# เลขคณิตชั้นสูง

สำหรับชั้นเตรียมอุดมศึกษาชั้นฝึกหัดครู

ผู้สมัครสอบชุดครูมูล·ประถม·มัธยม




คำนำ ของ

อาจารย์ ม.ล.เถกิงเดช สุทัศน์

หัวหน้าแผนกวิชาการ รร.เตรียมนายร้อย - หัวหน้าแผนกวิชาคณิตศาสตร์ รร.นายร้อย จปร.

•

เสริศ เกษรคำ

อาจารย์ผู้ช่วย วิชาคณิตศาสตร์ รร.นายร้อย จปร.



พิมพ์โดย สำนักพิมพ์ · สื่อการค้า · ธนบุรี.



# เลขคณิตชั้นสูง

สำหรับชั้นเตรียมอุดม ชั้นฝึกหัดครู

## ผู้สมัครสอบชุดครูมูล-ประถม-มัธยม


สือการค้า

คำนำ ของ

อาจารย์ ม.ล. เถกิงเดช สุทัศน์

หัวหน้ากองวิชาการ ร.ร. เตรียมนายร้อย-หัวหน้าแผนกวิชาคณิตศาสตร์ ร.ร. นายร้อย จ.ป.ร.

●

เลิศ เกษรคำ

อาจารย์ผู้ช่วย วิชาคณิตศาสตร์ ร.ร. นายร้อย จ.ป.ร.



ก. 03281


18–


จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์–สือการค้า วงเวียนเล็ก ธนบุรี.



# คำนำ

หนังสือเล่มนี้ ผู้เรียบเรียงได้พยายามเขียนคำอธิบายตัวอย่าง และข้อปัญหาต่าง ๆ ไว้โดยละเอียด ประกอบกับมีเนื้อเรื่องครบบริบูรณ์ตามหลักสูตร ชั้นเตรียมอุดม ฯ ชั้นฝึกหัดครู และผู้สมัครสอบชุดครูต่าง ๆ สำหรับแบบฝึกหัดผู้เรียบเรียงก็ได้ให้คำตอบไว้ทุกข้อ เป็นการส่งเสริมผู้เรียนด้วยตนเอง นับว่าผู้ใช้หนังสือนี้จะได้รับผลคุ้มค่า.

พ.ท. ม.ล.ถ. สุทัศน์

ร.ร. นายร้อย จ.ป.ร.

## คำนิยมของ อาจารย์ หลวงชาญกรุณวิทย์

### อดีตอาจารย์ใหญ่ โรงเรียนฝึกหัดครู พระนคร

หนังสือเลขคณิตชั้นสูงนี้ ข้าพเจ้าได้อ่านดูแล้ว เห็นว่ามีเนื้อเรื่องครบตามหลักสูตรชั้นฝึกหัดครู กับทั้งคำอธิบายก็อ่านเข้าใจง่ายเป็นประโยชน์แก่ผู้สมัครสอบวิชาชุดครู.

หลวงชาญกรุณวิทย์

พฤษภาคม ๒๔๙๘

# คำชี้แจงของผู้เรียบเรียง

การจะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงให้ได้ผลดีนั้น วิชาเลขคณิตนับว่าเป็นรากฐานสำคัญอย่างที่สุด เพราะวิชาเลขคณิตได้รวบรวมเอาเรื่องต่าง ๆ ไว้เป็นหมวดหมู่ ผู้ศึกษาอาจเลือกศึกษาหาความเข้าใจได้เป็นเรื่อง ๆ นับว่าเป็นความสดวกแก่การค้นคว้าของผู้ศึกษาอยู่มาก ในการเรียบเรียงหนังสือนี้ ได้พยายามเรียบเรียงเรื่องต่าง ๆ โดยกว้างขวางที่สุดเท่าที่ความรู้ความสามารถจะอำนวยให้ เช่น ในเรื่องกระแสน้ำ นอกจากจะมีโจทย์พายเรือตามน้ำและทวนน้ำตามปกติแล้ว ก็ได้ให้ตัวอย่างและโจทย์การพายเรือข้ามแม่น้ำเข้าไว้อีกด้วย เป็นต้น เดิมทีนั้นได้ตั้งใจจะรวมเรื่องต่าง ๆ ไว้ให้มากที่สุดเป็นเลขคณิตฉบับสมบูรณ์แต่ครั้นลงมือพิมพ์ไปได้บ้างรู้สึกว่าจะเป็นหนังสือที่มีขนาดหนามากเกินไป ซึ่งย่อมหมายถึงราคาจะต้องสูงขึ้นไปอีกด้วย จึงได้ตัดทอนเรื่องที่ไม่สู้จะสำคัญออกไปบ้าง แม้กระนั้นก็ยังเป็นหนังสือที่มีขนาดหนามากอยู่นั่นเอง จึงได้ตัดเอาการพิสูจน์สูตรต่าง ๆ ออกเสียอีก อันนี้นับว่าไม่ดี แต่ก็ไม่มีทางเลือกที่ดีกว่านี้

เรื่องต่าง ๆ ในหนังสือนี้ ครบตามหลักสูตรชั้นเตรียมอุดมศึกษา และชั้นฝึกหัดครูมูล ครูประถม และครูมัธยม นอกจากนี้ยังมีบททบทวนเศษส่วนและทศนิยมไว้สำหรับจะค้นหลักบางประการของผู้ค้นใจอีกด้วย คำอธิบายต่าง ๆ ได้พยายามเรียบเรียงเพื่อให้ผู้เรียนด้วยตนเองอ่านแล้วเข้าใจได้เอง สำหรับแบบฝึกหัดได้รวบรวมจากหนังสือที่ใช้กันแพร่หลายทั้งในยุโรปและอเมริกา และหนังสือที่ใช้ใน ร.ร. นายร้อยเวสปอยท์ นอกจากนี้ยังได้นำข้อสอบ ม. 8 ม. 6 เตรียมอุดมศึกษา ข้อสอบชุดครูมูล ครูประถม และ ครูมัธยม มาแทรกไว้อีกด้วย ผู้สอนและผู้ศึกษาควรจะได้เข้าใจไว้ว่า ข้อสอบต่าง ๆ เหล่านี้มักจะออกสลับกันอยู่เสมอ บางข้อเคยออกสอบ ม. 8 ภายหลังมาเป็นข้อสอบชุดครู และทำนองเดียวกัน บางข้อที่เคยเป็นข้อสอบชุดครูก็มาเป็นข้อสอบเตรียมอุดม เมื่อทราบดังนี้แล้วเป็นการสมควรที่ผู้ศึกษาจะได้ทดลองทำโจทย์ต่าง ๆ ที่เป็นข้อสอบนั้นให้ชำนาญเพื่อเป็นต้นทุนในการที่จะเข้าสนามสอบเมื่อโอกาสมาถึง

อนึ่ง การทำโจทย์เลขคณิตชั้นสูงนั้น ท่านผู้รู้บางท่านได้แนะนำว่า โจทย์ยาก ๆ ถ้าจะทำโดยวิธีสมการโดยไม่ยุ่งยากแล้ว ก็ควรทำวิธีสมการดีกว่า และยังได้ให้อรรถาธิบายต่อไปอีกว่า การที่เราสมมติ 1 หรือ 100 นั้น ก็คือการสมมติ x นั่นเอง เพียงแต่เราลวงตนเองเท่านั้น ผู้เรียบเรียงคิดว่าก็เป็นความเห็นที่ดีอยู่ แต่ใครขอทำความเข้าใจกับผู้ศึกษาสักเล็กน้อยว่าการสมมติ 1 หรือ 100 นั้น คงจะไม่ใช่วิธีพีชคณิต แต่หากเป็นวิธีเลขคณิต เพราะเมื่อเราสมมติ 1 หรือ 100 แล้ว เราก็ไม่ได้นำไปเข้าสมการเลย (ถึงจะเข้าสมการก็เข้าไม่ได้ เพราะไม่ใช่ตัวอักษร) เมื่อเราสมมติแล้วเราก็เทียบออกมา ไม่ใช่นำไปเข้าสมการแล้วจะว่าเราลวงตนเองได้อย่างไร เราลองเอาโจทย์สมการง่าย ๆ มาข้อหนึ่ง แล้วลองสมมติ 100 แทนการสมมติ x จะเห็นว่าเราเข้าสมการไม่ได้เลย เพราะมีแต่ตัวเลขอย่างเดียว อีกประการหนึ่ง ถ้าผู้ศึกษาพอใจจะทำโจทย์เลขโดยวิธีพีชคณิตก็ขอให้เข้าใจว่า โจทย์เลขข้อเดียวกัน คนสองคนทำถูกสมบูรณ์ด้วยกันทั้งคู่ แต่คนหนึ่งทำโดยวิธีสมการ อีกคนหนึ่งทำโดยวิธีเลขคณิตธรรมดา ฝ่ายหลังนี่น่าจะได้คะแนนมากกว่า

การแก้โจทย์ตัวอย่างในหนังสือนี้ได้พยายามแทรกสูตรเข้าไว้ด้วย ทั้งนี้ไม่ว่าจะส่งเสริมให้นักเรียนเป็นผู้เกียจคร้านใช้สูตรที่เดียวโดยไม่ต้องคิดค้นหาไม่ เพราะประโยชน์ของการใช้สูตรนี้มีอยู่มาก ประกอบกับปัจจุบันนี้ การใช้สูตรนับว่าเป็นไปอย่างแพร่หลายอยู่ในต่างประเทศ เพราะเขาต้องการความรวดเร็ว การศึกษาเพียงเท่าที่นักเรียนสามารถนำสูตรมาใช้ได้ก็นับว่าเพียงพอแล้ว ความรวดเร็วเป็นส่วนหนึ่งทางปรารถนา เรื่องที่เขาจะต้องเรียนต้องรู้ต้องศึกษายังมีอยู่ข้างหน้าอีกเป็นอันมาก สิ่งใดที่ใครมีผู้คนค้นคว้าตั้งเป็นกฎให้ เมื่อเข้าใจแล้วก็รับเอาไปใช้ เอาเวลาไปใช้ในการคิดค้นสิ่งอื่นต่อไป นับว่าเป็นทางสร้างความเจริญให้แก่ชาติบ้านเมือง ประเทศเรายังไม่มีความเจริญถึงขนาดนั้น เป็นหน้าที่ของผู้สอนและผู้ศึกษาจะพิจารณาเอาเองว่า ควรจะใช้แบบไหนในโอกาสใด แบบใช้สูตรหรือไม่ใช้สูตร ควรจะให้เข้าใจทั้งสองแบบ ซึ่งตัวอย่างในหนังสือนี้ก็ทำไว้ให้ดูทั้งสองแบบแล้ว

หนังสือเรียนขึ้นในเวลาอันจำกัดไม่มีโอกาสตรวจทานต้นฉบับ และเป็นการพิมพ์ครั้งแรกจึงเป็นการแน่นอนว่าจะต้องมีผิดพลาด ซึ่งผู้เรียบเรียงยินดีที่จะได้รับคำทักท้วงจากท่านผู้ใช้และท่านผู้รู้ทุกท่าน ในการเรียบเรียงนี้ได้ค้นคว้าจากหนังสือภาษาไทยและภาษาต่างประเทศหลายเล่มตามบัญชีท้ายคำชี้แจงนี้ ผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณท่านผู้เขียนหนังสือเหล่านั้นไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย และขอขอบพระคุณท่านหัวหน้ากองวิชาการ ร.ร. ตน. ที่ช่วยกรุณาเขียนคำนำให้

อนึ่ง ผู้ใดมีข้อสงสัยโปรดสอบถาม

เลิศ เกษรคำ

# บัญชีหนังสือที่ใช้ค้นคว้า


1. New Higher Arithmetic.....Stone & Mallory
2. A Cambridge's Mathematics Series — Arithmetic
3. Arithmetic.....Durell & Fawdry
4. Corrective Arithmetic.....Osburn & W.J.
5. Elementary Arithmetic.....Buckingham, Burdette R.
6. Daily Life Arithmetic.....Buswell, Brownell and John
7. An Arithmetic for teachers.....Roantree and Tayler
8. Reason in Arithmetic.....Lamborn
9. Practical Arithmetic.....Borchardt
10. A School Arithmetic.....Hall and Stevens
11. College Algebra.....Keller
12. Mathematics of Finance.....Bell & Adams
13. Business Mathematics.....Richtmeyer and Foust
14. Mathematics of Business and Finance.....Dyes and Gilmore
15. Longman's Senior Arithmetic.....Dexter, Garlike and Pollard
16. Tutorial Arithmetic.....Workman
17. Mensuration.....David Munn

# สารบาญ


1. ทศนิยมและเศษส่วน ..... 1
แบบฝึกหัด ..... 6
2. ทศนิยมไม่รู้จบ ..... 10
แบบฝึกหัด ..... 18
3. การประมาณ ..... 22
แบบฝึกหัด ..... 37
4. อัตราส่วนและสัดส่วน ..... 39
แบบฝึกหัด ..... 50
5. การแบ่งส่วน ..... 54
แบบฝึกหัด ..... 58
6. หุ้นส่วน ..... 62
แบบฝึกหัด ..... 69
7 ร้อยละ ..... 73
แบบฝึกหัด ..... 78
8 กำไร – ขาดทุน ..... 82
แบบฝึกหัด ..... 91
9 การเฉลี่ย ..... 95
แบบฝึกหัด ..... 98
10 ของผสม ..... 101
แบบฝึกหัด ..... 107
11 เกณฑ์ส่วน ..... 113
แบบฝึกหัด ..... 122

