจน์
 (โดยบทพิสูจน์ที่ ๕) ว่ามุม $\angle ABD = \angle ACD$



กำหนดให้ ABC, DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว ๒ รูป ซึ่งมีด้าน
 $AB = AC$ และ $BD = CD$ และตั้งอยู่ใน
 ทางตรงข้ามของฐาน BC ชันเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD = \angle ACD$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ มี $AB = AC$ (กำหนดให้)

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

ใน $\triangle DBC$ มี $DB = DC$ (กำหนดให้)

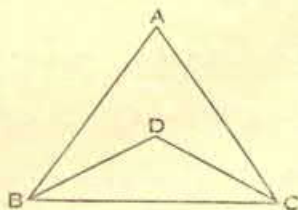
$$\therefore \angle DBC = \angle DCB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle DCB$$

$$\text{นั่นคือ } \angle ABD = \angle ACD$$

ช.ต.พ.

๓. ABC, DBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปตั้ง
 อยู่ในทางเดียวกันของฐาน BC ชันเดียวกัน ใช้
 บทพิสูจน์ที่ ๕ พิสูจน์ว่ามุม ABD เท่ากับมุม ACD



กำหนดให้ ABC, DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว ๒ รูป ซึ่งมีด้าน
 $AB = AC$ และ $DB = DC$ และตั้งอยู่ใน
 ทางเดียวกันของฐาน BC อันเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD = \angle ACD$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ มี $AB = AC$ (กำหนดให้)

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

ใน $\triangle DBC$ มี $DB = DC$ (กำหนดให้)

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle DCB$$

$$\text{นั่นคือ } \angle ABD = \angle ACD$$

ท.ศ.พ.

๕ AB, AC เป็นด้านที่เท่ากันของสามเหลี่ยม
 หน้าจั่ว ABC และ L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน
 AB, BC และ CA ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$๑. LM = NM \quad ๒. BN = CL \quad ๓. \angle ALM = \angle ANM$$

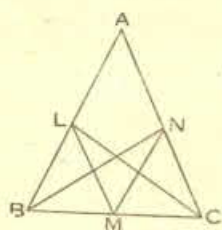
กำหนดให้ AB, AC เป็นด้านที่เท่ากันของ $\triangle$ หน้าจั่ว

ABC และ L,M,N. เป็น จุด กึ่งกลางของด้าน AB,BC และ CA ตาม ลำดับ ค่ะ เส้น LM,MN,BN และ CL จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $LM = NM$ ๒. $BN = CL$

$$๓. \angle ALM = \angle ANM$$

พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle LBM$ และ $\triangle NMC$

$$\therefore \begin{cases} LB = NC \text{ (ครึ่งของด้านที่เท่ากัน)} \\ BM = MC \text{ (M เป็น จุด กึ่งกลาง ของ BC)} \\ \text{มุมในระหว่าง ด้าน เท่า } \angle LBM = \angle NCM \end{cases}$$



(บ.พ. ๕)

$$\therefore \triangle LBM = \triangle NMC \text{ ทุกประการ}$$

(บ.พ. ๔)

$$\therefore LM = MN$$

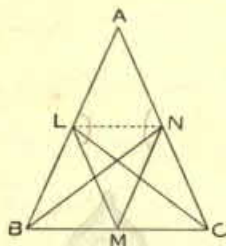
พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle BNC$ และ $\triangle CLB$

$$\therefore \begin{cases} NC = LB \text{ (ครึ่งของด้านที่เท่ากัน)} \\ BC \text{ เป็นฐานร่วม} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle NCB = \angle LBC \end{cases}$$

(บ.พ. ๕)

$\therefore \triangle BNC = \triangle LBC$ ทุกประการ (บ.พ.๔)

$\therefore BN = CL$



พิสูจน์ ๓ ต่อ LN ใน $\triangle ALN$ มี $AL = AN$

$\therefore \angle ALN = \angle ANL$ (บ.พ. ๕)

ใน $\triangle LMN$ มี $LM = MN$ (พิสูจน์ ๓)

$\therefore \angle MLN = \angle MNL$ (บ.พ. ๕)

$\therefore \angle ALN + \angle MLN = \angle ANL + \angle MNL$

นั่นคือ $\angle ALM = \angle ANM$

ท.ค.พ.

๓. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งต่อมุม ยอด ของ สามเหลี่ยมหน้าจั่วกับจุดกึ่งกลางของฐาน จะแบ่งมุม

ยอดออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ๒. จะตั้งฉากกับฐาน

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วและให้ AD เป็นเส้น

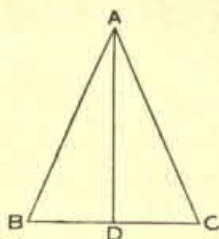
ตรง ซึ่งต่อมุมยอด BAC กับ D ถึง

กลางของฐาน BC

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. AD แบ่ง $\angle BAC$ ออกเป็นสองส่วน

เท่า ๆ กัน ๒. AD ตั้งฉากกับฐาน BC

พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ADC$



$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ BD = DC \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \quad \text{ทุก}$$

ประการ (บ.พ. ๗)

$$\angle BAD = \angle CAD$$

นั่นคือ AD แบ่งมุมยอด $\angle BAC$ ออกเป็น

๒ ส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ๒. $\therefore \angle ADB = \angle ADC$ (ตามเหลี่ยมเท่ากัน)

และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดรวมกันเท่ากับ ๒ มุมฉาก

$\therefore$ มุมหนึ่ง = ๑ มุมฉาก

นั่นก็คือ AD ตั้งฉากกับฐาน BC

พิ.ต.พ.

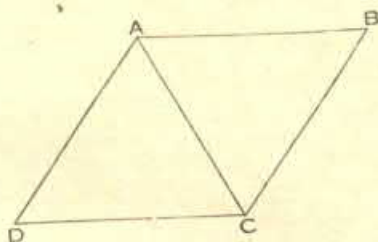
๒. ถ้า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคือรูป
สี่เหลี่ยมด้านเท่า จึงพิสูจน์ โดย ตาก เส้น ทแยงมุม

AC ว่า ๑. มุม $\angle ABC = \angle ADC$ ๒. AC แบ่งมุม
 $\angle BAD$ และมุม $\angle BCD$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ซึ่งมี
 $AB = BC = CD = DA$ ตากเส้นทแยงมุม AC

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $\angle ABC = \angle ADC$ ๒. AC แบ่ง
 $\angle BAD$ และ $\angle BCD$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$



$$\therefore \begin{cases} AB=AD & (\text{กำหนดให้}) \\ BC=DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกประการ (บ.พ.๗)

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC$$

พิสูจน์ ๒. $\therefore \angle ABC = \angle DAC, \angle BCA = \angle DCA$

นั่นคือ AC แบ่งมุม BAD และมุม BCD

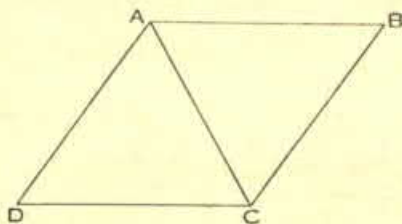
ออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กัน

ท.ต.พ.

๓. ถ้าในรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ABCD มีด้านตรงข้าม

เท่ากันคือ $AB = CD$ และ $AD = BC$ จงพิสูจน์ว่ามุม

$ADC =$ มุม ABC



กำหนดให้ ABCD เป็น รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้าน $AB = CD$

และ $AD = BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ADC = \angle ABC$

สร้าง ต่อเส้น AC

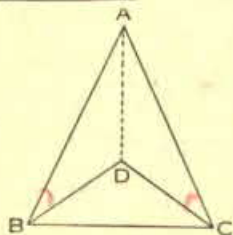
พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ และ $\triangle ABC$

$$\therefore \begin{cases} AD = BC \\ DC = AB \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC = \triangle ABC$ ทุกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle ADC = \angle ABC$

๔. ABC และ DBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูป
 คงอยู่บนฐานร่วม BC จงพิสูจน์ (โดยบทพิสูจน์ที่ ๓)
 ว่ามุม $ABD =$ มุม ACD โดย ๓. ให้รูปสามเหลี่ยม
 อยู่ในข้างเดียวกัน ๒. ในทางตรงข้ามของฐาน BC
กำหนดให้ ABC, DBC เป็น Δ หน้าจั่ว ๒ รูปซึ่งตั้งอยู่



บนฐานร่วม BC

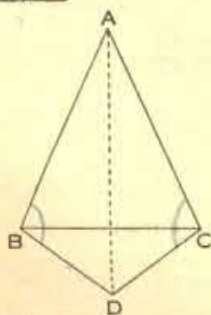
๓. ให้ Δ อยู่ในข้างเดียวกัน

๒. ให้ Δ อยู่ในทางตรงข้าม

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD = \angle ACD$

สร้าง ต่อกัน AD

พิสูจน์ ใน ΔABD และ ΔACD



$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ BD = DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \Delta ABD = \Delta ACD$ ทุก

ประการ (บ.พ. ๓)

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD$$

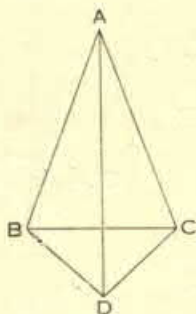
ช.ค.พ.

๕. ถ้า ABC, DBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้ง
รูปตรงกันในทางตรงข้ามของฐาน BC อันเดียวกัน
และถ้าต่อเส้น AD คงพิสูจน์ว่ามุม BAC, BDC ต่างก็
ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

กำหนดให้ ABC, DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว รูปอยู่ในทาง
ตรงข้ามของฐาน BC อันเดียวกันต่อเส้น AD

จะต้องพิสูจน์ว่า AD แบ่ง $\angle BAC$ และ $\angle BDC$ ออก
เป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$



$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ BD = DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \text{ ทุกประการ}$$

การ (บ.พ.๗)

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

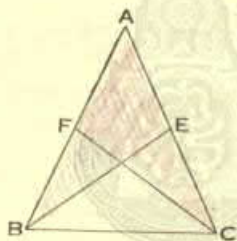
$$\text{และ } \angle BDA = \angle CDA$$

นั่นคือ AD แบ่ง $\angle BAC$ และ $\angle BDC$ ออก

เป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

ช.ค.พ.

๖. จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ต่อปลายฐาน ของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว กับ จุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม เท่ากัน



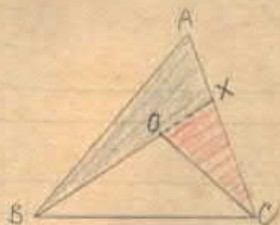
กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วมีด้าน $AB = AC$ ให้

E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC

และ AB ต่อเส้น EB และ FC

จะต้องพิสูจน์ว่า $BE = FC$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABE$ และ $\triangle AFC$



๑. ต้องการพิสูจน์ว่า $BO + OC < AB + AC$
 สังเกตว่า BO ตัดกับ AC ที่ X

พิสูจน์: $OX + XC > OC$ (บ.ท.๑๑)

เพราะ BO ขนานกับ AC

$$\therefore \underline{BO + OX + XC} > \underline{BO + OC}$$

$$\text{คือ } \underline{BX + XC} > \underline{BO + OC}$$

$$\text{และ } AB + AX > BX \text{ (บ.ท.๑๑)}$$

เพราะ XC ขนานกับ AB

$$\therefore \underline{AB + AX + XC} > \underline{BX + XC}$$

$$\text{คือ } \underline{AB + AC} > \underline{BX + XC}$$

$$\text{และ } BX + XC > BO + OC$$

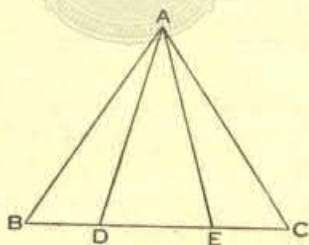
$$\therefore AB + AC > BO + OC$$

$$\text{คือ } BO + OC < AB + AC$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ AE = AF & (\text{ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน}) \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า} \angle BAE = \angle FAC \end{cases} \\ \therefore \triangle ABE = \triangle AFC \text{ ทุกประการ (บ.พ.ด.)} \\ \therefore BE = FC \end{aligned}$$

ช.ต.พ.

๗. กำหนดให้จุดสองจุดบน ฐาน ของ รูป สามเหลี่ยมหน้าจั่วห่างจากปลายฐานเท่ากัน จงพิสูจน์ว่ามันอยู่ ห่างจากมุมยอดเท่ากันด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วซึ่งมีด้าน $AB = AC$
ให้ D และ E เป็นจุด ๒ จุดบนฐาน BC อยู่
ห่างจาก B และ C เท่ากัน คัดเส้น AD, AE

จะต้องพิสูจน์ว่า $AD = AE$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACE$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ AD = EC & (\text{กำหนดให้}) \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า} \angle ABD = \angle ACE & (\text{บ.พ. ๕}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD = \triangle ACE$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore AD = AE$

ช.ต.พ.

จงพิสูจน์ ว่ารูป $\triangle$ ซึ่งเกิดขึ้นโดยเส้น ที่ต่อจุด

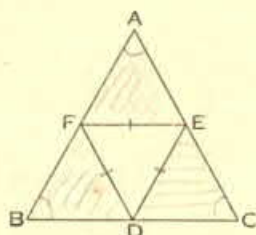
กึ่งกลาง ของ $\triangle$ ด้านเท่าเป็น $\triangle$ ด้านเท่า

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่า D, E และ F เป็นจุด

กึ่งกลาง ของ BC, CA และ AB ต่อเส้น DE, EF และ FD

จะต้องพิสูจน์ว่า DEF เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

พิสูจน์ ใน $\triangle AFE$ และ $\triangle BFD$



$$\therefore \begin{cases} AF = FB \text{ (กำหนดให้)} \\ AE = BD \text{ (กำหนดให้)} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า} \end{cases}$$

$$\angle FAE = \angle FBD$$

$$\therefore \triangle FAE = \triangle FBD \text{ ทุกประการ (บ.พ. ๔)}$$

$$\therefore FE = FD$$

ใน $\triangle FBD$ และ $\triangle EDC$

$$\therefore \begin{cases} FB = EC \text{ (กำหนดให้)} \\ BD = DC \text{ (กำหนดให้)} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } \angle FBD = \angle ECD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FBD = \triangle EDC \text{ ทุกประการ}$$

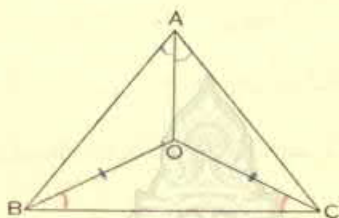
$$\therefore FD = ED$$

$$\text{แต่ } FD = FE$$

$$\therefore FD = DE = FE$$

นั่นคือ DEF เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

๘. $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีด้าน $AB = AC$
มุมที่ B และ C ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันโดย
เส้น BO และ CO จงพิสูจน์ว่า ๓. $BO = CO$ ๔.
 AO จะแบ่งมุมยอด BAC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน $AB = AC$

BO และ CO แบ่ง $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ออกเป็นสอง
ส่วนเท่า ๆ กัน คือ AO

จะต้องพิสูจน์ว่า ๓. $BO = CO$

๔. AO แบ่ง $\angle BAC$ ออกเป็นสองส่วน

เท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ๓. ในรูป $\triangle$ หน้าจั่ว ABC

$$\angle ABC = \angle ACB$$

(บ.พ. ๕)

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB \text{ (ครึ่งหนึ่งของมุมที่เท่ากัน)}$$

$$\therefore OB = OC \quad (\text{บ.พ.๖})$$

พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle ABO$ และ $\triangle ACO$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ OB = OC & (\text{พิสูจน์}) \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

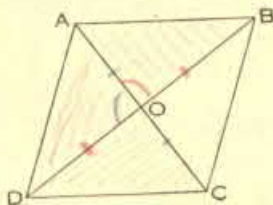
$$\therefore \triangle ABO = \triangle ACO \text{ ทุกประการ (บ.พ.๗)}$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO$$

นั่นคือ AO แบ่ง $\angle BAC$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

ช.ต.พ.

๓๐. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม



ขนมเปียกปูน จะตัดกันออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และตั้งฉากกันด้วย (ดูจากข้อ ๒)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ซึ่งมี

AC, BD เป็นเส้นทแยงมุมให้ตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. AD และ BD ตัดกัน ออกเป็นสอง

ส่วนเท่า ๆ กัน ๒. AC และ BD ตั้งฉากกัน

พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle ADO$ และ $\triangle ABO$

$$\therefore \begin{cases} AD = AB & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle DAO = \angle BAO & (\text{ข้อ ๒}) \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADO = \triangle ABO \text{ ทุกประการ (บ.พ.๔)}$$

$$\therefore DO = OB$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle ADO = \triangle DCO$

$$\therefore AO = OC$$

นั่นก็คือ AC และ BD ตัดกัน ออกเป็นสอง

ส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ๒. $\therefore \triangle ADO = \triangle ABO$ ทุกประการ

$$\therefore \angle AOD = \angle AOB$$

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิด

∴ รวมกันเท่ากับ ๒ มุมฉาก (บ.พ. ๓)

∴ มุมหนึ่งก็เป็นมุมฉาก

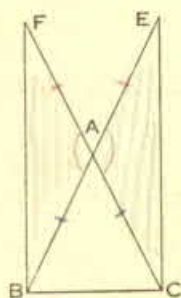
นั่นคือ AC และ BD ตั้งฉากกัน

ช.ต.พ.

ต.ต. ถ้าย้ายด้าน BA และ CA ซึ่งเท่ากันของรูป
ตามเข็มนาฬิกาไปทางจุด A ถึงจุด E และ F ให้
 $AE = AF$ และลากเส้น FB, EC จงพิสูจน์ว่า $FB = EC$
กำหนดให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ หน้าจุ่มด้าน $BA = CA$
ต่อเส้น BA และ CA ไปทางจุด A ให้ $AF = AE$
ลากเส้น FB และ EC

จะต้องพิสูจน์ว่า $FB = EC$

พิสูจน์ ใน $\triangle AFB$ และ $\triangle AEC$



$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{กำหนดให้}) \\ AF = AE & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle FAB = \angle EAC & (\text{บ.พ. ๓}) \end{cases}$$

$$\triangle FAB = \triangle EAC \text{ ทุกประการ} \\ (\text{บ.พ. ๔})$$

$$\therefore FB = EC$$

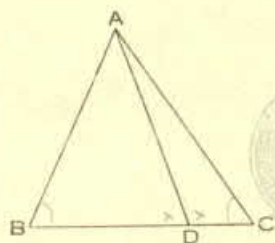
ช.ต.พ.

๑. จงพิสูจน์บทแทรกที่ ๑ โดยลากเส้นจากมุมยอด A ถึงจุดใดจุดหนึ่งบนฐาน BC

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ให้ D เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนฐาน BC คือ AD

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC + \angle ACB < ๒$ มุมฉาก

พิสูจน์ $\therefore \angle ABC < \angle ADC$ (บ.พ.๑)



$\angle ACD < \angle ADB$ (บ.พ.๑)

$\therefore \angle ABC + \angle ACD$

$< \angle ADC + \angle ADB$

แต่ $\angle ADC + \angle ADB = ๒$ มุม

ฉาก

$\therefore \angle ABC + \angle ACB$

< ๒ มุมฉาก

ช.ต.พ.

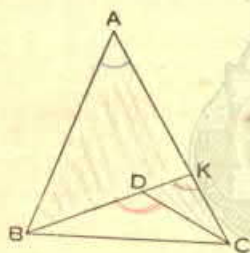
๒. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมและ D เป็นจุดภายใน ถ้าลากเส้น AD และ CD มุม ADC จะใหญ่กว่ามุม BAC จงพิสูจน์ โดย ๑. ต่อเส้น BD ไปพบกับ AC ๒. ลากเส้น AD และต่อออกไปพบกับฐาน

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง และ D เป็นจุด

ภายใน ตากเส้น BD และ CD ในรูปที่ ๓ ต่อกัน BD
ไปพบ AC ที่จุด K ในรูปที่ ๒ ต่อกัน AD มาพบ BC ที่
จุด K

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BDC > \angle BAC$

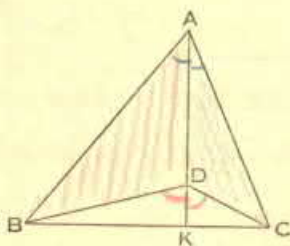
พิสูจน์ ในรูปที่ ๓ มุมภายนอก $BKC >$ มุมภายใน BAC
และมุมภายนอก $BDC >$ มุมภายใน DKC



$\therefore \angle BDC$ ก็ยังใหญ่กว่า $\angle BAC$

๒. มุมภายนอก $\angle BDK >$ มุมภายใน BAD

มุมภายนอก $CDK >$ มุมภายใน CAD



$\therefore \angle BDK + \angle CDK >$

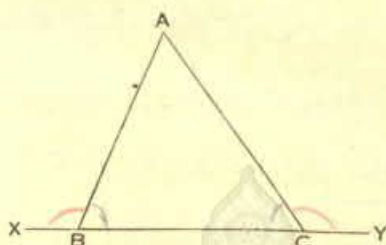
$\angle BAD + \angle CAD$

นั่นคือ $\angle BDC > \angle BAC$

ช.ค.พ

๓. ถ้าตามใดตามหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมตัดออก

ไปทั้งสองข้าง มุมภายนอกที่เกิดขึ้นทั้งสองมุมรวม
กันเข้าจะใหญ่กว่าสองมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งฐาน BC ถูก
ตัดออกไปทั้งสองข้างถึงจุด X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABX + \angle ACY > 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ $\because \angle ABX + \angle ABC = 2$ มุมฉาก (บ.พ.๑)

และ $\angle ACY + \angle ACB = 2$ มุมฉาก (บ.พ.๑)

$\therefore \angle ABX + \angle ABC + \angle ACY + \angle ACB = 4$ มุมฉาก

แต่ $\angle ABC + \angle ACB < 2$ มุมฉาก (แทรก ๑ บ.พ. ๗)

$\therefore \angle ABX + \angle ACY > 2$ มุมฉาก

๔. จะลากเส้นตรงจากจุด ภายนอก ถึง เส้น ตรง
เส้นหนึ่งให้ยาวเท่ากันมากกว่าสองเส้นไม่ได้

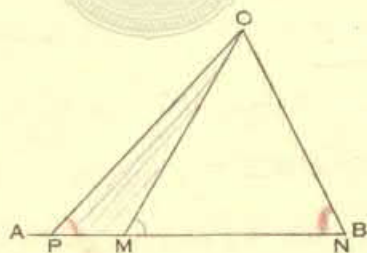
กำหนดให้ OM, ON เป็น เส้นตรงที่ เท่า กันสองเส้นซึ่ง

ลากจากจุดภายนอก O ถึงเส้นตรง AB

จะต้องพิสูจน์ว่า จะลากเส้นตรงจากจุด O ถึงเส้น AB

ให้ยาวเท่ากันมากกว่าสองเส้นไม่ได้

พิสูจน์ ถ้าได้ ให้ OP เป็นเส้นตรงอีก เส้น หนึ่ง ซึ่ง เท่า
กับ OM และ ON



$$\because OM = ON \therefore \angle OMN = \angle ONM \quad (\text{บ.พ.ส.})$$

$$\because OP = ON \therefore \angle OPN = \angle ONM \quad (\text{บ.พ.ส.})$$

$\therefore \angle OPN = \angle OMN$ แต่เป็นไปไม่ได้

$\therefore \angle OMN$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle OMN$

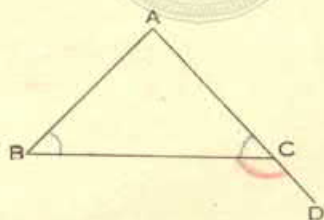
$\therefore \angle OMN > \angle OPN$ (บ.พ.๘)

$\therefore PO$ ไม่เท่ากับ OM หรือ ON

$\therefore$ จะลากเส้นจากจุด O ถึง AB ให้ยาวเท่ากันมากกว่าต้องเส้นไม่ได้

ช.ต.พ.

๕. ถาด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วถูกตัดออกไปมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะเป็นมุมบ้าน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วมีด้าน $AB=AC$ ด้าน AC ถูกตัดออกไปถึงจุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BCD$ เป็นมุมบ้าน

พิสูจน์

$$\therefore AB=AC$$

(กำหนดให้)

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB$$

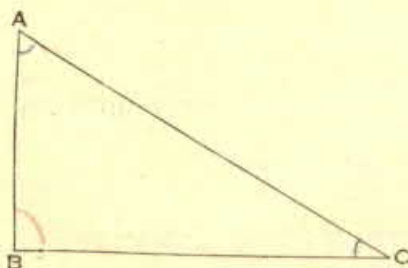
(บ.พ.๕)

แต่ $\angle ABC + \angle ACB < ๒$ มุมฉาก✗ $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ต่างก็ $<$ มุมฉากแต่ $\angle ACB + \angle BCD = ๒$ มุมฉาก (บ.พ.๓)เอา $\angle ACB$ ซึ่งเล็กกว่ามุมฉากออกเสีย $\therefore \angle BCD$ ต้องโตกว่ามุมฉาก คือเป็นมุมบาน

จ.ค.พ.

๓. ด้านตรงข้ามของด้านเหลี่ยมมุมฉาก เป็นด้านที่

ยาวที่สุด



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากที่ B และ AC เป็น
ด้านตรงข้าม

จะต้องพิสูจน์ว่า ด้านตรงข้าม AC เป็นด้านยาวที่สุด

พิสูจน์ $\because \angle ABC$ เป็นมุมฉาก

เมื่อเอา $\angle BAC$ หรือ $\angle BCA$ มา รวม กับ
 $\angle ABC$ จะน้อยกว่า ๒ มุมฉาก (บทแทรก บ.พ. ๘)

$\therefore \angle BAC$ และ $\angle BCA$ เล็กกว่ามุมฉาก

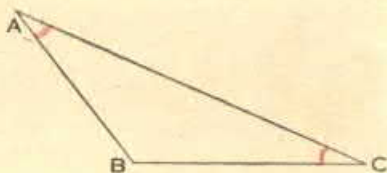
$\therefore \angle BAC$ และ $\angle BCA$ เล็กกว่า $\angle ABC$

$\therefore$ ด้าน BC และ AB ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับ
มุมเล็ก จะต้องสั้นกว่า AC ซึ่งตรงข้ามกับมุมใหญ่

$\therefore AC$ เป็นด้านที่ยาวที่สุด

ช.ค.พ.

๒. ด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยม ทุก ๆ รูป
จะมีมุมแหลมที่ปลายของด้าน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งซึ่งมีด้าน AC ยาวที่สุด
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BAC$ และ $\angle ACB$ เป็นมุมแหลม

พิสูจน์ $\because AC$ ยาวที่สุด

$\therefore AC$ ยาวกว่า AB และ BC

$\therefore \angle ABC > \angle BCA$ แต่ $\angle BAC$ (บ.พ.๘)

ถ้าเอา $\angle BCA$ หรือ $\angle BAC$ มารวมกับ
 $\angle ABC$ ก็จะน้อยกว่า ๒ มุมฉาก (บทแทรก บ.พ.๘)

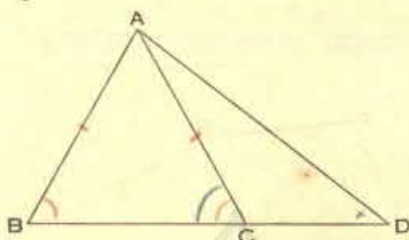
$\therefore \angle BCA$ และ $\angle BAC$ เล็กกว่ามุมฉาก

นั่นคือ $\angle BCA$ และ $\angle BAC$ เป็นมุมแหลม

ช.ค.พ.

๔. ถ้าฐาน BC ของสามเหลี่ยม หน้าจั่ว ถูกคั่น

ออกไปถึงจุด D จึงพิสูจน์ว่า AD ยาวกว่าด้านที่
เท่ากันของรูปสามเหลี่ยม



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วมีด้าน $AB=AC$ ต่อ
BC ถึงจุดใดจุดหนึ่ง D ต่อเส้น AD
จะต้องพิสูจน์ว่า AD ยาวกว่า AB และ AC

พิสูจน์

$$\because AB=AC$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

แต่ $\angle ACB$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle ACD$

$$\therefore \angle ACB > \angle ADC \quad (\text{บ.พ. ๘})$$

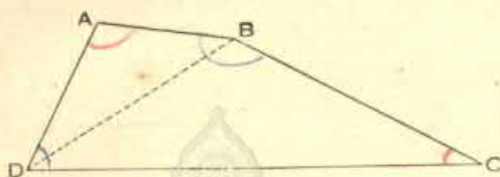
$$\text{แต่ } \angle ABD = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ABD > \angle ADB$$

$$\therefore AD > AB \text{ และ } AC \text{ ซึ่งเท่ากัน (บ.พ. ๑๐)}$$

จ.ต.พ.

๕. ในรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ถ้าด้านยาวที่สุด และด้าน
ที่ติดอยู่ตรงกันข้าม จงพิสูจน์ว่ามุมที่ปลายด้านสั้น
จะใหญ่กว่ามุมที่ปลายด้านยาวที่ตรงข้าม



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ซึ่งมี AB ด้านที่
สั้น และ CD ยาวที่สุด

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $\angle ABC > \angle ADC$

๒. $\angle BAD > \angle BCD$

สร้าง คือ BD

พิสูจน์ $\because DA > AB \therefore \angle ABD > \angle ADB$ (บ.พ.๘)

และ $DC > BC \therefore \angle DBC > \angle BDC$ (บ.พ.๘)

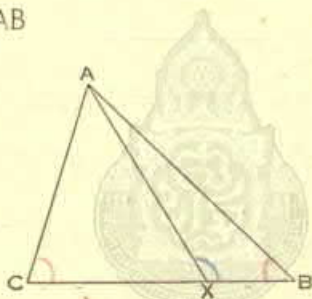
$\therefore \angle ABD + \angle DBC > \angle ADB + \angle BDC$

นั่นคือ $\angle ABC > \angle ADC$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าต่อ เส้น AC เราอาจ
พิสูจน์ ได้ว่า $\angle BAD > \angle BCD$

ท.ค.พ.