12 การคำนวณขั้นสูงเกี่ยวกับจำนวนงานไม่คงที่สัมพันธ์กับเวลาและแรงงาน 126
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 129
13 การคำนวณเรื่องอัตราเร็ว ..... ..... ..... ..... ..... ..... 131
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 138
14 การคำนวณเรื่องรถไฟ ..... ..... ..... ..... ..... ..... 143
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 150
15 การคำนวณเรื่องกระแสน้ำ..... ..... ..... ..... ..... ..... 154
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 162
16 การแข่งขัน ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... 166
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 172
17 การคำนวณเรื่องนาฬิกา ..... ..... ..... ..... ..... ..... 175
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 190
18 ดอกเบี้ย ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... 194
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 210
19 เงินลด ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... 214
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 230
20 การคำนวณเรื่องสต๊อก ..... ..... ..... ..... ..... ..... 233
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 242
21 สต๊อก (ค่านายหน้าและภาษี) ..... ..... ..... ..... ..... 245
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 250
22 หุ้น ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... 253
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 256
23 รากกำลังที่สองและรากกำลังที่สาม ..... ..... ..... ..... 258
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 279

24 การคำนวณพื้นที่ (รูปสามเหลี่ยม–สี่เหลี่ยม–วงกลม–วงแหวน) ..... 281
แบบฝึกหัด ..... ..... ..... ..... ..... ..... 286
25 การคำนวณพื้นที่และบริมาตรของรูปตัน ..... ..... ..... .....
(ทรงกระบอก–ปริซึม–พีรามิด–กรวยกลม–กรวยตัด–ทรงกลม) ..... 296
26 การคำนวณเพิ่มเติม ..... ..... ..... ..... ..... ..... 300
TABLES ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... ..... 307





# ทศนิยมและเศษส่วน
# DECIMALS AND FRACTIONS

# 1

เราทราบกันง่าย ๆ ว่า ทศนิยมคือเลขหลังจุด

เช่น 24.5897

เลขที่อยู่หลังจุดคือ .5897 ∴ .5897 เรียกว่าเป็นทศนิยม (DECIMALS)

เลขที่อยู่หน้าจุด เรียกกันว่า ตัวเต็ม หรือ จำนวนเต็ม (WHOLE NUMBER)

เลขหลังจุดมีกี่ตัวเขาก็เรียกว่า มีทศนิยมเท่านั้นตำแหน่ง

เช่น 24.5897 มีเลขหลังจุด 4 ตัว

∴ เรียกว่ามีทศนิยม 4 ตำแหน่ง

เลขทศนิยมจะมีส่วนเป็น 10, 100, 1000, 10000----- เสมอไป เช่น

24.5897 เท่ากับ $24 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{7}{10000}$

หรือ 5.021 $= 5 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$

∴ $5.021 \times 10$ $= 50 + 0 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}$

$= 50 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}$

$= 50.21$

## คูณทศนิยมด้วย 10, 100, 1000,-----

มีหลักก็อนนับดูว่ามีศูนย์ข้างหลังเลขหนึ่งกี่ตัว แล้วเลื่อนจุดไปทางขวาให้เท่ากัน เช่น

$5.234 \times 10 = 52.34$

$5.234 \times 100 = 523.4$

$5.224 \times 1000 = 5234.$

## หารทศนิยมด้วย 10, 100, 1000,-----

นับศูนย์หลังเลขหนึ่งว่ามีกี่ตัว แล้วเลื่อนจุดไปทางซ้ายให้เท่ากัน ถ้าไม่พอเติมศูนย์เข้าไป

เช่น $523.4 \div 10 = 52.34$

$523.4 \div 100 = 5.234$

$523.4 \div 1000 = .5234$

$1.2 \div 1000 = .0012$

## การบวกและลบทศนิยม

มีหลักคือ 1. ตั้งจุดให้ตรงกัน

2. บวกลบกันเหมือนเลขธรรมดา

ตัวอย่าง จงรวมเข้าด้วยกัน 115.3804, 0.11, 23.0, 1.5, 5.246

วิธีทำ ตั้งจุดให้ตรงกันเสียก่อน แล้วเติมศูนย์หลังจุดให้ได้ระดับกัน (ศูนย์ที่เติมเข้าไปนี้ไม่มีค่า เพราะอยู่หลังตัวเลขหลังจุด)

115.3804
.1100
23.0000
1.5000
5.2460
145.2364

ตัวอย่าง 1 จงหาผลต่างของ 12.001 และ 5.0019

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 12.001 \\ 5.0019 \\ \hline 6.9991 \end{array}$$

5. การคูณทศนิยม

เหมือนการคูณเลขธรรมดาแต่เมื่อคูณกันเสร็จแล้ว ให้นับดูว่าทศนิยมของจำนวนที่คูณกันนั้น มีรวมกันกี่ตำแหน่งแล้วผลลัพธ์จะมีตำแหน่งเท่ากัน เช่นถ้านับได้ 6 ตำแหน่ง ผลลัพธ์ก็ต้องมีทศนิยม 6 ตำแหน่ง เราก็เริ่มนับตัวเลขผลลัพธ์จากด้านขวามาซ้ายทีละตัว เมื่อนับได้ 6 ตัว ก็ใส่จุดลงไปข้างหน้า เป็นอันว่าได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 2 จงหาผลคูณของ 6.82 และ 5

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 6.82 \\ \times \quad 5 \\ \hline 34.10 \end{array}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลคูณของ 0.0125 และ 625.2

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 625.2 \\ .0125 \\ \hline 31260 \\ 12504 \\ 6252 \\ \hline 7.81500 \end{array}$$

เราเอา 625.2 ตั้งคูณด้วย 0.0125 โดยไม่ต้องคำนึงถึงจุด คือเอา 6252 คูณด้วย 125 ได้ผลลัพธ์ 781500 แต่ทศนิยมของตัวตั้งและตัวคูณมีรวมกัน 5 ตำแหน่ง ดังนั้นจึงต้องนับจากทางขวามาทางซ้าย ให้ได้ทศนิยม 5 ตำแหน่งจึงได้ 7.81500 แต่ 0 อยู่หลังเลขหลังจุดไม่มีค่าตัดทิ้งได้ คงเหลือเป็นคำตอบเพียง 7.815 เท่านั้น

6. การหารทศนิยม

มีหลักคือ (1) ต้องทำตัวหารให้เป็นตัวเต็มเสียก่อน

(2) หารกันด้วยวิธีธรรมดา

(3) ถ้าพบจุดเมื่อใดต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์

ตัวอย่าง 4 จงหาร 725.5515 ด้วย 15

วิธีทำ

$$15\overline{)725.5515}$$

$$48.3701$$

ตัวอย่าง 5 จงหาร 1.0076 ด้วย 11

วิธีทำ

$$11\overline{)1.0076}$$

$$.0916$$

ตัวอย่าง 6 จงหาร 15.46875 ด้วย 12.375

วิธีทำ (ทำตัวหารให้เป็นตัวเต็มเสียก่อน โดยเลื่อนจุดไปทางขวาให้ทศนิยมหมดไป 12.375 เลื่อนไป 3 ตำแหน่งจึงจะหมดเป็น 12375 ดังนั้น ทางตัวตั้งคือ 15.46875 ก็ต้องเลื่อนจุดไปทางขวา 3 ตำแหน่งเท่ากัน เป็น 15468.75)

$$12375\overline{)15468.75}\,(1.25$$

12375

30937 .... (ชัก 7 ลงมาแต่ 7 อยู่หลังจุด

24750 ฉะนั้นต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์ก่อน)

61875

61875

## 7. การแปลงเศษส่วนเป็นทศนิยม

เราทราบแล้วว่า เศษเป็นตัวตั้งส่วนเป็นตัวหาร ดังนั้น การแปลงเศษส่วนให้เป็นทศนิยมก็คือการเอาเศษตั้งส่วนหาร และหารไปจนกว่าจะลงตัว เมื่อหารไปแล้วเหลือเศษหารไม่ได้ ใส่จุดที่ผลลัพธ์แล้วเติมศูนย์ลงไปได้ วิธีของตัวอย่างต่อไปนี้จะทำให้เข้าใจดี

**ตัวอย่าง 7** จงแปลง $\frac{3}{4}$ ให้เป็นทศนิยม

**วิธีทำ**

```
4) 3.0000...(.75
   28
   ---
   20
   20
   ==
```

3 เป็นจำนวนเต็ม เมื่อใส่จุดข้างหลังเติม 0 ลงไปก็ตั้งได้ 4 หาร 3 ไม่ได้ ถัดจาก 3 ไปเป็นจุด ต้องลบจุดทิ้ง ซึ่งจะลบจุดทิ้งได้โดยการเติมจุดเข้าที่ผลลัพธ์ ดังนั้น ตัวตั้งจึงเป็น 30000----- เมื่อเอา 4หาร จึงได้ .7500----- แต่ 0 หลังตัวเลขหลังจุดไม่มีค่า จึงตอบเพียง .75 เท่านั้น

**ตัวอย่าง 8** จงแปลง $\frac{3}{32}$ ให้เป็นทศนิยม

**วิธีทำ**

```
32) 3.000000..(.09375
    288
    ---
    120
     96
    ---
    240
    224
    ---
    160
    160
    ===
```

32 หาร 3 ไม่ได้ต้องลบจุดออก จึงใส่จุดที่ผลลัพธ์ เลื่อนไปหาร 30 แต่ .32 ก็ยังหาร 30 ไม่ได้ต้องเลื่อนไปหาร 300 จึงต้องใส่ 0 เข้าที่ผลลัพธ์อีกตัวหนึ่งจึงหารได้

ทำอีกวิธีหนึ่ง $\frac{3}{32}$ อาจทำเป็นทศนิยมได้อีกวิธีหนึ่ง โดยหาตัวมาคูณทั้งเศษและส่วน ให้ส่วนเป็น 100000..... แต่จะมี 0 กี่ตัวนั้นรู้ได้โดยเอา 32 ไปหาร 1000000------ ดู หารได้ลงตัวแค่ไหนก็เอาผลหารมาคูณทั้งเศษและส่วน ปรากฏว่าเอา 32 หาร 10000000------ นั้นลงตัวเพียง 100000 ซึ่งได้ผลลัพธ์ 3125 ดังนั้น จึงเอา 3135 ไปคูณทั้งเศษและส่วน (ซึ่งค่าไม่เปลี่ยนแปลง)

วิธีทำ

$$\frac{3}{32} = \frac{3\times3125}{32\times3125}$$

$$= \frac{93\,75}{100000}$$

$$= .09375$$

ศูนย์มี 5 ตัว ∴ ทศนิยมต้องมี 5 ตำแหน่ง นับดูเศษมีเลข 4 ตัว จึงต้องเติม 0 เข้าข้างหน้าอีก 1 ตัว เพื่อให้ครบห้าตัวแล้วใส่จุดเข้าข้างหน้า

---

## แบบฝึกหัด 1

จงทำให้สำเร็จ (วงเล็บข้างท้ายเป็นคำตอบ)

1. $15\frac{1}{4}+7\frac{3}{4}+6\frac{2}{3}$ $[29\frac{2}{3}]$
2. $15\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times(7\frac{3}{4}-6\frac{2}{3})$ $[15\frac{35}{36}]$
3. $10-\left\{2\frac{1}{2}-(4\frac{1}{2}-1\frac{1}{4})\right\}$ $[10\frac{3}{4}]$
4. $23\frac{1}{2}-\left\{15\frac{1}{4}+\frac{2}{3}(7\frac{3}{4}-6\frac{2}{3}\right\}$ $[7\frac{19}{36}]$
5. $3\frac{1}{2}-\left\{5\frac{3}{4}-\frac{2}{3}(3\frac{2}{3}+2\frac{1}{5})\right\}$ $[1\frac{119}{180}]$
6. $6-\left\{1\frac{1}{2}-\frac{3}{5}(1\frac{7}{9}-\frac{1}{2})\right\}$ $[5\frac{4}{15}]$
7. $7\frac{3}{4}-\left\{3\frac{4}{7}-\frac{3}{8}(1\frac{7}{9}-\frac{1}{2})\right\}$ $[4\frac{221}{336}]$
8. $(2\frac{1}{4}-\frac{3}{4})(13\frac{5}{6}-\frac{2}{3})(1\frac{7}{9}-\frac{1}{2})$ $[25\frac{17}{72}]$

9. $1 \div [4 - 1 \div \{2 - 1 \div (1 - \frac{5}{13})\}]$ $[\frac{3}{4}]$

10. $(3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{3} - 5\frac{1}{4}$ ของ $\frac{6}{7}) \div (3\frac{1}{2} - 4\frac{1}{3}$ ของ $\frac{7}{26} + 4\frac{1}{5}$ ของ $\frac{3}{7}) \times 1\frac{33}{91}$ [1]

11. $6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6}}$ $(6\frac{6}{37})$

12. $\cfrac{6\frac{1}{3}}{12\frac{5}{9}} + \cfrac{6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}} - \cfrac{4\frac{1}{2}}{7}$ $(\frac{9}{16})$

13. $\cfrac{\frac{13}{42} \times \frac{1}{6} - \frac{11}{18} \times \frac{1}{9}}{\frac{16}{21} \times \frac{1}{12} - 1\frac{6}{7} \times \frac{1}{36}}$ $(\frac{2}{3})$

14. $\cfrac{2\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ ของ $1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}$ ของ $3\frac{1}{3} + \frac{13}{36}}$ (1)

15. $\cfrac{6\frac{1}{2} - 4\frac{1}{4}}{7\frac{1}{3} + 1\frac{4}{7}} \div \cfrac{4\frac{1}{3}$ ของ $1\frac{1}{4}}{2\frac{3}{7}$ ของ $3\frac{2}{3}}$ $(\frac{3}{5})$

16. $\cfrac{6 + \cfrac{1}{8 - \cfrac{1}{6}}}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4}}} \times 10\frac{8}{9}$ (18)

17. $\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \frac{5}{13}}}}$ $(\frac{3}{4})$

18. $\cfrac{1\frac{2}{3}$ ของ $1\frac{1}{4}}{3\frac{2}{5} + \cfrac{5}{1\frac{29}{41}}} + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \frac{8}{9}}}$ (1)

19. $(6 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{6}} - \cfrac{9\frac{41}{88} + 39\frac{1}{4} \times 2\frac{3}{11}}{34 - 3\frac{8}{11}} + 1\frac{22}{27}$ ของ $\frac{3}{55})$ ของเงิน 1.25 บาท [3.75 บาท]

20. $\dfrac{\frac{1}{22}\text{ของ}\,6\frac{13}{14}\text{ของ}\,24\frac{11}{12}-4\frac{13}{18}\times 3\frac{33}{74}\div 3\frac{37}{96}}{8\frac{17}{19}\times 5\frac{14}{39}\div 4\frac{15}{32}-7\frac{17}{20}\times 5\frac{11}{65}\div 14\frac{21}{25}}\times 4\frac{8}{23}$ ของเงิน 77 บาท [75 บาท]

21. 3.76 + 82.54 (86.3)

22. 56.37 + 2.451 + 8.56 (67.381)

23. 361.1264 + 8.351 + 10.0004 + 136.28 (515.7578)

24. 0.015625 + 150 + 0.051 + 526.015 + 0.0001515 (676.0817765)

25. 16.01 + 1884 + 0.001884 + 86.00080801 + 2.6 (1988.61269201)

26. 6.825 − 4.75 (2.075)

27. 0.183 − 0.0864 (0.0966)

28. 4.62 − 3.001004 (1.618996)

29. 56.2 − 1.0015 (55.1985)

30. 0.01 − 0.0025 (0.0075)

31. 3.1678 × 63 (199.5714)

32. 19.75 × 7.2 (142.2)

33. 679.85 × 0.00056 (0.380716)

34. 0.0703 × 0.00055 (0.000038665)

35. 0.00001 × 0.00036 (0.0000000036)

36. 56.787 ÷ 12 (4.73225)

37. 0.255 ÷ 34 (0.0075)

38. 0.0189 ÷ 8.75 (0.00216)

39. 0.0598635 ÷ 112.95 (0.00053)

40. 0.000133 ÷ 8.75 (0.0000152)

จงแปลงเป็นทศนิยม

41. $\frac{413}{625}$ (0.6608)

42. $\frac{71}{625}$ (0.1136)

43. $\frac{814}{1250}$ (0.6512)

44. $\frac{5}{64}$ (0.078125)

45. $105\frac{23}{320}$ (105.071875)

จงแปลงเป็นทศนิยม ต้องการทศนิยม 6 ตำแหน่ง

46. $8\frac{15}{34}$ (8.441176)

47. $3\frac{4}{25}$ (3.088888)

48. $\frac{7}{26}$ (0.269230)

49. $3\frac{37}{96}$ (3.385416)

50. $9\frac{5}{108}$ (9.046296)

---

# ทศนิยมไม่รู้จบ
# RECURRING DECIMALS

## 2

ในการแปลงเศษส่วนเป็นทศนิยมนั้น เราเอาเศษตั้งส่วนหาร และหารไปจนกว่าจะลงตัว แต่มีเศษส่วนบางจำนวนก็หารต่อไปได้อย่างไม่มีสิ้นสุด เช่น

$\frac{8}{3} = 2.66666\text{------}$

$\frac{9}{7} = 1.142857142857142857\text{------}$

$\frac{21}{22} = 0.9545454\text{------}$

ทศนิยมซึ่งหารต่อไปได้ไม่รู้สิ้นสุดนี้ เราเรียกว่า ทศนิยมไม่รู้จบ

**วิธีเขียนทศนิยมไม่รู้จบ** ใช้เครื่องหมาย . (จุด) เขียนไว้ส่วนบนของตัวเลข

เครื่องหมาย . (จุด) นี้ถ้าอยู่บนเลขตัวใดหมายความว่าต่อจากนั้นไปเลขจะซ้ำกับ

ตัวเดิม เช่น $2.\dot{6}$ ก็คือ 2.66666------

$1.\dot{1}42857$ ก็คือ 1.142857142857------

$0.9\dot{5}\dot{4}$ ก็คือ 0.9545454------

**วิธีอ่าน** ต้องอ่านซ้ำเลขตัวที่อยู่ระหว่างจุด เช่น

2.6̇ อ่านว่า สองจุดหก, หกไม่รู้จบ (หมายความว่าไม่รู้จบคือเลข 6)

1.1̇42857̇ อ่านว่า หนึ่งจุดหนึ่งสี่สองแปดห้าเจ็ด, หนึ่งสี่สองแปดห้าเจ็ดไม่รู้รับ (หมายความว่า เลขไม่รู้จบคือเอียนไปตั้งแต่เลข 1 ถึงเลข 7 ได้เรื่อยๆ)

0.95̇4̇ อ่านว่า ศูนย์จุดเก้าห้าสี่, ห้าสี่ไม่รู้จบ (หมายความว่าเลขไม่รู้จบคือ 54, เลข 9 ไม่เกี่ยว)

## 1. การบวกและลบทศนิยมไม่รู้จบ

มีหลักคือ (1) เขียนทศนิยมลงไปให้จุดตรงกัน เฉพาะตัวไม่รู้จบให้เขียนให้เลยไว้มาก ๆ

(2) ดูว่าตัวทศนิยมที่รู้จบนั้นมากที่สุดกี่ตำแหน่ง แล้วขีดเส้นลงไป

(3) หา ค.ร.น. ของจำนวนตำแหน่งของทศนิยมไม่รู้จบ หาได้เท่าใดให้ขีดเส้นอีกเส้นหนึ่ง ให้จำนวนทศนิยมที่อยู่ในระหว่างเส้นทั้งสองเท่ากับ ค.ร.น. ที่หาได้

(4) ลบทศนิยมที่เขียนเลยไว้ออก ให้เหลือก่อนถึงเส้นขวาสัก 2 ตำแหน่งเผื่อทด

(5) บวกลบกันด้วยวิธีธรรมดา

(6) ผลลัพธ์ที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบคือ เลขซึ่งอยู่ระหว่างเส้นทั้งสองนั้น เลขที่เขียนเผื่อทดนั้นตัดทิ้งไป

จงสังเกตตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1** จงรวมเข้าด้วยกัน 2.5462̇, 3.251 และ 0.3472̇

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| 2.546 | 246246 | 2462 --- |
| 3.251 | | |
| 0.347 | 272727 | 2727 --- |
| 6.144 | 518972 | 51 |

**ตอบ** 6.144518972̇

**คำอธิบาย** ขั้นแรกเราเขียน 2.54624624624624------

3.251

0.34727272727272------

เราเขียนตัวไม่รู้จบไว้ให้มาก ๆ คือเขียนไว้ให้เกินพอ (ถ้าเข้าใจแล้วก็ไม่จำต้องเขียนเช่นนั้น)

เราดูว่าตัวที่รู้จบอย่างมากที่สุดมี 3 ตำแหน่ง คือ 3.251 ดังนั้นจึงขีดเส้นที่หลังเลข 1 ตัดขึ้นไปหลังเลข 546 และลงมาตัดหลังเลข 347

ขั้นต่อไปเราหา ค.ร.น. ของตัวที่ไม่รู้จบ

จำนวนแรก 2.5462 มีทศนิยมไม่รู้จบ 3 ตำแหน่ง

จำนวนที่สอง 3.251 ไม่มี คือมี 0 ตำแหน่ง

จำนวนที่สาม 0.3472 มีทศนิยมไม่รู้จบ 2 ตำแหน่ง

∴ เราหา ค.ร.น. ของ 3, 0, 2 ได้ 6

เราจึงนับเลขจากเส้นแรกไปให้ได้ 6 ตัว แล้วจึงขีดเส้นไว้อีกเส้นหนึ่ง แล้วตบเลขที่เราเขียนเกินไปให้เหลือไว้เผื่อทดเพียงสองตำแหน่ง คือเหลือไว้เพียง 24, และ 27 (ตามตัวอย่าง)

ขั้นต่อไป เราก็บวกกันอย่างธรรมดา

**ผลลัพธ์**

ทศนิยมที่อยู่หลังจุดถึงเส้นแรก เป็นทศนิยมรู้จบ

ทศนิยมที่อยู่ระหว่างเส้นทั้งสอง เป็นทศนิยมไม่รู้จบ

ทศนิยมที่อยู่หลังเส้นที่สองตัดทิ้งไปเลย

**ตัวอย่าง 2** จงรวมเข้าด้วยกัน 5.762, 0.549, 1.204

วิธีทำ

| | | |
|---|---|---|
| 5.76 | 262626 | 26----- |
| 0.54 | 954954 | 95----- |
| 1.20 | 441444 | 44----- |
| 7.51 | 662025 | 65 |

ตอบ 7.51662025

อธิบาย ทศนิยมรู้จบที่มากที่สุดมี 2 ตำแหน่ง ∴ ขีดเส้นไว้นับจากจุดเพียง 2 ตำแหน่ง
ทศนิยมไม่รู้จบมี 2 ตำแหน่ง, 3 ตำแหน่ง และ 1 ตำแหน่ง
∴ ค.ร.น. ของจำนวนตำแหน่งของทศนิยมไม่รู้จบ คือ 6 ตำแหน่ง
ฉะนั้นจึงขีดเส้นไว้อีกเส้นหนึ่งให้ตำแหน่งที่อยู่ระหว่างเส้นมี 6 ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 3 จงเอา 2.46216 หักออกจาก 9.214

วิธีทำ

| | | |
|---|---|---|
| 9.2 | 1321421421412 | 14--- |
| 2.4 | 921662166216 | 62--- |
| 6.7 | 399479975925 | 52 |

ตอบ 6.7520479975925

อธิบาย 2.46216 มีทศนิยมรู้จบ 1 ตำแหน่ง ไม่รู้จบ 4 ตำแหน่ง
9.214 มีทศนิยมไม่รู้จบ 3 ตำแหน่ง
∴ ขีดเส้นแรกห่างจากจุด 1 ตำแหน่ง
ค.ร.น. ของทศนิยมไม่รู้จบคือ 12
∴ ขีดเส้นที่สองให้มีทศนิยมอยู่ระหว่างเส้น 12 ตำแหน่ง

## 2. การคูณทศนิยมไม่รู้จบด้วยตัวเต็มหรือทศนิยมรู้จบ

มีหลักคิด

1. เขียนตัวตั้งลงไปแล้วขีดเส้นไว้ เขียนเลขไปเผื่อทด 2 ตำแหน่ง

2. เขียนตัวคูณลงไปใต้ตัวตั้งให้ชิดเส้น
3. ถ้าตัวคูณมีหลายตัว ให้คูณทีละตัวอย่างวิธีธรรมดา แต่ต้องคูณทศนิยมตัวที่เขียนไว้นอกเส้นเสียก่อน คูณตัวทดได้เท่าไรเก็บไว้ในใจหรือในเศษกระดาษแล้วจึงคูณตัวที่อยู่ภายในเส้น (คือตัวตั้งที่แท้จริง) คูณได้เท่าไรให้เอาที่ทดไว้นั้นมารวมด้วย แล้วใส่ลงไปข้างล่างให้ตรงกับตัวตั้งตัวที่คูณครั้งแรก แล้วคูณเรื่อยไปจนหมดตัวตั้ง แล้วจึงดูว่าตัวตั้งมีทศนิยมไม่รู้จบกี่ตำแหน่ง ให้ใส่จุดไม่รู้จบไว้ในผลลัพธ์ที่คูณได้ ให้เท่ากับทศนิยมไม่รู้จบของตัวตั้ง
4. ถ้ามีตัวคูณหลายตัว ก็ทำโดยทำนองเดียวกับข้อ 3
5. เขียนตัวไม่รู้จบให้ถึงเส้นที่ชิดไว้ทุกแถว แล้วเขียนเลยเส้นไปเผื่อทดอีก 2 ตำแหน่ง
6. รวมผลลัพธ์ทั้งหมด เพื่อเป็นคำตอบ
7. คำตอบนั้นจะมีทศนิยมกี่ตำแหน่ง ให้นับดูทศนิยมของตัวตั้งและตัวคูณรวมกัน นับรวมกันได้เท่าใด ก็ให้นับจากผลลัพธ์ตัวที่อยู่ชิดเส้นไปทางซ้าย นับไปให้ได้เท่ากับที่นับทศนิยมตัวตั้งและตัวคูณ เมื่อนับครบเท่ากันแล้วก็ใส่จุดไว้