๖. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า AC ไม่ยาว
กว่า AB จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ลากจากมุมยอด A ถึงฐาน
EC ต่ำกว่า AB



กำหนดให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่งซึ่งมีด้าน AC ไม่ยาว
กว่า AB ให้ AX เป็นเส้นที่ลากจากมุมยอด A ถึง
ฐาน BC ที่จุด X

จะต้องพิสูจน์ว่า $AX < AB$

พิสูจน์ ถ้า AC ไม่ยาวกว่า AB, AC จะต้องเท่ากับ
AB หรือต่ำกว่า

$\therefore \angle ABC$ จะเท่ากับ $\angle ACB$ หรือเล็กกว่า (บ.พ.๕,๘)

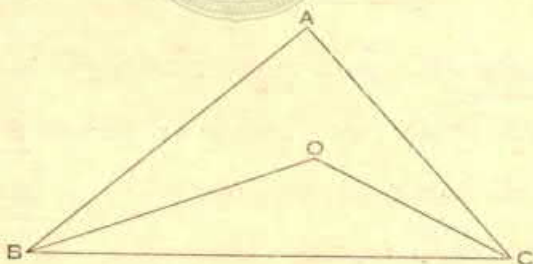
แต่มุมภายนอก $\angle AXB > \angle ACX$ (บ.พ.๘)

$\therefore \angle AXB > \angle ABX$

$\therefore AB > AX$ หรือ $AX < AB$ (บ.พ.๑๐)

ช.ค.พ.

๗. ในสามเหลี่ยม ABC มีเส้น OB, OC แบ่ง $\angle ABC, \angle ACB$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ถ้า AB ยาวกว่า AC จงพิสูจน์ว่า OB ยาวกว่า OC



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งมี $AB > AC$ และ OB, OC แบ่ง $\angle ABC, \angle ACB$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

จะต้องพิสูจน์ว่า

$$OB > OC$$

พิสูจน์

$$\therefore AB > AC$$

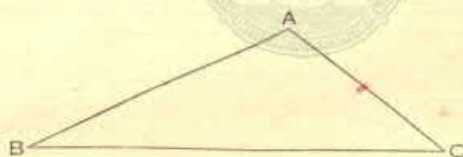
$$\therefore \angle ABC > \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๘})$$

$$\therefore \text{ครึ่งหนึ่งของ } \angle OBC > \angle OCB$$

$$\therefore OB > OC \quad (\text{บ.พ. ๓๐})$$

ซ.ต.พ.

๘. ผลต่าง ของ ด้านด้าน ของรูป สามเหลี่ยม จะ
น้อยกว่าด้านที่สาม



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องพิสูจน์ว่า $(BC - AB) < AC$

$$\text{พิสูจน์} \quad \therefore AC + AB > BC \quad (\text{บ.พ. ๓๑})$$

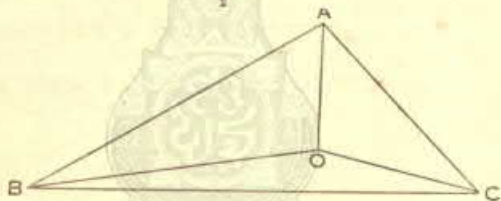
เอา AB ขอกทั้งสองข้าง

$$\therefore AC + AB - AB > BC - AB$$

$$\text{นั่นคือ } BC - AB < AC$$

ช.ค.พ.

๘. ผลบวกของเส้นทแยงมุม ซึ่งลากจากจุดภายในของรูปสามเหลี่ยมไปยังมุมทั้งสาม ยาวกว่าครึ่งหนึ่งของตามทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกัน



กำหนดให้ O เป็นจุดภายในของ $\triangle ABC$ ลากเส้น OA, OB และ OC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

พิสูจน์ $\because AO + OB > AB$ (ป.พ. ๓๓)

$$\because AO + OC > AC \quad (\text{ป.พ. ๓๓})$$

$$\because OC + OB > BC \quad (\text{ป.พ. ๓๓})$$

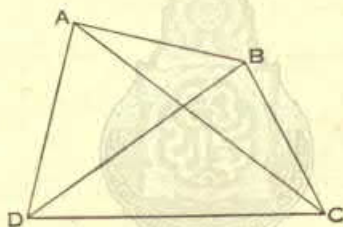
$$\therefore 2(OA + OB + OC) > AB + AC + BC$$

เขา ๒ หาวทั้งสองข้างได้

$$OA + OC + OC > \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

ช.ค.พ.

๓๐. ผลบวกของด้านทั้งสี่ของ รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ
ยาวกว่าเส้นทะแยงมุมทั้งสองรวมกัน



กำหนดให้ AC, BD เป็นเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมใด ๆ
ABCD

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + BC + CD + DA > AC + BD$

พิสูจน์ $\because AB + AD > BD$ (ป.พ. ๓๓)

$\because BC + CD > BD$ (ป.พ. ๓๓)

$\because BA + BC > AC$ (ป.พ. ๓๓)

$$\therefore AD + CD > AC$$

ป.พ. ๓๓

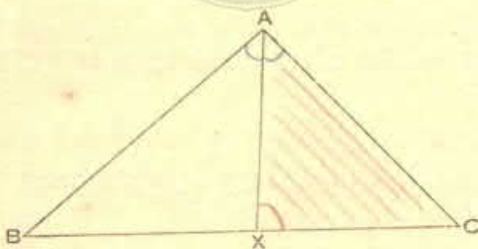
$$\therefore ๒(AB + BC + CD + DA) > ๒(AC + BD)$$

เอา ๒ หารทั้งต้องข้างได้

$$AB + BC + CD + DA > AC + BD$$

ช.ท.พ.

๓๓. ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มุมยอด BAC ถูกแบ่ง ออก เป็น สองส่วนเท่า ๆ กันโดยเส้น ซึ่ง พบนฐาน BC ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า $BA > BX$ และ $CA > CX$ จากนั้นจะได้ จงพิสูจน์บทพิสูจน์ที่ ๓๓



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง และ AX แบ่งมุม BAC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และพบ BC ที่จุด X

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB > AX, AC > CX$ และ $AB + AC > BC$

พิสูจน์ $\therefore$ มุมภายนอก $\angle AXC > \angle BAX$ (บ.พ.๘)

แต่ $\angle BAX = \angle CAX$ (กำหนดให้)

$\therefore \angle AXC > \angle CAX$

$\therefore AC > CX$ (บ.พ. ๓๐)

ในทำนองเดียวกัน $\angle BXA > \angle XAC, \angle BAX$

$\therefore AB > BX$ (บ.พ. ๓๐)

$\therefore AB + AC > BX + XC$

นั่นคือ $AB + AC > BC$

ช.ต.พ.

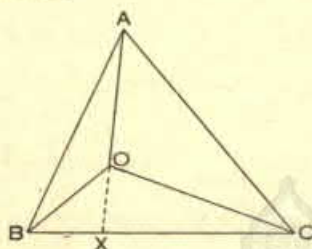
๓๒. ผลบวกของระยะทางจากจุดภายในของรูปสามเหลี่ยมถึงมุมใดมุมหนึ่งน้อยกว่าผลบวกของด้านรอบนอกของรูปสามเหลี่ยมนั้น

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งและ O เป็นจุดภายใน ถ้าลากเส้น OB, OA และ OC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OA + OB + OC < AB + BC + CA$

สร้าง ต่อก AO ให้พบ BC ที่จุด X

พิสูจน์ $\therefore AC + CX > AX$ (ป.พ. ๓๑)



$$\therefore AC + CB > AX + XB$$

$$\text{แต่ } OX + XB > OB$$

(ป.พ. ๓๑)

$$\therefore AX + XB > AO + OB$$

$$\therefore AC + CB > AO + OB$$

ในทำนองเดียวกัน $AC + AB > OC + OB$

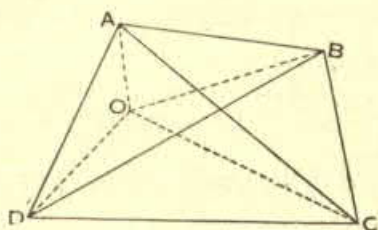
และ $AB + BC > OA + OC$

$$\therefore 2(AB + BC + CA) > 2(OA + OB + OC)$$

$$\text{นั่นคือ } OA + OB + OC < AB + BC + CA$$

ช.ต.พ.

๓๓. ผลบวกของเส้นตรงแยงมุมของรูป $\triangle$ เหลี่ยมใด ๆ ต่ำกว่าผลบวกของเส้นตรงทงตั้ง ซึ่งลากจากมุมมายังจุดใดจุดหนึ่งที่กำหนดให้ พิสูจน์ข้อนี้และข้อที่ยกเว้น



กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ รูปหนึ่งมี AC, BD เป็นเส้นทแยงมุม และ O เป็นจุดที่ กำหนดให้ ตากเส้น OA, OB, OC และ OD

จะตั้งพิสูจน์ว่า $AC + BD < OA + OB + OC + OD$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOC \because OA + OC > AC$ (บ.พ.๓๓)

ใน $\triangle OBD \because OB + OD > BD$ (บ.พ.๓๓)

$\therefore OA + OB + OC + OD > CA + BD$

นั่นคือ $AC + BD < OA + OB + OC + OD$

ผลบวกของเส้นทแยงมุมจะสั้นกว่าเส้นรอบนอก จากจุด O ที่กำหนดให้ นจะอยู่ ท่ตรงเส้นทแยงมุมค้ดกัน ถ้าเป็นเช่นนั้นผลบวกของท่สองฝ่ายก็จะเท่ากัน

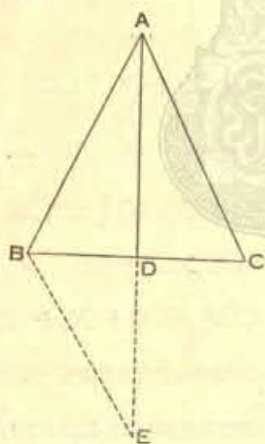
ช.ค.พ.

๑๔. ในรูป สี่เหลี่ยมด้านสองด้านรวม กันยาว

กว่าครึ่งของเส้นมัธยฐานซึ่งแบ่งด้านที่เหนือ ออกเป็น
สองส่วนเท่า ๆ กัน

กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ AD
เป็นเส้นมัธยฐานซึ่งแบ่งด้าน BC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน
จะต้องพิสูจน์ว่า $AB+AC > 2 AD$

สร้าง ต่อ AD ถึงจุด E ให้ $DE=AD$ ตากเส้น BE
พิสูจน์ ใน $\triangle BDE$ และ $\triangle ADC$



$$\begin{cases} DE=AD & (\text{สร้าง}) \\ BD=DC & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle BDE=\angle ADC & \end{cases}$$

(บ.พ. ๓)

$$\therefore \triangle BDE = \triangle ADC \quad \text{ทุก}$$

ประการ (บ.พ. ๔)

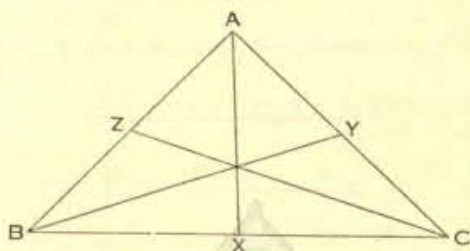
$$\therefore BE=AC$$

$$\text{ใน } \triangle ABE \therefore AB+BE > AE \quad (\text{บ.พ. ๑})$$

$$\text{นั่นคือ } AB+AC > 2 AD$$

๑๕. ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ผลบวกเส้นมัธยฐาน

ทั้งสามสั้นกว่าผลบวกของด้านรอบนอก



กำหนดให้ AX, BY และ CZ เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AX + BY + CZ < AB + BC + CA$

พิสูจน์ จากข้อ ๑๔ $AB + AC > 2 AX$

$$AC + BC > 2 CZ$$

$$BC + AB > 2 BY$$

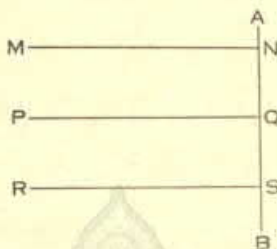
$$\therefore 2 (AB + BC + CA) > 2 (AX + BY + CZ)$$

๒ ทางทั้งสองข้างได้

$$AB + BC + CA > AX + BY + CZ$$

นั่นคือ $AX + BY + CZ < AB + BC + CA$

๒. เส้นตรงซึ่งตั้งฉาก กับ เส้น ตรง อัน เดียว กัน
เส้นตรงเหล่านั้นขนานกัน



กำหนดให้ เส้นตรง MN, PQ และ RS ตั้งฉาก กับ เส้น
ตรง AB ที่จุด N, Q และ S

จะต้องพิสูจน์ว่า MN, PQ และ RS ขนานกัน

พิสูจน์ $\therefore \angle MNA$ และ $\angle PQN$ เป็นมุมฉาก

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมภายนอก = มุม ภายใน

$\therefore MN$ ขนานกับ PQ (บ.พ. ๓๓ ตอน ๒)

ในทำนองเดียวกัน มุมภายนอก $MNA =$ มุม
ภายใน RSN

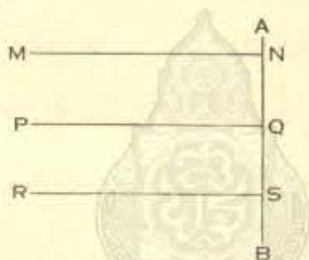
$\therefore MN$ ขนานกับ RS (บ.พ. ๓๓)

แต่ MN ขนานกับ PQ (พิสูจน์)

$\therefore$ MN, PQ และ RS ขนานกัน (บ.พ. ๓๕)

ท.ค.พ.

๓. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งพบเส้นขนานสองเส้น
หรือมากกว่า ถ้าตั้งฉากกับเส้นหนึ่งก็จะต้องฉากกับ
เส้นอื่น ๆ ด้วย



กำหนดให้ เส้นตรง AB พบเส้นขนาน MN, PQ และ
RS ที่จุด N, Q และ S และให้ AB ตั้งฉากกับ MN
จะต้องพิสูจน์ว่า AB ตั้งฉากกับ PQ และ RS

พิสูจน์ $\because$ AB ตัดเส้นขนาน MN, PQ และ RS

$\therefore$ มุมภายนอก MNA = มุมภายใน PQN, RSN

(บ.พ. ๓๔)

แต่ $\angle MNA$ เป็นมุมฉาก (กำหนดให้)

$\therefore \angle PQN$ และ $\angle RSQ$ เป็นมุมฉาก

นั่นคือ AB ตั้งฉากกับ PQ และ QS

ช.ต.พ.

๔. มุมซึ่งมีแขนขนานกันแซนคี่แซน มุมทั้ง

สองนั้นเท่ากันหรือเป็นมุมประกอบของมุมฉากด้วยกัน

กำหนดให้ ABC, DEF เป็นมุมซึ่งมีแขน AB ขนาน

กับ DE และแขน BC ขนานกับแขน EF

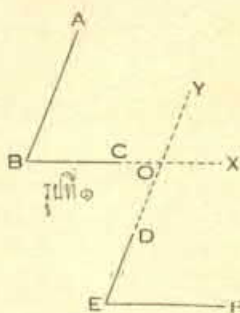
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC = \angle DEF$ หรือเป็นมุมประกอบ

ของมุมฉากด้วยกัน

สร้าง ค่ะ BC และ ED ถึงจุด X และ Y ให้ตัดกันที่จุด O

พิสูจน์ ในรูป ๓ $\therefore BX$ ขนานกับ EF และ YE ตัด

$\therefore \angle YOX = \angle OEF$ (ป.พ. ๑๔)



และ AB ขนานกับ YE และ EX ตัด

$$\therefore \angle YOX = \angle ABO \text{ (บ.พ.ค.๔)}$$

$$\therefore \angle ABO = \angle OEF$$

$$\text{นั่นคือ } \angle ABC = \angle DEF$$

$$\text{ในรูป ๒ } \angle YEF = \angle YOB$$

แต่ YE ขนานกับ AB และ BX ตัด

$$\therefore \angle ABO + \angle YOB = ๒ \text{ มุม}$$

$$\text{ฉาก (บ.พ. ค.๔)}$$

$$\text{แต่ } \angle YOB = \angle OEF \text{ (พิสูจน์)}$$

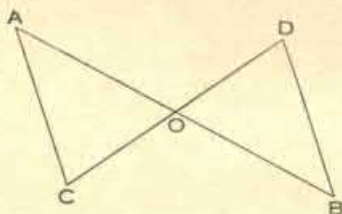
$$\angle ABO + \angle OEF = ๒ \text{ มุมฉาก}$$

นั่นคือ $\angle ABC$ และ $\angle DEF$ เป็นมุมประกอบ

๒ มุมฉากต่อกัน

ช.ต.พ.

๕. เส้นตรงของเส้น AB และ CD ตัดกันออกเป็น
สองส่วนเท่า ๆ กันที่จุด O จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งต่อ
AC และ BD ขนานกัน



กำหนดให้ เส้นตรง AB และ CD ตัดกัน ออกเป็นสอง
ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด O ต่อเส้น AB และ BD

จะต้องพิสูจน์ว่า AC ขนานกับ BD

พิสูจน์ ใน $\triangle AOC$ และ $\triangle BOD$

$$\therefore \begin{cases} AO = BO & (\text{กำหนดให้}) \\ CO = DO & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle AOC = \angle BOD & (\text{บ.พ. ๓}) \end{cases}$$

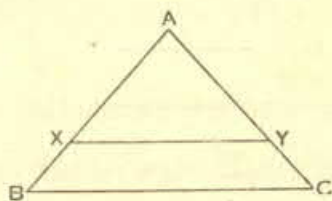
$\therefore \triangle AOC = \triangle BOD$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore \angle AOC = \angle BDO$

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมแย้ง

$\therefore AC$ ขนานกับ BD (บ.พ. ๓๓)

๖. ให้ นตรงซึ่งลากขนานกับฐานของสามเหลี่ยม
 หน้าจจะมีมุมที่ด้านเท่ากัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจ ซึ่งมี ด้าน $AB = AC$
 ตากเส้น XY ขนานกับ ฐาน BC ตัด AB, AC ที่จุด X
 และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle AXY = \angle AYX$

พิสูจน์ $\because$ XY ขนานกับ BC และ AB ตัด

$\therefore$ มุมภายนอก $AXY =$ มุมภายใน XBC
 (บ.พ. ๓๔)

$\because$ XY ขนานกับ BC และ AC ตัด

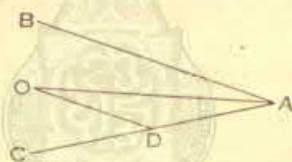
$\therefore$ มุมภายนอก $AYX =$ มุมภายใน YCB
 (บ.พ. ๓๔)

$$\text{แต่ } \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

$$\therefore \angle AXY = \angle AYW$$

ข.ค.พ.

๗. ถ้าจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งของมุม
ลากเส้นขนานกับแขนใดแขนหนึ่งของมุมนั้น รูปสาม
เหลี่ยมที่เกิดขึ้นจะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ AO เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAC$ และ จาก จุด
O บนเส้นแบ่งครึ่ง OA ลากเส้น OD ขนานกับแขน AB
ตัดแขน AC ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า DOA เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ $\because$ OD ขนานกับ BA และ OA พบบ

$$\therefore \text{มุมแย้ง } \angle DOA = \angle OAB$$

แต่ $\angle OAB = \angle OAD$ (กำหนดให้)

$\therefore \angle DOA = \angle OAD$

$\therefore ODA$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว (บ.พ. ๖)

ช.ค.พ.

๘. จากจุด X บนฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ตากเส้นตั้งฉากกับฐาน AB ที่ Y และ CA ที่ต่อออกไปที่ Z จึงพิสูจน์ว่า AYZ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

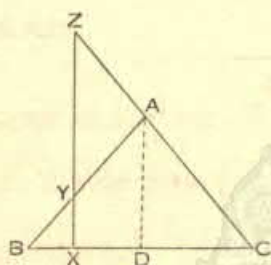
กำหนดให้ X เป็นจุดหนึ่งบนฐาน BC ของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC จากจุด X ตากเส้น XYZ ให้ตั้งฉากกับ BC และตัด AB ที่จุด Y และ CA ที่ต่อออกไปที่จุด Z

จะต้องพิสูจน์ว่า AYZ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

สร้าง ตากเส้น AD ให้แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ และพบ BC ที่จุด O

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} AB=AC & \text{(กำหนดให้)} \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle BAD = \angle CAD & \text{(สร้าง)} \end{cases}$$



$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \text{ ทุก}$$

ประการ

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC \text{ แต่}$$

เป็นมุมประชิด

$$\therefore AD \text{ ตั้งฉากกับ } BC$$

$$\text{และ } XYZ \text{ ก็ตั้งฉากกับ } BC$$

$$\therefore XYZ \text{ ขนานกับ } AD \quad (\text{บ.พ. ๓๓})$$

$$\text{และ } AY \text{ พน } \therefore \angle AYZ = \angle YAD \quad (\text{บ.พ. ๓๔})$$

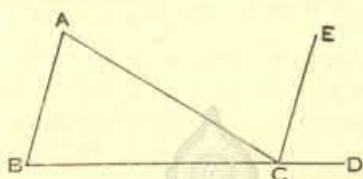
$$\text{และ } CZ \text{ พน } \therefore \angle DAC = \angle AZY \quad (\text{บ.พ. ๓๔})$$

$$\text{แต่ } \angle BAD = \angle CAD$$

$$\therefore \angle AYZ = \angle AZY$$

$$\therefore AYZ \text{ เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่ว} \quad (\text{บ.พ. ๖})$$

๘. ถ้าเส้นตรง t แบ่งครึ่งมุมภายนอกของรูป
สามเหลี่ยมขนานกับด้านตรงข้าม รูปสามเหลี่ยม
เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ CE เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก ACD
ของ $\triangle ABC$ และขนานกับ AB

จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ CE ขนานกับ AB และ BC พบบ

$$\therefore \angle BAC = \text{มุมแย้ง } ACE \quad (\text{บ.พ. ๑๔})$$

$$\therefore CE \text{ ขนานกับ } AB \text{ และ } BD \text{ ตัด}$$

$$\therefore \text{มุมภายใน } ABC = \text{มุมภายนอก } ECD$$

$$(\text{บ.พ. ๑๔})$$

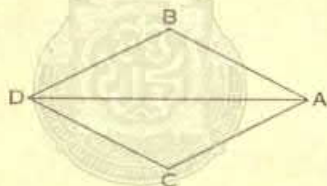
$$\text{แต่ } \angle ACE = \angle ECD \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC$$

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าที่

ช.ค.พ

๓๐. เส้นตรงที่ลากจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่ง มุม มา ขนาน กับ เส้น ทิ้ง ต้องแต่ละจุด กับ เส้น ของ มุม นั้น ย่อม เท่ากัน และ รูป ที่ได้ ย่อม เป็น รูป สี่ เหลี่ยม ขนมแบบกบป็น



กำหนดให้ DB และ DC เป็นเส้นที่ลากจากจุด D บนเส้นแบ่งครึ่ง $\angle$ AD ของ $\angle BAC$ มา ขนาน กับ AC และ AB แล จุด AB, AC ที่จุด B และ C

จะต้องพิสูจน์ว่า ค. $DB = DC$ ๒. $ACDB$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ขนมแบบกบป็น

พิสูจน์ $\therefore DC$ ขนานกับ BA และ DA พบ

$$\therefore \angle CDA = \text{มุมแย้ง } \angle BAD \quad (\text{บ.พ. ๑๔})$$

และ DB วนานกับ CA และ DA พบ

$$\therefore \angle BDA = \text{มุมแย้ง } \angle CAD \quad (\text{บ.พ. ๑๔})$$

$$\text{แต่ } \angle BAD = \angle CAD \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CDA = \angle BAD = \angle CAD$$

ใน $\triangle DBA$ และ $\triangle DCA$

ถ้าพิจารณาตามแนวเส้น AD แล้วด้าน BA จะทับ

ด้าน AC เพราะ $\angle BAD = \angle DAC$ และด้าน DB จะ

ทับด้าน DC เพราะ $\angle BDA = \angle CDA$

$\therefore$ จุด B ซึ่งทับทั้งด้าน AC และ DC จะต้อง
ทับจุด C ซึ่งด้านทั้งสองตัดกัน

$\therefore \triangle DBA$ ทับ $\triangle DCA$ สนิท

$$\therefore BD = CD \text{ และ } AB = AC$$

$$\text{แต่ } \angle BDA = \angle BAD \text{ ใน } \triangle BDA$$

$$\therefore BD = BA \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore BD = BA = CD = AC$$

นั่นคือ $ABDC$ เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

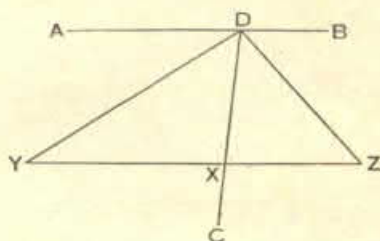
ช.ค.พ.

คต. AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด D
 และมุมประชิดที่เกิดขึ้นนั้น ถูกแบ่ง ออก เป็น สอง ส่วน
 เท่า ๆ กัน ถ้าจากจุด X จุดใด จุดหนึ่ง บน เส้น DC
 ตากเส้นตรง YXZ ให้ขนานกับ AB และพบกับเส้นแบ่ง
 ครึ่งที่จุด Y และ Z จึงพิสูจน์ว่า $XY = XZ$

กำหนดให้ เส้นตรง AB, CD ตัด กัน ที่ จุด D และ DY
 DZ เป็นเส้น แบ่ง ครึ่ง ของ $\angle ADX$ และ $\angle BDX$ จาก
 จุด X บน DC ตากเส้น YXZ ขนานกับ AB และพบ $DY,$
 DZ ที่ Y และ Z

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = XZ$

พิสูจน์ $\because AB$ ขนานกับ YXZ และ YD พบ



$$\therefore \angle ADY = \angle BDX \quad (\text{บ.พ. ๑๔})$$

$$\text{แต่ } \angle ADY = \angle BDX \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle DYX = \angle DXZ$$

$$\therefore XY = XZ \quad (\text{บ.พ. ๖})$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $XZ = XD$

$$\therefore XY = XZ$$

ช.ค.พ.

๑๒. เส้นตรง ๒ เส้น PA, QB หมุนได้รอบจุด P และ Q ถ้าใน ๓ นาที PA หมุนได้ ๑๒ รอบ และ BQ หมุนได้ ๓๐ รอบ ถ้าเส้นคู่ขนานกันอยู่แล้ว และไปตามไปในทางเดียวกัน เราหมุนพร้อมกันจะเป็นเวลานานเท่าไรเส้นตรงคู่ขนานกันอีก (๓) ให้

ปลายเส้นอยู่ในทางตรงกันข้าม (๒) ให้ปลายเส้น
อยู่ในทางเดียวกัน

ใน ๖๐ วินาที PA หมุนได้ ๓๒ รอบ

ใน ๓ วินาที PA หมุนได้ $\frac{๓๒}{๖๐} = \frac{๘}{๑๕}$ รอบ = ๗๒°

ใน ๖๐ วินาที QR หมุนได้ ๓๐ รอบ

ใน ๓ วินาที QR หมุนได้ $\frac{๓๐}{๖๐} = \frac{๑}{๒}$ รอบ = ๖๐°

ใน ๓ วินาที PA หมุนได้เร็วกว่า QB ๑๒°

ในการที่เข็มจะชนกันและปลายอยู่ตรงกันข้าม
นั้นต้องอยู่ห่างกัน ๓๖๐°

PA หมุนเร็วกว่า QB ๑๒° ใน ๓ วินาที

PA หมุนเร็วกว่า QB ๑๒๐° ใน $\frac{๑๒๐}{๑๒} = ๑๐$ วินาที

ถ้าปลายชี้ไปในทางเดียวกันต้องต่างกัน ๓๖๐° หรือ ๓ รอบ

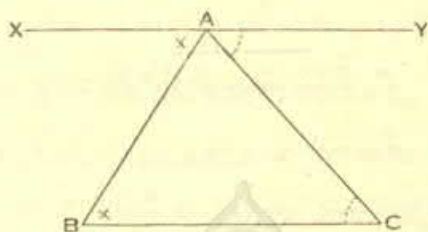
PA หมุนเร็วกว่า QB ๓๖๐° ใน $\frac{๓๖๐}{๑๒} = ๓๐$ วินาที

ตอบ ชี้ในทางตรงข้ามเสียเวลา ๑๐ วินาที

ตอบ ชี้ในทางเดียวกันเสียเวลา ๓๐ วินาที

๗. จงพิสูจน์ความสมมูลของรูปสามเหลี่ยม

รวมกันเข้า ย่อมเท่ากับสองมุมฉาก โดยวิธีลาก
เส้นตรงผ่านมุมยอดให้ขนานกับฐาน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมีเส้น XAY ลาก
ผ่านมุมยอด A และขนานกับฐาน BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ $\because$ XAY ขนานกับ BC และ BA พบท

$$\therefore \angle ABC = \text{มุมแย้ง } \angle XAB \quad (\text{บ.พ. ๓๔})$$

และเพราะว่า XAY ขนานกับ BC และ AC พบท

$$\therefore \angle ACB = \text{มุมแย้ง } \angle YAC \quad (\text{บ.พ. ๓๔})$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = \angle XAB + \angle YAC$$

เอา $\angle BAC$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

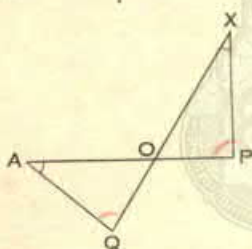
$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle XAC + \angle YAC$$

แต่มุมประชิด XAC และ YAC รวมกัน = ๒ มุมฉาก

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = ๒ \text{ มุมฉาก}$$

ช.ต.พ.

๔. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งได้ฉากกับเส้นตรงอีกสองเส้น เส้นต่อเส้นมุมแหลมในระหว่างเส้นตรงคู่แรก จะเท่ากับมุมแหลมในระหว่างคู่ที่สอง



กำหนดให้ เส้นตรง PX, XQ ตั้งได้

ฉากกับเส้นตรง AP และ AQ ให้ AP

และ XQ ตัดกันที่จุด O ในรูปที่สอง

คือ XP และ QA ออกไปให้พบกันที่จุด O (เพราะมุม

QAP ไม่ใช่มุมแหลม)

จะต้องพิสูจน์ว่า มุมแหลมที่ $X =$ มุมแหลมที่ A

พิสูจน์ เพราะว่ามุม P และ Q เป็นมุมฉาก

∴ มุมที่ X รวมกับ มุมที่ O = ๓ มุมฉาก

และมุมที่ A รวมกับมุมที่ O = ๓ มุมฉาก

∴ มุมแหลมที่ X = มุมแหลมที่ A

ช.ค.พ.

๓. ถัดต่อต้านหนึ่งด้านใดของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า ออกไปมุมภายใน นอก ย่อมเท่า กับ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะว่ามุมภายในของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามี ๖ มุม และรวมกันเข้าเท่ากับ ๓๖๐° (ป.ท.ร. ๓๖)

∴ มุมหนึ่ง = ๖๐°

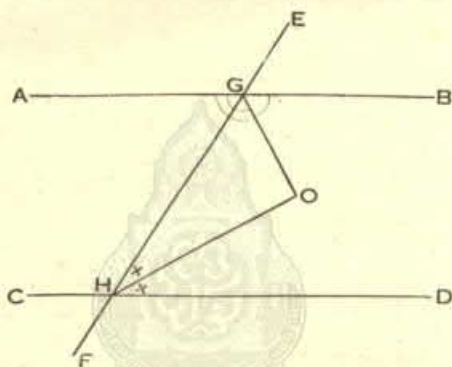
มุม ภายใน ของรูป สาม เหลี่ยม ด้าน เท่า มี ๓ มุม และรวมกันเข้าเท่ากับ ๑๘๐°

มุมหนึ่ง = ๖๐°

∴ มุม ภายใน ของรูป หก เหลี่ยม ด้าน เท่า เท่ากับมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ช.ค.พ.

๔. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง
เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด
ย่อมบรรจบกันเป็นมุมฉาก



กำหนดให้ เส้นตรง EF ตัดเส้นขนาน AB, CD ที่จุด G
และ H OG และ OH แบ่งครึ่ง $\angle BGH$ และ $\angle GHD$
ให้ OG และ OH บรรจบกันที่จุด O
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle GOH$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\because \angle OGH = \frac{1}{2}$ ของ $\angle BGH$ (กำหนดให้)

และ $\angle GHO = \frac{1}{2}$ ของ $\angle GHD$ (กำหนดให้)

$$\therefore \angle OGH + \angle GHO = \frac{2}{2} \text{ ของ } (\angle BGH + \angle GHD)$$

$$\text{แต่ } \angle BGH + \angle GHD = 2 \text{ มุมฉาก} \quad (\text{ป.พ.๓๔})$$

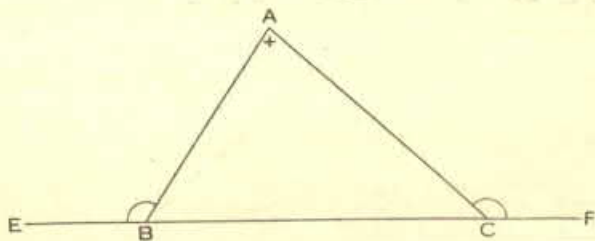
$$\therefore \angle OGH + \angle GHO = ๓ \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{แต่ } \angle OGH + \angle GHO + \angle GOH = ๓ \text{ มุมฉาก} \quad (\text{ป.พ.๓๖})$$

$$\therefore \angle GOH = ๓ \text{ มุมฉาก}$$

ซ.ต.พ.

๕. ถ้าต่อฐานของรูปสามเหลี่ยมออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกทั้งสองรวมกันเท่ากับมุมยอดจะเท่ากับสองมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ต่อฐาน BC
ออกไปทั้งสองข้างถึงจุด E และ F

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABE + \angle ACF - \angle BAC = 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ $\because \angle ABE + \angle ABC = 2$ มุมฉาก (บ.พ. ๓)

และ $\angle ACB + \angle ACF = 2$ มุมฉาก (บ.พ. ๓)

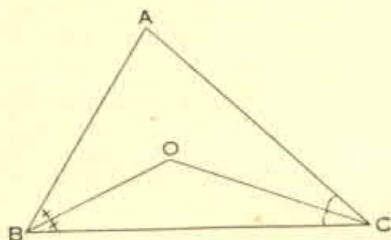
$\therefore \angle ABE + \angle ABC + \angle ACB + \angle ACF = 4$ มุมฉาก

แต่ $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 2$ มุมฉาก (บ.พ. ๓๖)

$\therefore \angle ABE + \angle ACF - \angle BAC = 2$ มุมฉาก

ช.ต.พ.

๖. ถ้า OB และ OC แบ่งครึ่งมุม B และ C ของ
รูป $\triangle ABC$ จง พิสูจน์ ว่า $\angle BOC$ เท่ากับ $90^\circ + \frac{A}{2}$



กำหนดให้ OB, OC แบ่งครึ่งมุม B และ C ของ $\triangle ABC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

พิสูจน์ $\because \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$

(ป.พ. ๓๖)

แต่ $\angle OBC = \frac{B}{2}$ และ $\angle OCB = \frac{C}{2}$

$\therefore \angle BOC + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180^\circ$

$\angle BOC = 180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}$

และ $A + B + C = 180^\circ$ (ป.พ. ๓๖)

$\therefore \angle BOC = A + B + C - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}$

$\therefore \angle BOC = \frac{2A + B + C}{2}$

$\therefore \angle BOC = \frac{A + A + B + C}{2}$

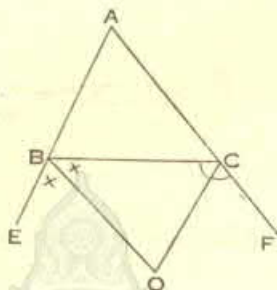
$\angle BOC = \frac{A + 180^\circ}{2}$

$\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

ช.ต.พ.

๗. ถัดข้อด้าน AB, AC ของ รูป สามเหลี่ยม ABC

ออกไป แล้วแบ่งครึ่งมุม ภายนอกด้วยเส้น BO และ CO
 จึงพิสูจน์ว่า $\angle BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$



กำหนดให้ ด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ต่ อออกไปถึง
 จุด E และ F ให้ BO และ CO แบ่ง ครึ่งมุม ภายนอก
 EBC และ FCB

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$

พิสูจน์ $\because \angle BCO + \angle OBC + \angle BOC = 180^\circ$ (ป.พ.จ.๖)

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB$$

$$\text{แต่ } \angle EBO + \angle OBC = 180^\circ - B$$

$$\text{และ } \angle EBO = \angle OBC \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle OBC = \frac{180^\circ - B}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน $\angle OCB = \frac{180^\circ - C}{2}$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \frac{180^\circ - B}{2} - \frac{180^\circ - C}{2}$$

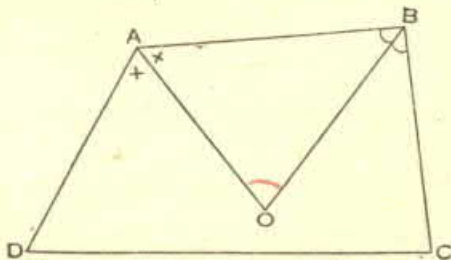
$$\therefore \angle BOC = \frac{B+C}{2}$$

$$\angle BOC = \frac{180^\circ - A}{2}$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

ช.ค.พ.

๘. ในรูปสี่เหลี่ยม ด้านแบ่งครึ่งมุมที่หนึ่งของมุมที่อยู่เคียงกัน บรรจบกันเป็นมุมโตเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของมุมที่เหลือ



กำหนดให้ OA, OB แบ่ง ครึ่ง มุม A และ B ของ รูป สี่ เหลี่ยม ABCD

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle AOB = \frac{C+D}{2}$

พิสูจน์ $\because \angle AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 360^\circ$ (ป.พ. ๓๖)

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ - A - B}{2}$$

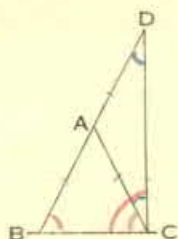
$$\text{แต่ } A+B+C+D = 360^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{A+B+C+D - A - B}{2}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{C+D}{2}$$

ท.ค.พ.

✓ ๘. ถ้า A เป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ต่อ ด้าน BA ถึง จุด D ทำให้ AD เท่ากับ BA แล้ว ตากเส้น DC จงพิสูจน์ว่า $\angle BCD$ เป็นมุมฉาก



กำหนดให้ A เป็นมุมยอดของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC ต่อ

BA ถึงจุด D ทำให้ $AD = BA$ ตากเส้น DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BCD$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\because AB = AC$ (กำหนดให้)

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ (บ.พ. ๕)

แต่ $AD = AB$ (สร้าง)

และ $AB = AC$

$\therefore AD = AC$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ (บ.พ. ๕)

$\therefore \angle ACB + \angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$

$\therefore \angle BCD = \angle DBC + \angle BDC$

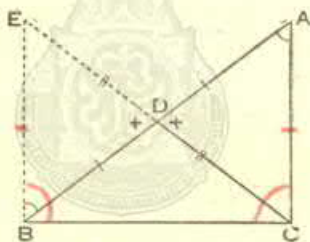
แต่ถ้ามุมรวมกัน = ๓๘๐

(ป.พ. ๑๖)

$\therefore \angle BCD$ เป็นมุมฉาก

ข.ค.พ.

๓๐. เส้นตรงซึ่งลากจากจุดกึ่งกลางของด้าน
ตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมายังมุมฉากจะยาว
เท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้าม



กำหนดให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ มุมฉากที่ C และ D เป็นจุด
กึ่งกลางของด้านตรงข้าม AB ลากเส้น DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $DC = \frac{1}{2} AB$

สร้าง ต่อ CD ถึงจุด E ทำให้ $DE = CD$ ลากเส้น EB

พิสูจน์ ในรูป $\triangle EDB$ และ $\triangle ADC$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} BD = DA & (\text{กำหนดให้}) \\ ED = DC & (\text{สร้าง}) \\ \angle EDB = \angle ADC & (\text{บ.พ. ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EDB = \triangle ADC \text{ ทุกประการ} \quad (\text{บ.พ. ๔})$$

$$\therefore EB = AC$$

$$\text{แต่ } \angle EBD = \angle DAC$$

$$\therefore \angle EBC = \angle BAC + \angle ABC$$

แต่ $\angle ACB$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle EBC \approx \text{หนึ่งมุมฉาก}$$

ใน $\triangle EBC$ และ $\triangle ABC$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} EB = AC & (\text{พิสูจน์}) \\ BC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle EBC = \angle ACB & (\text{มุมฉาก}) \end{cases}$$

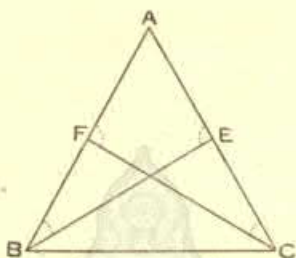
$$\therefore \triangle EBC = \triangle ABC \text{ ทุกประการ} \quad (\text{บ.พ. ๔})$$

$$\therefore EC = AB$$

$$\text{แต่ } CD = \frac{1}{2} EC \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB$$

๓. เส้นคั่นกลาง ซึ่ง ตาก จาก ปลาย ฐาน ทั้งสองข้าง ของรูปสามเหลี่ยม หน้า จั่ว มา ยัง ด้าน ตรงข้าม ย่อม ยาวเท่า กัน



กำหนดให้ เส้นคั่นกลาง BE และ CF ตาก จาก B และ C ปลายฐานของรูป $\triangle$ หน้าจั่ว ABC มายังด้านตรงข้าม AC และ AB

จะต้องพิสูจน์ว่า $BE = CF$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABE$ และ $\triangle ACF$ (กำหนดให้)

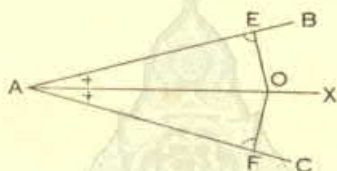
เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{ll} AB = AC & \text{(กำหนดให้)} \\ \angle AEB = \angle AFC & \text{(มุมฉาก)} \\ \angle BAE = \angle CAF & \text{(มุมร่วม)} \end{array} \right.$

$\therefore \triangle ABE = \triangle ACF$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore BE = CF$

ข.ด.พ.

๒. จุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งมุมย่อมมีระยะ
ห่างจากแขนของมุมนั้นเท่ากัน



กำหนดให้ O เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ตากเส้น OE, OF ตั้งฉากกับแขน AB, AC ที่จุด E และ F ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $OE = OF$

พิสูจน์ ใน $\triangle EAO$ และ $\triangle OAF$

เพราะว่า $\begin{cases} \angle OEA = \angle OFA & (\text{มุมฉาก}) \\ \angle OAE = \angle OFA & (\text{กำหนดให้}) \\ OA \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

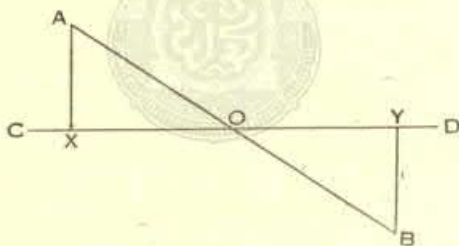
$$\therefore \triangle AEO = \triangle AFO$$

(ป.พ. ๓๗)

$$\therefore OE = OF$$

ช.ค.พ.

๓. ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB แล้วลากเส้น AX และ BY ให้ตั้งฉากกับเส้นนั้น จากจุด A และ B จึงพิสูจน์ว่า $AX = BY$



กำหนดให้ เส้นตรง CD ลากผ่าน O จุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB จากจุด A และ B ลากเส้น AX และ BY ตั้งฉากกับ CD ที่จุด X และ Y
จะต้องพิสูจน์ว่า $AX = BY$

พิสูจน์ ใน $\triangle AXO$ และ $\triangle OYB$

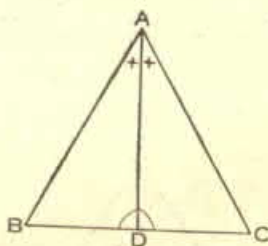
$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AO=OB & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle AOX = \angle BOY & (\text{ป.พ. ๓}) \\ \angle AXO = \angle BYO & (\text{มุมฉาก}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle AXO = \triangle BYO$ ทุกประการ (ป.พ. ๓๗)

$\therefore AX = BY$

ช.ค.พ.

๕. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม
ตั้งฉากกับฐาน รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยม
หน้าจั่ว



กำหนดให้ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A ของ $\triangle ABC$
และตั้งฉากกับฐาน BC ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

เพราะว่า $\begin{cases} \angle BAD = \angle CAD & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle ADB = \angle ADC & (\text{มุมฉาก}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

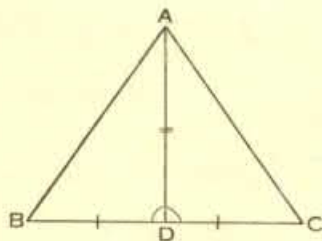
$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore AB = AC$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

ช.ค.พ.

๕. ถ้าเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาแบ่งครึ่งฐานด้วยรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 เติมนำมาแบ่งครึ่งฐานด้วยรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 เติมนำมาแบ่งครึ่งฐานด้วยรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ AD เป็นเส้นที่ลากจากมุมยอด A ของรูป
 $\triangle ABC$ มาถึงฉากและแบ่งครึ่งฐาน BC

จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หน้าที่

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

เพราะว่า $\begin{cases} BD=CD & (\text{กำหนดให้}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle ADB = \angle ADC & (\text{มุมฉาก}) \end{cases}$

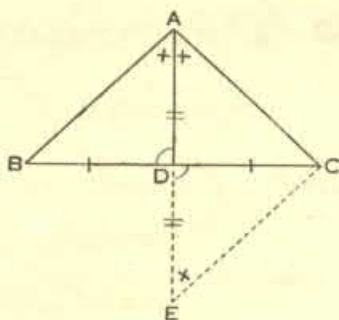
$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore AB = AC$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ หน้าที่

ช.ต.พ

๖. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุม ยอดของรูป สามเหลี่ยม
 แบ่งครึ่งฐานด้วย รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยม
 หน้าที่



กำหนดให้ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A ของ $\triangle ABC$
และแบ่งครึ่งฐาน BC

จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หน้าที่

สร้าง ต่อเส้น AD ถึงจุด E ทำให้ $DE = AD$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle DCE$

เพราะว่า $\begin{cases} BD = DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AD = DE & (\text{สร้าง}) \\ \angle ADB = \angle CDE & (\text{ป.พ. ๓}) \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD = \triangle DCE$ ทุกประการ (ป.พ. ๔)

$\therefore AB = CE$

และ $\angle BAD = \angle DEC$

แต่ $\angle BAD = \angle DAC$

(กำหนดให้)

$\therefore \angle DAC = \angle DEC$

$\therefore AC = EC$

(ป.พ.๖)

แต่ $CE = AB$

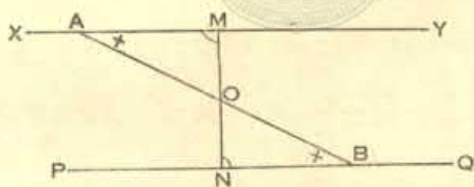
(พิสูจน์)

$\therefore AB = AC$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าที่

ช.ต.พ.

๗. จุดกึ่งกลางของเส้นตรงซึ่งปลายทั้งสองจุด
เส้นขนานหนึ่ง มีระยะห่างจากเส้นขนานเท่ากัน



กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB ซึ่งที่
ปลาย A และ B พบเส้นขนาน XY และ PQ จาก O ตาก
เส้น OM, ON ตั้งฉากกับ XY และ PQ ที่จุด M และ N

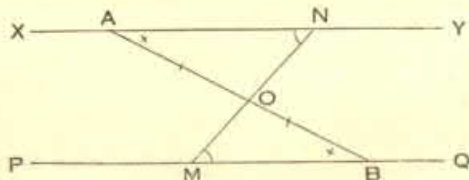
จะต้องพิสูจน์ว่า $OM=ON$

พิสูจน์ ใน $\triangle AMO$ และ $\triangle ONB$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } \left\{ \begin{array}{ll} AO=OB & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle AMO=\angle ONB & (\text{มุมฉาก}) \\ \angle MAO=\text{มุมแย้ง } \angle OBN & (\text{บ.พ. ๓๔}) \end{array} \right. \\ \therefore \triangle AMO = \triangle ONB \text{ ทุกประการ } (\text{บ.พ. ๑๗}) \\ \therefore OM=ON \end{aligned}$$

ข.ค.พ.

๘. จุดกึ่งกลางของเส้นตรง ซึ่ง ปลายทั้งสองจุด
เส้นขนานคู่หนึ่ง ถ้าลากเส้นตรง จากเส้น ขนาน เส้น
หนึ่งให้มา เนจุดนี้และไปจุดเส้นขนานอีกเส้นหนึ่ง จุดนั้น
จะแบ่งเส้นนั้นออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB ซึ่งปลาย A และ B พบเส้นขนาน XY และ PQ จาก M จุดใดจุดหนึ่งบนเส้น PQ ตากเส้น MN ให้ผ่านจุด O และพบ XY ที่จุด N

จะต้องพิสูจน์ว่า $OM = ON$

พิสูจน์ ใน $\triangle OMB$ และ $\triangle OAN$

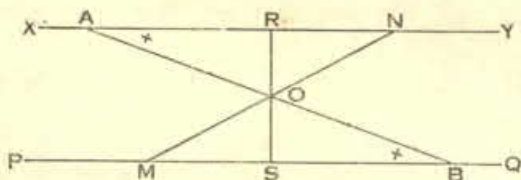
เพราะว่า $\begin{cases} AO = OB & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle OMB = \text{มุมแย้ง } \angle ONA & (\text{บ.พ. ๓๔}) \\ \angle OBM = \text{มุมแย้ง } \angle OAN & (\text{บ.พ. ๑๔}) \end{cases}$

$\therefore \triangle OMB = \triangle ONA$ ทุกประการ (บ.พ. ๑๗)

$\therefore OM = ON$

ช.ต.พ.

๘. จุด ๆ หนึ่งอยู่ห่างจากเส้นขนานคู่หนึ่งเท่ากัน ถ้าตากเส้นตรงอีกสองเส้นให้ผ่านจุดนี้ และให้ตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง ส่วนของเส้นขนานที่ ถูกตัดนั้นเท่ากัน



กำหนดให้ O เป็นจุด ๆ หนึ่ง มี ระยะ OR และ OS
ห่างจากเส้นขนาน XY และ PQ เท่ากัน ตากเส้น AB ,
 MN ให้ผ่านจุด O และตัดเส้นขนานที่จุด A, B, M และ N
จะต้องพิสูจน์ว่า $AN = MB$

พิสูจน์ ใน $\triangle ARO$ และ $\triangle OSB$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} OR = OS & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle ARO = \angle OSB & (\text{มุมฉาก}) \\ \angle OAR = \text{มุมแย้ง } OBS & (\text{บ.พ. ๓๔}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ARO = \triangle OSB$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$$\therefore AR = SB$$

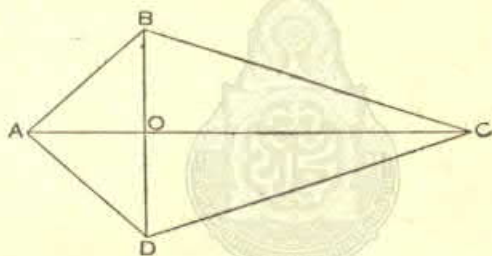
ในทำนองเดียวกัน $RN = MS$

$$\therefore AR + RN = SB + MS$$

นวกคค AN=MB

ช.ต.พ.

๓๐. ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD ถ้า $AB=AD$ และ $BC=DC$ จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุม AC จะแบ่งครึ่งมุมที่เส้น AC ตาก และ AC จะตั้งฉากกับ BD ด้วย



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งซึ่งมี $AB=AD$ และ $BC=DC$ ตากเส้นทแยงมุม AC และ BD ให้ตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า ๓. AC แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ และ $\angle BCD$

๔. AC กับ BD ตั้งฉากกัน

พิสูจน์ ๓. ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$

เพราะว่า $\begin{cases} AB=AD & (\text{กำหนดให้}) \\ BC=DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$

และ $\angle BCA = \angle DCA$

นั่นคือ AC แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ และ $\angle BCD$

พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle ABO$ และ $\triangle ADO$

เพราะว่า $\begin{cases} AB=AD & (\text{กำหนดให้}) \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle BAO = \angle DAO & (\text{พิสูจน์ ๑}) \end{cases}$

$\therefore \triangle ABO = \triangle ADO$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

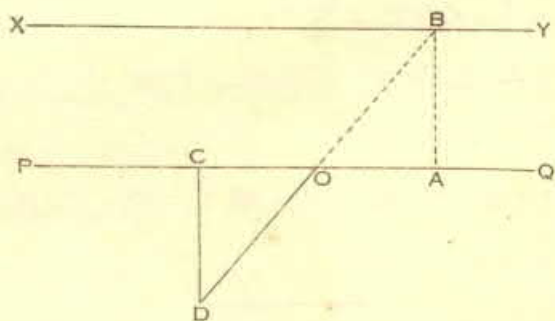
$\therefore \angle AOB = \angle AOD$

แต่เป็นมุมประชิดรวมกันเข้า = ๒ มุมฉาก

$\therefore \angle AOB$ และ $\angle AOD$ เป็นมุมฉาก (บ.พ. ๑)

นั่นคือ AC และ BD ตั้งฉากกัน

๓๓. พนักงานตำรวจผู้หนึ่งมีความประสงค์ที่จะทราบส่วนกว้างของแม่น้ำซึ่งเขาไม่สามารถจะข้ามไปได้ เขาจึงไปยังน้ตกจุด A ริมฝั่งแม่น้ำนั้น และได้ตั้งเกวเห็นวัตถุ B ตรงข้าม เขาจึงลากเส้นตรง AC ตั้งฉากกับ AB แล้วได้ทำเครื่องหมายไว้ที่จุด O กลางของ AC จากจุด C เขาได้เดินไปตามเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับ AC จนถึงจุด D จากที่นั้นเขามองเห็น O, B อยู่ในแนวเดียวกัน แล้วเขาก็วัด CD จึงพิสูจน์ว่าผลที่เขาได้นั้นคือส่วนกว้างของแม่น้ำ



กำหนดให้ สมมุติให้ XY และ PQ เป็นแม่น้ำ และ AB

เป็นส่วนกว้างของแม่น้ำ ให้ A เป็นจุดที่เขายืนครั้งแรก และ B เป็นวัดที่อยู่ตรงกลางของ AC ซึ่งเป็นเส้นตรงซึ่งเขาอาจตั้งฉากกับ AB และ DOB เป็นสายตาคู่เขมองเห็น ว่า O, B อยู่ในแนวเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า CD ยาวเท่ากับส่วนกว้างของแม่น้ำ

พิสูจน์ ใน $\triangle COD$ และ $\triangle AOB$

เพราะว่า $\begin{cases} OC=OA & \text{(กำหนดให้)} \\ \angle OCD=\angle OAB & \text{(มุมฉาก)} \\ \angle COD=\angle AOB & \text{(ป.พ. ๓)} \end{cases}$

$\therefore \triangle COE = \triangle AOB$ ทุกประการ (ป.พ. ๓๗)

$\therefore CD=AB$

$\therefore$ CD ที่เขาวัดก็เท่ากับ AB ส่วนกว้างของแม่น้ำ

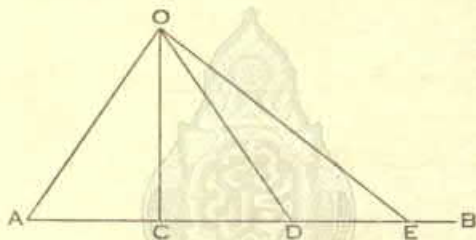
ช.ค.พ.

ด. ๓. เส้นที่ลากจากจุดที่กำหนดให้มายังเส้นตรง

ที่กำหนดให้ เส้นตรงฉากเป็นเส้นตั้งฉาก (ดู บ.พ. ๓๒)

๒. เส้นเอทกทางมุมกับเส้นตั้งฉาก เท่ากัน ย่อม
เท่ากัน

๓. เส้นเอทสองเส้น เส้นตั้งกค่อเส้นททางมุม
เล็กกว่ากับเส้นตั้งฉาก



กำหนดให้ OC เป็นเส้นตั้งฉาก กับเส้นตรง AB ที่
จุด C และ OA, OD, OE เป็นเส้นเอท ซึ่ง ดาก จาก
จุด O มายังเส้นตรง AB และ $\angle AOC = \angle DOC$ และ
 $\angle AOC < \angle EOC$

จะต้องพิสูจน์ว่า ๒. $AO = OD$

๓. $AO < OE$

พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle AOC$ และ $\triangle OCD$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} \angle AOC = \angle COD & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle OCA = \angle OCD & (\text{มุมฉาก}) \\ OC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACO = \triangle OCD \text{ ทุกประการ (บ.พ.ดล.)}$$

$$\therefore AO = OD$$

ช.ต.พ.

พิสูจน์ ๓. ใน $\triangle AOC$ $\because \angle ACO$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle AOC + \angle OAC = ๓ \text{ มุมฉาก}$$

ใน $\triangle COE$ $\because \angle OCE$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle EOC + \angle OEC = ๓ \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore \angle AOC + \angle OAC = \angle EOC + \angle OEC$$

$$\text{แต่ } \angle AOC < \angle EOC \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \angle OAC > \angle OEC$$

ใน $\triangle OAE$

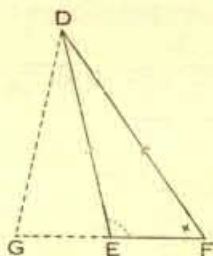
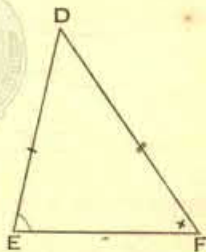
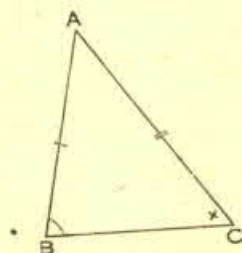
$$\therefore \angle OEA < \angle OAE \quad (\text{พิสูจน์})$$

$$\therefore AO < OE$$

(ป.พ. ๓๖)

ช.ด.พ.

๘. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมี ด้าน เท่ากันสอง
ด้าน ด้านต่อด้าน และมีมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านเท่าๆ ใด
คู่ หนึ่งเท่ากัน มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านเท่าอีกคู่ หนึ่ง
ย่อมเท่ากันหรือรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก แต่ถ้า
มุมคู่หนึ่งเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมนั้นก็เท่ากันทุก
ประการด้วย



กำหนดให้ ABC, DEF เป็น สามเหลี่ยม ดัง รูป ข้างนี้

ด้าน $AB=DE, AC=DF$ และ $\angle ACB=\angle DFE$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC=\angle DEF$ และ $\triangle ACB=\triangle DEF$

ทุกประการ หรือ $\angle ABC+\angle DEF=2$ มุมฉาก

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

$\therefore AB=DE$ (กำหนดให้)

$\angle ACB=\angle DFE$ (กำหนดให้)

และถ้า $\angle BAC=\angle EDF$

$\therefore \triangle ABC=\triangle DEF$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore \angle ABC=\angle DEF$

แต่ถ้า $\angle BAC$ ไม่เท่ากับ $\angle EDF$ สมมติให้ $\angle BAC$

ใหญ่กว่า จากเส้น DG ให้ทางมุม $\angle FDG$ เท่ากับ

มุม BAC พบ FE ที่ตัดออกไปที่จุด G

ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle DGF$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AC=DF \\ \angle ACB=\angle DFE \\ \angle BAC=\angle GDF \end{array} \right.$ (กำหนดให้)
(กำหนดให้)
(สร้าง)

$\therefore \triangle ABC = \triangle GDF$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore \angle ABC = \angle DGF$

แต่ $AB = DG$

แต่ $AB = DE$

$\therefore DG = DE$

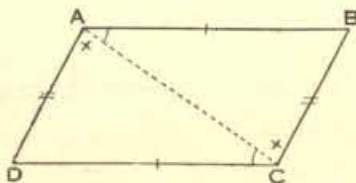
$\therefore \angle DGE = \angle DEG$

แต่ $\angle DEG + \angle DEF = ๒$ มุมฉาก (บ.พ. ๓)

$\therefore \angle ABC + \angle DEF = ๒$ มุมฉาก

ช.ค.พ.