ส่วนทศนิยมไม่รู้จบนั้นให้ดูที่ตัวตั้งว่ามีทศนิยมไม่รู้จบกี่ตำแหน่ง แล้วจึงเริ่มนับจากเส้นไปทางซ้ายอีกที่หนึ่งให้ได้เท่ากัน แล้วใส่จุดไม่รู้จบไว้ ให้มีตำแหน่งเท่ากับตัวตั้ง (คือถ้าตัวตั้งมีทศนิยมไม่รู้จบ 5 ตำแหน่ง ผลลัพธ์จะมีทศนิยมไม่รู้จบห้าตำแหน่งเท่ากัน)

สำหรับเลขที่รวมลงมาเผื่อทดทางด้านขวาของเส้นนั้นให้ตัดทิ้งไป

**ตัวอย่าง 4** จงคูณ 7.6 ด้วย 7

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| | 7.6 | 66 |
| | 7 | |
| 53. | 6 | 62 |

**ตัวอย่าง 5** จงคูณ 1.8$\dot{4}\dot{7}$ ด้วย 6.3185

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| 1.8$\dot{4}\dot{7}$ | 47 - - - - | เอา 5 คูณ 7 ตัวที่อยู่หลังเส้นได้ 35 ทดไว้ 3 แล้วคูณ 4 ตัวที่อยู่หลังเส้นได้ 20 รวมเป็น 23 แล้วทดไว้ 2 ตราบนี้จึงเริ่มคูณตัวตั้งแท้ คือ 7 ตัวที่อยู่ในเส้น 5 คูณ 7 ได้ 35 บวกกับทดอีก 2 เป็น 37 ใส่ 7 ให้ตรงกับตัวตั้งคือให้ตรง 7 แล้วคูณต่อไปเรื่อย ๆ ให้ครบตัวคูณ แล้วใส่จุดไม่รู้จบไว้ที่ผลลัพธ์ แต่ละแถวให้เท่ากับตัวไม่รู้จบของตัวตั้งคือ 2 ตัว |
| 6.3185 | | |
| 9237 | | |
| 14779 | | |
| 1847 | | |
| 5542 | | |
| 11084 | | |
| 11.6$\dot{7}\dot{3}$1$\dot{6}\dot{9}\dot{1}$ | | |

**นี่เป็นตอนที่หนึ่ง**

เมื่อคูณแต่ละแถวเสร็จแล้ว จะเห็นว่ามีตัวไม่รู้จบอยู่ทุกแถว คือ

$\dot{3}\dot{7}$, $\dot{7}\dot{9}$, $\dot{4}\dot{2}$ และ $\dot{8}\dot{4}$ เราเขียนตัวไม่รู้จบเหล่านี้ให้ยาวไปจนถึงเส้น และเลยไปเผื่อทดอีก 2 ตำแหน่ง แล้วจึงบวกกัน

| | | |
|---|---|---|
| 1.8$\dot{4}\dot{7}$ | 47 - - - | เราเริ่มบวกจากด้านขวาก่อน เราบวกตัวเผื่อทดแถวแรกได้ 29 ใส่ 9 ทด 2 แถวชิดเส้นได้ 26 เป็น 28 ใส่ 8 ทด 2 แล้วจึงบวกผลลัพธ์แท้จริงซึ่งอยู่ชิดเส้นข้างใน บวกได้ 29 เอา 2 ไปบวกเข้าได้ 31 แล้วจึงบวกต่อไปเรื่อย ๆ 89 ที่เขียนไว้เผื่อทดตัดทิ้งไปเลย ทศนิยมของตัวตั้งและตัวคูณมีรวมกัน 7 ตำแหน่ง มีไม่รู้จบ 2 ตำแหน่ง รู้จบเสีย 5 ตำแหน่ง ตัวไม่รู้จบจะต้องอยู่ท้ายเสมอ จะอยู่ต้นหรือกลาง ๆ ไม่ได้ |
| 6.3185 | | |
| 9237 | 37 - - - | |
| 147797 | 97 - - - | |
| 184747 | 47 - - - | |
| 5542424 | 24 - - - | |
| 116848484 | 84 - - - | |
| 11.6732691 | 89 | |

**ตอบ** 11.6$\dot{7}\dot{3}$1$\dot{6}\dot{9}\dot{1}$

## 3. การหารทศนิยมไม่รู้จบด้วยตัวเต็มหรือทศนิยมรู้จบ

การหารไม่มีกฎเกณฑ์พิเศษ ดังนั้นเราจะต้องตั้งหารกันอย่างธรรมดา แล้วหารไปจนกว่าเลขจะซ้ำกัน เมื่อเลขซ้ำกันก็แปลว่าเป็นทศนิยมไม่รู้จบ ซ้ำกันตั้งแต่ไหนก็เป็นทศนิยมไม่รู้จบตั้งแต่นั้น

**ตัวอย่าง 6** จงหาร 15.76203 ด้วย 5

**วิธีทำ**

$$5\overline{)15.7620362036362036\text{------}}$$

$$3.1524072407240724072407\text{------}$$

จะเห็นได้ว่าเลขที่ซ้ำกันคือ 2407, 2407, 2407----

ฉะนั้นทศนิยมไม่รู้จบคือ $.\dot{2}4\dot{0}7$

$\therefore$ คำตอบคือ $3.15\dot{2}4\dot{0}7$

## 4. การคูณและหารทศนิยมไม่รู้จบด้วยทศนิยมไม่รู้จบ

ทำได้โดยการแปลงเป็นเศษส่วนเสียก่อนแล้วจึงคูณหารกัน

### วิธีแปลงทศนิยมไม่รู้จบเป็นเศษส่วน

เราทราบแล้วว่าทศนิยมธรรมดานั้นมีส่วนเป็น 10, 100, 1000 แล้วแต่ตำแหน่งทศนิยม มีกี่ตำแหน่งก็มีศูนย์เท่านั้น เช่น

$1.25 = 1\frac{25}{100}$ (มีทศนิยม 2 ตำแหน่ง $\therefore$ มีศูนย์ 2 ตัว)

$0.123 = \frac{123}{1000}$ (มีทศนิยม 3 ตำแหน่ง $\therefore$ ส่วนมีศูนย์ 3 ตัว) เป็นต้น

แต่สำหรับทศนิยมไม่รู้จบนั้นมีวิธีทำดังนี้

ก. ทศนิยมไม่รู้จบล้วน เช่น 0.6. 1.234, 5.6789 เป็นต้น

มีหลักว่า ให้นับดูว่าตัวไม่รู้จบนั้นมีกี่ตำแหน่ง ให้ใส่ 9 ลงไปเป็นส่วนให้เท่ากัน เช่น

0.9 มีทศนิยมไม่รู้จบ 1 ตำแหน่ง $\therefore$ ใส่ 9 หนึ่งตัว คือ $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$1.\dot{2}3\dot{4}$ มี 3 ตำแหน่ง $\therefore$ มี 9 เป็นส่วน 3 ตัว คือ $= 1\frac{234}{999}$

$5.\dot{6}7\dot{8}9$ มี 4 ตำแหน่ง $\therefore$ มี 9 เป็นส่วน 4 ตัว คือ $= 5\frac{6789}{9999}$

**ตัวอย่าง 7** จงแปลง $0.\dot{4}28571\dot{4}$ เป็นเศษส่วน

**วิธีทำ** $0.\dot{4}28571\dot{4} = \frac{428571}{999999}$

$= \frac{3}{7}$ (ตัดเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

**ตัวอย่าง 8** จงแปลง $0.\dot{4}\dot{5}$ เป็นเศษส่วน

**วิธีทำ** $0.\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99}$

$= \frac{5}{11}$

ข. **ทศนิยมคละ** คือทศนิยมรู้จบและไม่รู้จบปนกัน มีหลักคือ

(1) เศษ คือจำนวนทศนิยมทั้งหมดหักออกด้วยทศนิยมรู้จบ

(2) ส่วน คือเลข 9 ซึ่งตามหลังด้วย 0 แต่ 9 จะมีกี่ตัวให้นับดูว่าทศนิยมไม่รู้จบมีกี่ตำแหน่ง และเลข 0 จะมีกี่ตัวให้นับดูจากจำนวนตำแหน่งของทศนิยมรู้จบ

**ตัวอย่าง 9** จงแปลง $0.0\dot{5}\dot{4}$ เป็นเศษส่วน

**วิธีทำ** $0.0\dot{5}\dot{4} = \frac{054-0}{990}$

ทศนิยมทั้งหมดคือ 054 ลบออกจากตัวที่รู้จบ (คือ 0) $= 054-0 = 54$

$= \frac{54}{990}$ ตัวไม่รู้จบมี 2 ตำแหน่ง $\therefore$ 9 มี 2 ตัว

$= \frac{6}{110}$ ตัวรู้จบมี 1 ตำแหน่ง $\therefore$ 0 มี 1 ตัว

$= \frac{3}{55}$

**ตัวอย่าง 10** จงแปลง $6.03\dot{3}2\dot{7}$ เป็นเศษส่วน

**วิธีทำ** $6.03\dot{3}2\dot{7} = 6\frac{03327-033}{99000}$

$= 6\frac{3294}{99000}$

$= 6\frac{1647}{49500}$

**ตัวอย่าง 11** จงทำให้สำเร็จ $0.\dot{3} \times 1.\dot{0}\dot{6}$

**วิธีทำ** $0.\dot{3} \times 1.\dot{0}\dot{6} = \frac{3}{9} \times 1\frac{6}{99}$

$= \frac{3}{9} \times \frac{105}{99}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{105}{99}$

$= \frac{35}{99}$

$= 0.\dot{3}\dot{5}$

**ตัวอย่าง 12** จงหาค่าของ $0.08\dot{9} \times 0.0\dot{2}\dot{8}$

**วิธีทำ** $0.08\dot{9} \times 0.0\dot{2}\dot{8} = \frac{89-8}{900} \times \frac{28-2}{900}$

$= \frac{81}{900} \times \frac{26}{900}$

$= \frac{9}{100} \times \frac{26}{900}$

$= \frac{26}{1000}$

$= .0026$

**ตอบ** 0.0026

---

## แบบฝึกหัด 2 (ผสม)

จงหาค่าของ

1. $0.\dot{3} + 0.\dot{6} + 0.1\dot{2}$ $(1.1\dot{2})$
2. $0.\dot{6}4\dot{8} + 0.0\dot{1}\dot{6} + 3.5\dot{6}$ $(4.2\dot{3}04668\dot{)}$
3. $6.5\dot{6}\dot{3} + 1.5\dot{6} + 0.0\dot{1}\dot{8}$ $(8.1\dot{4}74019\dot{)}$
4. $2.00\dot{3}\dot{5}\dot{8} + 0.08\dot{3}88994\dot{} + 35.1612 + 1.00\dot{6}$ $(38.2\dot{5}53\dot{4}24691\dot{)}$
5. $3.\dot{7}67\dot{1} + 0.0\dot{6}2\dot{1} + 0.0\dot{1}\dot{6} + 0.24$ $(4.08\dot{5}35489\dot{5}84994\dot{)}$
6. $43.1\dot{5} - 9.1\dot{4}$ $(34.0\dot{1})$
7. $20.\dot{3}\dot{1} - 17.\dot{2}\dot{5}$ $(3.\dot{0}\dot{6})$
8. $6.\dot{4} - 5.\dot{9}$ $(0.\dot{8})$

9. $174.\dot{1} - 143.0\dot{2}\dot{9}$ $(31.0\dot{8}\dot{1})$

10. $36.6\dot{5}71428 - 23.6\dot{9}\dot{1}$ $(12.9\dot{6}52\dot{2}3\dot{6})$

11. $0.52380\dot{9} \times 7.62$ $(3.9914\dot{2}7\dot{4}\dot{8})$

12. $0.76432\dot{1} \times 5.625$ $(4.2993074\dot{3}\dot{2})$

13. $3.0\dot{9}\dot{7} \times 0.00061$ $(0.0018892\dot{2})$

14. $6.3428\dot{7} \times 5.01723$ $(31.823652063\dot{9})$

15. $45.6201\dot{8} \times 28.31$ $(1291.507347\dot{2})$

16. $0.3325 \div 5$ $(0.0665\dot{1})$

17. $37.0\dot{8}\dot{7} \div 9$ $(4.120787\dot{4}\dot{5}\dot{4})$

18. $0.2\dot{0}0\dot{1} \div 1001$ $(0.0\dot{0}0\dot{1}\dot{9}\dot{9}\dot{9})$

19. $31.8236520\dot{6}\dot{3}\dot{9} \div 10.0344\dot{6}$ $(3.17143\dot{6})$

20. $0.\dot{5}\dot{4} \div 0.\dot{2}$ $(2.\dot{4}\dot{5})$

21. $0.00\dot{0}\dot{9} \div 0.0\dot{9}0\dot{9}$ $(0.00\dot{9}\dot{9}\dot{9})$

22. $6.835\dot{1} \times 0.\dot{7}$ $(5.3\dot{1}\dot{6}\dot{2})$

23. $0.3936\dot{1}\dot{7} \div 0.\dot{1}\dot{8}$ $(2.\dot{1}\dot{6}\dot{4}\dot{8})$

24. $0.0\dot{1}3\dot{7}\dot{2}\dot{6} \div 0.0\dot{3}\dot{3}\dot{2}\dot{7}$ $(0.\dot{4}\dot{1}\dot{2}\dot{5})$

25. $0.000\dot{6} \times 1.8\dot{7}$ $(0.0012\dot{5}\dot{1}\dot{8})$

26. $\dfrac{0.000133}{8.75}$ $(0.0000152)$

27. $\dfrac{(12.5)^2}{(0.005)^3}$ $(1250000000)$

28. $\dfrac{22.4}{0.25} + \dfrac{2.50}{0.8} + \dfrac{1.2}{0.0075}$ $(562.1)$

29. $\dfrac{1}{1.\dot{6}} \div \dfrac{0.\dot{1}42857}{4\frac{1}{5}}$ $(17.64)$

30. $5.634 \times 0.0057 + \frac{4.2325}{8465} \div \frac{0.39424}{5632}$ $(7.1749709428571\dot{4})$

31. $\frac{3.302083\dot{3}}{16.510416\dot{6}} + \frac{6.\dot{6} \times 0.375}{1\frac{6}{7} \text{ ของ } 0.538461\dot{5} \text{ ของ } \frac{3}{4}} + \frac{2.77\dot{2}}{11.09}$ $(3.78\dot{3})$

32. $\frac{1}{4}$ ของ $\frac{7}{8}$ ของ $\left(\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} + \frac{4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{4}}\right)$ $(\frac{1}{3})$

33. $\frac{1\frac{1}{8}}{1\frac{3}{14}} \div \left\{\left(\frac{3}{17} \times 1\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{170}\right\}$ $(4\frac{3}{8})$

34. $\frac{1\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}$ ของ $\frac{1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}}{2\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}} + \frac{2\frac{1}{5}+4\frac{1}{3}}{1\frac{1}{5}-\frac{1}{9}}$ ของ $\frac{1}{9}$ $(1\frac{7}{87})$

35. ในการเกี่ยวข้าว ก. เกี่ยวได้ 0.0075 ของทุ่งนา ข. เกี่ยวได้ 0.125 เหลือข้าวในนาอีกเท่าไร (0.8975 ของทุ่งนา)

36. จงหาผลต่างของ $2.53\dot{5}$ และ 2.535 เป็นทศนิยมและเศษส่วน $(0.000\dot{5}\dot{3}\dot{5}$ และ $\frac{107}{199800})$

37. จงรวมเข้าด้วยกัน $4\frac{5}{18}$, $3\frac{6}{7}$, $1\frac{5}{36}$ และ $\frac{2}{21}$ $(9\frac{31}{84})$

38. เด็กคนหนึ่งใช้เงินไป 0.25 ของเงินที่มีอยู่ แล้วให้เพื่อนไปอีก 0.875 ของเงินที่เหลือจากใช้ไปครั้งแรก ปรากฏว่าเหลือเงินอยู่อีก 9 บาท ครั้งแรกเขามีเงินเท่าไร (96 บาท)

39. จงทำให้เป็นผลสำเร็จและตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง ★ (1.043)

$$\frac{2}{3} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{1}{2 - \frac{1}{5}}}}$$

40. จงหาผลสำเร็จ ★ (0.2)

$$\frac{4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{12}}{6\frac{2}{3} + 4\frac{7}{12}} - \frac{2.1 - 1.94}{0.93 + 0.87}$$

41. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ ★ (0.1)

$$\frac{5\frac{1}{7}+3\frac{1}{9}}{7\frac{11}{12}-1\frac{1}{4}\text{ ของ }1\frac{8}{21}}\times\frac{\dot{0}.\dot{8}\dot{5}-0.\dot{8}\dot{5}}{0.04}$$

42. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ ★ ($\frac{13}{22}$)

$$\frac{3\frac{1}{5}+4\frac{1}{3}-5\frac{1}{4}\text{ ของ }\frac{6}{7}}{4\frac{1}{2}-4\frac{1}{3}\text{ ของ }\frac{7}{26}+4\frac{1}{5}\text{ ของ }\frac{3}{7}}$$

43. $\dfrac{3\frac{2}{3}-5\frac{1}{4}\div 3\frac{1}{2}+4\frac{5}{6}}{3\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}\times 4\frac{5}{6}}$ ★ (3)

---

เครื่องหมาย ★ ข้อสอบใน ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

★★ ข้อสอบใน ม. 8

# การประมาณ
# APPROXIMATION

# 3

ในการคำนวณเกี่ยวกับเรื่องทศนิยมนั้น ถ้าเป็นเรื่องที่ไม่ต้องการความละเอียดนัก เช่น การวัดความยาวของผ้า, เศษของสตางค์ หรืออื่น ๆ เขาก็มักตัดทศนิยมที่ยาว ๆ ออกเสียบ้าง จำนวนทศนิยมที่ตัดออกไปนั้นเขาจะพิจารณาแล้วว่าเป็นจำนวนเล็กน้อย ไม่ทำให้เสียหายแก่การคำนวณมากนัก เช่น เราซื้อของมา 7 ชิ้นราคา 5 บาท 15 สตางค์ ถ้าเราอยากจะขายเสียสัก 1 ชิ้น เพราะต้องการเพียง 6 ชิ้น หรืออย่างไรก็ตาม ในราคาที่เท่าทุนเราก็เอา 5.15 บาท ตั้งเอา 7 หาร

$$\therefore \text{ราคาชิ้นละ} \quad \frac{5.15}{7} = .7357124\text{-----} \text{ บาท}$$

หรือ $= 73.57124$-----สตางค์

จะเห็นได้ว่าราคาชิ้นละ 73 สตางค์กับทศนิยมอีกมากมายไม่รู้จบ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วเขาไม่คิดกันสำหรับของเช่นนี้ คงคิดราคาก็เพียง 73 หรือ 74 สตางค์

การที่เราตัดเอาเพื่อสะดวกในการปฏิบัตินั้น จะเห็นว่าไม่ทำให้ผิดความจริงไปมากนัก

เพราะเป็นของเล็กน้อย แต่ถ้าเป็นการคำนวณอย่างอื่น เช่นคำนวณน้ำหนักของวัตถุโครงสร้างเครื่องยนต์ หรือระยะต่าง ๆ ของเครื่องกลใกล้ที่ต้องการความละเอียดแล้ว ทศนิยมมากๆ ก็ยังจำเป็นอยู่

การปัดทศนิยมทิ้ง คงเหลือไว้เพียงเล็กน้อยนั้น เรียกว่า การประมาณ

ซึ่งจากคำว่า "การประมาณ" ก็บอกแล้วว่าไม่ใช่ถูกต้อง เพียงแต่ประมาณใกล้เคียง (Approximately) เท่านั้น

## หลักการตัดทศนิยม

เช่นต้องการตัด .1234567 ให้เหลือเพียงทศนิยม 5 ตำแหน่งก็ทำได้ คือ เป็น .12346 เหตุที่ตำแหน่งสุดท้ายเป็น 6 แทนที่จะเป็น 5 ตามเดิมนั้น ก็เพราะเลขตัวที่ถัด 6 ไปคือ 7 มากกว่าครึ่งต้องทดเข้ามา 1 เพื่อไม่ให้ผิดความจริงไปมาก

มีหลักคือ

1. ใจทย์ต้องการทศนิยมกี่ตำแหน่งก็ปัดลงไปแค่นั้น เช่น

.12367 และ .5678

ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่งก็ปัดเศษลงไป เช่น .12367 และ .5678

2. **ถ้าเลขตัวแรกที่ปัดออกเป็นเลข 0, 1, 2, 3, 4 ให้ตัดทิ้งไปได้เลย**
**ถ้าเลขตัวแรกที่ปัดเป็นเลข 5, 6, 7, 8, 9 ให้เพิ่มตัวท้ายเข้าอีก 1**

เช่น .12/367 เลขที่ปัดตัวแรกคือ 3 ∴ ตัดทิ้งไปเลยคงเหลือ .12

.56/78 เลขที่ปัดตัวแรกคือ 7 ∴ เพิ่มตัวท้ายอีก 1 คงเป็น .57

## ตัวอย่าง

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| .12345 | ต้องการทศนิยม | 3 | ตำแหน่ง | ได้ | .123 |
| .23456 | ,, | ,, | 3 | ,, | ,, | .235 |
| .34567 | ,, | ,, | 3 | ,, | ,, | .346 |
| .45678 | ,, | ,, | 3 | ,, | ,, | .457 |
| .89123 | ,, | ,, | 4 | ,, | ,, | .8912 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| .98764 | ต้องการทศนิยม | 4 | ตำแหน่ง | ได้ | .9876 |
| .98764 | ,, ,, | 2 | ,, | ,, | .99 |
| .12909 | ,, ,, | 3 | ,, | ,, | .129 |
| .13909 | ,, ,, | 4 | ,, | ,, | .1291 |

## 1. การบวกและลบอย่างประมาณ

มีหลักคือ

1. เขียนทศนิยมลงไปให้จุดตรงกัน
2. ต้องการทศนิยมกี่ตำแหน่งให้นับจากจุดไปเท่านั้นตำแหน่ง แล้วขีดเส้นไว้ และเขียนเลยไปเผื่อทด 2 ตำแหน่ง เหลือนอกนั้นตัดทิ้งไป
3. บวกลบกันด้วยวิธีธรรมดา
4. คำตอบอยู่ด้านซ้ายมือของเส้น ทางขวาตัดทิ้งไป

**ตัวอย่าง 1** จงรวมเข้าด้วยกัน 1.123456, 4.3582, 1.21, 5.2

ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

| | |
|---|---|
| 1.12 | 34 |
| 4.35 | 82 |
| 1.21 | |
| 5.2 | |
| 11.89 | 16 |

1.123456 ตัดเอาแต่ 1.12 เขียนไปเผื่อทด 2 ตำแหน่ง คือ 34 นอกนั้นทิ้งไป 1.21 และ 5.2 ไม่มีตัวเผื่อทด ∴ เขียนลงไปเท่าที่มี (ระวังจุดให้ตรงกัน)

**ตอบ** 11.89

**ตัวอย่าง 2** จงเอา 3.72185 ออกเสียจาก 5.61 ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

| | |
|---|---|
| 5.610 | 00 |
| 3.721 | 85 |
| 1.888 | 15 |

**ตอบ** 1.888

**ตัวอย่าง 3** จงถอด 8.75328 ด้วย 7.19851637 ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| 8.7532 | 80 | ได้ผลลัพธ์ 1.554764 |
| 7.1985 | 16 ---- | ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่งได้ 1.5547 |
| 1.5547 | 64 | แต่ตัวถัดไปเป็นเลข 6 ∴ บัดเข้ามา 1 |
| | ตอบ 1.5548 | เป็น 1.5548 |

**ตัวอย่าง 4** จงทำให้สำเร็จ $1.2345 + 6.78912 - 7.112283$

ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| 1.23 | 45 | |
| + 6.78 | 91 | |
| 8.02 | 36 | |
| − 7.11 | 22 | |
| 0.91 | 14 | |
| | ตอบ 0.91 | |

## 2. การคูณอย่างประมาณ

ในการคูณอย่างประมาณนั้น ถ้าตัวเลขน้อยเราอาจทำการคูณอย่างวิธีธรรมดาได้ แล้วจึงตัดทศนิยมออกให้เหลือเท่าที่โจทย์ต้องการ เช่น จงคูณ 2.3456 ด้วย 2 ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง เราก็คูณตามวิธีทำธรรมดาได้ คือเอา 2 คูณตัวตั้งทั้งหมด

$$2.3456 \times 2 = 4.6912$$

∴ คำตอบคือ 4.96 (ถ้าต้องการทศนิยมตำแหน่งเดียว ก็ตอบ 4.7)

แต่ในกรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณมีเลขมาก เราจึงจำต้องมีวิธีคูณอย่างประมาณไว้ เพื่อว่าจะได้ไม่ต้องคูณหารเลขมากเกินความจำเป็น