๓. ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากัน
รูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รูปหนึ่ง ซึ่งมี
ด้าน $AB=CD$ และ $BC=AD$

จะต้องพิสูจน์ว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

สร้าง ตาโกเส้นทแยงมุม AC

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AB=CD \\ BC=AD \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle ACB = \angle DAC$ และ $\angle BAC = \angle ACD$

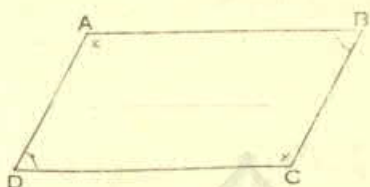
แต่มุมทั้งสองคู่นี้เป็นมุมแย้ง

$\therefore BC$ ขนานกับ AD (บ.พ. ๓๓)

และ AB ขนานกับ CD (บ.พ. ๓๓)

นั่นคือ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๒. ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากัน
รูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ ABCD เป็น รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รูปหนึ่งซึ่งมี

$$\angle A = \angle C \text{ และ } \angle B = \angle D$$

จะต้องพิสูจน์ว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ $\therefore \angle A = \angle C \text{ และ } \angle B = \angle D$

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$$

แต่ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ๔$ มุมฉาก

$$\therefore \angle A + \angle B = ๒ \text{ มุมฉาก}$$

แต่เป็นมุมภายใน ๆ ซ้ำกัน

$$\therefore AD \text{ ขนานกับ } BC \quad (\text{ป.พ. ๓๓})$$

ในทำนองเดียวกัน $\angle A + \angle D = ๒$ มุมฉาก

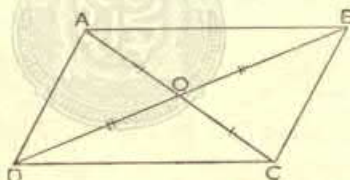
และเป็นมุมภายใน ๆ ซ้ำกัน

$\therefore AB$ ขนานกับ DC (ป.พ. ๓๓)

นั่นคือ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ช.ต.พ.

๓. ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบ่ง
ครึ่งซึ่งกันและกัน สี่เหลี่ยมนั้นเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ AC, BD เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม

$ABCD$ และให้แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ ใน $\triangle AOD$ และ $\triangle OBC$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AO=OC & (\text{กำหนดให้}) \\ OD=OB & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle AOD=\angle BOC & (\text{บ.พ. ๓}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOD = \triangle BOC \text{ ทุกประการ } (\text{บ.พ. ๔})$$

$$\therefore AD=BC$$

$$\text{และ } \angle OAD = \angle OCB$$

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมแย้ง

$$\therefore AD \text{ ขนานกับ } BC \quad (\text{บ.พ. ๓๓})$$

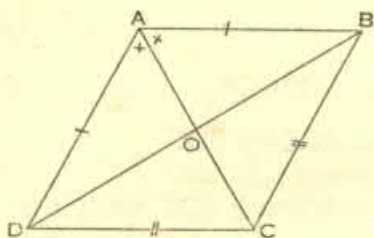
เมื่อ AD เท่ากับ BC และขนานกัน

$$\therefore AB \text{ เท่ากับ } DC \text{ และขนานกัน } (\text{บ.พ. ๒๐})$$

นูนกคธ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ข.ค.พ.

๔. เส้นตรงแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมขนม
เปียกปูนด้านเท่า ข้อมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันและตั้ง
ฉากด้วย



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาน มีก้านคู่ด้าน
เท่ารูปหนึ่ง มี AC, BD เป็นเส้นทแยงมุมและให้ตัด
กันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า AC, BD แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และ
ตรงกันด้วย

พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ และ $\triangle ABC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AD=AB \quad (\text{กำหนดให้}) \\ DC=BC \quad (\text{กำหนดให้}) \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$

$\therefore \triangle ADC = \triangle ABC$ ทุกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle DAC = \angle BAC$

ใน $\triangle ADO$ และ $\triangle ABO$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AD = AB \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle DAO = \angle BAO \end{array} \right. \quad (\text{พิสูจน์})$

$\therefore \triangle ADO = \triangle ABO$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore DO = OB$

และ $\angle AOD = \angle AOB$

แต่เป็นมุมประชิดรวมกัน = ๒ มุมฉาก

$\therefore \angle AOD = ๑ \text{ มุมฉาก}$

$\therefore AC$ แบ่งครึ่ง DB และตั้งฉากด้วย

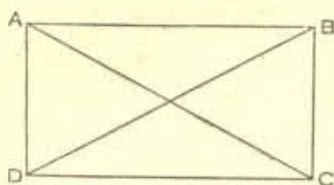
ในทำนองเดียวกัน BD ก็แบ่งครึ่ง AC

นั่นคือ AC, BD แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตั้งฉากด้วย

ช.ต.พ.

๕. ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เท่ากัน มุมทแยงของรูปนั้นเป็นมุมฉาก



กำหนดให้ AC, BD เป็นเส้นทแยงมุม ของรูป ดังที่เขียน
ด้านขนาน $ABCD$ และเท่ากันด้วย

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle A, \angle B, \angle C$ และ $\angle D$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ และ $\triangle BDC$

เพราะว่า $\begin{cases} AC = BD & (\text{กำหนดให้}) \\ DC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ AD = BC & (\text{บ.พ. ๒๓}) \end{cases}$

$\therefore \triangle ADC = \triangle BDC$ ทุกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle ADC = \angle BCD$

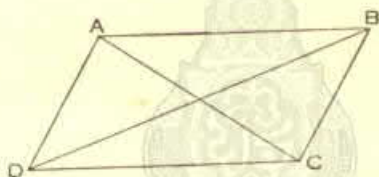
แต่เป็นมุมภายใน ๆ ซ้ำกัน

$\therefore \angle ADC + \angle BCD = 2 \text{ มุมฉาก}$ (บ.พ. ๓๔)

$\angle ADC, \angle BCD$ เป็นมุมฉาก

ในทำนองเดียวกัน $\angle BAD, \angle ABC$ เป็นมุมฉาก
 นั่นคือ $\angle A, \angle B, \angle C$ และ $\angle D$ เป็นมุมฉาก
 ข.ต.พ.

๖. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยม
 ผืนผ้าย่อมมีเส้นทแยงมุมไม่เท่ากัน



กำหนดให้ AC, BD เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม
 ด้านขนาน $ABCD$ ซึ่งไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้า

จะต้องพิสูจน์ว่า AC กับ BD ไม่เท่ากัน

พิสูจน์ $\because AD$ ขนานกับ BC และ DC พบบ

$\therefore$ มุมภายใน $\angle ADC + \angle BCD = ๒$ มุมฉาก
 แต่ไม่มีมุมใดมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก

$\therefore \angle ADC$ และ $\angle BCD$ ไม่เท่ากัน

ใน $\triangle ADC$ และ $\triangle BCD$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AD = BC \quad (\text{กำหนดให้}) \\ DC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{และ } \angle ADC \text{ ไม่เท่ากับ } \angle BCD \end{array} \right.$

$\therefore AC$ กับ BD ไม่เท่ากัน (บ.พ. ๓๘)

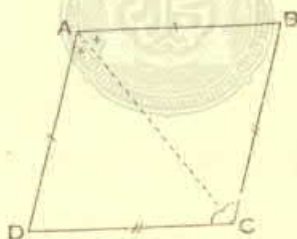
ช.ต.พ.



แบบฝึกหัด

ว่าด้วยเส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๓. จงแสดงให้เห็นว่า ถ้าเราพับรูปสี่เหลี่ยม
ขนมเปียกปูนด้านเท่าตามรอยเส้นทแยงมุมเส้นใด เส้น
หนึ่งแล้ว รูปสี่เหลี่ยมต้อง รูปนูนยอมทบกันสนิท
นี้หมายความว่าให้พับจนเส้นทแยงมุม เส้นใด
เส้นหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า เป็น เส้น
ซิมตริ (Semetry)



กำหนดให้ AC เป็นเส้น ทแยงมุม ของ รูป สี่ เหลี่ยม
ขนมเปียกปูนด้านเท่า ABCD
จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม AC และ BD เป็นเส้น
ซิมตริ

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$

เพราะว่า $\begin{cases} AB=AD & (\text{กำหนดให้}) \\ BC=DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$

และ $\angle BCA = \angle DCA$

$\therefore$ เมื่อเราพับรูปสี่เหลี่ยม ขนมห่แยก ปุ่ม ด้านเท่า ABCD ตามแนวเส้นทแยงมุมแล้ว ด้าน AD จะทับด้าน AB และด้าน DC จะทับด้าน BC

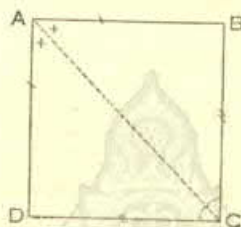
$\therefore$ จุด D ซึ่งเป็นจุดรวมของ AD และ DC
ทับกับจุด B ซึ่งเป็นจุดรวมของ AB และ BC

$\therefore \triangle ADC$ ก็กับ $\triangle ABC$ เช่นนี้

$\therefore AC$ ก็เป็นเส้นทแยงมุม

ในกำหนดเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า BD เป็น
เส้นทแยงมุม

๒. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสเป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ยังมีเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสอีกสองเส้นซึ่งไม่ใช่เส้นทแยงมุม เส้นสองเส้นนี้คือเส้นอะไร



กำหนดให้ AC เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ABCD

จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AB = AD \\ BC = DC \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกประการ (บ.พ. ๓)

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$

และ $\angle BCA = \angle DCA$

$\therefore$ เมื่อเราพับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ตามแนวเส้นทแยงมุม AC แล้วด้าน AD จะทับด้าน AB และด้าน DC จะทับด้าน BC

$\therefore$ จุด D ซึ่งเป็นจุดร่วมของด้าน AD และ DC จะทับจุด B ซึ่งเป็นจุดร่วมของด้าน AB และ BC

$\therefore \triangle ADC$ ทับ $\triangle ABC$ ฉะนั้น

นูนกข้อ AC เป็นเส้นซิมตริ

ในทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า BD เป็นเส้นซิมตริ

ช.ต.พ.

เส้นซิมตริหรือสองเส้น คือเส้นที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งไปยังจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม

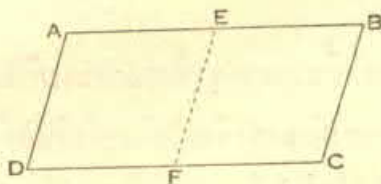
๓. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ

การ เส้นตรงแยงมุมจะเป็นเส้นขนานใดหรือไม่ เส้น
อะไรเป็นเส้นขนานของเส้นตรงแยงมุม

ถึงแม้ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสอง รูป นั้น จะ เท่า กัน
ก็ แต่รูปกลับกัน และ ด้าน ประชิด ก็ ไม่ เท่า กัน
เมื่อพบตามแนวเส้นตรงแยงมุมแล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง
นั้นจะไม่ทับกันสนิท เมื่อเป็นเช่นนั้นเส้นตรงแยงมุมนี้
ไม่ใช่เส้นขนาน และเส้นตรงแยงมุมอีกเส้นหนึ่งก็เช่น
เดียวกัน

เส้นขนานของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือเส้นที่ลากจาก
จุด ถึง กลาง ของ ด้าน หนึ่ง ไป ยัง จุด ถึง กลาง ของ ด้าน
ตรงข้าม

๔. มี เส้น ขั น ทร ใน รูป สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน
ธรรมดาบ้างหรือไม่ อย่างไร



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ E, F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, DC ตากเส้น EF

เพราะด้านประชิด DA, DC ไม่เท่ากัน เมื่อพับรูปสี่เหลี่ยมตามแนวเส้นทแยงมุม BD รูป $\triangle$ ก็จะไม่ทับกันดังนี้

$\therefore$ เส้นทแยงมุมไม่ใช่เส้นซิมเมตรี

$\because AE = DF$ ($AE = \frac{1}{2} AB, DF = \frac{1}{2} DC$)

$\therefore EF$ ขนานกับ AD (บ.พ. ๒๐)

$\therefore \angle BEF =$ มุมภายใน BAD (บ.พ. ๓๔)

แต่ $\angle BAD$ ไม่ใช่มุมฉาก

$\therefore \angle BEF$ ก็ไม่ใช่มุมฉาก

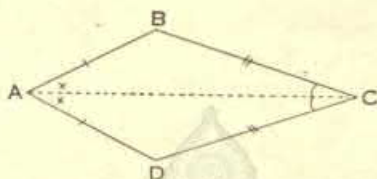
$\therefore \angle BEF$ และ $\angle AEF$ ไม่เท่ากัน

$\therefore$ เมื่อพับรูปตามแนว EF เส้น EB และ EA จะไม่ทับกัน

เส้นที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งไปยังจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามไม่ใช่เส้นซิมเมตรี

$\therefore$ ไม่มีเส้นซิมเมตรีในรูปนี้เลย

๕. ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD มีด้าน $AB=AD$ และ $CB=CD$ แต่ด้านทั้งหมดไม่เท่ากัน เส้นทแยงมุม เส้นใดหรือทั้งสองเส้นเป็นเส้นสมมาตร



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม มีด้าน $AB=AD$
 $CB=CD$

เมื่อด้านประชิด AB กับ BC ไม่เท่ากัน

$\therefore$ BD ก็ไม่ใช่เส้นสมมาตร

แต่ใน $\triangle BAC$ และ $\triangle ADC$

เพราะฉะนั้น $\left\{ \begin{array}{ll} AB=AD & (\text{กำหนดให้}) \\ BC=DC & (\text{กำหนดให้}) \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$

$\therefore \triangle BAC = \triangle ADC$ ทุกประการ (บ.พ. ๗)

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$

และ $\angle BCA = \angle DCA$

$\therefore$ เมื่อพับรูปตามแนวเส้น AC แล้ว

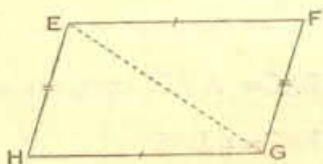
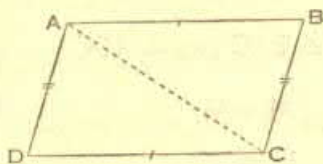
$\triangle ADC$ จะทับ $\triangle ABC$ ดังนี้

$\therefore$ AC เป็นเส้นสมมาตร

๖. จึงพิสูจน์ โดยยกรูปมาซ้อนกันว่า

๑. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูป จะเท่ากัน ทุก
ประการ ถ้าด้านประชิด หนึ่งของรูปหนึ่ง เท่ากับ
ด้านประชิด หนึ่งของอีกรูปหนึ่งด้านต่อด้าน และมุม
ของรูปหนึ่งเท่ากับมุมของอีกรูปหนึ่ง

๒. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเท่ากันทุกประการ ถ้า
ด้านประชิด หนึ่งของรูปหนึ่งเท่ากับด้านประชิด หนึ่งของ
อีกรูปหนึ่ง ด้านต่อด้าน



กำหนดให้ $ABCD, EFGH$ เป็น รูป $\square$ ที่เหลี่ยม ด้าน ขนาน

มี $AB=EF, BC=FG$ และ $\angle ABC = \angle EFG$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\square$ ที่เหลี่ยมด้าน ขนาน $ABCD$ และ $EFGH$

เท่ากันทุกประการ

สร้าง ตาแฉ่งทะแยงมุม AC, EG

พิสูจน์ เมื่อยก $\square$ ที่เหลี่ยมด้าน ขนาน $ABCD$ ทับ $\square$ ที่เหลี่ยม

ด้านขนาน $EFGH$ รูป $\triangle ABC$ จะทับ $\triangle EFG$ ดังนี้
ตามบทพิสูจน์ ๕

เพราะ $AB=EF, BC=EG$ และ $\angle ABC = \angle EFG$
และ $\triangle ADC$ จะทับ $\triangle EHG$ ดังนี้ ตาม บทพิสูจน์ ๖

เพราะ AC ทับ EG ดังนี้

และมี $AD=EH$ และ $DC=HG$ (บ.พ. ๒๓)

$\therefore$ รูป $\square$ ที่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ทับ $\square$ ที่เหลี่ยม
ด้านขนาน $EFGH$ ดังนี้

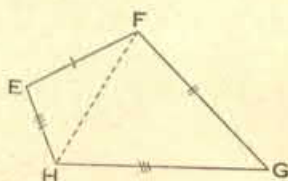
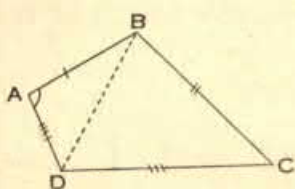
นั่นคือ $\square$ ที่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ และ $EFGH$

เท่ากันทุกประการ

ช.ค.พ.

ในข้อ ๒ ก็เช่นเดียวกัน เมื่อ $ABCD$ และ $EFGH$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\angle ABC$ และ $\angle EFG$ เป็นมุมฉาก ดังนั้นก็เท่ากัน.

๗. สี่เหลี่ยมสองรูป $ABCD$ และ $EFGH$ มีด้าน AB, BC, CD, DA เท่ากับด้าน EF, FG, GH และ HE ตามลำดับ และมีมุม BAD เท่ากับมุม FEH ด้วย จงพิสูจน์ว่าเราอาจหารูปหนึ่งซ้อนบนอีกรูปหนึ่งได้สนิท



กำหนดให้ $ABCD, EFGH$ เป็นสี่เหลี่ยมสองรูป ซึ่งมี

$$AB = EF, BC = FG, CD = GH, DA = HE$$

$$\text{และ } \angle BAD = \angle FEH$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABCD$ ทั้ $\triangle EFGH$

ดังนี้

สร้าง ตาเส้นตรงยาว BD และ FH

พิสูจน์ เมื่อยก $\triangle ABCD$ ทั้ $\triangle EFGH$

$\triangle ABD$ ทั้ $\triangle EFH$ ดังิตตามบทพิสูจน์ ๔

เพราะ $AB=EF, AD=EH$ และ มุมในระหว่าง

ด้านเท่า BAD เท่ากับมุมในระหว่างด้านเท่า FEH

$\therefore BD=FH$

ใน $\triangle BCD$ และ $\triangle FGH$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{ll} BD=FH & (\text{พิสูจน์}) \\ BC=FG & (\text{กำหนดให้}) \\ DC=HG & (\text{กำหนดให้}) \end{array} \right.$

$\therefore \triangle BCD = \triangle FGH$ ทุกประการ (ส.พ. ๗)

$\therefore \angle CBD = \angle GFH$

และ $\angle CDB = \angle GHF$

$\therefore$ ด้าน BC ทั้ด้าน FG

แต่ว่าด้าน DC ก็เท่ากับด้าน HG

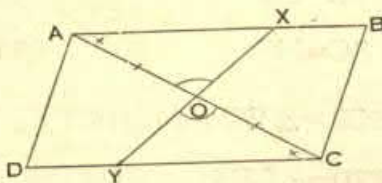
∴ จุด C ก็เท่ากับจุด G

นั่นก็คือสี่เหลี่ยม $ABCD$ เท่ากับสี่เหลี่ยม $EFGH$

ดังนี้

ช.ค.พ.

๘. เส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่ง ซึ่งลากผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และปลายทั้งสองจุดด้านตรงข้ามคู่หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น เส้นนั้นจะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กันทุกจุดนั้น



กำหนดให้ เส้นตรง XY ลากผ่าน O จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม AC ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ และ

ปลาย X และ Y จุดกึ่งกลาง AB และ CD

จะต้องพิสูจน์ว่า $XO = YO$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOX$ และ $\triangle YOC$

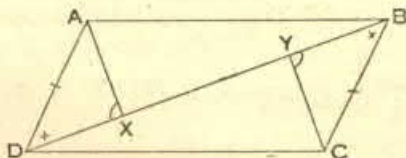
เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{ll} AO = OC & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle AOX = \angle YOC & (\text{ป.พ. ๓}) \\ \angle XAO = \text{มุมแย้ง } \angle CYO & (\text{ป.พ. ๑๔}) \end{array} \right.$

$\therefore \triangle AOX = \triangle YOC$ ทุกประการ (ป.พ. ๑๗)

$\therefore XO = YO$

ช.ค.พ.

๕. เส้นตรงลากซึ่งลากจาก มุม ตรง ซ้าย คู่ หนึ่ง
ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปยัง เส้น ทแยง มุม ของ มุม
อีกคู่ หนึ่ง ย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี BD เป็น
 เส้นทแยงมุม และ AX, CY เป็นเส้นตั้งฉากจาก
 มุม A และ C มายังเส้นทแยงมุม BD
จะต้องพิสูจน์ว่า $AX = CY$

พิสูจน์ ใน $\triangle AXD$ และ $\triangle BYC$

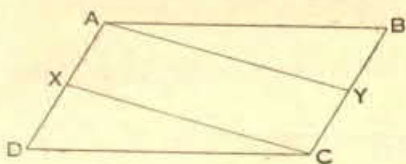
เพราะว่า $\begin{cases} AD = BC & (\text{บ.พ. ๒๓}) \\ \angle AXD = \angle BYC & (\text{มุมฉาก}) \\ \angle ADX = \text{มุมแย้ง} \angle CBY & (\text{บ.พ. ๑๕}) \end{cases}$

$\therefore \triangle AXD = \triangle BYC$ ทุกประการ (บ.พ. ๑๗)

$\therefore AX = CY$

ช.ท.พ.

๑๐. ถ้า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ
 X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC จงพิสูจน์ว่า
 รูป $AYCX$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน X และ Y
เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ BC ตากเส้น AY และ CX
จะต้องพิสูจน์ว่า $AYCX$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ เพราะว่า X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AD

และ BC ซึ่งเท่ากันและขนานกัน

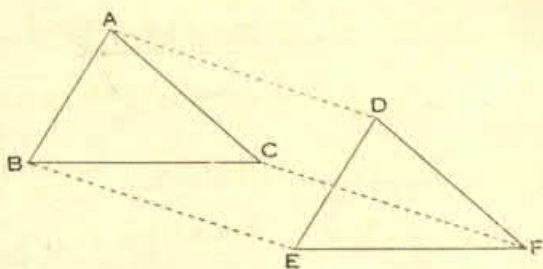
$\therefore AX$ กับ CY เท่ากันและขนานกัน

$\therefore AY$ กับ XC เท่ากันและขนานกัน (บ.พ. ๒๐)

นั่นคือ $AYCX$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ช.ค.พ.

๑๓. ABC และ DEF เป็นสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีด้าน AB, BC เท่ากันและขนานกันกับ DE และ EF จงพิสูจน์ว่า AC เท่ากันและขนานกันกับ DF



กำหนดให้ ABC, DEF เป็น $\triangle$ ดองรูป ซึ่งมีด้าน AB, BC
เท่ากันและขนานกันกับ DE และ EF

จะต้องพิสูจน์ว่า AC เท่ากันและขนานกันกับ DF

สร้าง ตากเส้น AD, BE และ CF

พิสูจน์ $\because AB = DE$ และขนานกัน

$$\therefore AD = BE \text{ และขนานกัน} \quad (\text{ป.พ. ๒๐})$$

$$\because BC = EF \text{ และขนานกัน}$$

$$\therefore BE = CF \text{ และขนานกัน} \quad (\text{ป.พ. ๒๐})$$

$$\therefore AD = CF \text{ และขนานกัน} \quad (\text{ป.พ. ๑๕})$$

$$\therefore AC = DF \text{ และขนานกัน} \quad (\text{ป.พ. ๒๐})$$

ช.ค.พ.

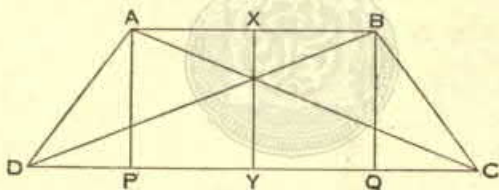
(หมายเหตุของบรรทัดให้ตัวอักษรตามกัน)

๓๒. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่ง มี AB ขนาน กับ DC และ AD เท่ากับ BC แต่ไม่ขนานกัน จงพิสูจน์ว่า

๑. $\angle A + \angle C = ๓๖๐^{\circ} = \angle B + \angle D$

๒. เส้นทแยงมุม $AC =$ เส้น ทแยงมุม BD

๓. เส้นตรงซึ่งลากจากจุดกึ่งกลาง AB ไปถึงจุดกึ่งกลางของเส้น DC เป็นเส้นซิมตัม



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม ซึ่ง มี AB ขนาน กับ DC และ $AD = BC$ แต่ไม่ขนานกัน และมี AC, BD เป็นเส้นทแยงมุม ให้ X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ DC ลากเส้น XY

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. $\angle A + \angle C = ๓๖๐^{\circ} = \angle B + \angle D$

๒. เส้นทแยงมุม $AC =$ เส้นทแยงมุม BD

๓. XY เป็นเส้นสัมผัส

สร้าง จากจุด A และ B ตากเส้น AP, BQ ตั้งฉากกับ CD

พิสูจน์ เพราะว่า AP, BQ ตั้งฉากกับ CD

$\therefore AP$ ขนานกับ BQ

$\therefore ABQP$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore AP = BQ$ (ป.พ. ๒๓)

ใน $\triangle APD$ และ $\triangle BQC$

เพราะว่า $\begin{cases} AP = BQ & (\text{พิสูจน์}) \\ AD = BC & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle APD = \angle BQC & (\text{มุมฉาก}) \end{cases}$

$\therefore \triangle APD = \triangle BQC$ ทุกประการ (ป.พ. ๑๗)

$\therefore \angle ADP = \angle BCQ$

$\therefore AB$ ขนานกับ DC และ AD พบ

$\therefore$ มุมภายใน $\angle A + \angle D = ๓๖๐$ (ป.พ. ๑๔)

แต่ $\angle D = \angle C$

$$\therefore \angle A + \angle C = ๓๘๐^{\circ}$$

$$\text{แต่ } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ๓๖๐^{\circ}$$

$$\therefore \angle B + \angle D = ๓๘๐^{\circ}$$

$$\text{นั่นคือ } \angle A + \angle C = ๓๘๐^{\circ} = \angle B + \angle D$$

ช.ต.พ.

พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle ADC$ และ $\triangle BDC$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AD = BC & (\text{กำหนดให้}) \\ DC \text{ เป็นฐานร่วม} \\ \angle D = \angle C & (\text{พิสูจน์}) \end{cases}$$

$$\triangle ADC = \triangle BDC \quad (\text{บ.พ. ๔})$$

$$\text{นั่นคือเส้นทแยงมุม } AC = \text{เส้นทแยงมุม } BD$$

ช.ต.พ.

พิสูจน์ ๓. $\therefore X$ และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, DC

$$\therefore XY \text{ กึ่งกลางกับ } AP \text{ และ } BQ \quad (\text{บ.พ. ๒๐})$$

$$\text{แต่ } AP \text{ ตั้งฉากกับ } CD$$

$$\therefore XY \text{ ตั้งฉากกับ } CD \text{ และ } AB \text{ ด้วย}$$

$\therefore \angle AXY, \angle BXY, \angle XYD$ และ $\angle XYC$ เป็น
มุมฉากและเท่ากัน

$\therefore$ เมื่อพับรูปตามแนวเส้น XY เส้น XB จะทับ
 XA สนิท และจุด B จะทับจุด A สนิท และเส้น
 YC จะทับเส้น YD สนิท และจุด C จะทับจุด D สนิท
และ $\angle C = \angle D$

$\therefore$ ด้าน CB ทับด้าน DA สนิท

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยม $XBCY$ ก็ทับรูปสี่เหลี่ยม
 $XYDA$ สนิท

นั่นคือ XY เป็นเส้นซิมตริ

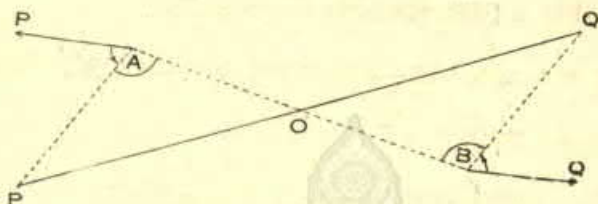
ช.ต.พ.

๓. AP, BQ เป็นไม้ ๒ อันซึ่งยาวเท่ากันหมุนได้
เร็วเท่ากัน (ไปในทางเดียวกันอย่างเข็มนาฬิกา) รอบ
จุด A และ B ซึ่งเกิดอนทไม่ได้ ถ้าไม้คู่นั้นนานกัน
อยู่แล้วแต่ปลายจะไปในทางตรงกันข้าม จงพิสูจน์ว่า

๑. มัธยมขนานกันอยู่เสมอ

๒. เส้นตรง ซึ่ง ตาก จาก P ถึง Q จะ ต้อง ผ่าน

จุด ๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้เสมอ



กำหนดให้ AP และ BQ เป็นไม่ตองอันซึ่ง ยาว เท่า กัน

หมุนได้เร็วเท่ากันและไปในทางเดียวกัน รอบจุด A และ

B ซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้ และ AP กับ BQ ขนานกัน ให้

AP' และ BQ' เป็นแนวที่ไม่ตองอันนั้นหมุนมาไม่ว่าเวลา

ใดตากเส้น P'Q'

จะต้องพิสูจน์ ๑. AP' ขนานกับ BQ'

๒. P'Q' ผ่านจุด ๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้เสมอ

สร้าง ตากเส้น AB ให้ตัด กับ P'Q' ที่จุด O

พิสูจน์ ๑. $\therefore AP$ ขนานกับ BQ และ AB พย

$$\therefore \angle PAB = \text{มุมแย้ง } ABQ \quad (\text{บ.พ. ๑๔})$$

เมื่อไม่ตั้งขนานกันได้เร็วเท่ากัน

$$\angle PAP' \text{ ก็จะต้องเท่ากับ } \angle QBQ'$$

$$\therefore \angle PAB - \angle PAP' = \angle ABQ - \angle QBQ'$$

$$\text{นั่นคือ } \angle P'AB = \angle Q'BA$$

แต่เป็นมุมแย้ง

$$\therefore AP' \text{ ขนานกับ } BQ' \quad (\text{บ.พ. ๑๓})$$

ท.ค.พ.

พิสูจน์ ๒. ใน $\triangle AP'O$ และ $\triangle BQ'O$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AP' = BQ' \\ \angle OAP' = \angle OBQ' \\ \angle AOP' = \angle BOQ' \end{cases} \quad (\text{บ.พ. ๓})$$

$$\therefore \triangle AP'O = \triangle BQ'O \text{ อกุฏปรการ } (\text{บ.พ. ๓๗})$$

$$\therefore OA = OB$$

$$\therefore O \text{ ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ } AB$$

ทั้ง A และ B ก็เกิดอนทไม่ได

∴ O ก็เป็นจุดเกิดอนทไม่ไดด้วย

นั่นก็คือ P O ผ่านจุด ๆ หนึ่งซึ่งเกิดอนทไม่ไดเต็มอ

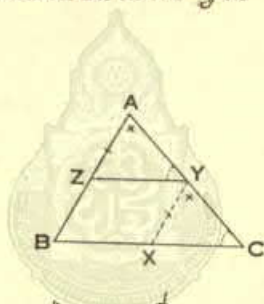
ช ต.พ.