## การคูณอย่างประมาณ มีหลักคือ

1. ทำตัวคูณให้มีเลขจำนวนเต็มตัวเดียว
2. เขียนตัวตั้งลงไปให้มีจุดทศนิยมเกินกว่าที่โจทย์ต้องการ 2 ตำแหน่ง
3. กลับเลขตัวคูณ แล้วเขียนให้ชิดทางด้านขวา ขีดเส้นไว้ทางขวา
4. **วิธีคูณ** เลขตัวคูณอยู่ตรงกับเลขตัวตั้งตัวใด เริ่มคูณตั้งแต่เลขตัวนั้น (แต่ต้องคูณตัวที่อยู่ถัดไปทางขวาหนึ่งตัวเพื่อทด) ผลคูณของตัวคูณแต่ละตัว **ต้องเขียนชิดทางด้านขวา (ติดเส้น) เสมอ**
5. รวมผลคูณที่คูณได้ในข้อ 4
6. ตัดเลขที่รวมได้ออกทางไป 2 ตำแหน่ง เหลือเท่าใดจุดทศนิยมลงไปให้มีตำแหน่งทศนิยมเท่ากับที่โจทย์ต้องการ เป็นคำตอบ

## อธิบาย

**ข้อ 1. ทำตัวคูณให้มีเลขจำนวนเต็มตัวเดียว**

วิธีทำคือ เลื่อนจุดไปให้ตัวคูณอยู่หน้าจุดเพียงเลขตัวเดียว

เช่น 135.68 ก็ได้ 1.3568

หรือ .00125 ก็ได้ 1.25

การเลื่อนจุดนั้น อาจเลื่อนไปทางซ้ายหรือทางขวาก็ได้

**เมื่อเราเลื่อนจุดตัวคูณ เราก็ต้องเลื่อนจุดตัวตั้งด้วย**

ถ้าเลื่อนจุดตัวคูณไปทาง ขวา ต้องเลื่อนจุดของตัวตั้งไปทาง ซ้าย
ถ้าเลื่อนจุดตัวคูณไปทาง ซ้าย ต้องเลื่อนจุดตัวตั้งไปทาง ขวา

**และจำนวนตำแหน่ง คือตัวเลขที่เลื่อนจุดผ่านไปนั้นต้องเท่ากัน**

เช่น ตัวตั้งคือ 1.234 ตัวคูณคือ .0012

ตัวคูณ .0012 ถ้าจะให้มีเลขตัวเต็มหนึ่งตัวต้องเลื่อนจุดไปทางขวาสามตำแหน่ง เป็น 001.2 หรือ 1.2

ดังนั้นตัวตั้งจึงต้องเลื่อนจุดไปทางซ้ายสามตำแหน่งเหมือนกัน ก็เป็น .001234 การเลื่อนจุดทั้งสองข้างนี้เพื่อไม่ให้ค่าเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่างอื่น ๆ เช่น

$$22.3456 \times 256.789 = 2234.56 \times 2.56789$$

$$12.5678 \times 100.001 = 1256.78 \times 1.00001$$

ข้อ 2. **เขียนตัวตั้งลงไปให้มีจุดทศนิยมมากกว่าที่โจทย์ต้องการ 2 ตำแหน่ง**

เช่นภายหลังเลื่อนจุดแล้ว เราได้ตัวตั้งเป็น 234.56789143 โจทย์บอกว่าต้องการทศนิยมเพียงสามตำแหน่ง เราก็คงเขียนลงไปให้ตัวตั้งมีมากกว่าที่โจทย์ต้องการสองตำแหน่ง

โจทย์ต้องการสามตำแหน่งเราต้องเขียนลงไปห้าตำแหน่ง คือ 234.56789 ถ้าตัวตั้งภายหลังเลื่อนจุดได้ตัวตั้งเป็น 127.89 แต่โจทย์บอกว่าต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง เรามีความจำเป็นต้องเขียนทศนิยมให้มากกว่าโจทย์ต้องการ 2 ตำแหน่ง รวมเป็นต้องมีทศนิยม 6 ตำแหน่ง แต่ตัวตั้งมีทศนิยมเพียง 2 ตำแหน่ง ต้องเติม 0 ลงไปอีก 4 ศูนย์จึงจะได้ครบ 6 ตำแหน่ง เป็น 127.890000

ข้อ 3. **กลับเลขตัวคูณ แล้วเขียนลงชิดทางด้านขวา**

วิธีกลับเช่น

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.345 | กลับได้เป็น | 5432 | (จุดไม่ต้องนำไปคิดด้วยเลย) |
| 1.23 | กลับเป็น | 321 | |
| 9.5734 | กลับเป็น | 43759 | |
| 4.200 | กลับเป็น | 0024 = 24 | |

ข้อ 4. **วิธีคูณ**

เมื่อได้ตัวตั้งและตัวคูณตามที่หามาได้จากข้อ 1, 2, 3 ดังกล่าวแล้วนั้น ต้องเขียนให้ชิดไปทางด้านขวาเสมอกัน แล้วชิดเส้นลงไป

หลักในการคูณคือ

ก. ตัวคูณอยู่ตรงกับเลขตัวใด เริ่มคูณกับเลขตัวนั้นเป็นต้นไป แต่ต้องคูณตัวที่อยู่ถัดไปเสียก่อนเพื่อทด

ข. ต้องเขียนผลคูณที่คูณได้แต่ละครั้งลงชิดเส้นด้านขวาให้ตรงกันลงไป

**ตัวอย่าง** คูณ 124.5678 ด้วย 6.23

กลับตัวคูณได้เป็น 326 แล้วเขียนทั้งตัวตั้งและตัวคูณลงไปโดยไม่ต้องมีจุด

| | |
|---|---|
| 1245678 | ตัวคูณตัวแรกคือ 6 เลข 6 อยู่ตรงกับเลข 8 เอา 6 คูณ 8 ได้เป็นต้นไป |
| 326 | ตัวคูณตัวต่อไปคือ 2 2 อยู่ตรงกับเลข 7 จึงเริ่มคูณ 7 เป็นต้นไป แต่ |
| 7474068 | ต้องคูณตัวที่ถัดไปเพื่อทด คือต้องคูณ 8 เพื่อทดเสียก่อน 2 คูณ 8 ได้ |
| 249136 | 16 ได้ทด 2 เพราะ 16 ใกล้ 20 มากกว่า 10 ดังนั้นจึงทด 2 แล้วจึง |
| 37370 | คูณ 7 ได้ 14 รวมทดอีก 2 เป็น 16 แล้วคูณต่อๆไป ผลลัพธ์ที่คูณ |
| | กับ 7 นี้ต้องเขียนชิดเส้น |

ตัวคูณตัวสุดท้ายคือ 3 ต้องคูณ 7 เพื่อทด 3 × 7 ได้ 21 ได้ทด 2 แล้วจึงคูณ 6 ได้ 18 รวมทดอีก 2 เป็น 20 แล้วคูณต่อไป (เขียนชิดทางด้านขวา)

ข้อ 5. รวมเลขด้วยวิธีบวกอย่างธรรมดา

ข้อ 6. ตัดเลขที่รวมได้ออกไป 2 ตัวแล้วจุดทศนิยมลงไปให้เท่ากับที่โจทย์ต้องการ

เช่น

ก. รวมได้ 123456 ตัดออก 2 ตำแหน่ง เหลือ 1234 โจทย์ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง เราก็นับจากทางขวาไป 2 ตำแหน่งแล้วจุดลงไป คงได้คำตอบ 12.34

ข. รวมได้ 16789 ตัดออก 2 ตำแหน่ง เหลือ 167 แต่ตัวที่ตัดตัวใกล้คือ 8 ต้องปัดเข้ามา 1 คงเหลือ 168

ค. รวมได้ 345678 ตัดออกเหลือ 3457 (ปัดมา 1)

โจทย์ต้องการทศนิยม 6 ตำแหน่ง

∴ คำตอบเป็น .003457

**ตัวอย่าง 1** จงคูณ 785.52 ด้วย 0.067524 ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

**วิธีทำ** $785.52 \times 0.067524 = 7.8552 \times 6.7524$

| | |
|---|---|
| 78552 | |
| 42576 | |
| 471312 | (ผลคูณของ 6) |
| 54986 | (7 คูณ 2 ได้ 14 ทด 1) |
| 3928 | (5 คูณ 5 ได้ 25 ทด 3) |
| 157 | (2 คูณ 5 ได้ 10 ทด 1) |
| 31 | (4 คูณ 8 ได้ 32 ทด 3) |
| 530414 | |

**ตอบ** 53.04

**อธิบาย** ทำตามหลัก 6 ข้อ ดังนี้

ข้อ 1 ทำตัวคูณให้มีจำนวนเต็มหนึ่งตัว ตัวคูณคือ 0.067524
เลื่อนจุดไปทางขวา 2 ตำแหน่ง ได้ 6.7524
ดังนั้นจึงต้องเลื่อนจุดตัวตั้งไปทางซ้าย 2 ตำแหน่งด้วย ได้ 7.8552

ข้อ 2 เขียนตัวตั้งลงไปให้มีทศนิยมเกินกว่าที่โจทย์ต้องการ 2 ตำแหน่ง โจทย์ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง จึงต้องเขียนทศนิยมลงไป 4 ตำแหน่ง (ซึ่งพอดีไม่ต้องตัดหรือเติม)

ข้อ 3. กลับเลขตัวคูณ ตัวคูณคือ 6.7524 กลับได้เป็น 42576 (จุดไม่ต้องนำมาคิดด้วย) แล้วเขียนชิดทางด้านขวา แล้วขีดเส้นไว้ทางขวา

ข้อ 4. วิธีคูณ

**ตัวคูณตัวแรกคือ 6** คูณกันตามธรรมดาเพราะเป็นตัวแรก

**ตัวคูณตัวที่สองคือ 7** คูณกับเลขตัวตั้งที่อยู่ตรงกัน คือต้องคูณกับเลข 5 แต่ต้องคูณกับตัวตั้งที่อยู่ถัดไปคือ 2 เสียก่อนเพื่อทด 7 คูณ 2 ได้ 14 ทดได้ 1 แล้ว

จึงคูณกับ 5 ได้ 35 รวมกับทดเป็น 36 แล้วคูณตัวต่อไป แล้วเขียนชิดเส้นด้านขวา

**ตัวคูณตัวที่สามคือ** 5 เอา 5 คูณ 5 ตัวที่อยู่ถัดไปได้ 25 ได้ทด 3 (เพราะ 25 ใกล้ 30 มากกว่าใกล้ 20) แล้วจึงคูณกับ 5 ตัวที่อยู่ตรงกันได้ 25 รวมกับทดอีก 3 เป็น 28 แล้วจึงคูณตัวต่อไปตามธรรมดา แล้วเขียนชิดเส้นด้านขวา

**ตัวคูณตัวที่สี่คือ** 2 2 อยู่ตรงกับ 8 แต่ต้องคูณตัวถัดไปคือ 5 เพื่อทดเสียก่อน เอา 2 คูณ 5 ได้ 10 คงทด 1 แล้วจึงเอา 2 คูณ 8 ได้ 16 ทด 1 เป็น 17 แล้วจึงคูณตัวต่อไป แล้วเขียนไว้ชิดทางด้านขวา

**ตัวคูณตัวสุดท้ายคือ** 4 อยู่ตรงกับเลข 7 แต่ต้องคูณ 8 เสียก่อนได้ 32 คงทด 3 แล้วจึงคูณ 7 ได้ 28 รวมกับทดอีก 3 เป็น 31 เขียนชิดไว้ด้านขวา

ข้อ 5. รวมผลลัพธ์ได้ 530414

ข้อ 6. ตัดเลขลัพธ์ออก 2 ตำแหน่ง เหลือ 5304

โจทย์ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง นับจากทางขวามา 2 ตำแหน่ง แล้วจุดลงไปได้เป็น 53.04 เป็นคำตอบ

**ตัวอย่าง 2** จงคูณ 56.876 ด้วย 0.00144 ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

**วิธีทำ** $56.876 \times 0.00144 = .056876 \times 1.44$

| | |
|---|---|
| 56876 | |
| 441 | |
| 56876 | เอา 1 คูณ 6, 7, 8, 6, 5 |
| 22750 | เอา 4 คูณ 6 ได้ทด 2 แล้วจึงคูณ 7 ได้ 28 ทด 2 เป็น 30 |
| 2275 | เอา 4 คูณ 7 ได้ทด 3 แล้วจึงคูณ 8 ได้ 32 ทด 3 เป็น 35 |
| 81901 | |
| **ตอบ** 0.819 | ตัดทิ้งไป 2 ตำแหน่ง เหลือ 819<br>ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง ได้ 0.819 |

**ตัวอย่าง 3** จงคูณ 78.25694 ด้วย .000283671
ตอบให้ถูกเพี่ยงทศนิยมตำแหน่งที่ 3

**วิธีทำ** $78.25694 \times .000283671 = .007825694 \times 2.83671$
(โจทย์ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง ดังนั้นเขียนตัวตั้งลงไปให้มีทศนิยมเพียง 5 ตำแหน่ง คือ .00782 และจุดไม่ต้องนำไปด้วยคงเป็น 782)

```
      782
   176381
  -------
     1564
      626
       23
        4
  -------
     2217
  =======
```