แบบฝึกหัด

ว่าด้วยเส้นขนานและสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๑. เส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลาง ของ ด้าน หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมไปขนาน กับ ฐาน ย่อม แบ่ง ครึ่ง ด้านที่เหลือ



กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม รูป หนึ่ง มี Z เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ตากเส้น ZY ขนาน กับ ฐาน BC พบ AC ที่จุด Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $AY = YC$

สร้าง จากจุด Y ตากเส้น YX ขนาน กับ AB พบ BC ที่จุด X

พิสูจน์ $\therefore$ ZY ชนานกับ BX (กำหนดให้)

และ YX ชนานกับ ZB (สร้าง)

$\therefore$ ZYXB เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore$ YX = ZB (บ.พ. ๒๓)

แต่ ZB = AZ

$\therefore$ YX = AZ

ใน $\triangle AZY$ และ $\triangle YXC$

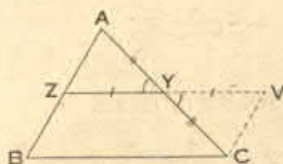
เพราะว่า $\begin{cases} AZ = YX \\ \text{มุมภายใน } ZAY = \text{มุมภายนอก } XYC \text{ (บ.พ. ๓๔)} \\ \text{มุมภายนอก } ZYA = \text{มุมภายใน } XCY \text{ (บ.พ. ๓๔)} \end{cases}$

$\therefore \triangle AZY = \triangle YXC$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore$ AY = YC

ช.ค.พ.

๒. เติ้นตรงซึ่งลากจากจุดกึ่งกลางของด้าน หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุด กึ่ง กลาง ของ อีก ด้าน หนึ่ง
ย่อมชนานกับด้านที่สาม



กำหนดให้ Z และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC ของรูป $\triangle ABC$ ตามเส้น ZY

จะต้องพิสูจน์ว่า ZY ขนานกับ BC

สร้าง ต่อ ZY ออกไปถึงจุด V ทำให้ $YV = ZY$ ตามเส้น VC

พิสูจน์ ใน $\triangle AZY$ และ $\triangle YVC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{ll} AY = YC & (\text{กำหนดให้}) \\ ZY = YV & (\text{สร้าง}) \\ \angle AZY = \angle YVC & (\text{บ.พ. ๓}) \end{array} \right.$

$\therefore \triangle AZY = \triangle YVC$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore AZ = VC$ แต่ $AZ = ZB$

และ $\angle AZY = \angle YVC$

แต่เป็นมุมแย้ง

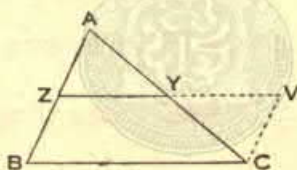
$\therefore VC = ZB$ และขนานกัน (บ.พ. ๑๓)

$\therefore ZV = BC$ และขนานกัน (บ.พ. ๒๐)

นั่นคือ ZY ขนานกับ BC

ช.ต.พ.

๓. เส้นตรงซึ่งลากจากจุดกึ่งกลางของด้าน หนึ่ง ไปยังจุดกึ่งกลางของอีกด้าน หนึ่ง ของ รูป สาม เหลี่ยม ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม



กำหนดให้ Z และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC

ของรูป $\triangle ABC$ ลากเส้น ZY

จะต้องพิสูจน์ว่า $ZY =$ ครึ่งหนึ่งของ BC

สร้าง ต่อ ZY ออกไป ถึงจุด V ทำให้ $YV = ZY$ ลาก
เส้น VC

พิสูจน์ ใน $\triangle AZY$ และ $\triangle YVC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{ll} AY=YC & (\text{กำหนดให้}) \\ ZY=YV & (\text{สร้าง}) \\ \angle AYZ=\angle VYC & (\text{บ.พ. ๓}) \end{array} \right.$

$\therefore \triangle AZY = \triangle YVC$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$\therefore AZ=VC$

และ $\angle AZY = \angle YVC$ แต่เป็นมุมแย้ง

แต่ $AZ=ZB$

$\therefore VC=ZB$ และขนานกัน (บ.พ. ๓๓)

$\therefore ZV=BC$ และขนานกัน (บ.พ. ๒๐)

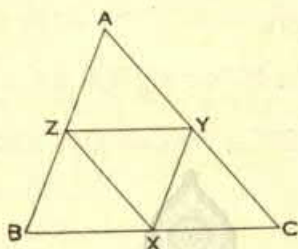
แต่ $ZY =$ ครึ่งหนึ่งของ ZV (สร้าง)

$\therefore ZY =$ ครึ่งหนึ่งของ BC

ช.ค.พ.

๔. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงสามเส้นซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของสามด้านของรูปสามเหลี่ยม ย่อมแบ่งรูป

ถ้าให้ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ
 ตากเส้น XY, YZ และ ZX
 จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle AZY, \triangle XYZ, \triangle ZBX$ และ $\triangle XYC$
 เท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ
 ตากเส้น XY, YZ และ ZX
จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle AZY, \triangle XYZ, \triangle ZBX$ และ $\triangle XYC$
 เท่ากันทุกประการ

พิสูจน์ $\because Z$ และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC

$$\therefore ZY \text{ ขนานกับ } BX \quad (\text{ข้อ ๒})$$

และ Y และ X เป็นจุดกึ่งกลางของ AC, BC

$$\therefore YX \text{ ขนานกับ } ZB \quad (\text{ข้อ ๒})$$

$\therefore ZYXB$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

มี ZX เป็นเส้นทแยงมุม

$\therefore \triangle BZX = \triangle ZYX$ ทุกประการ (บ.พ. ๒๓)

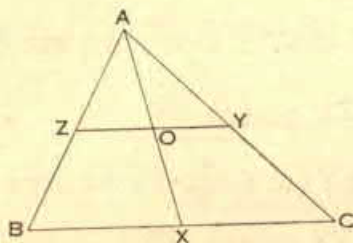
ในทำนองเดียวกัน $\triangle AZY = \triangle ZYX$ ทุกประการ

และ $\triangle CYX = \triangle ZYX$ ทุกประการ

นั่นก็คือ $\triangle AZY, \triangle XYZ, \triangle ZBX$ และ $\triangle YXC$ เท่ากันทุกประการ

ช.ต.พ.

๕. เส้นตรงซึ่งต่อจุดกึ่งกลาง ของ ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมย่อมแบ่งเส้นตรงที่ลากจากมุมยอดมายังฐานออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ Z, Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, AC ของ

รูป $\triangle ABC$ ตากเส้น ZY และจากจุด A ตากเส้นโต
เส้นหนึ่งพบฐาน BC ที่จุด X และตัด ZY ที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $AO=OX$

พิสูจน์ Z และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ AC

$\therefore ZY$ ขนานกับ BC (ข้อ ๒)

ใน $\triangle ABX$

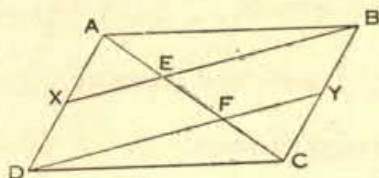
$\therefore Z$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

และ ZO ขนานกับ BX

$\therefore AO=OX$ (ข้อ ๓)

ช.ค.พ.

๖. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ
 X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD, BC จงพิสูจน์ว่า BX
และ DY แบ่งเส้นทแยงมุม AC ออกเป็นสามส่วน
เท่า ๆ กัน



กำหนดให้ X และ Y เป็นจุดกึ่งกลาง ของ ด้าน AD, BC
 ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ถ้า เส้น BX, DY ใ
 ตัดเส้นทแยงมุม AC ที่จุด E และ F

จะต้องพิสูจน์ว่า $AE = EF = FC$

พิสูจน์ $\because$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore AD = BC$ และขนานกัน (บ.พ. ๒๓)

$\therefore XD = BY$ และขนานกัน

$\therefore XB = DY$ และขนานกัน (บ.พ. ๒๐)

ใน $\triangle ADF$

$\therefore X$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AD

และ XE ขนานกับ DF

$$\therefore AE = EF$$

(ข้อ ๑)

ใน $\triangle CBE$

$\therefore Y$ เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

และ FY ขนานกับ EB

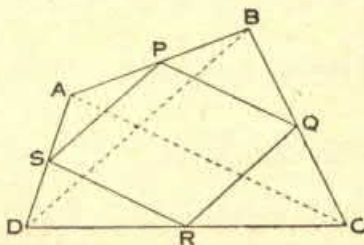
$$\therefore FC = EF$$

(ข้อ ๓)

นั่นคือ $AE = EF = FC$

ช.ต.พ.

๗. ถ้าเราลากเส้นตรงให้จุดกึ่งกลางของด้าน
ประชิดของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ให้ตัดต่อกัน รูปที่
เกิดขึ้นใหม่ย่อมเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $AB, BC,$

CD, DA ของสี่เหลี่ยมใด ๆ ABCD ตากเส้น PQ, QR, RS และ SP

จะต้องพิสูจน์ว่า PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

สร้าง ตากเส้นทะแยงมุม AC และ BD

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$

$\therefore P$ และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC

$\therefore PQ$ ขนานกับ AC (ข้อ ๒)

ใน $\triangle ADC$

$\therefore S$ และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ AD, DC

$\therefore SR$ ขนานกับ AC (ข้อ ๒)

แต่ PQ ขนานกับ AC

$\therefore PQ$ ขนานกับ SR (บ.พ. ๑๕)

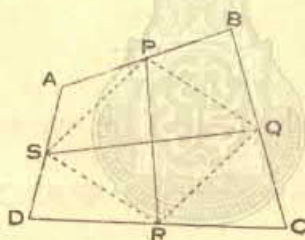
ในทำนองเดียวกัน PS และ QR ต่างก็ ขนานกับ BD

$\therefore PS$ กับ QR ก็ขนานกัน (บ.พ. ๑๕)

∴ PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ช.ค.พ.

๘. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงต่อเส้นซึ่งลากจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งไปยังจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ขอบแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



กำหนดให้ P,Q,R,S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB,BC, CD และ DA ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ABCD ลากเส้น PR และ SQ

จะต้องพิสูจน์ว่า PR และ SQ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

สร้าง ลากเส้น PQ,QR,RS และ SP

พิสูจน์ $\because$ P,Q,R,S, เป็นจุดกึ่งกลางของ AB,BC,CD,DA

$\therefore$ PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ข้อ ๗)

และ PR และ SQ เป็นเส้นทแยงมุม

$\therefore$ PR และ SQ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

(บทแทรก ๓ บ.พ. ๒๓)

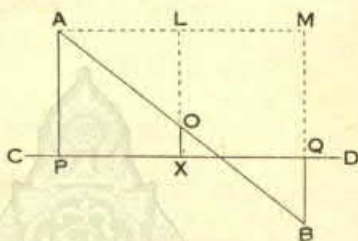
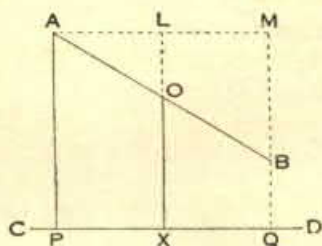
ช.ต.พ.

๘. จากจุด A และ B และ จาก จุด O กึ่งกลาง
ของ A และ B ตากเส้นตรงจาก AP,BQ,OX มา ขัง เส้น
ตรง CD

(ถ้า AP,BQ ยาว ๔.๒ ซม. จงหา ส่วน ยาว ของ OX
แล้วตอบด้วยวิธีอื่น)

จึงพิสูจน์ว่า $OX = \frac{1}{2} (AP+BQ)$ หรือ $\frac{1}{2} (AP-BQ)$

แต่ถ้า A กับ B จะอยู่ข้างเดียวกันหรือคนละข้าง ของ
เส้น CD



กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ตากเส้น AP, BQ
และ OX ตั้งฉากกับ CD ที่จุด P, Q และ X

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX = \frac{1}{2} (AP + BQ)$

หรือ $OX = \frac{1}{2} (AP - BQ)$

สร้าง ตากเส้น ALM ขนาน กับ CD พบ XO และ QB

ที่ตัดออกไปที่จุด L และ M

พิสูจน์ $\because AP, LX, MQ$ ต่างก็ตั้งฉากกับ CD

$\therefore AP, LX, MQ$ ชนานกัน

และ ALM ชนานกับ CD

$\therefore ALXP, LMQX$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\therefore AP = LX = MQ \quad (\text{ป.พ. ๒๑})$$

$$LX = \frac{1}{2} (AP + MQ)$$

ใน $\triangle AMB$

$\therefore O$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB (กำหนดให้)

และ LO ชนานกับ MB (พิสูจน์)

$\therefore L$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AM (ข้อ ๓)

$\therefore LO =$ ครึ่งหนึ่งของ MB (ข้อ ๓)

$$\text{แต่ } LX = \frac{1}{2} (AP + MQ)$$

$$\text{รูป ๑ } \underline{LO} + OX = \frac{1}{2} (AP + \underline{MB} + BQ)$$

$$\text{รูป ๒ } \underline{LO} + OX = \frac{1}{2} (AP + \underline{MB} - QB)$$

$$\therefore OX = \frac{1}{2} (AB + BQ) \text{ หรือ } \frac{1}{2} (AP - BQ)$$

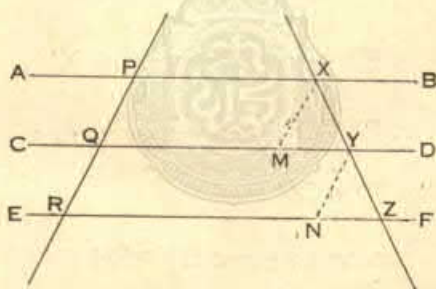
$$\therefore O = \frac{1}{2} (๔.๒. + ๔.๘)$$

$$\text{หรือ } \frac{1}{2} (๔.๘. - ๔.๒.)$$

= ๕ ข.ม. หรือ ๘ ข.ม.

ท.ท.พ.

๑๐. เมื่อเส้นขนานสามเส้น ตัด เส้น ตรง สอง เส้น ทำให้ส่วนของเส้นตรงที่ตัดของเส้นตรง นั้น เท่ากัน จงพิสูจน์ว่า ส่วนยาวของเส้น ขนาน เส้น กว้าง เท่า กับ ครึ่ง หนึ่งของเส้นขนานอีกสองเส้นรวมกัน



กำหนดให้ เส้นขนาน AB, CD, EF ตัดเส้นตรง PQR และ

XYZ ทำให้ส่วนของเส้นตรง PQ = QR และ XY = YZ

จะต้องพิสูจน์ว่า $QY = \frac{1}{2} (PX + RZ)$

สร้าง จากจุด X และ Y ตากเส้น XM, YN ขนานกับ

PQR พบ CD, EF ที่จุด M และ N

พิสูจน์ ใน $\triangle XYM$ และ $\triangle YZN$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} XY=YZ & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle MXY=\angle NYZ & (\text{บ.พ. ๓๔}) \\ \angle MYX=\angle NZY & (\text{บ.พ. ๓๔}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle XYM = \triangle YNZ \text{ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)}$$

$$\therefore MY = NZ$$

$$\therefore PX \text{ ขนาน } QM \text{ ขนานกับ } XM$$

$$\therefore PXMQ \text{ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน}$$

$$\therefore PX = QM$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } QY = RN$$

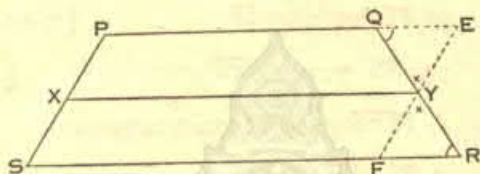
$$\therefore PX + RZ = QM + RN + NZ$$

$$PX + RZ = QM + QY + MY$$

$$PX + RZ = QY + QY = 2 QY$$

$$\therefore QY = \frac{1}{2} (PX + RZ)$$

๓๓. ด้านขนานคู่หนึ่งของ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู
ยาว a และ b เซนติเมตร จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งต่อ
จุดกึ่งกลางของด้านเอียงทั้งสองย่อม ขนานกับ ด้านขนาน
ของรูปนั้น และยาวเท่ากับ $\frac{a+b}{2}$ (เซนติเมตร)



กำหนดให้ PQRS เป็นด้าน ขนานของสี่เหลี่ยม คาง หมู
PQRS และยาวเท่ากับ a, b ซม. X และ Y เป็นจุด
กึ่งกลางของด้านเอียง PS และ QR ตากเส้น XY

จะต้องพิสูจน์ว่า ๑. XY ขนานกับ PQ และ SR

$$๒. XY = \frac{a+b}{2} \text{ ซม.}$$

สร้าง ตากเส้นผ่านจุด Y ให้ ขนาน กับ PS และ พบ PQ
และ SR ที่จุด E และ F

พิสูจน์ ๑. ใน $\triangle QYE$ และ YFR

เพราะฉะนั้น $\left\{ \begin{array}{ll} QY=YR & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle QYE=\angle FYR & (\text{บ.พ. ๓}) \\ \angle EQY=\text{มุมแย้ง} \angle YRF & (\text{บ.พ. ๓๔}) \end{array} \right.$
 $\therefore \triangle QYE = \triangle YFR$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)
 $\therefore EY=YF$ คือ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ EF
 แต่ PE ขนานกับ SF (กำหนดให้)
 และ PS ขนานกับ EF (สร้าง)
 $\therefore PEFS$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 $\therefore PS=EF$ และขนานกัน (บ.พ. ๒๖)
 แต่ X,Y เป็นจุดกึ่งกลางของ PS และ EF
 $\therefore PX=EY$ และขนานกัน
 $\therefore XY=PE$ และขนานกัน (บ.พ. ๒๐)
 แต่ PQ ขนานกับ SR
 $\therefore XY$ ขนานกับ PQ และ SR (บ.พ. ๓๕)

พิสูจน์ ๒. แต่ XY เป็นเส้นขนานเส้นกลาง ของ PQ,SR

และ $PQ=a$ และ $SR=b$

$\therefore XY = \frac{1}{2}(a+b)$ (ข้อ ๓๐)

พิสูจน์ $\therefore X$ เป็นจุดกึ่งกลางของ PS

$\therefore$ เมื่อลากเส้นขนานกับ PQ และผ่านจุด X ก็จะผ่านจุด Y กึ่งกลางของ QR ด้วย (บ.พ. ๒๒.)

$\therefore$ เส้น XY ก็ขนานกับ PQ

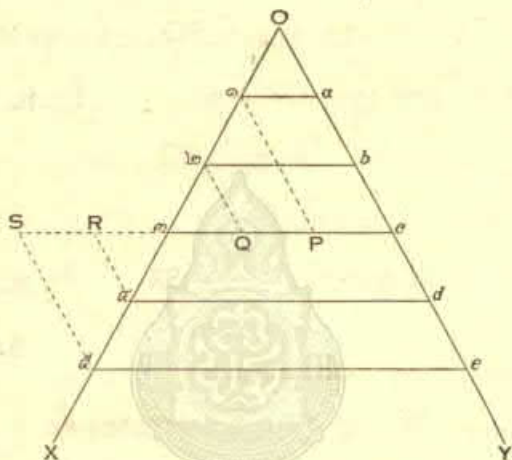
แต่ PQ ขนานกับ SR

$\therefore$ XY ขนานกับ PQ และ SR (บ.พ. ๓๕)

ท.ท.พ.

๓๒. OX และ OY เป็นเส้นตรงของเส้น ตาม
เส้น OX มีจุด ๑, ๒, ๓, ๔, ๕, อยู่ห่างเท่ากัน จาก
จุดเหล่านี้ลากเส้นขนาน ให้พบกับ OY จงวัดส่วน
ยาวของเส้นขนานเหล่านี้ แล้วคิดเฉลี่ย และเอา
ส่วนเฉลี่ยมาเปรียบเทียบกับส่วนยาวของเส้นขนาน อันที่
สาม จงพิสูจน์ โดยใช้อัตราว่า ส่วน ยาว ของเส้น
ขนานอันที่สามเท่ากับส่วนเฉลี่ย ของ ส่วน ยาว ของเส้น
ขนานทั้งห้าเส้น

จงอ้างให้เป็นบทพิสูจน์สำหรับ เส้นขนานที่มี
จำนวนคี่ $(2n + 1)$ เส้น



กำหนดให้ ๑, ๒, ๓, ๔, ๕. เป็นจุดอยู่ห่างเท่ากันบน
เส้น OX และ ๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e. เป็นเส้นขนานฉาก
มาพบกันกับ OY

จะต้องพิสูจน์ว่า $3c = \frac{1a + 2b + 3c + 4d + 5e}{5}$

สร้าง จากจุด ๓, ๒, ๔, ๕ ตากเส้น ๓P, ๒Q, ๔R, ๕S.
ขนานกับ OY พบกับ ๓c ที่จุด P, Q, R, และ S

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} \angle A = \angle D & (\text{กำหนดให้}) \\ \angle B = \angle E & (\text{บ.พ. ๓}) \\ \angle C = \angle F & (\text{บ.พ. ๑๔}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle DEF$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$$\therefore AB = DE$$

$$\therefore AC + CB = DE + EF = EF + FC + FC$$

$$= AC + CB + FC$$

$$= ๒ เท่า AC$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } DE + EF = ๒ เท่า AC$$

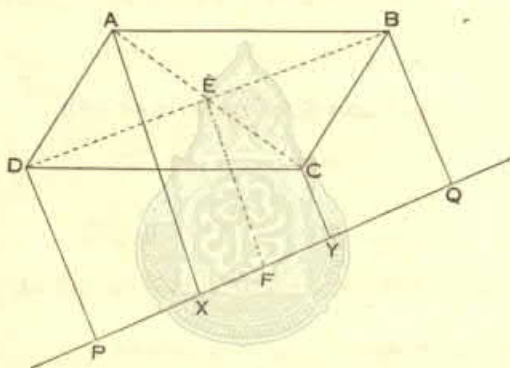
$$\therefore AC \text{ เส้นรวมกัน} = ๒ เท่า AC$$

$$\text{นั่นคือ } AC = \frac{AC + DE + EF + AC + AC}{๒}$$

ช.ค.พ.

ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีเส้นขนาน ๒ เส้น
เส้นที่ ๒ + ๓ เป็นเส้นที่มีส่วนยาวเท่ากับส่วนเฉลี่ย
ของส่วนยาวของทั้งหมด

๑๓. จากมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตากเส้น
ตั้งฉากมายังเส้นตรงเส้นหนึ่ง ภายนอก รูปสี่เหลี่ยม
จึงพิสูจน์ความผลบวกของเส้นตั้งฉากซึ่ง ตากจากมุมตรง
ข้ามคู่หนึ่งเท่ากับผลบวกของเส้นตั้งฉากออกคู่หนึ่ง



กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน AX, CY, DP
BQ เป็นเส้นตั้งฉาก ตากจากมุม A, C, D, B มายังเส้น
ตรง PQ

จะต้องพิสูจน์ว่า $AX + CY = DP + BQ$

สร้าง เส้นทะแยงมุม AC, BD และให้ตัดกันที่จุด E

พิสูจน์ ∴ เส้นทแยงมุม AC, BD ตัดกันที่จุด E

∴ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ BD (บ.ท.๒๓)
และ AX, CY, EF ต่างก็ตั้งฉากกับ PQ

∴ AX, CY, EF ขนานกัน

$$\therefore EF = \frac{1}{2} (AX + CY) \quad (\text{ข้อ ๘})$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } EF = \frac{1}{2} (DP + BQ) \quad (\text{ข้อ ๘})$$

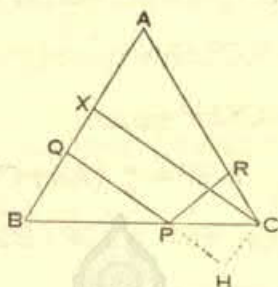
$$\therefore AX + CY = DP + BQ$$

ช.ต.พ.

๓๔. ผลบวกของเส้นตั้งฉาก ซึ่ง ตาก จาก จุดใด
จุดหนึ่งบนฐานของรูปสามเหลี่ยมมายังด้านที่เหลือทั้ง
สองด้าน ย่อมยาวเท่ากับเส้นตั้งฉากซึ่งตกจากปลาย
ใดปลายหนึ่งของฐานไปยังด้านตรงข้าม

(เมื่อเป็นเช่นนั้นผลบวกของระยะทางจากจุดใดจุด
หนึ่งบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปยังด้านตรงข้าม
ทั้งสองด้วยย่อมเท่ากันเสมอ)

ถ้าจุด P อยู่บนฐานซึ่งต่อออกไปผดวกกัน จะเป็น
อย่างไร



กำหนดให้ P เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนฐาน BC ของ $\triangle$
หน้า $\triangle ABC$ ตากเส้น PQ, PR ทั้งฉากกับ AB, AC
จาก C ตากเส้น CX ทั้งฉากกับ AB

จะต้องพิสูจน์ว่า $PQ + PR = CX$

สร้างเส้น CH ผ่านจุด C และขนานกับ AB พบ QP ที่
ต่อออกมาที่จุด H

พิสูจน์ $\because CX$ และ HQ ทั้งฉากกับ AB

$\therefore CX$ และ HQ ขนานกัน

และ CH ขนานกับ XQ

(สร้าง)

∴ CHQX เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\therefore XC = QH \quad (\text{บ.พ. ๒๑})$$

แต่เพราะว่า AB ขนานกับ CH

$$\angle ABC = \text{มุมแย้ง} PCH \quad (\text{บ.พ. ๓๔})$$

$$\text{แต่ } \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๕})$$

$$\therefore \angle PCH = \angle ACB$$

ใน $\triangle PRC$ และ $\triangle PHC$

$$\text{เพราะว่า } \left\{ \begin{array}{ll} \angle PRC = \angle PHC & (\text{มุมฉาก}) \\ \angle RCP = \angle PCH & (\text{พิสูจน์}) \\ PC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$$

$$\therefore \triangle PRC = \triangle PHC \text{ ทุกประการ} (\text{บ.พ. ๓๗})$$

$$\therefore PH = PR$$

$$\text{แต่ } XC = QH$$

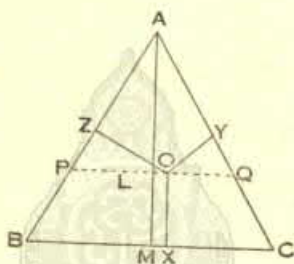
$$\therefore XC = QP + PH$$

$$\text{นั่นคือ } XC = QP + PR$$

ช.ค.พ.

ถ้าจุด P อยู่บนเส้น BC ที่ตัดออกไป $CX = PQ - QR$

๑๕. ผลบวกของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุดใดจุดหนึ่งภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปยังด้านทั้งสามย่อมเท่ากับเส้นตั้งฉากซึ่งลากจากมุมใดมุมหนึ่งไปยังด้านตรงข้าม และผลบวกนี้จะคงที่เสมอ



กำหนดให้ O เป็นจุดภายในรูป $\triangle$ ด้านเท่า ABC ลากเส้น OX, OY, OZ ตั้งฉากกับด้าน BC, CA และ AB จากจุด A ลากเส้น AM ตั้งฉากกับ BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX + OY + OZ = AM$ และคงที่เสมอ

สร้าง เส้น POQ ให้ผ่านจุด O และขนานกับ BC ตัด AM ที่จุด L, AB ที่ P และ AC ที่ Q

พิสูจน์ $\because PQ$ ขนานกับ BC

$$\therefore \angle APQ = \angle ABC \quad (\text{บ.พ. ๓๕})$$

$$\text{และ } \angle AQP = \angle ACB \quad (\text{บ.พ. ๓๕})$$

$\therefore \triangle APQ$ ก็เป็น $\triangle$ ด้านเท่าเหมือนกับ $\triangle ABC$

จากข้อ ๑๕ $OZ + OY =$ เส้นตรงฉากจาก Q

ไปยัง AP

แต่เราอาจพิสูจน์ได้ว่าเส้นตรงฉากนั้นเท่า กับ AL

โดยพิสูจน์ $\triangle$ ให้เท่ากันโดย บ.พ. ๑๗

$$\therefore OZ + OY = AL$$

แต่ OXML เป็นเส้นตรง

$$\therefore OX = LM$$

$$\therefore OX + OY + OZ = LM + AL$$

$$\therefore OX + OY + OZ = AM$$

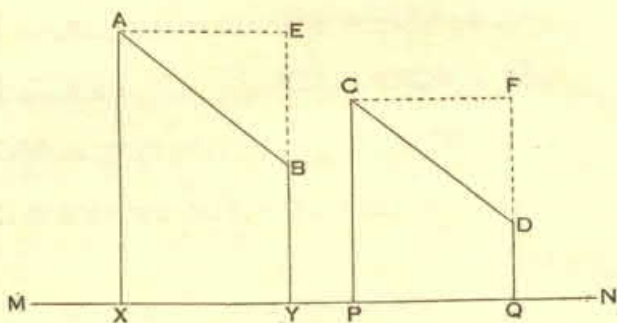
และ O ไม่ใช่จุดเฉพาะ

$$\therefore OX + OY + OZ \text{ ก็คงที่เสมอ}$$

ช.ท.พ.

๑๖. เส้นขนานที่เท่ากันย่อมมีโปรเจกชัน

(Projections) บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งเท่ากัน



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานที่เท่ากัน และ XY, PQ
เป็นโปรเจกชันบนเส้นตรง MN
จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = PQ$

สร้าง จากจุด A และ C ตากเส้น AE และ CF พบเส้น
 YB และ QD ที่จุด E และ F

พิสูจน์ $\therefore AX, EY$ ต่างก็ตั้งฉากกับ MN

$\therefore AX$ ขนานกับ EY

และ AE ขนานกับ XY

$\therefore AEYX$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore AE = XY$

(ป.พ. ๒๑)

ในทำนองเดียวกัน $CF = PQ$

$\therefore AE$ ชนานกับ CF (บ.พ. ๓๕)

ใน $\triangle AEB$ และ $\triangle CFD$

เพราะว่า BA, AE ชนานกับ DC และ CF

$$\left\{ \begin{array}{ll} \therefore \angle BAE = \angle DCF & (\text{ข้อ ๔ หน้า ๔๑}) \\ \angle AEB = \angle CFD & (\text{มุมฉาก}) \\ AB = CD & \end{array} \right.$$

$\therefore \triangle AEB = \triangle CFD$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๖)

$\therefore AE = CF$

แต่ $AE = XY$ และ $CF = PQ$

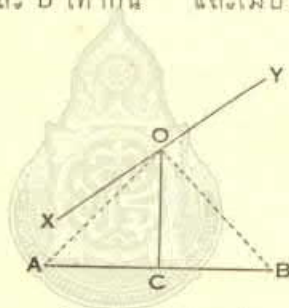
$\therefore XY = PQ$

ท.ท.พ.

แบบฝึกหัด

ว่าด้วยเส้นและมุม

๖. จงหาจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรง XY ให้อยู่ห่าง
จากจุด A และ B เท่ากัน และเมื่อไรจะหาไม่ได้



กำหนดให้ XY เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ A, B เป็น
จุดที่กำหนดให้สองจุด

จะต้องหา จุดบน เส้นตรง XY ให้มีระยะห่าง จาก
จุด A และ B เท่ากัน

สร้าง

ลากเส้น AB

แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C (บ.ศ. ๒)

จากจุด C ถากเส้น OC ตั้งฉากกับ AB (บ.ถ. ๓)

ให้พบ XY ที่จุด O

$\therefore O$ เป็นจุดกึ่งกลาง

พิสูจน์ ถากเส้น OA, OB

ใน $\triangle AOC$ และ $\triangle BOC$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AC = BC \\ OC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle ACO = \angle BCO \end{array} \right. \quad (\text{มุมฉาก})$

$\therefore \triangle ACO = \triangle BCO$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

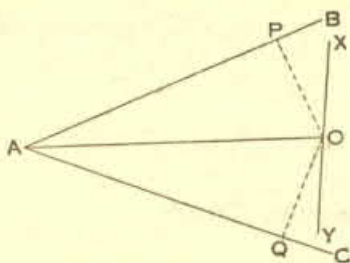
$\therefore OA = OB$ และ O อยู่บนเส้น XY

ช.ค.พ.

จะหาไม่ได้เมื่อ XY ขนานกับ OC คือเมื่อ

XY ตั้งฉากกับ AB

๗. จงหาจุดๆ หนึ่งบนเส้นตรง XY ให้มีระยะห่างจากเส้นตรง AB, AC ต้องเส้นซึ่งตัดกันเท่านั้น และเมื่อไรจะหาไม่ได้



กำหนดให้ XY เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ AB, AC เป็น
เส้นตรงที่ตัดกันสองเส้น

จะต้องหา จุดๆ หนึ่งบนเส้นตรง XY ให้มีระยะห่างจาก
เส้นตรง AB และ AC เท่ากัน

สร้าง แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ โดยเส้นตรง AO (บ.ศ. ๓)
และให้พบกับ XY ที่จุด O

$\therefore O$ เป็นจุดตัดของการ

พิสูจน์ จากจุด O ดึงเส้น OP, OQ ตั้งฉากกับ AB, AC
ใน $\triangle APO$ และ $\triangle AQO$

เพราะว่า $\begin{cases} AO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle PAO = \angle QAO & (\text{สร้าง}) \\ \angle APO = \angle OQA & (\text{มุมฉาก}) \end{cases}$

$\therefore \triangle APO = \triangle AQO$ ทุกประการ (บ.พ.ด.๗)

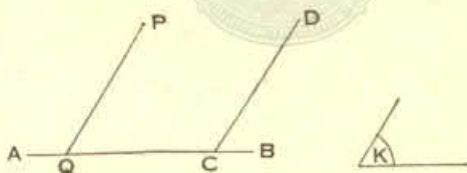
$\therefore PO = QO$

$\therefore O$ เป็นจุดบนเส้นตรง XY มีระยะห่างจาก A และ B เท่ากัน

จะหาไม่ได้เมื่อ AO กับ XY ขนานกัน

คือ XY ขนานกับเส้นแบ่งครึ่งมุม

๘. จากจุด P ที่กำหนดให้ จงลากเส้นตรง PQ ให้ทางมุมกับเส้นตรง AB โตเท่ากับมุมที่กำหนดให้



กำหนดให้ P เป็นจุดๆหนึ่ง AB เป็น เส้นตรงเส้น
หนึ่งและ K เป็นมุมๆหนึ่ง

จะต้องสร้าง เส้น PQ จากจุด P ทางมุมกับเส้น AB ให้

โตเท่ากับมุม K

สร้าง ให้ C เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนเส้น AB

สร้าง $\angle BCD = \angle K$ ที่กำหนดให้ (บ.ต. ๕)

จากจุด P ตากเส้น PQ ขนานกับ DC (บ.ต. ๖)

ให้ตัด AB ที่จุด Q

พิสูจน์ $\because$ PQ ขนานกับ CD และ AB ตัด

$\therefore$ มุมภายใน $\angle PQC =$ มุมภายนอก $\angle BCD$ (บ.พ. ๑๔)

แต่ $\angle BCD = \angle K$

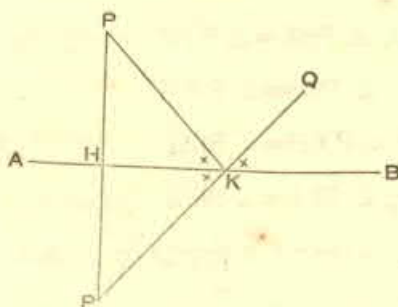
$\therefore \angle PQC = \angle K$

๙. จากจุด P และ Q ที่กำหนดให้สองจุดในข้าง

เดียวกันของเส้นตรง AB จงลากเส้นตรงสองเส้นให้

มาบรรจบกันใน AB และให้เส้นตรงทั้งสองนั้นทำมุม

กับเส้นตรง AB เท่ากัน



กำหนดให้ จุด P และ Q อยู่ในข้างเดียวกัน ของ เส้นตรง AB

จะต้องสร้าง เส้นตรงต่อเส้นให้มาบรรจบกันในเส้น AB และทางมุมกับเส้น AB เท่ากัน

สร้าง จากจุด P ตากเส้น PH ตั้งฉากกับ AB (บ.ส. ๔)

ต่อ PH ถึง P' ทำให้ $HP' = PH$

ตากเส้น P'Q ตัด AB ที่จุด K

ตากเส้น PK

$\therefore$ PK และ QK เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} PH = P'H \quad (\text{สร้าง}) \\ HK \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle PHK = \angle P'HK \quad (\text{มุมฉาก}) \end{array} \right.$

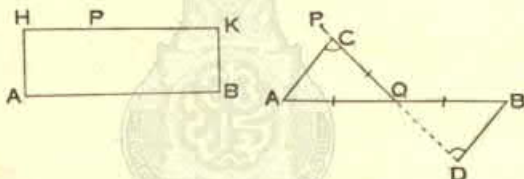
$\therefore \triangle PHK = \triangle P'HK$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

$$\angle PKH = \angle P'KH$$

แต่ $\angle P'KH = \angle BKQ$ (บ.พ. ๓)

$$\therefore \angle PKA = \angle BKQ$$

๓๐. จากจุด P ที่กำหนดให้ จงลากเส้นตรง
เส้นหนึ่งซึ่งเมื่อลากเส้น ดังนาก จากจุด A และ B มายัง
เส้นนั้นจะยาวเท่ากัน และจะสร้างได้เสมอไปหรือไม่



กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง และ A, B เป็นจุดอีก
สองจุด

จะต้องสร้าง เส้นตรงผ่านจุด P ซึ่งเมื่อ ลากเส้น ดัง
นากจากจุด A และ B มายังเส้นตรงเส้นนั้นจะยาวเท่ากัน

สร้าง ๑. ลากเส้น HPK ขนานกับ AB (บ.ส. ๖)

$\therefore HPK$ เป็นเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ ลากเส้น AH, BK ดังนากับ HPK

$\therefore AH, BK$ ก็ขนานกันด้วย

$\therefore HKBA$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore AH=BK$ (บ.พ. ๒๓)

สร้าง ๒. แบ่งครึ่ง AB ที่จุด Q (บ.ส. ๒)

ลากเส้น PQ

$\therefore PQ$ เป็นเส้นที่ตัดกลาง

พิสูจน์ ลากเส้น AC, BD ตัดฉากกับ PQ

ใน $\triangle ACQ$ และ $\triangle BDQ$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} AQ=BQ \quad (\text{สร้าง}) \\ \angle AQC=\angle BQD \quad (\text{บ.พ. ๓}) \\ \angle ACQ=\angle BDQ \quad (\text{มุมฉาก}) \end{array} \right.$

$\therefore \triangle ACQ=\triangle BDQ$ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore AC=BD$

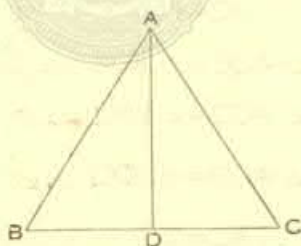
สร้างไม่ได้เสมอไป ถ้าจุด P, A, B อยู่ในเส้น

ตรงอันเดียวกันแล้วจะสร้างไม่ได้

ว่าด้วยการสร้างรูป สามเหลี่ยม



จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วบน ด้านฐานยาว ๔
ซ.ม. สูง ๖.๒ ซ.ม. และพิสูจน์ว่ารูปนี้มีด้านเท่ากัน
สองด้าน และวัดดูว่ายาวกี่ ซ.ม. (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง)



กำหนดให้ ฐานของรูปสามเหลี่ยมยาว ๔ ซ.ม. และ
สูง ๖.๒ ซ.ม.

จะต้องสร้าง $\triangle$ หน้าจั่วให้ฐาน = ๔ ซ.ม. และสูง

๖.๒ ซม.

สร้าง BC ให้ยาว = ๔ ซม. แบ่งครึ่ง BC ที่จุด D
 ที่จุด D เชื่อมเส้น AD ตั้งฉากกับ BC (บ.ส. ๓)
 วัด AD ให้ยาว = ๖.๒ ซม.

ลากเส้น AB, AC

∴ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วที่ต้องการ

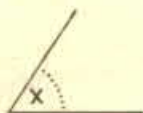
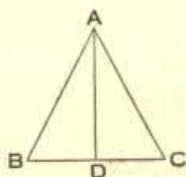
พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

เพราะว่า $\left\{ \begin{array}{l} BD=DC \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle ADB = \angle ADC \end{array} \right. \quad (\text{มุมฉาก})$

∴ $\triangle ABD = \triangle ACD$ ทุกประการ (บ.พ. ๔)

∴ $AB=AC$

ข้อ ๓๓. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้มุม
 ยอดเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉากจากมุม
 ยอดถึงฐานยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้



กำหนดให้ มุมยอดของรูป $\triangle = \angle X$ และ p เป็นส่วน

ตั้ง

จะต้องสร้าง $\triangle$ หน้าจั่วให้มีมุมยอด $= \angle X$ และ

ตั้ง $= p$

สร้าง เส้น AD ให้ยาว $= p$ ที่กำหนดให้

ที่จุด A สร้าง $\angle BAD, \angle DAC$ ให้ $\text{โค} = \frac{\angle X}{2}$

(บ.ส. ๓๕,)

ที่จุด D สร้างเส้น BC ตั้งฉากกับ AD (บ.ส. ๓)

ให้พบ AB, AC ที่จุด B และ C

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

เพราะว่า $\begin{cases} \angle BAD = \angle CAD \\ \angle ADB = \angle ADC \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases} \quad (\text{มุมฉาก})$

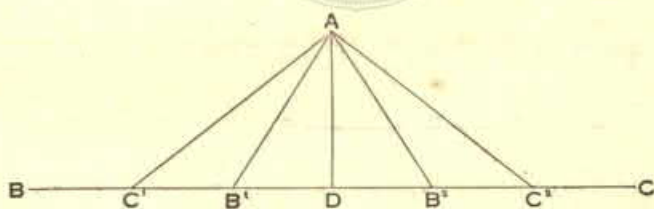
$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$ ทุกประการ (บ.พ. ๓๗)

$\therefore AB = AC$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วที่มี $\angle A = \angle X$
ที่กำหนดให้

และมี $AB = AC = p$ ที่กำหนดให้

๓๒. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้เส้นตั้ง
ฉากจากจุด A ถึงฐาน BC ยาว ๕ ซม. และด้าน AB, AC
ยาว ๕.๘ ซม. และ ๘ ซม. และวัดด้าน BC



กำหนดให้ เส้นตั้งฉาก = ๕ ซม.

$AB = ๕.๘$ ซม. $AC = ๘$ ซม.

จะต้องสร้าง $\triangle$ ให้มีเส้นตั้งฉาก = ๕ ซม.

$AB = ๕.๗$ ซม. $AC = ๘$ ซม.

สร้าง เส้น AD ให้ยาว ๕ ซม.

ลากเส้น BDC ให้ตั้งฉากกับ AD ที่จุด D (บ.ต. ๓)

ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางวงรีที่มี ๕.๗ ซม.

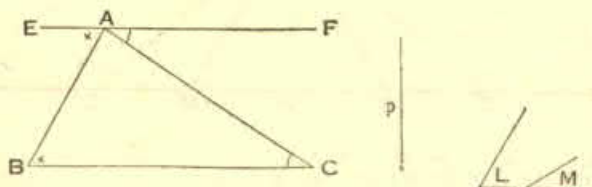
เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่จุด B^1 และ B^2

ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางวงรีที่มี ๘ ซม.

เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่จุด C^1 และ C^2

$\therefore ABC, ABC^1, ABC^2$ และ ABC^3 เป็น Δ ที่ต้องการ

๓๓. จงสร้างรูป ΔABC ให้มุม B และ C เท่ากับมุม L และ M ที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉากจากมุม A ถึง BC ยาวเท่ากับ P ที่กำหนดให้



กำหนดให้ P เป็นส่วนของรูป Δ

และ $\angle L$ และ $\angle M$ อีกสองมุม

จะต้องสร้าง รูป $\triangle$ ให้มีด้านสูง $=P$

และ $\angle B = \angle L$ และ $\angle C = \angle M$

สร้าง เส้นขนาน EF และ BC ให้ห่างกัน $=P$

จากจุด A จุดใดจุดหนึ่งบนเส้น EF

สร้าง $\angle EAB = \angle L$ และ $\angle FAC = \angle M$

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore EAF$ ขนานกับ BC และ AB พบ

$\therefore \angle EAB =$ มุมแย้ง $\angle ABC$ (บ.พ. ๓๔)

และ EAF ขนานกับ BC และ AC พบ

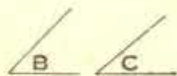
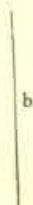
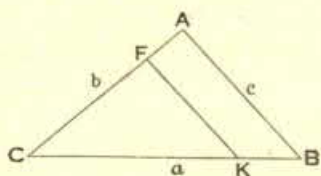
$\therefore \angle FAC =$ มุมแย้ง $\angle ACB$ (บ.พ. ๓๔)

แต่ $\angle EAB = \angle L$ และ $\angle FAC = \angle M$

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการมี $\angle B = \angle L$ และ $\angle C = \angle M$

และสูง $=P$ ที่กำหนดให้

๑๕. จงสร้างรูป สามเหลี่ยม ABC กำหนดมุม B และ C และด้าน b ให้ (โดยไม่ใช้ โปรแทรกเตอร์)



กำหนดให้ $\angle B, \angle C$ และด้าน b

จะต้องสร้าง $\triangle ABC$

สร้าง เส้น AC ให้ยาวเท่ากับ b

สร้าง $\angle ACB$ ที่จุด C ให้เท่ากับ $\angle C$ (บ.ต. ๕)

ที่จุด K จุดใดจุดหนึ่งบนเส้น AB

สร้าง $\angle CKF$ ให้เท่ากับ $\angle B$ (บ.ต. ๕)

จากจุด A ตากเส้น AB ขนานกับ FK (บ.ต. ๖)

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because AB$ ขนานกับ FK และ CB พบบ

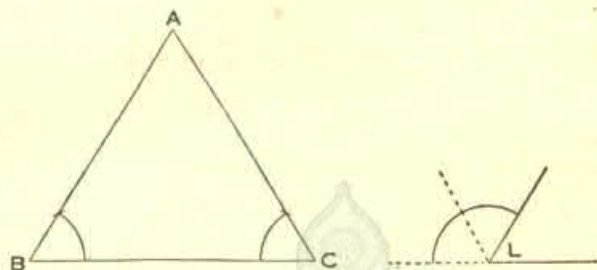
$\therefore$ มุมภายใน $ABC =$ มุมภายนอก FKC

แต่ $\angle FKC = \angle C$

$\therefore \angle ACB = \angle C$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๓๕. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่วบนฐานที่กำหนดให้ และมีมุมยอดเท่ากับมุม L ที่กำหนดให้



กำหนดให้ ฐาน BC และ $\angle L$

จะต้องสร้าง $\triangle$ หน้าจั่วบนฐาน BC และมีมุมยอด $= \angle L$

สร้าง แบ่งครึ่งมุมประกอบของมุมฉากของ $\angle L$

ที่จุด B และ C สร้าง $\angle B, \angle C =$ ครึ่งหนึ่งของมุมประกอบของมุมฉากของ $\angle L$ และให้ตัดกันที่จุด A

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

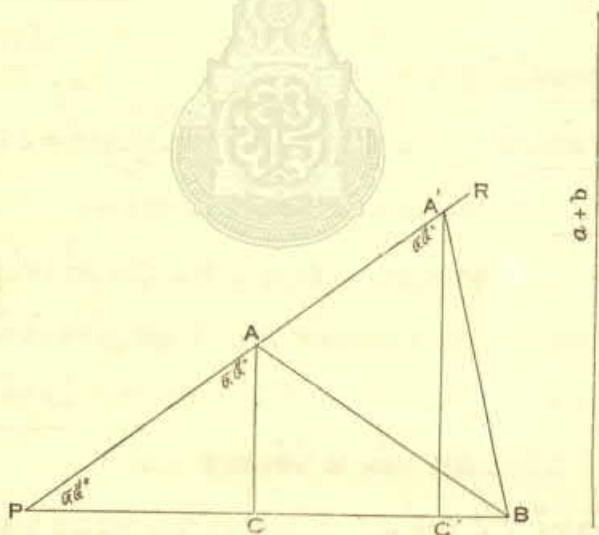
พิสูจน์ $\because \angle B + \angle C =$ มุมประกอบของมุมฉากของ $\angle L$

และ $\angle A$ ก็เป็นมุม ประกอบ ของ มุมฉากของ $\angle B$ และ $\angle C$

$$\therefore \angle A = \angle L$$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ ทดของการ

๑๖. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนด
ด้านกระแจะ c และผลบวกของด้าน a, b ที่เหลือให้



กำหนดให้ ผลบวกของด้าน a และ b และด้านกระแจะ c

จะต้องสร้าง $\triangle$ มุมฉาก ABC

สร้าง เส้น PB ให้ยาวเท่ากับ $a+b$

ที่จุด P สร้าง $\angle BPR = 45^\circ$

ให้ B เป็นจุดศูนย์กลางวงรีที่มี $= C$

เขียนส่วนโค้งตัด PR ที่ A และ A'

จาก A และ A' ตากเส้น AC และ A'C' ตั้งฉากกับ PB

$\therefore \triangle ACB, \triangle A'C'B$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \angle APC = 45^\circ$ และ $\angle C$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle PAC = 45^\circ \quad (\text{บ.พ. ๓๖})$$

$$\therefore AC = PC \quad (\text{บ.พ. ๖})$$

$$\text{แต่ } PC + CB = a + b$$

$$\therefore AC + CB = a + b$$

$\therefore \triangle ACB$ เป็น $\triangle$ มุมฉากที่ต้องการ

และในทำนองเดียวกันสำหรับ $\triangle A'C'B$

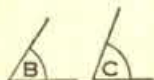
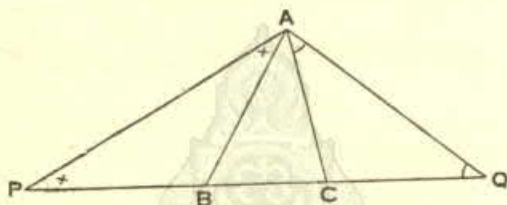
หมายเหตุถ้าด้าน C ยาวกว่าด้านตั้งฉาก จาก B ถึง PR

จะสร้าง $\triangle$ ได้สองรูป

แต่ถ้าเท่ากันจะสร้างได้รูปเดียว

แต่ถ้าสั้นกว่าจะสร้างไม่ได้

๑๗. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดผล
บวกของด้านรอบนอก และมุมทั้งสองที่ฐานให้ เช่น
 $a+b+c = ๓๒$ ซม. $\angle B = ๗๐^{\circ}$ $\angle C = ๘๐^{\circ}$



กำหนดให้ $\angle B$, $\angle C$ และ ผลบวกของด้าน a, b และ $c = PQ$

จะต้องสร้าง $\triangle ABC$

สร้าง ที่จุด P สร้าง $\angle QPA = \frac{\angle B}{๒}$

ที่จุด Q สร้าง $\angle PQA = \frac{\angle C}{๒}$

ที่จุด A ตากเส้น AB ให้ $\angle PAB = \angle APB$

และตากเส้น AC ให้ $\angle QAC = \angle AQC$

$\therefore$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์

$\because \angle PAB = \angle APB$

$\therefore AB = PB$

และ $\angle QAC = \angle AQC$

$\therefore AC = CQ$

แต่ $PB + BC + CQ = a + b + c$

$\therefore AB + BC + AC = a + b + c$

$\because \angle ABC = \angle PAB + \angle APB$ (ป.พ. ๑๖)

แต่ $\angle APB + \angle PAB = \angle B$

$\therefore \angle ABC = \angle B$

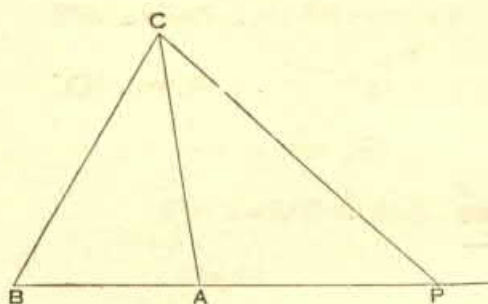
ใน ทำนองเดียวกัน $\angle ACB = \angle C$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๗. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้มีด้าน

$a = ๒.๕$ ซม. $b + c = ๓.๐$ ซม. $\angle B = ๖๐^\circ$ จงวัด

ด้าน b และ c



กำหนดให้ $b+c = ๓๐$ ซม. $a = ๖.๕$ ซม.

$$\angle B = ๖๐^{\circ}$$

จะต้องสร้าง $\triangle ABC$

สร้าง $\angle PBC = ๖๐^{\circ}$ ตัด $BC = a = ๖.๕$ ซม.

ตัด $BP = b+c = ๓๐$ ซม.

จากจุด C ตากเส้น CA ทำให้ $\angle PCA = \angle CPB$

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \angle ACP = \angle APC$

$\therefore AC = AP$

แต่ $AP + AB = b+c = ๓๐$ ซม.

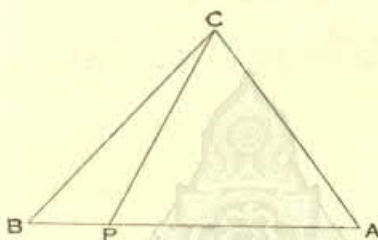
$\therefore AB + AC = b+c = ๓๐$ ซม.

ให้นักเรียน ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๓๘. จงสร้างรูปตามเหลี่ยม ABC ให้มี

$a = ๗$ ซม. $c-b = ๓$ ซม. และ $\angle B = ๕๕^\circ$

จงวัดด้าน b และ c



กำหนดให้ $a = ๗$ ซม. $a-b = ๓$ ซม. และ $\angle B = ๕๕^\circ$

จะต้องสร้าง $\triangle ABC$

สร้าง $\angle PBC = \angle B = ๕๕^\circ$

ตัด BC ให้เท่ากับ $a = ๗$ ซม.

ตัด BP ให้เท่ากับ $c-b = ๓$ ซม.

ลากเส้น PC

ที่จุด C ลากเส้น CA ทำให้ $\angle ACP = \angle CPA$

ให้ตัดกับ BP ที่ตัดออกไปที่จุด A

∴ ABC เป็น $\triangle$ ทดลองการ

พิสูจน์

$$\therefore \angle APC = \angle ACP$$

$$\therefore AC = AP$$

$$\text{แต่ } AB - AP = c - b = \text{ค}$$

$$\therefore AB - AC = c - b = \text{ค}$$

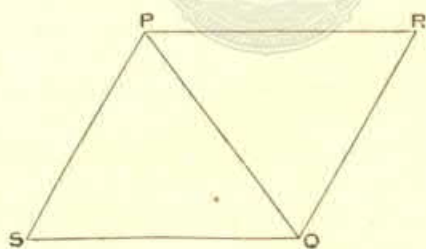
นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ ทดลองการ



ว่าด้วยการสร้าง รูปสี่เหลี่ยม

๑. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า
ให้มีด้านยาวเท่ากับ PQ ที่กำหนดให้ และให้เส้น
ทแยงมุมเส้นหนึ่งยาวเท่ากันด้วย

จงหา (โดยไม่วัด) ด้วยจั่วมุม ๆ หนึ่งทางก็
ดีกว่า ข้างเหตุผลด้วย



กำหนดให้ เส้นตรง PQ

จะต้องสร้าง รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าซึ่งมีด้าน
ยาวเท่ากับ PQ และให้เส้นทแยงมุม $= PQ$

สร้าง รูป $\triangle$ ด้านเท่า ๒ รูปบนฐาน PQ (ป.ด. ๘)

$\therefore$ PQRS เป็น สี่เหลี่ยม ขนมหยาบๆ ด้านเท่า

๒

พิสูจน์ $\therefore$ PSQ, PRQ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

$\therefore$ ด้านทุกด้านเท่ากันหมดและเท่ากับ PQ ด้วย

และมุมทุกมุมของ $\triangle$ ทั้งสองเท่ากันหมด

คือต่างเท่ากับ 60°

$\therefore \angle PSQ, \angle PRQ$ ต่างก็เท่ากับ 60°

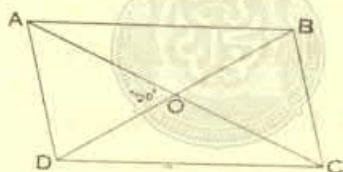
และ $\angle SPR, \angle SQR$ ต่างก็เท่ากับ 120°

๒. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปหนึ่งให้มี ด้านยาว ๒.๕ นิ้ว และพิสูจน์ ให้เห็นว่า เส้นทแยงมุมทั้งสองยาวเท่ากัน เมื่อวัด เส้น ทแยง มุม คู่ นี้ แล้ว (ทศนิยม ๒ ตำแหน่ง) ให้ สอดคล้องว่า รูป ที่เขียนถูกต้อง หรือ (ดูหน้า ๓๘ ข้อ ๓)

๕. รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง มี เส้น ทแยงมุม เท่ากัน (ยาวเส้นละ ๖.๐ ซม.) และเส้นทแยงมุมคู่นี้แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันทางมุมๆ หนึ่งเท่ากับ 60°

จงแสดงให้เห็นว่ามี สิ่ง ที่ กำหนดให้ ๕ ประการ
พร้อมแล้ว

จงสร้าง รูป สี่เหลี่ยม น และ บอก ชื่อว่า เป็น
สี่เหลี่ยมชนิดไหน และ พิสูจน์ มา ด้วย วัต หา ผลบวก
ของด้านรอบนอก ถ้าแม่ความระหว่างเส้นทแยงมุม
เพิ่มจนจนถึง 90° ผลบวกของด้านรอบนอก จะเพิ่ม
ขึ้น ร้อยละเท่าไร ?