**ตอบ** .022

**อธิบาย** ตัวคูณตัวที่หนึ่งคือ 2 คูณความธรรมดา
ตัวคูณตัวที่สองคือ 8 เอา 8 คูณ 2 ได้ 16 ได้ทด 2 แล้วเอา 8 คูณ 8 ได้ 64 รวมทดอีก 2 เป็น 66
ตัวคูณตัวที่สามคือ 3 เอา 3 คูณ 8 ได้ 24 ได้ทด 2 แล้วเอา 3 คูณ 7 ได้ 21 รวมกับทดอีก 2 เป็น 23
ตัวคูณตัวที่สี่คือ 6 6 ไม่อยู่ตรงกับเลขอะไรเลย ดังนั้นจึงไม่ต้องคูณ แต่ต้องคูณ 7 สำหรับทด 6 คูณ 7 ได้ 42 ได้ทด 4
ตัวคูณตัวต่อไปคือ 7 และ 1 ไม่มีตัวคูณตัดทิ้งไปเลย

**หมายเหตุ** จะไม่ต้องคูณเพื่อทดก็ได้ กล่าวคือตัวคูณอยู่ตรงกับตัวตั้งตัวใด ก็เริ่มคูณจากตัวนั้นเลยทีเดียว คำตอบที่ได้เป็นคำตอบอย่างประมาณที่ถูกต้อง (ตามตัวอย่างที่ 4 และ 5)

**ตัวอย่าง 4** จงคูณ 32.1598 ด้วย .562089 (ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

**วิธีทำ** $32.1598 \times .562089 = 3.21598 \times 5.62089$

| | |
|---|---|
| 3.21598 | |
| 980265 | |
| 1607990 | |
| 192954 | |
| 6420 | |
| 256 | |
| 27 | |
| 1807647 | |

**ตอบ** 18.076

**ตัวอย่าง 5** จงคูณ .23045 ด้วย 15.8476 (ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

**วิธีทำ** $.23045 \times 15.8476 = 2.3045 \times 1.58476$

| | |
|---|---|
| 2.30450 | |
| 674851 | |
| 230450 | |
| 115225 | |
| 18432 | |
| 920 | |
| 161 | |
| 12 | |
| 3652|00 | |

**ตอบ** 3.652

3. การหารอย่างประมาณ

มีหลักดังนี้

1. หาคำตอบหยาบ ๆ เสียก่อนว่า ผลลัพธ์จะมีเลขจำนวนเต็มกี่ตัว (ถ้าไม่มีตัวเต็มจะมี 0 อยู่หลังจุดกี่ตัว ก่อนที่จะถึงตัวเลข)
2. เขียนตัวตั้งและตัวหารลงไปโดยไม่ต้องคำนึงถึงจุดทศนิยม **แต่ตัวหารนั้นต้องมีจำนวนตัวเลขอย่างน้อยต้องมากกว่าจำนวนตัวเลขที่หาได้ในข้อ 1 รวมกับทศนิยมที่โจทย์ต้องการอยู่ สอง ตัว**
3. **วิธีหาร** เช่นเดียวกับวิธีหารธรรมดา แต่เมื่อหารไปครั้งหนึ่ง ๆ ไม่มีการชักตัวตั้งลงมา แต่ตัดตัวหารออก 1 ตัวทุกครั้ง **แต่ตัวที่ตัดทิ้งไปนี้ต้องนำเลขลัพธ์ตัวต่อไปมาคูณ** เพื่อทด
4. หารให้ได้จำนวนตัวเลขเท่ากับจำนวนที่หาได้ในข้อ 1 รวมกับทศนิยมที่โจทย์ต้องการ และเกินไว้อีกตำแหน่งหนึ่ง (เพื่อไว้ปัดเข้ามา)
5. คำตอบจะมีจำนวนเต็มเท่ากับที่หาได้ในข้อ 1 และมีทศนิยมเท่าที่โจทย์ต้องการ (ตัดตัวที่หารเกินมาเพื่อปัดนี้ออกไป)

**โปรดดูคำอธิบายของตัวอย่างที่ 1 จะทำให้เข้าใจดี**

**ตัวอย่าง 1** จงหาร 6549.6371 ด้วย 271.2465 ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

(คำตอบหยาบ ๆ คือ $\frac{6549}{271}$ ได้เลขจำนวนเต็ม 2 ตัว เพราะ $\frac{6549}{271} = 24.\text{----}$ โจทย์ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง รวมกันเลขตัวเต็ม 2 ตัวเป็น 4 ตัว ดังนั้นตัวหารจึงมีเลข 6 ตัว

ตัวหารคือ 271.2465 คงเอาเพียง 271.246 เท่านั้น ซึ่งได้เป็น 271.247 แล้วเขียนลงไปโดยไม่ต้องคำนึงถึงจุดทศนิยมเลย)

วิธีทำ

| | | |
|---|---|---|
| 271247 | 65496371 | 24146 |
| | 542494 | |
| 27124 | 112469 | |
| | 108499 | |
| 2712 | 3970 | |
| | 2712 | |
| 271 | 1258 | |
| | 1085 | |
| 27 | 173 | |
| | 163 | |
| | 10 | |

ตอบ 24.15

อธิบายวิธีหาร ตัวหารมี 6 หลัก ตัวตั้งมีเท่าไรไม่ต้องคำนึงถึง ดูแต่ว่าจะได้ผลลัพธ์เท่าไรเท่านั้น ครั้งแรกได้ผลลัพธ์ 2 เอา 2 ใส่ที่ผลลัพธ์ แล้วเอา 2 คูณ 271247 ได้ 542494 เอา 542494 ใส่ใต้ตัวตั้งแล้วลบกันเหลือ 112469 เป็นตัวตั้งครั้งต่อไปโดยไม่มีการชักตัวตั้งที่เหลือลงมาเลย คงปล่อยทิ้งไว้เฉย ๆ

## ต่อไปตัดตัวหารออก 1 ตัวเหลือ 27124

เอา 27124 ไปหาร 112469 ได้ผลลัพธ์ 4 ต้องเอา 4 คูณ 7 ตัวที่ตัดทิ้ง เสียก่อนเพื่อทด เอา 4 คูณ 7 ได้ 28 คงได้ทดไว้ 3 แล้วจึงเอา 4 คูณ 27124 ได้ 108496 รวมกับทดอีก 3 รวมเป็น 108499 เอา 108499 ลบออกจากตัวตั้งเหลือ 3970 ดังนั้น 3970 เป็นตัวตั้งครั้งต่อไป

## ต่อไปตัดตัวหารออก 1 ตัวเหลือ 2712

เอา 2712 หารตัวตั้ง (3970) ได้ 1 ต้องเอา 1 คูณ 4 ที่ตัดทิ้งได้ 4 ไม่ต้องทด จึงเอา 1 คูณ 2712 ได้ 2712 เอาไปลบจาก 3970 เหลือ 1258 เป็นตัวตั้งครั้งต่อไป

## ต่อไปตัดตัวหารออก 1 ตัวเหลือ 271

เอา 271 หาร 1258 ได้ผลลัพธ์ 4 เอา 4 คูณ 2 ที่ตัดทิ้งได้ 8 จึงได้ทด 1 แล้วจึงเอา 4 คูณ 271 ได้ 1084 รวมกับทดอีก 1 เป็น 1085 เอา 1085 ไปลบออกจาก 1258 เหลือ 173 เป็นตัวตั้งครั้งต่อไป

## ต่อไปตัดตัวหารออกอีก 1 ตัวเหลือ 27

เอา 27 หาร 173 ได้ 6 เอา 6 คูณ 1 ซึ่งตัดทิ้งได้ 6 คงได้ทด 1 แล้วจึงเอา 6 คูณ 27 ได้ 162 กับทดอีก 1 เป็น 163 เอา 163 ไปลบออกจาก 173 **เหลือ 10 ซึ่งไม่ต้องหารต่อไปอีก เพราะได้ผลลัพธ์เป็นเลข 5 ตัวตามต้องการแล้ว**

**ผลลัพธ์ 5 หลักคือ 24146**

เราทราบว่าคำตอบมีเลขจำนวนเต็ม 2 ตัว ดังนั้นจึงใส่จุดลงไปให้มีจำนวนเต็ม 2 ตัว คือได้ 24.146 ตัดออก 1 ตัว (เพราะเราหารเกินไว้สำหรับปัดเข้ามา 1 ตำแหน่ง) เหลือ 24.14 แต่ตัวที่ตัดคือ 6 ต้องปัดเข้ามา 1 คงได้เป็น 24.15 เป็นคำตอบ

**ตัวอย่าง 2** จงหาร 673.1489 ด้วย .41432 ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| 41432000 | 67314890 | 1624.707 |
| | 41432000 | |
| 4143200 | 25882890 | |
| | 24859200 | |
| 414320 | 1023690 | |
| | 828640 | |
| 31432 | 195050 | |
| | 165728 | |
| 4143... | 29322 | |
| | 29002 | |
| 414 | 320 | |
| 41 | 290 | |
| | 30 | |

**ตอบ** 1624.71

**คำตอบหยาบๆ**

$\frac{6731....}{4....}$ ได้เลขตัวเต็ม 4 ตัว

∴ ต้องหารให้ได้ผลลัพธ์มีเลข 4+2 (คือตำแหน่งทศนิยม) + 1 (คือหารเกินไปอีกเพื่อทด) = 7 ตำแหน่ง

∴ ตัวหารต้องมี 8 ตัว เราจึงเติม 0 ลงไปทั้งตัวตั้งและตัวหารให้มีอย่างน้อย 8 ตัวเท่ากัน

**ตัวอย่าง 3** จงหาร .5361085 ด้วย 23.450842 ให้ถูกเพี้ยนทศนิยมตำแหน่งที่ 4

**[วินิจฉัย** คำตอบหยาบๆ คือ $\frac{5}{23}$ ได้ผลลัพธ์เป็น .0 แล้วจึงมีเลขตัวเต็มต่อไป ดังนั้นเราจึงเขียน .0 ไว้ที่ผลลัพธ์ได้เลย

โจทย์ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง เรามี .0 อยู่ 1 ตำแหน่งแล้ว ดังนั้นเราจึงหารต่อไปให้ได้เลขลัพธ์ออกเพียง 4 ตำแหน่ง (คือให้เกินไว้ 1 ตำแหน่งเพื่อทด ดังนั้นตัวหารมีเพียง 5 ตัวเท่านั้นก็พอแก่ความต้องการ เราจึงตัดตัวหารออกให้มีเพียง 5 ตัว คือเติม 23450842 เอา 5 ตัวลงได้ 23451 (ปัดเข้ามา 1) ส่วนตัวตั้งก็มีความจำเป็นเพียง 5 ตัวเหมือนกัน ]

วิธีทำ

| | | |
|---|---|---|
| 23451 | 53611 | .02286 |
| | 46902 | |
| 2345 | 6709 | |
| | 4690 | |
| 234 | 2019 | |
| | 1876 | |
| 23 | 143 | |
| | 140 | |

**ตอบ** .0229

## แบบฝึกหัด 3

จงหาค่าของ

1. $28.0123576 + 112.59467 + .0012 - 131.24 - .000267$ ต้องการทศนิยมเพียง 2 ตำแหน่ง (9.36)

จงทำให้สำเร็จ

2. $32.1598 \times 0.562089$ ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง (18.077)
3. $0.23045 \times 15.8476$ ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง (3.652)
4. $3.72 \times 0.0005962$ ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง (0.0022)
5. $0.005762 \times 3.20876$ ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง (0.0185)
6. $3476.321 \div 1248.4176$ ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง (2.78)
7. $56.9812 \div 47.87631$ ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง (1.190)
8. $185.27612 \div 0.08764032$ ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง (2115.1922)

9. $17.1890865 \div 0.13249672$ ต้องการทศนิยม 5 ตำแหน่ง (129.73217)

10. $23.2843612 \div 0.03205617$ ต้องการทศนิยม 6 ตำแหน่ง (726.361296)

จงหาค่าของ

11. $\dfrac{53.05045 \times 3.5204}{0.30455}$ ตอบให้ถูกถึงเลขนัยสำคัญ 3 ตัว (613.229)

12. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{2.3.4.5} + \cdots\cdots$ ตอบให้ถูกถึงเลขนัย สำคัญ 4 ตัว (.7183)

13. $\dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{11^3} + \dfrac{1}{11^4} + \dfrac{1}{11^5} + \cdots\cdots$ ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง (0.1000)

14. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} - \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{4^5} - \cdots\cdots$ ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง (0.2000)

15. จงหาค่าใกล้เคียงเพียงเลขนัยสำคัญ (Significant figure) 2 ตัว

$$6.101 - \frac{1.518 \times 10^3}{t} - \frac{1.223 \times 10^6}{t^2}$$

เมื่อ $t = 274$ (ตอบ $-15.73$)

# อัตราส่วนและสัดส่วน
# RATIO AND PROPORTION

# 4

**อัตราส่วน** (Ratio) คือการเปรียบเทียบปริมาณของที่เป็นอย่างเดียวกัน มีหน่วยอันเดียวกัน ใช้แทนด้วยเครื่องหมาย : (ต่อ)

อัตราส่วนไม่มีหน่วยเป็นหน่วยใดเลย ดังนั้นในการเขียนอัตราส่วน เราจึงต้องทำให้ของที่จะเปรียบเทียบเป็นหน่วยเดียวกันเสียก่อน เช่น