สิ่งที่กำหนดให้ ๕ อย่าง คือ ส่วนทั้งสี่ของเส้น
ทแยงมุม และมุมที่เส้นทแยงมุมตัดกัน

กำหนดให้ $\angle AOC, \angle BOD$ เป็นเส้นทแยงมุม และ แบ่งครึ่ง
ซึ่งกันและกันที่จุด O และ $\angle AOD = 60^\circ$

จะต้องหาว่า $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมชนิดไหน

พิสูจน์ ใน $\triangle AOB$ และ $\triangle DOC$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AO = OC \\ BO = OD \\ \angle AOB = \angle DOC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB = \triangle DOC \text{ ทุกประการ (บ.พ. ๕)}$$

$$\therefore AB = DC$$

$$\text{และ } \angle BAO = \angle OCD$$

แต่เป็นมุมแย้ง

$$\therefore AB = DC \text{ และขนานกัน (บ.พ. ๑๓)}$$

$$\therefore AD = BC \text{ และขนานกัน (บ.พ. ๒๐)}$$

นํนคคย ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๖. ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD ถ้า $AB = ๕.๖$ ซม.

$$BC = ๒.๕ \text{ ซม. } CD = ๔.๐ \text{ ซม. } DA = ๓.๓ \text{ ซม.}$$

จงแสดงให้เห็นว่า สี่เหลี่ยมนี้ไม่เป็นรูป

แน่นอน

สร้างรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เมื่อ $\angle A = ๓๐^\circ$

๒. $\angle A = 60^\circ$ ถ้า $\angle A = 300^\circ$ ทำให้จ้งสร้างไม่ได้

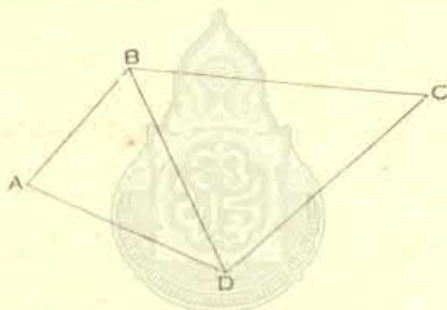
ให้หาจากวิธีสร้างว่า $\angle A$ จะต้องเป็นมุมอย่างน้อยที่สุดกตกกรจึงจะทำให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมไม่ได้

ดังที่กำหนดให้มุมแค่เพียง ๔ อย่างเท่านั้น ยังไม่พอต้องการ ถ้าเราสร้างอย่างบทสร้างที่ ๓๓ โดยสมมุติให้ $\angle A$ มีขนาดต่าง ๆ กัน รูปสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นก็ต่าง ๆ กัน ฉะนั้นเราจะไม่ได้รูปที่แน่นอน

ถ้ามุม $A = 300^\circ$ จะสร้างไม่ได้ เพราะส่วนของ BD จะยาวกว่า ๖.๕ ซม. คือยาวกว่า $BC + CD$ เมื่อเราเอา D และ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี = ๔.๐ และ ๒.๕ วงกลมจะไม่ตัดกัน

ถ้า $BD = 6.5$ วงกลมจะพบกันที่จุด C บนเส้น BD ถ้า BD ยาวกว่า ๖.๕ ซม. แล้วแม้แต่เล็กน้อยก็สร้างไม่ได้ เมื่อ BD สั้นที่สุดรูปสี่เหลี่ยมจะกลายเป็นรูปสามเหลี่ยม BAD ซึ่งมี $AD = 3.3$ ซม. $AB = 5.6$ ซม. $DB = 6.5$ จากทฤษฎี $\angle A = 90^\circ$

๗. กำหนดให้ ด้าน AB, BC, CD, DA และเส้นทแยงมุม BD หนึ่ง
 จงแสดงวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ ดังที่
 กำหนดให้จะต้องมี ลักษณะ อย่างไร เรา จึง จะ สร้าง ได้
 เสมอ



กำหนดให้ ด้าน AB, BC, CD, DA และเส้นทแยงมุม BD
จะต้องสร้าง รูปสี่เหลี่ยม

สร้าง บนเส้นทแยงมุม BD สร้าง $\triangle ABD$ (บ.ส. ๗)
 ให้ มีด้านเท่ากับ AB และ AD ที่กำหนดให้
 และอีกข้างหนึ่งสร้าง $\triangle BDC$ (บ.ส. ๘)

ให้ มีด้านเท่ากับ BC, และ CD, ที่ กำหนดให้

∴ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สิ่งที่กำหนดให้จะต้องมีลักษณะดังนี้ คือ

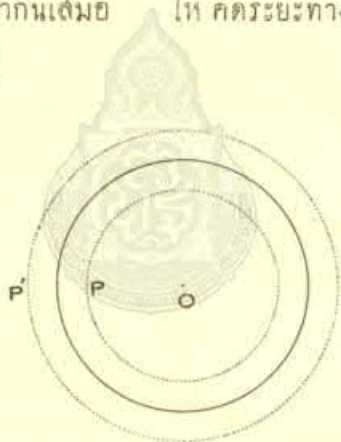
BD ต้องสั้นกว่า $AB + AD$ และ $BC + CD$

และ BD ต้องยาวกว่า $AB - AD$ และ $BC - CD$



ว่าด้วยโลไซ

๓. จงหาโลกัสของจุด ๆ หนึ่งซึ่ง เมื่อเคลื่อนที่
ไปแล้วจะต้องมีระยะ ห่างจาก เส้น รอบวงของ วงกลม ที่
กำหนดให้เท่ากันเสมอ ให้ คิดระยะทางโดยวัดด้วย
ยาวของรัศมี



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

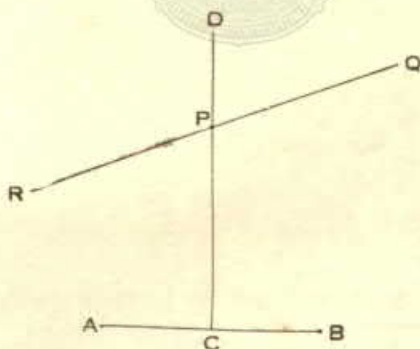
จะต้อหาโลกัส ของจุด P ซึ่ง มีระยะ ห่างจากเส้นรอบ
วงเท่ากันเสมอ

โลกัสของจุด P ซึ่งมีระยะห่างจากเส้นรอบวง

เท่ากันเสมอ ก็ต้องเป็นเส้นขนาน กับเส้นรอบวงนั้น
ก็ต้องเป็นเส้นรอบวงด้วย

∴ โดกัศของจุดซึ่งมี ระยะห่าง จาก เส้นรอบวง
ของวงกลมที่กำหนดให้เท่ากันจะต้องเป็นวงกลม ซึ่ง
มีรัศมีเท่ากับผลบวก หรือ ผลต่างของ รัศมีของวงกลม
ที่กำหนดให้กับระยะทางที่กำหนดให้

๒. จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง RQ จงหาที่
ตั้งของจุด P ในเมื่อจุด P อยู่ห่างจากจุด A และ B
ที่กำหนดให้เท่ากัน



กำหนดให้ จุด A และจุด B และ จุด P เคลื่อนที่ไป

ตามเส้นตรง RQ

จะต้องหา ทิศของจุด P ในเส้น RQ ซึ่งมีระยะห่างจาก A และ B เท่ากัน

สร้าง ตากเส้น AB แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C (บ.ต.๒)

ที่จุด C ตากเส้น CD ตั้งฉากกับ AB

ให้ตัดกับ RQ ที่จุด P

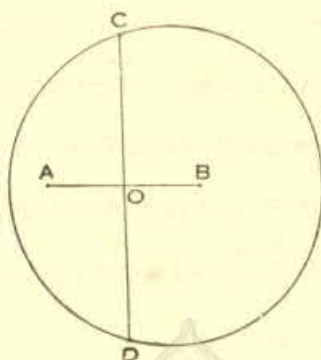
∴ P เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ DC เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

∴ ทุก ๆ จุดบนเส้น DC มีระยะห่างจาก A และ B เท่ากัน (บ.ต.๑๔)

∴ จุด P ซึ่งอยู่บนเส้น RQ และ DC ก็มีระยะห่างจากจุด A และ B เท่ากัน

๓. A และ B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้ ภายในวงกลม จงหาจุดบนเส้นรอบวง ซึ่งมีระยะห่างจากจุดทั้งสองนั้นเท่ากัน และมีจุด?



กำหนดให้ A และ B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้ภายในวงกลม

จะต้องหา จุดบนเส้นรอบวง ซึ่งอยู่ห่างจาก A และ B เท่ากัน

สร้าง ตากเส้น AB แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O (บ.ถ.๒)

ที่จุด O ตากเส้น CD ตั้งฉากกับ AB

ให้ตัดเส้นรอบวงที่จุด C และ D

$\therefore$ C และ D เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ CD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

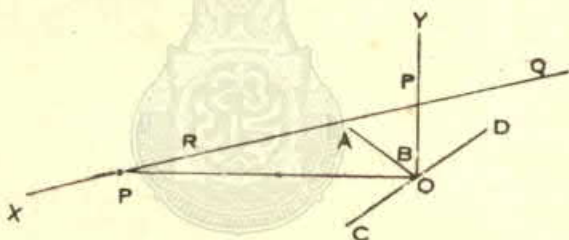
$\therefore$ ทุกๆ จุดบนเส้น CD อยู่ห่างจากจุด A

และ B เท่ากัน

(บ.ศ. ๓๔)

∴ จุด C และ D ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงและ
เส้น CD อยู่ห่างจาก A และ B เท่ากัน

๔. จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง RQ จงหา
ที่ตั้งของจุด P ซึ่งมีระยะห่างจากเส้นตรง AB, CD ที่
กำหนดให้เท่ากัน



กำหนดให้ จุด P เคลื่อนที่ตามเส้นตรง RQ

AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้น

จะต้องหา ที่ตั้งของจุด P ซึ่งมีระยะห่างจากเส้นตรง
AB และ CD เท่ากัน

สร้าง ต่อเส้น AB ให้พบกับ CD ที่จุด O แบ่งครึ่ง
 $\angle AOC$ และ $\angle AOD$ ด้วยเส้น OX, OY ให้ตัดกับ

RQ ที่จุด P และ P'

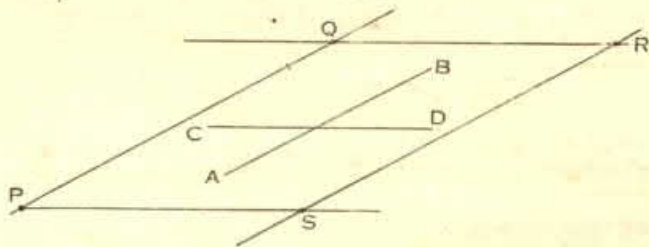
$\therefore P$ และ P' เป็นจุดที่ตัดกัน

พิสูจน์ $\because OX$ และ OY แบ่งครึ่ง $\angle AOC, \angle AOD$

$\therefore$ ทุกๆ จุด บนเส้น OX และ OY มีระยะ
ห่างจากเส้นตรง AB และ CD เท่ากัน (บ.ส. ๓๕)

$\therefore$ จุด P และ P' มีระยะห่างจากเส้นตรง AB
และ CD เท่ากัน

๖. AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้น จงหา
จุดซึ่งอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม. และ CD ๔ ซม. และ
บอกจุด



กำหนดให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้น

จะต้องหา จุดซึ่งอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม. และจาก CD

๔ ซม.

สร้าง เส้นตรง PQ และ SR ขนานกับ AB

และอยู่ห่างจาก AB เส้นละ ๓ ซม.

เส้นตรง QR และ PS ขนานกับ CD

และอยู่ห่างจาก CD เส้นละ ๔ ซม.

ให้เส้นทั้ง ๔ ตัดกันที่จุด P, Q, R และ S

∴ P, Q, R, S, เป็นจุดที่ตัดกัน

พิสูจน์ โลกัศของจุดซึ่งมีระยะห่างจากเส้นตรง AB

๓ ซม. จะต้องเป็นเส้นตรงขนานกับ AB

และอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม. (ตัวอย่างที่ ๒ หน้า ๘๐)

และโลกัศของจุดซึ่งมีระยะห่างจากเส้นตรง

CD ๔ ซม. จะต้องเป็นเส้นตรงขนานกับ CD

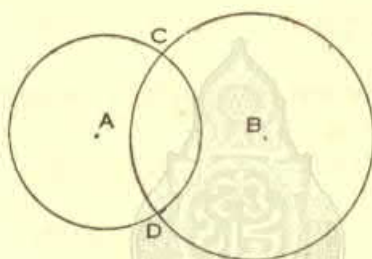
และอยู่ห่างจาก CD ๔ ซม. (ตัวอย่างที่ ๒ หน้า ๘๐)

∴ จุด P, Q, R, S, ที่โลกัศตัดกัน ก็เป็นจุดซึ่ง

อยู่ห่างจากเส้นตรง AB ๓ ซม. และจาก CD ๔ ซม.

แตรม & จุดด้วยกัน

๕. A และ B เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้และอยู่ห่างกัน ๖ ซม. ใช้วิธีใดไซ้ หาจุด ๒ จุด ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A ๔ ซม. และอยู่ห่างจาก B ๕ ซม.



กำหนดให้ A และ B เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้ และอยู่ห่างกัน ๖ ซม.

จะต้องสร้าง จุด ๒ จุด ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A ๔ ซม. และห่างจากจุด B ๕ ซม.

สร้าง ให้ A เป็นศูนย์กลางรัศมี ๔ ซม. เขียนวงกลมให้ B เป็นศูนย์กลางรัศมี ๕ ซม. เขียนวงกลม

ให้วงกลมทั้งสองตัดกันที่ C และ D

∴ C และ D เป็นจุดที่ต้องการ

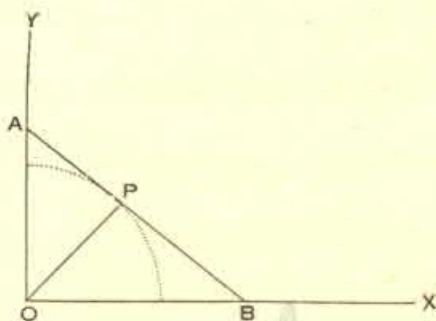
พิสูจน์ โลกัศของจุดซึ่งมีระยะ ห่าง จากจุด A & ข.ม.

จะต้องเป็น วง กลม ซึ่งมี A เป็น ศูนย์ กลาง
และรัศมี & ข.ม. (ตัวอย่างที่ ๓ หน้า ๕๐)

และ โลกัศของจุดซึ่งมีระยะห่างจากจุด B & ข.ม.
จะต้องเป็นวงกลม ซึ่งมี B เป็น ศูนย์ กลาง และรัศมี
& ข.ม. (ตัวอย่างที่ ๓ หน้า ๕๐)

∴ จุด C และ D ที่โลกัศทั้งสองตัดกันก็จะต้องเป็น
จุดที่อยู่ ห่างจาก A & ข.ม. และอยู่ ห่างจาก B & ข.ม.

๗. ไม่ตรงท่อนหนึ่ง เดือนขึ้นลงได้ ใน ระหว่าง
ไม้บรรทัด ๒ อันซึ่งบรรจบกัน เป็นมุมฉาก ให้หา
โลกัศของจุด กึ่งกลาง ของไม้ท่อนนี้ และแสดงให้
เห็นว่าโลกัศนั้นคือ ๖ ของ เส้น รอบวง ของ วงกลม (ดู
บทสร้าง ๓๐)



กำหนดให้ OX และ OY เป็นไม้บรรทัดที่ตรงฉากกัน
 AB เป็นไม้ท่อนหนึ่ง อยู่ในระหว่าง OX และ OY จะ
 เป็นท่อนที่ใด

จะต้องหา โตกต์ของจุดกึ่งกลางของ AB

สร้าง จากจุด O ตากเส้น OP ไปที่จุดกึ่งกลางของ AB

ให้ O เป็นศูนย์กลางรัศมี OP เขียนส่วนโค้ง

$\therefore$ ส่วนโค้งนั้นเป็น โตกต์ของการ

พิสูจน์ จากบทสร้างที่ ๓๐ เราเห็นได้ว่าเส้นที่ลากจาก

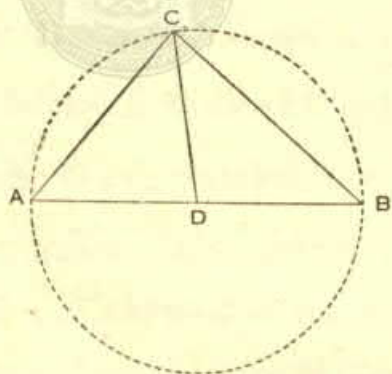
มุมฉากไปยังจุดกึ่งกลางของด้านทะแยง = ครึ่งหนึ่งของ
 ด้านทะแยง

$\therefore OP = \frac{1}{2} AB$ และคงที่เสมอ

$\therefore$ จุด P จะตั้งอยู่ที่เส้นรอบวงของวงกลม
ซึ่งจุดตาย O เป็นศูนย์กลางและรัศมี $= \frac{1}{2} AB$ และคงที่
และ P อยู่ภายใน $\angle XOY$

$\therefore$ โลกตั้งเป็น $\frac{1}{2}$ ของวงกลมคั่นที่อยู่ที่
ใน $\angle XOY$

๘. กำหนดให้ด้านตรงข้ามเป็นฐาน แล้วสร้างรูป
สามเหลี่ยมมุมฉากหลายรูปจึงหาโลกตั้งของมุมยอด



กำหนดให้ $\angle ACB$ เป็น สามเหลี่ยมมุมฉาก มี AB เป็น

ด้านทะแยง

จะต้องหา โด่งดังของมุมยอด

สร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่จุด D

ให้ D เป็นจุดศูนย์กลางครึ่งวงกลมของ AB เขียน วงกลม

$\therefore$ วงกลมเป็นโด่งดังที่ต้องการ

พิสูจน์ ตามเส้น CD

จากบทสร้างที่ ๓๐ เราเห็นได้ว่า $CD = \frac{1}{2} AB$

และคงที่เดิม

$\therefore$ จุด C ก็คงอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

นั่นคือ โด่งดังของมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม

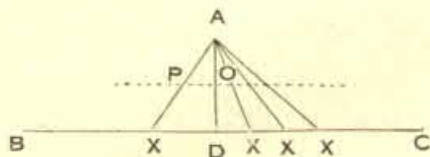
มุมฉากเป็นวงกลมซึ่งมีด้านทะแยงเป็นเส้นผ่า

ศูนย์กลาง

๘. A เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้ และ X เคลื่อน

ที่ไปตามเส้นตรง BC ซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้ จงหา

โดกัสน์ของจุด P จุดกึ่งกลางของ AX และพิสูจน์ว่า
โดกัสน์นั้นเป็นเส้นตรงขนานกับ BC



กำหนดให้ A เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้ และ X เคลื่อน
ที่ไปตามเส้นตรง BC ซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้

จะท้องหา โดกัสน์ของจุด P จุดกึ่งกลางของ AX

สร้าง ให้ X เป็นจุดหลายจุดบนเส้นตรง BC แบ่ง
ครึ่ง AX

จากรูปเราอาจเห็นได้ว่าโดกัสน์ เป็น เส้นตรง
ขนานกับ BC

พิสูจน์ ให้ X เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนเส้น BC

และให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX

ลากเส้น AD ตั้งฉากกับ BC

แบ่งครึ่ง AD ที่จุด O

ใน $\triangle AXD$

$\therefore P$ และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AX และ AD

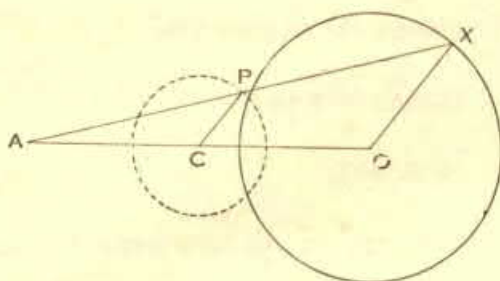
$\therefore PO$ ขนานกับ XD หรือ BC (ข้อ ๒ หน้า ๖๔)

ดังนั้น P จะอยู่ที่ใดก็ตามจุด P จะต้องอยู่บน
เส้นตรงที่ผ่านจุด O และขนานกับ BC

$\therefore$ โดกซ์ของจุด P คือ เส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่ง
กลางของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุด A มายัง BC และ
ขนานกับ BC ด้วย

๓๐. A เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้ และจุด X เคลื่อน
ที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้

จงหาโดกซ์ของจุด P จุดกึ่งกลางของ AX และ
พิสูจน์ด้วยว่าโดกซ์เป็นวงกลม



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ A เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้ X เป็นจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นรอบวงลากเส้น AX และให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX

จะต้งหา โดกัของจุด P จุดกึ่งกลางของ AX

สร้าง ลากเส้น AO แบ่งครึ่ง AO ที่จุด C ลากเส้น CP, OX ให้ C เป็นศูนย์กลางรัศมี CP เขียนวงกลม

∴ วงกลมนี้เป็นโดกัที่ต้งการ

พิสูจน์ ใน $\triangle AXO$

∴ C และ P เป็นจุดกึ่งกลางของ AO และ AX

∴ $CP = \frac{1}{2} OX$ (ข้อ ๓ หน้า ๖๔)

แต่ OX เป็นรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้

$\therefore CP$ ก็คงที่เสมอ

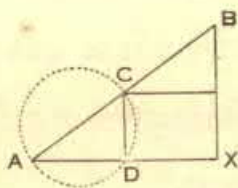
$\therefore P$ ก็อยู่ห่างจาก C คงที่เสมอ

$\therefore$ โตเกิ้ลก็เป็นวงกลม

นั่นคือโตเกิ้ลของจุด P จุด กึ่ง กลาง ของ AX

เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด กึ่งกลางของเส้นตรงซึ่งลากจากจุด A ถึง จุดศูนย์กลาง กลาง ของ วง กลม ที่กำหนดให้ และรัศมี เท่ากับครึ่งหนึ่งของ รัศมีของวงกลมที่กำหนดให้

๓๓. กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ AX เป็นเส้นตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งลากผ่านจุด B ถ้า BX หมุนรอบจุด B จงหาโตเกิ้ลของจุดกึ่งกลางของ AX



กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ AX เป็นเส้น
 ตั้งฉากจากจุด A มา ขังเส้นตรง BX และให้ BX
 หมุนรอบจุด B

จะต้งหา โดกัต์ของจุดกึ่งกลาง AX

สร้าง แบ่งครึ่ง AB และ AX ที่จุด C และ D ตามเส้น CD

สร้างวงกลมให้ AC เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

$\therefore$ วงกลมนี้เป็นโดกัต์ที่ต้งการ

พิสูจน์

ใน $\triangle ABX$

$\therefore C$ และ D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ AX

$\therefore CD$ ขนานกับ BX (ข้อ ๒ หน้า ๖๔)

แต่ BX ตั้งฉากกับ AX เสมอ (ตามโจทย์)

$\therefore CD$ ก็ต้งตั้งฉากกับ AD เสมอ

$\therefore ADC$ ก็ต้งเป็น $\triangle$ มุมฉากเสมอ

$\therefore$ โดกัต์ของมุมยัด D ก็เป็น วงกลม มี AC

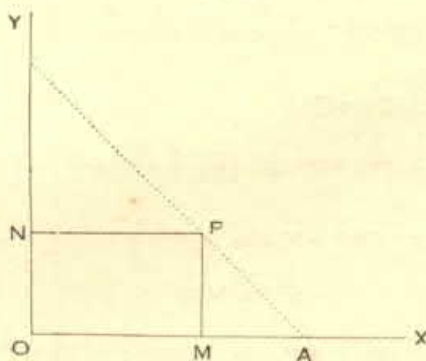
เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

(ข้อ ๔)

นั่นก็ คือ โตกซ์ ของ จุด กึ่ง กลางของ AX เป็น
วงกลมซึ่งผ่านจุด A และมีครึ่งหนึ่งของ AB เป็นเส้นผ่า
ศูนย์กลาง

๓๒. เส้นตรง OX และ OY มาบรรจบกัน เป็น
มุมฉาก และจาก P จุดภายในมุม XOY ตากเส้น PM
และ PN ตั้งฉากกับ OX และ OY จงหาโตกซ์ ของ
จุด P เมื่อ ๑. $PM + PN$ คงที่เสมอ (๒ ข.ม.)
๒. $PM - PN$ คงที่เสมอ (๓ ข.ม.)

และพิสูจน์มาด้วย



กำหนดให้ ๑ เส้นตรง OX และ OY เป็นมุมฉากที่จุด O
ให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง ภายใน $\angle XOY$ ซึ่งมี PM และ
 PN ตั้งฉากกับ OX และ OY ให้ $PM+PN$ คงที่เสมอ
(๖ ช.ม.)

จะต้องหา โตกส์ของจุด P

สร้าง คัด OA จาก OX ให้ได้เท่ากับ ระยะ ที่ต้องการ
(๖ ช.ม.)

ลากเส้น AP

$\therefore$ เส้น AP เป็นโตกส์ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because OMPN$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$\therefore PN=OM$ (บ.พ. ๒๓)

แต่ $PN+PM =$ ระยะที่ต้องการ (๖ ช.ม.)

และ $OM+MA =$ ระยะที่ต้องการ (๖ ช.ม.)

$\therefore PM=MA$

แต่ $\angle PMA = 90^\circ$

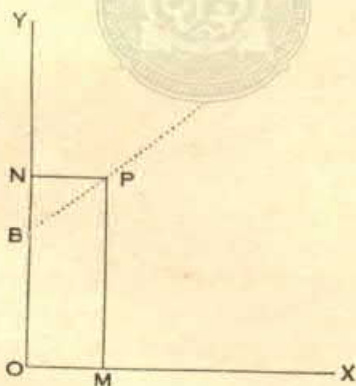
$$\therefore \angle PAM = 45^\circ$$

และจุด A เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้

ทั้ง $\angle OAP$ ก็เป็นมุม 45° คงที่เสมอ

$\therefore$ โดกัต์ของจุด P ก็คือเส้นตรงที่ลากผ่านจุด
บนเส้น OX และมี ระยะ ห่าง จากจุด O เท่า ที่ ต้องการ
(๖ ซม.) และมี $\angle OAP$ กว้าง 45°

ข้อ ๓๒.



กำหนดให้ $PM - PN =$ ระยะที่ ต้องการ (๓ ซม.)

จะต้งหา โดกัของจุด P

สร้าง ตัด OB จาก OY ให้ได้เท่ากับ ระยะที่ต้งการ
(๓ ซม.) ตากเส้น BP

∴ BP เป็นโดกัต้ง

พิสูจน์ ∴ PNOM เป็นสี่เหลียมผืนผ้า

∴ MP = ON

แต่ PM - PN = ระยะที่ต้งการ (๓ ซม.)

และ ON - BN = ระยะที่ต้งการ (๓ ซม.)

BN = PN

แต่ $\angle PNB = 90^\circ$

∴ $\angle NBP = 45^\circ$

แต่จุด B เป็นจุดเค็ดอนที่ไม่ได้

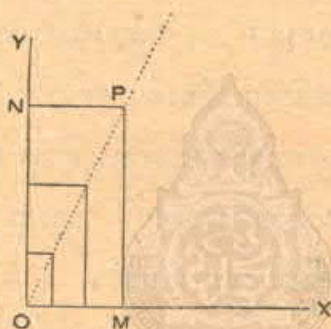
ทั้ง $\angle YBP$ ก็เป็นมุม 45° คงที่เต็มอ

∴ โดกัของจุด P คือเส้นตรงซึ่งตากผ่านจุด

บนเส้น OY และมีระยะห่างจากจุด O เท่าที่ต้งการ
(๓ ซม.) และมี $\angle YBP = 45^\circ$

๓๓. เส้นตรง OX และ OY ต้งเส้น มาบรรจบ

กันเป็นมุมฉากที่จุด O จากจุด P ซึ่งเคลื่อนที่ได้ตาม
เส้น PM, PN ตั้งฉากกับ OX และ OY จงหาโตกซ์ของ
จุด P (โดยไม่ต้องพิสูจน์) ในเมื่อ ๑. $PM = 2$ PN
๒. $PM = 3$ PN



กำหนดให้ เส้นตรง OX และ OY บรรจบกันเป็นมุม
ฉากที่จุด O

จะต้องหา โตกซ์ของจุด P ซึ่งมีระยะเส้นตั้งฉาก
 $PM = 2$ OM

สร้าง คัด OM จาก OX โดยไม่จำกัดหน่วย

ลากเส้น PM ตั้งฉากกับ OX และให้ $PM = 2$ PN

ลากเส้น PN ขนานกับ OM

$$\therefore PM = ๒ OM \text{ และ } OM = PN$$

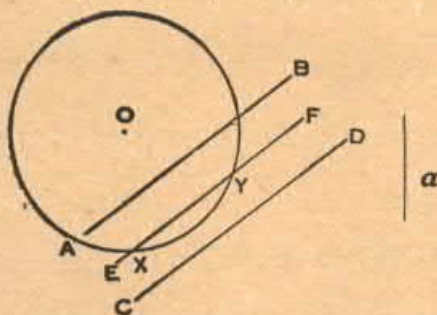
$$\therefore PM = ๒ PN$$

$\therefore$ เรารู้ได้จุด P จุดหนึ่ง

เมื่อเราหาจุด P ได้หลาย ๆ จุด เราก็จะเห็นได้ว่าโลกลังของจุด P เป็นเส้นตรงซึ่งลากจากจุด O ต่อกันก็เช่นเดียวกันเป็นแต่เราสร้างให้ $PM = ๓ OM$

๓๔. จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่กำหนดให้เท่ากับส่วนยาวที่กำหนดให้ และอยู่ห่างจากเส้นตรงขนานคู่ หนึ่งมีระยะห่างเท่ากัน

เมื่อใดจุดจะมี ๒ จุด, จุดเดียว และไม่มีเลย



กำหนดให้ O เป็นจุด ๆ หนึ่ง AB, CD เป็นเส้นตรง

รนาณ^๑ a เป็นส่วนยาวที่กำหนดให้
จะต้องหาจุด X และ Y อยู่ห่างจาก O ให้มีระยะเท่ากับ a
 และห่างจากเส้น AB และ CD เท่ากัน

สร้าง ให้ O เป็นศูนย์กลางรัศมี a เขียนวงกลม

ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างเส้นขนาน
 AB และ CD

ลากเส้น EF ให้ขนานกับ AB และ CD

ให้ตัดวงกลมที่จุด X และ Y

$\therefore X$ และ Y เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ จุดที่ห่างจาก $O = a$ นั้นจะต้องอยู่บนเส้นรอบ
 วงของวงกลม ซึ่งมี O เป็นศูนย์กลางและรัศมี $= a$

จุด X และ Y อยู่ห่างจากเส้นขนาน AB และ CD เท่า
 กันจะต้องอยู่บนเส้น EF ซึ่งขนานกับ AB และ CD และ
 อยู่กึ่งกลางของ AB และ CD

$\therefore$ จุด X และ Y ที่เส้น EF และ วงกลม ตัด
 กันอยู่ ห่างจาก $O = a$ และห่างจาก AB และ CD เท่ากัน

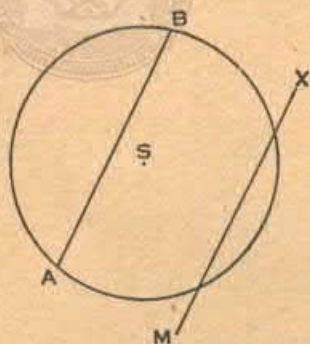
จะมี ๒ จุดเมื่อ a ยาวกว่าเส้น ตั้งฉาก จาก O

มายัง EF

จะมีจุดเดียวเมื่อ $a =$ เส้นตั้งฉากนั้น

จะไม่มีเลยเมื่อ a สั้นกว่าเส้นตั้งฉากนั้น

๓.๕. S เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้ และอยู่ห่างจาก
เส้นตรง MX ที่กำหนดให้ ๒ นิ้ว จงหาจุดสองจุด
ซึ่งอยู่ห่างจาก S $๒\frac{๓}{๔}$ นิ้ว กับทั้งอยู่ห่างจากเส้น
ตรง MX $๒\frac{๓}{๔}$ นิ้วด้วย



กำหนดให้ จุด S อยู่ห่างจากเส้นตรง MX ๒ นิ้ว

จะต้องหา จุด ๒ จุดซึ่งอยู่ห่างจาก S $๒\frac{๓}{๔}$ นิ้ว และ

อยู่ห่างจากเส้นตรง MX $2\frac{3}{4}$ นิ้วด้วย

สร้าง วงกลมให้ S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี $2\frac{3}{4}$ นิ้ว

เขียนเส้นขนานกับ MX และให้ห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้ว

ให้ตัดกับเส้นรอบวงที่จุด A และ B

∴ จุด A และ B เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ : จุดที่จะอยู่ห่างจาก S $2\frac{3}{4}$ นิ้วจะต้องอยู่บนเส้น

รอบวงกลมซึ่ง S เป็นศูนย์กลางและรัศมี $= 2\frac{3}{4}$ นิ้ว

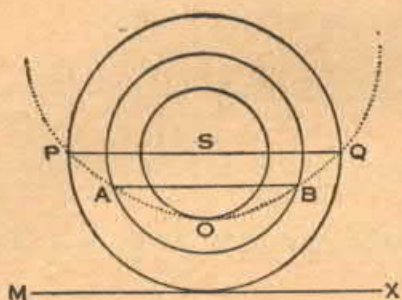
และจะต้องอยู่บนเส้นขนานกับ MX และมีระยะห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้วด้วยทั้งสองข้าง

∴ จุดที่ตัดกันของเส้นขนานกับเส้นรอบวงก็จะต้องอยู่ห่างจากจุด S $2\frac{3}{4}$ นิ้ว และห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้ว

๓๖. จงหาจุดต่าง ๆ ซึ่งมีระยะห่างจากจุด S

และเส้นตรง MX ที่กำหนดให้เท่ากัน แล้วต่อจุด

เหล่านั้นเข้าให้เป็นเส้นโค้ง



จากข้อ ๑๕ เราได้ว่า จุดที่ อยู่ห่างจากจุดที่
กำหนดให้ และเส้นตรงที่กำหนดให้จะต้องอยู่จุด
ที่เส้นขนานและเส้นรอบวงตัดกัน

เราสมมุติให้ S อยู่ห่างจาก MX ๒ นิ้ว

สร้างวงกลมให้ S เป็น ศูนย์ กลางรัศมี ๓ นิ้ว

และเขียนเส้นขนานห่างจาก MX ๓ นิ้ว

จะตัดกันที่จุด O

ขยายรัศมีให้ = ๓ นิ้ว และ ระยะเส้น

ขนาน = ๓ นิ้ว จาก MX จะตัดกันที่จุด A และ B

ขยายรัศมีให้ = ๒ นิ้ว และระยะเส้นขนาน

= ๒ นิ้ว จาก MX จะตัดกันที่ P และ Q (ทำเช่นนี้

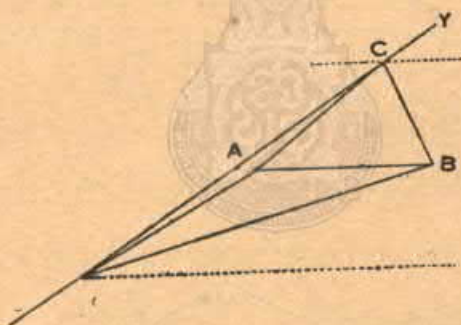
หลาย ๆ ครั้งจะได้ครึ่งละ ๒ จุด)

จุดเหล่านี้จะอยู่ห่างจาก S และ MX เท่ากัน

เมื่อต่อจุดเหล่านี้ให้ติดกัน จะเป็น รูป พาราบ

บอตา (Parabola)

๑๗. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมบนฐานที่กำหนดให้
มีสูงเท่ากับส่วนสูงที่กำหนดให้ และมีมุมยอด
อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้



กำหนดให้ AB เป็นฐาน h เป็นส่วนสูง และ XY
เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

จะต้องสร้าง $\triangle$ บนฐาน AB มีส่วนสูง $= h$ และมีมุม
ยอดอยู่บนเส้น XY

สร้าง เส้นขนานสองเส้นๆ ตัดข้างของ AB ให้มีระยะห่าง
จาก $AB = h$

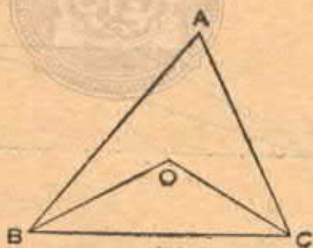
ให้ตัดกับ XY ที่จุด C และ C'

$\therefore$ จุด C และ C' ก็อยู่ห่างจาก $AB = h$ และ
อยู่บนเส้นตรง XY ด้วย

ลากเส้น AC, BC, AC', BC'

เราได้ $\triangle$ ที่ต้อง การ ๒ รูป คือ ABC และ ABC'

๓๘. จงหาจุดๆ หนึ่งซึ่งอยู่ห่างจากด้านทั้งสาม
ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องหา จุด ซึ่ง อยู่ ห่าง จาก ด้าน AB, BC และ CA
เท่ากัน

สร้าง แบ่งครึ่ง $\angle B$ และ $\angle C$ ด้วยเส้น BO และ CO

ให้เส้นทั้งสองนี้พบกันที่จุด O

$\therefore O$ เป็นจุดตัดของการ

พิสูจน์ $\therefore BO$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle B$

$\therefore$ ทุก ๆ จุดบนเส้น BO อยู่ห่างจาก AB, BC เท่ากัน (ป.ต. ๓๕)

และเพราะว่า CO เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle C$

$\therefore$ ทุก ๆ จุดบนเส้น CO อยู่ห่างจาก AC และ BC เท่ากัน (ป.ต. ๓๕)

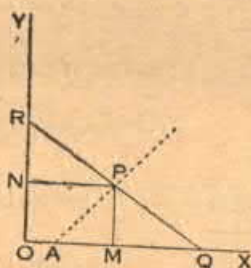
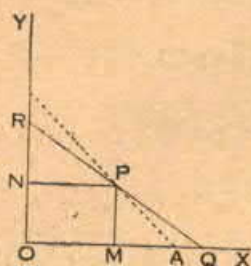
$\therefore$ จุด O ซึ่งเส้น BO และ CO ตัดกัน

จะต้องอยู่ห่างจาก AB, BC และ CA เท่ากัน

๓๘. เส้นตรง OX และ OY ต้องเส้นมาบรรจบกันเป็นมุมฉาก Q และ R เป็นจุดบนเส้น OX และ OY จงหาโต끼ของจุดกึ่งกลางของ QR เมื่อ

๑. $OQ + OR$ คงที่เสมอ

๒. $OQ - OR$ คงที่เสมอ



กำหนดให้ เส้นตรง OX และ OY บรรจบกัน เป็นมุมฉากที่จุด O

ให้ Q และ R เป็นจุดบนเส้นตรง OX และ OY ซึ่ง $OQ + OR$ คงที่เสมอ

และให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ QR

จะต้องหา โตกต์ของจุด P

สร้าง ตากเส้น PM, PN ตั้งฉากกับ OX และ OY

จากจุด P ตากเส้น AP ให้ $\angle OAP = 45^\circ$

พิสูจน์ $\therefore PM$ ตั้งฉากกับ OX และ PN ตั้งฉากกับ OY

$\therefore PM$ ขนานกับ OY และ PN ขนานกับ OX

∴ M เป็นจุดกึ่งกลางของ OQ (ข้อ ๑ หน้า ๖๔)

และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ OR (ข้อ ๓ หน้า ๖๔)

$$\therefore PM = \frac{1}{2} OR \text{ และ } PN = \frac{1}{2} OQ \text{ (ข้อ ๓ หน้า ๖๔)}$$

$$\therefore PM + PN = \frac{1}{2} (OR + OQ)$$

แต่ $OR + OQ$ คงที่เสมอ

∴ $PM + PN$ ก็คงที่เสมอ

∴ โดกซ์ของจุด P คือเส้นตรงซึ่งลากมาตัด OX

และทางมุมกับ OX 45° (ข้อ ๓๒ หน้า ๖๔)

ในทำนองเดียวกัน สำหรับตอน ๒ โดกซ์ของ
จุด P คือเส้นตรงซึ่งลากจากจุด B บนเส้น OY มีระยะ
ห่างจาก O เท่ากับ $\frac{1}{2} (OQ - OR)$

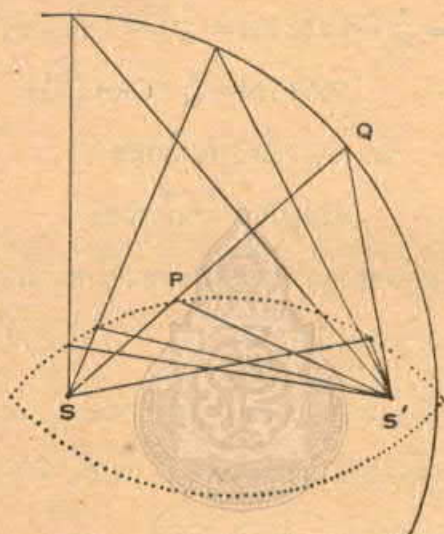
และทาง $\angle XAP = 45^\circ$ (ข้อ ๓๒ หน้า ๖๔)

๒๐. S และ S' เป็นจุดเคลื่อนที่ที่ไม่ได้ จงหา
จุด P หาย ๆ จุดซึ่งทำให้

$$๑. SP + S'P \text{ คงที่เสมอ} = ๓.๕ \text{ นิ้ว}$$

$$๒. SP - S'P \text{ คงที่เสมอ} = ๓.๕ \text{ นิ้ว}$$

ในข้อหนึ่ง ๆ ให้ลากเส้นโค้งผ่านที่ตั้งของจุด
 . ๕
 เหล่านั้น



กำหนดให้ S และ S' เป็นจุดเคลื่อนที่ที่ไม่ได้
จะต้งหา โดกัถ์ของจุด P ในเมื่อ

๑. $SP + S'P$ คงที่เสมอ $= ๓.๕$ นิ้ว

๒. $SP - S'P$ คงที่เสมอ $= ๑.๕$ นิ้ว

สร้าง ๑. จากจุด S ลากเส้น SQ จะไปทางใดก็ได้ ยาว

= ๓.๕ นิ้ว

ลากเส้น $S'Q$

ที่จุด S' ลากเส้น $S'P$ ให้ $\angle QS'P = \angle SQS'$

ในทางเดียวกับ SQ

และให้ตัด SQ ที่จุด P

$\therefore P$ เป็นจุด ๆ หนึ่ง

พิสูจน์ ใน $\triangle PQS'$

$\because \angle PS'Q = \angle PQS'$

$\therefore PQ = PS'$

แต่ $SP + PQ = ๓.๕$ นิ้ว

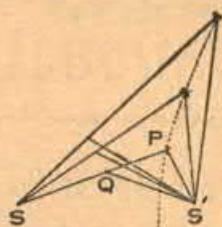
$\therefore SP + S'P = ๓.๕$ นิ้วด้วย

เมื่อเราหาทำนองนี้ได้จุด P หลาย ๆ จุดแล้ว

ลากเส้นโค้งผ่านจุดเหล่านั้นจะได้รูป เอลลิปส์ **Ellipse**

เป็นโคจรของจุด P

ข้อ ๒๐ คอ



สร้าง ๒. จากจุด S ตากเส้น SQ ไปทางใดก็ได้ ให้ยาว
= ๓.๕ นิ้ว

ตากเส้น S'Q

จาก S' ตากเส้น S'P ตัดกับ SQ ที่ ค่อย ออกไปที่จุด P
ทำให้ $\angle QS'P = \angle S'QP$

$\therefore P$ เป็นจุดๆ หนึ่ง

พิสูจน์ ใน $\triangle PQS'$

$$\therefore \angle PQS' = \angle PS'Q$$

$$\therefore PQ = S'P$$

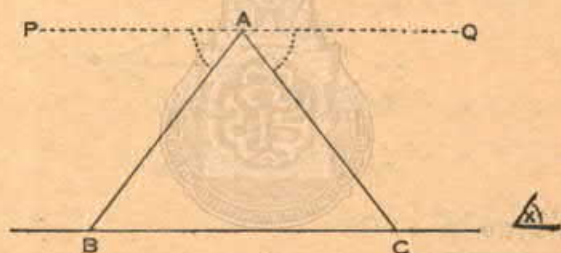
$$\text{แต่ } SP - PQ = ๓.๕ \text{ นิ้ว}$$

$$\therefore SP - S'P = ๓.๕ \text{ นิ้ว}$$

เมื่อหาจุด P ได้ หายจุดแล้วตากเส้นโค้งผ่าน
จุดเหล่านี้ เราจะได้รูป ไฮเพอร์บอลา (*Hyperbola*)
ซึ่งเป็นโลกซ์ของจุด P

โจทย์ระคนของบทสร้าง

๓. A เป็นจุด ๆ หนึ่ง และ BC เป็นเส้นตรง
เส้นหนึ่งจากจุด A ตากเส้นตรงมายัง BC และ ทำมุมกับ
เส้น BC ให้ โตเท่ากับมุม X ที่ กำหนดให้ และ จะ
ตากได้ กเส้น



กำหนดให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่ง BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

และ $\angle X$ เป็นมุม ๆ หนึ่ง

จะต้องสร้าง เส้นจากจุด A ทางมุมกับเส้นตรง $BC = \angle X$

สร้าง PAQ ผ่านจุด A และขนานกับ BC

ที่จุด A ตากเส้น AB, AC ให้ $\angle PAB, \angle QAC = \angle X$

$\therefore AB, AC$ เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ PAQ ขนานกับ BC และ AB พบ

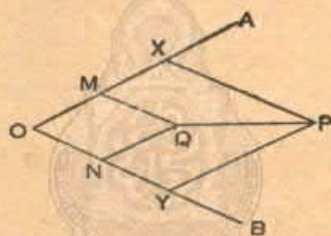
$$\therefore \angle CBA = \angle PAB = \angle X$$

และ PAQ ขนานกับ BC และ AC พบ

$$\therefore \angle ACB = \angle QAC = \angle X$$

๒. ให้ลากเส้น แบ่งครึ่ง $\angle AOB$ โดยไม่ใช้

จุด O ในการสร้าง



กำหนดให้ $\angle AOB$

จะต้องลากเส้น แบ่งครึ่ง $\angle AOB$ โดยไม่ใช้จุด O

สร้าง เส้น YP ขนานกับ OA

และ ลากเส้น XP ขนาน กับ OB ให้มี ระยะห่างจาก OB เท่ากับ YP ห่างจาก OA และให้ตัดกับ YP ที่จุด P

ลากเส้น NQ ขนานกับ OA

และลากเส้น MQ ขนานกับ OB ให้มีระยะห่าง

จาก OB เท่ากับ NQ ห่างจาก OA และให้ตัดกับ NQ
ที่จุด Q ตากเส้น PO

$\therefore PQ$ เป็นเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ $\therefore XP$ ห่างจาก OB = YP ห่างจาก OA

$\therefore$ จุด P อยู่ ห่างจาก OB, OA เท่ากัน

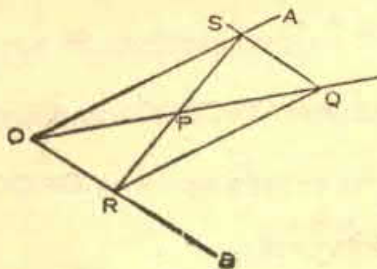
และ MQ อยู่ ห่าง OB = NQ อยู่ ห่างจาก OA

$\therefore$ จุด Q อยู่ ห่างจาก OB, OA เท่ากัน

$\therefore PQ$ ก็เป็นโลกซ์ของจุด ซึ่งมีระยะ ห่างจาก
OA, OB เท่ากัน

$\therefore PQ$ ก็เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle AOB$ (บ.ต. ๓๕)

๓. P เป็นจุด ๆ หนึ่งในระนาบมุม AOB ให้
ตากเส้นผ่านจุด P ไปจุดบน OB และ AO และให้ P
เป็นจุด กึ่ง กลาง ของเส้นตรงเหล่านั้นด้วย



กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง ในระหว่าง $\angle AOB$

จะต้องสร้าง เส้นตรงผ่านจุด P ให้จุดบน OA, OB

และให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงนั้นด้วย
สร้าง เส้น OP และต่อ OP ถึงจุด Q ทำให้ $QP = OP$

จากจุด Q ตากเส้น QS ขนานกับ BO และ QR
ขนานกับ SO ตากเส้น SR

$\therefore SR$ เป็นเส้นตรงที่ต่อกัน

พิสูจน์ $\therefore OSQR$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore$ เส้นทแยงมุมต่างก็แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

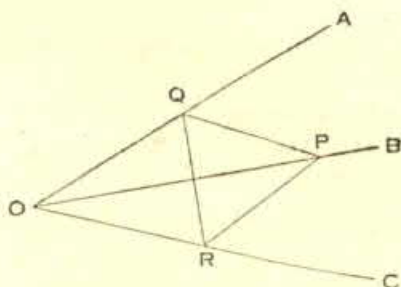
(บทแทรก ๓ น.พ. ๒๓)

แต่ P เป็นจุดกึ่งกลางของ OQ (สร้าง)

$\therefore P$ ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ SR ด้วย

๔. เส้นตรง OA, OB, OC ผ่านต้นมาบรรจบกัน

ที่จุด O จง ตากเส้นตรงให้จุด OA, OC และ
 OB แบ่งครึ่งเส้นด้วย



กำหนดให้ OA, OB, OC เป็นเส้นตรงตามเส้นมาบรรจบ

กันที่จุด O

จะต้องสร้าง เส้นตรงให้ จุดบน OA, OC และให้ OB

แบ่งครึ่งเส้นด้วย

สร้าง จาก P จุดใดจุดหนึ่งบนเส้น OB

ลากเส้น PR ขนาน OA และให้ตัดกับ OC ที่จุด R

ลากเส้น PQ ขนานกับ OC และให้ตัดกับ AO ที่จุด Q

ลากเส้น QR

$\therefore QR$ เป็นเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ $\therefore OQPR$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore$ เส้นทแยงมุมต่างก็ แบ่ง ครึ่ง ซึง กัน แด่ กัน

(บทแทรก ๓ บ.พ. ๒๑)

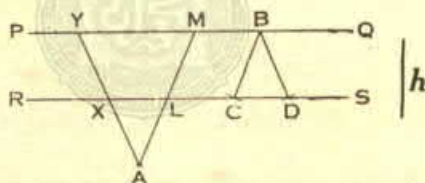
นั่นคือ OP หรือ OB แบ่งครึ่ง QR

เมื่อ P เป็นจุดใดจุดหนึ่ง บน เส้น OB ก็ได้

$\therefore$ เราจะสร้างเส้น QR สกุกเส้นก็ได้ ไม่จำกัด

๕. จงลากเส้นตรงจากจุด A มา ตัด เส้น ขนาน
สองเส้น ทำให้ส่วนของ เส้น ตรง ที่ อยู่ ระหว่าง เส้น
ขนานคู่ นั้นยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้

เมื่อใดจะมีเส้นขนานใด สองเส้น เส้นเดียว
และไม่มีเลย



กำหนดให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่ง PQ, RS เป็น เส้นขนานคู่
หนึ่ง และ h เป็นส่วนของ

จะต้องสร้าง เส้นจาก จุด A ไปตัด PQ และ RS และให้
ส่วนของเส้นที่อยู่ในระหว่าง PQ และ $RS = h$

สร้าง ให้ B จุดใดจุดหนึ่ง บน เส้น PQ เป็น ศูนย์กึ่งกลาง
รัศมี $= h$ เขียนส่วน โค้งตัด RS ที่ C และ D

ลากเส้น BC และ BD

จากจุด A ลากเส้น ALM และ AXY ขนาน BC และ CD

$\therefore$ ALM และ AXY เป็นเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ : MLCB, YXDB เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore ML = BC, XY = DB = h$ (ป.พ. ๒๓)

จะมีสองเส้นเมื่อส่วนยาวที่กำหนดให้ยาวกว่า

ระยะทางระหว่างเส้นขนาน

จะมีเส้นเดียวเมื่อส่วนยาว ที่ กำหนดให้เท่ากับ

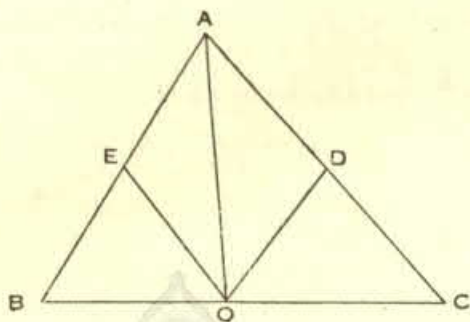
ระยะทางระหว่างเส้นขนาน

จะไม่มีเลยเมื่อ ส่วน ยาว ที่ กำหนดให้สั้น กว่า

ระยะทางระหว่างเส้นขนาน

๖. จงบรรจรูบสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าลงใน

รูปสามเหลี่ยม ABC และให้มุม ๆ หนึ่งที่มุม A ดังนี้



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องสร้าง รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าลงใน

$\triangle ABC$ และให้มุมหนึ่งเท่ากับมุม A นั่นคือ

สร้าง ตากเส้น AO แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ และให้พบ BC ที่

จุด O

จากจุด O ตากเส้น OE ขนานกับ AC ให้
พบ AB ที่จุด E

ตากเส้น OD ขนานกับ AB ให้พบ AC ที่จุด D

$\therefore ADOE$ เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because AE$ ขนานกับ DO และ AO พบ

$$\therefore \angle EAO = \angle AOD \quad (\text{บ.พ. ๓๕})$$

$$\text{แต่ } \angle EAO = \angle OAD \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore \angle AOD = \angle OAD$$

$$\therefore AD = OD \quad (\text{บ.พ. ๖})$$

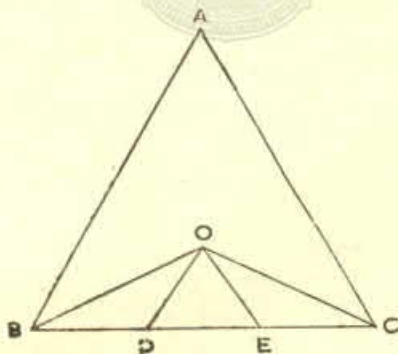
แต่ ADOE เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน (สร้าง)

$$\therefore AD = EO, OD = AE \quad (\text{บ.พ. ๒๓})$$

$$\therefore AD = EO = OD = AE$$

นั่นคือ ADOE เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า

๒. จึงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ โดยใช้ วรของสามเหลี่ยมด้านเท่า



กำหนดให้ BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

จะต้องแบ่ง เส้นตรงออกเป็นส่วนสั้นๆ กันโดย

ให้ OB ของ $\triangle$ ด้านเท่า

สร้าง $\triangle$ ด้านเท่า ABC

จาก เส้น BO, CO ให้แบ่งครึ่ง $\angle B$ และ $\angle C$
ให้เส้นทั้งสองพบกันที่จุด O

จากจุด O ตากเส้น OD ขนานกับ AB พบ BC ที่จุด D

ตากเส้น OE ขนานกับ AC พบ BC ที่จุด E

$$\therefore BD = DE = EC$$

พิสูจน์ $\therefore AB$ ขนานกับ OD และ BC ตัด

$\therefore$ มุมภายนอก $ODE =$ มุมภายใน ABC (บ.พ. ๓๕)

$\therefore AC$ ขนานกับ OE และ BC ตัด

$\therefore$ ภายนอก $OED =$ มุมภายใน ACB (บ.พ. ๓๕)

$\therefore$ มุมที่เหลือน $DOE = \angle BAC$

แต่ ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

$\therefore ODE$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

แต่ $\angle ODE = \angle ABC$

และ $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle ABC$

(สร้าง)

$$\text{และ } \angle BOD = \angle OBA = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\therefore \angle BOD = \angle OBD$$

$$\therefore OD = BD \quad (\text{บ.พ. ๖})$$

$$\text{แต่ } OD = DE$$

$$\therefore BD = DE \quad (\text{บ.พ. ๖})$$

ในทำนองเดียวกัน $DE = EC$

$$\text{นั่นคือ } BD = DE = EC$$

๑. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดให้

๓. จุด กึ่งกลางของด้านทั้งสาม

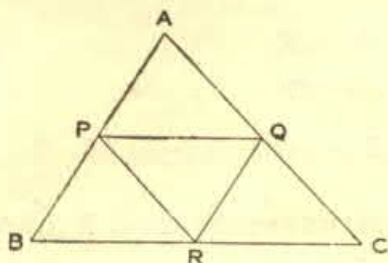
๒. ด้าน ๒ ด้านกับเส้นมีเดียน (*median*) ซึ่ง

แบ่งครึ่งด้านทั้งสาม

๓. ด้าน ๑ ด้านกับมีเดียน (*median*) ซึ่งแบ่ง

ครึ่งด้าน ๒ ด้านที่เหลือ

๔. มีเดียน (*median*) ๓ เส้น



• กำหนดให้ P, Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน

๕
ทงตาม

จะต้องสร้าง รูป $\triangle$

สร้าง ตากเส้น PQ, QR และ RP

ตากเส้น APB ขนานกับ QR

และเส้น BRC ขนานกับ PQ

และเส้น AQC ขนานกับ PR

ให้เส้นทงตามตัดกันที่จุด A, B, และ C

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ในสี่เหลี่ยมคางหมู PQRB

$\therefore BP = QR$ (ป.พ. ๒๓)

และในสี่เหลี่ยมคางหมู APRQ

$\therefore AP = QR$ (ป.พ. ๒๓)

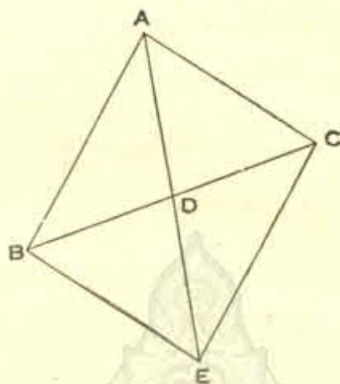
$\therefore AP = BP$

$\therefore P$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ในทำนองเดียวกัน Q และ R เป็นจุดกึ่งกลาง

ของ AC และ BC

ข้อ ๘ ต่อ



๒. กำหนดให้ ส่วนยาวของด้านของรูป Δ ๒ ด้านกับเส้น
 มedian ซึ่งแบ่งครึ่งด้านที่สาม

จะต้องสร้าง รูป Δ

สร้าง รูป ΔABE ให้ AB, BE ยาวเท่ากับ ด้าน ทั้งสอง
 ที่กำหนดให้

และด้าน AE ยาว ๒ เท่าของ median ที่กำหนดให้ (บ.๔.๔)

จากจุด E ตากเส้น EC ขนานกับ BA

จากจุด A ตากเส้น AC ขนานกับ BE

ให้ AC กับ EC ตัดกันที่จุด C
 ตากเส้น BC

$\therefore ABC$ เป็นสามเหลี่ยมทศเชิงการ

พิสูจน์ $\therefore ABEC$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

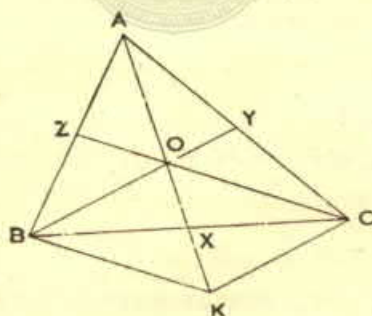
$\therefore AC = BE =$ ด้านที่กำหนดให้ (บ.พ. ๒๓)

AE, BC เป็นเส้นทแยงมุม

$\therefore AD = \frac{1}{2} AE =$ มีเดียนที่กำหนดให้

และแบ่งครึ่งด้านที่สามคือ BC

ข้อ ๘ คอ



๓. กำหนดให้ BC เป็นด้านของรูป Δ และมีเดียน AD

แบ่งครึ่งด้าน BC ด้านที่เหลือ

จะต้องสร้าง รูปสามเหลี่ยม

สร้าง $\triangle BOC$ บนด้าน BC ให้ BO, CO เท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของ
เส้นมัธยฐานที่กำหนดให้

จากจุด C ตากเส้น CK ขนานกับ OB

จากจุด B ตากเส้น BK ขนานกับ OC

ให้เส้น CK และ BK ตัดกันที่จุด K

ตากเส้น KO

ต่อ KO ออกไปถึงจุด A ทำให้ $AO = OK$

ตากเส้น AB, AC

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ต่อเส้น CO, BO ไปตัดกับ AB, AC ที่จุด Z และ Y

ใน $\triangle ABK$

$\therefore O$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AK

และ ZO ขนานกับ BK

$\therefore Z$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB (ข้อ ๓ หน้า ๖๔)

ในทำนองเดียวกัน Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

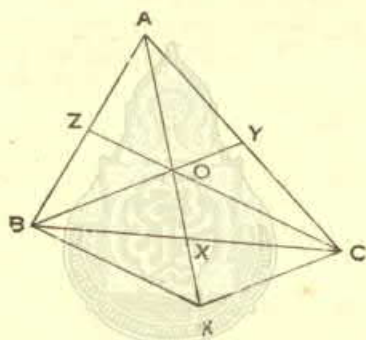
∴ BY และ CZ เป็นมีเดียน

และ $BO, CO = \frac{2}{3}$ ของมีเดียนที่กำหนดให้

∴ ABC ก็เป็น $\triangle$ ซึ่งมีด้าน BC และมีเดียน

BY, CZ ขาวเท่าที่กำหนดให้

ข้อ ๘ คอ



๔. กำหนดให้ ส่วนยาวของเส้นมีเดียน ๓ เส้น

จะต้องสร้าง รูปสามเหลี่ยม

สร้าง $\triangle OKC$ ให้ด้าน OK, KC และ $OC = \frac{2}{3}$ ของ มี
เดียนที่กำหนดให้

จากจุด K ตากเส้น KB ขนานกับ CO

จากจุด O ตากเส้น OB ขนานกับ CK

ให้ OB กับ KB ตัดกันที่จุด B

ต่อ KO ถึงจุด A ทำให้ $AO = OK$

ลากเส้น AB, BC และ AC และให้ BC ตัดที่ X

$\therefore ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ ต่อเส้น BO, CO ไปพบ AC, AB ที่จุด Y และ Z

ใน $\triangle ABK$

$\therefore O$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AK

และ OZ ขนานกับ BK

$\therefore Z$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ในทำนองเดียวกัน Y ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

ทั้ง $BO = KC = \frac{2}{3}$ ของมีเดียนที่กำหนดให้

และ $CO = \frac{2}{3}$ ของมีเดียนที่กำหนดให้

$\therefore BY$ และ CZ เป็นมีเดียนและยาวเท่าที่กำหนดให้

ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน $OBKC$

มี OK และ BC เป็นเส้นทแยงมุม

$\therefore X$ เป็นจุดกึ่งกลางของ BC (บทแทรก ๓ บ.พ. ๒๑)

$$\text{และ } OX = \frac{1}{2} OK$$

แต่ $OK = AO = \frac{2}{3}$ ของมัเดียนที่กำหนดให้

$\therefore AX$ เป็นมัเดียนอีกด้าน

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ซึ่งมี AX, BY, CZ เป็นมัเดียน





หนังสือคำนวณ

ของ

ร.ช.ท. ยม ไทยภูมิพงศ์

๑. ตำราเลขเร็ว เล่ม ๑ ราคา เล่มละ ๕๐ สตางค์
๒. พืชคณิต เล่ม ๑ ราคา เล่มละ ๖๐ สตางค์
๓. พืชคณิต เล่ม ๒ ราคา เล่มละ ๕๐ สตางค์
๔. พืชคณิต เล่ม ๓
๕. พืชคณิต เล่ม ๔
๖. คู่มือเรขาคณิต ภาค ๑ ราคา เล่มละ ๓๕ สตางค์

หนังสือเหล่านี้จำหน่ายตามร้านขายหนังสือทั่วไปและ

สุทธาณิข

ถนนเฟื่องนคร กรุงเทพฯ ฯ

หากแต่ถ้ามีส่วนผู้พิมพ์โฆษณา พิมพ์ที่โรงพิมพ์หมื่นฟ้า
ห้องเลขที่ ๑๑๑ ถนนเอกราช คอนวักตึก พระนคร ๒๕/๒