แดงมีเงิน 6 บาท ดำมีเงิน 50 สตางค์

อัตราส่วนของเงินแดงและดำ = 6 บาท : 50 สตางค์

= 600 สตางค์ : 50 สตางค์

= 600 : 50

= 12 : 1

**สัดส่วน** (Proportion) สัดส่วนคืออัตราส่วนที่เท่ากัน

เช่น ถ้า $x = 5$, $y = 6$

$x : y :: 5 : 6$ (:: คือ =)

หรือ $\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$

สัดส่วนมีสองอย่าง คือ

— สัดส่วนตรง ( Direct Proportion )

— สัดส่วนกลับ ( Inversed Proportion )

1. สัดส่วนตรง ( Direct Proportion ) คือสัดส่วนซึ่งเพิ่มหรือลดตามกัน เช่น

หมวก 3 ใบราคา 75 บาท หมวก 5 ใบจะราคาเท่าไร

วิธีทำ สมมติให้หมวก 5 ใบราคา x บาท แล้วเขียนเรียงลงไปให้ตรงกัน (หมวกตรงหมวก, บาทตรงบาท)

หมวก 3 ใบ ราคา 75 บาท

หมวก 5 ใบ ราคา x บาท

เมื่อเขียนเสร็จดังนี้แล้ว เราก็ลองคิดดูตามหลักธรรมดาว่า ถ้าจำนวนหมวกเพิ่มขึ้น จำนวนราคาจะเพิ่มตามขึ้นหรือไม่ ก็จะรู้ว่าถ้าหมวกมากขึ้น ราคาก็มากด้วย ดังนั้นเป็นการเพิ่มตามกัน จึงเป็น สัดส่วนตรง

การเขียนสัดส่วนตรง เอา x ที่สมมติขึ้นเขียนข้างหน้าก่อน เช่นตามตัวอย่าง x อยู่บนทับล่าง เราเขียน x : 75 ( คือล่างต่อบน ) อีกด้านหนึ่งเราก็ต้องเขียนล่างต่อบนด้วย เพราะเป็นสัดส่วนตรง คือ 5 : 3 ดังนั้นจึงได้สัดส่วนเป็น

$$x : 75 = 5 : 3$$

2. สัดส่วนกลับ (Inversed Proportion) คือสัดส่วนซึ่งถ้าฝ่ายหนึ่งเพิ่มขึ้นอีกฝ่ายหนึ่งจะลดลง หรือถ้าฝ่ายหนึ่งลดลงอีกฝ่ายหนึ่งจะเพิ่มขึ้น เช่นคน 10 คนทำงานแล้วใน 4 วัน ถ้าให้คน 20 คนทำงานนี้จะแล้วในกี่วัน

วิธีทำ สมมติให้คน 20 คนทำงานนั้นแล้วใน x วัน

แล้วเขียนเรียงลงไปให้ตรงกัน (คือวันตรงวัน, คนตรงคน)

คน 10 คน ทำแล้วใน 4 วัน

คน 20 คน ทำแล้วใน x วัน

**วิธีคิด** ลองคิดดูว่า ถ้าคนมากขึ้น งานจะเสร็จเร็วขึ้นหรือช้าลง จะเห็นว่าเมื่อคนมากขึ้น งานจะเสร็จเร็วขึ้น คือ

เมื่อจำนวนคนมากขึ้น จำนวนวันจะน้อยลง ซึ่งเป็นการกลับกัน แทนที่จะมากตามกันไป ดังนั้น จึงเรียกว่าเป็น สัดส่วนกลับ

**วิธีเขียนสัดส่วนกลับ**

เขียน x ไปก่อน x เป็นวัน ดังนั้นจึงต้อง x : 4 (เพราะ x และ 4 อยู่ตรงกัน)

x : 4 นี้ เราเขียน ล่างต่อบน (x อยู่ล่าง, 4 อยู่บน) อีกด้านหนึ่ง คือ ด้าน คน นั้น เราจะเขียน ล่างต่อบน เหมือนกันไม่ได้ เพราะไม่ใช่สัดส่วนตรง ต้องเขียน บนต่อล่าง คือเขียนกลับกัน เพราะเป็นสัดส่วนกลับ เป็น

ล่าง : บน = บน : ล่าง

x : 4 = 10 : 20

ตัวอย่างการเขียนสัดส่วน

1. คน 5 คน จับปลาได้ 100 ตัว คนกี่คนจึงจะจับปลาได้ 80 ตัว

ให้คน x คน จับปลาได้ 80 ตัว

แต่คน 5 คน จับปลาได้ 100 ตัว (ตามที่กำหนดให้)

จะเห็นว่าเมื่อคนเพิ่มมากขึ้น ปลาก็จะมากขึ้นด้วย ดังนั้น เป็นสัดส่วนตรง

คือ บน : ล่าง = บน : ล่าง

x : 5 = 80 : 100

2. โค 30 ตัวกินหญ้าหมดทุ่งใน 6 วัน โค 12 ตัวจะกินหญ้าหมดในกี่วัน

ให้โค 12 ตัว กินหญ้าหมดทุ่งใน x วัน

แต่โค 30 ตัว กินหญ้าหมดทุ่งใน 6 วัน

จะเห็นว่า ถ้าโคมากตัวขึ้น ก็จะกินหญ้าหมดเร็วขึ้น

คือ ถ้าโคมากขึ้น จำนวนวันจะน้อยลง ดังนั้น เป็นสัดส่วนกลับ

ต้องเขียน บน : ล่าง = ล่าง : บน

คือ 12 : 30 = 6 : x

3. น้ำ 3 ถังหนัก 45 กก. น้ำ 5 ถังจะหนักเท่าไร

ให้ น้ำ 5 ถัง หนัก x กก.

แต่ น้ำ 3 ถัง หนัก 45 กก.

จะเห็นว่าถ้าน้ำมากถังขึ้น ก็จะหนักมาก กก. ด้วย เป็น สัดส่วนตรง

ดังนั้นต้องเขียน บน : ล่าง = บน : ล่าง

คือ 5 : 3 = x : 45

4. อาหารจำนวนหนึ่ง คน 7 คนกินได้นาน 10 วัน คน 14 คนจะกินได้นานเท่าไร

ให้ คน 14 คน กินได้นาน x วัน

แต่ คน 7 คน กินได้นาน 10 วัน

จะเห็นว่า ถ้าคนมากขึ้น ก็จะกินอาหารหมดเร็วขึ้น คือ

ถ้าจำนวนคนมากขึ้น จำนวนวันจะน้อยลง เป็น สัดส่วนกลับ

ดังนั้น ต้องเขียน บน : ล่าง = ล่าง : บน

คือ 14 : 7 = 10 : x

5. ชาย 12 คนทำงานคล่างหนึ่งแล้วใน 8 ชั่วโมง ถ้าจะให้แล้วใน 6 ชั่วโมง จะต้องใช้ชายกี่คน

ให้ ชาย x คน ทำแล้วใน 6 ชั่วโมง

แต่ ชาย 12 คน ทำแล้วใน 8 ชั่วโมง

จะเห็นว่า ถ้าคนมากขึ้น งานนั้นก็จะแล้วเร็วขึ้น

คือ ถ้าจำนวนคนมากขึ้น จำนวนชั่วโมงก็จะน้อยลง เป็น สัดส่วนกลับ

ดังนั้นต้องเขียน บน : ล่าง = ล่าง : บน

คือ x : 12 = 8 : 6

**ตัวอย่าง 1** รองเท้า 12 คู่ราคา 960 บาท ถ้าซื้อ 3 คู่ จะต้องจ่ายเงินเท่าไร

**วิธีทำ** ให้ x บาท เป็นราคารองเท้า 3 คู่

แต่ 960 บาท เป็นราคารองเท้า 12 คู่

$\therefore$ $x : 960 = 3 : 12$

$$\frac{x}{960} = \frac{3}{12}$$

$$x = 240$$

$\therefore$ ต้องจ่ายเงิน 240 บาท

**ตอบ** 240 บาท

**อธิบาย** ถ้ารองเท้ามากขึ้น ราคาก็มากตามไปด้วย เป็นสัดส่วนตรง จึงเข้าสัดส่วนตามวิธีที่อธิบายมาแล้ว หรือจะทำแบบบัญญัติไตรยางค์ก็ได้

คือ รองเท้า 12 คู่ ราคา 960 บาท

$\therefore$ รองเท้า 3 คู่ ราคา $\frac{960}{12} \times 3 = 240$ บาท

**ตัวอย่าง 2** กรรมกร 18 คนทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 8 วัน ถ้าจะให้แล้วใน 6 วัน ต้องใช้กรรมกรกี่คน

[**วินิจฉัย** เมื่อกรรมกรเพิ่มขึ้น งานก็ย่อมเสร็จเร็วขึ้น คือถ้าจำนวนกรรมกรมากขึ้น จำนวนวันจะลดลง ไม่มากตามกันไป ดังนั้นจึงเป็นสัดส่วนกลับ]

**วิธีทำ** ให้กรรมกร x คน ทำแล้วใน 6 วัน

แต่กรรมกร 18 คน ทำแล้วใน 8 วัน

$\therefore$ $x : 18 = 8 : 6$

$$\frac{x}{18} = \frac{8}{6}$$

$\therefore$ $x = 24$

ต้องใช้กรรมกร 24 คน

**ตอบ** 24 คน

ทำแบบบัญญัติไตรยางศ์

งานแล้วใน 8 วัน ใช้กรรมกร 18 คน

∴ จะให้แล้วใน 6 วัน ต้องใช้กรรมกร $\frac{18\times 8}{6} = 24$ คน

ตัวอย่าง 3 เรือโดยสารลำหนึ่งบรรทุกผู้โดยสาร 14 คน ซึ่งอาหารในเรือนั้นจะพอกินไปได้ 50 วัน ครั้นเรือแล่นไปได้ 5 วัน ก็มีคนโดยสารเพิ่มขึ้นอีก 21 คน ดังนี้เรือลำนี้จะมีอาหารพอกินไปได้อีกกี่วัน

วิธีทำ คน 14 คน จะกินอาหารนั้นพอดีใน 50 วัน แต่กินไปได้ 5 วัน คงเหลืออาหารที่จะกินพอดีหมดใน 45 วัน

มีคนมาเพิ่มอีก 21 คน เป็น $14 + 21 = 35$ คน

ให้คน 35 คน กินไปได้พอดีใน x วัน

แต่คน 14 คน กินไปได้พอดีใน 45 วัน

$\therefore \quad 35 : 14 = 45 : x$

$$\frac{35}{14} = \frac{45}{x}$$

$$\therefore \quad x = \frac{45\times 14}{35}$$

$$= 18$$

∴ อาหารพอกินไปได้อีก 18 วัน

ตอบ 18 วัน

อธิบาย ถ้าคนมากขึ้น อาหารก็จะหมดเร็วขึ้น คือ ถ้าคนมากขึ้นจำนวนวันจะน้อยลง ดังนั้นจึงเป็นสัดส่วนกลับ

## สัดส่วนสมทบ (Compound Proportion)

สัดส่วนสมทบ (สัดส่วน 2 ชั้น หรือสัดส่วนหลายชั้น หรือหลายเชิง)

คือการที่ อัตราส่วนหนึ่งเท่ากับผลคูณของอีกหลายอัตราส่วน

เช่น $\frac{1}{2} = \frac{9}{11} \times \frac{11}{18}$ หรือ $\frac{2}{3} = \frac{12}{13} \times \frac{5}{6} \times \frac{13}{15}$

ซึ่งเขียนตามแบบของอัตส่วนสมทบได้เป็น

$$1 : 2 = \begin{cases} 9 : 11 \\ 11 : 18 \end{cases} \quad \text{และ} \quad 2 : 3 = \begin{cases} 12 : 13 \\ 5 : 6 \\ 13 : 15 \end{cases}$$

ในการคำนวณเรื่องอัตส่วนสมทบ โจทย์จะกำหนดอัตราส่วนมาให้อย่างน้อย 3 อัตราส่วนเสมอไป การคำนวณก็คงเป็นแนวเดียวกับอัตส่วนชั้นเดียวหรืออัตส่วนอย่างง่าย (Simple Proportion) ที่ผ่านมาแล้ว

1. ชาย 12 คนขุดคลองยาว 20 เมตรแล้วในเวลา 4 วัน ชายกี่คนจึงจะขุดคลองยาว 30 เมตรแล้วใน 9 วัน

**วิธีทำ** เช่นเดียวกับที่ผ่านมาแล้ว คือ เขียนเป็น 2 บรรทัดตรงกัน

ให้ชาย x คน ขุดคลองยาว 30 เมตรแล้วใน 9 วัน

แต่ชาย 12 คน ขุดคลองยาว 20 เมตรแล้วใน 4 วัน

**วิธีคิด** ต้องเอาอัตราส่วนของ x (คือจำนวนคน) เป็นหลัก

เอาอัตราส่วนของจำนวนคนเทียบกับเมตรเสียก่อน

ลองคิดดูว่า ถ้าคนมากขึ้นจะขุดคลองได้มากขึ้นหรือน้อยลง

จะเห็นว่า ถ้าคนมากขึ้น จะขุดคลองได้ยาวขึ้น

คือ ถ้าจำนวนคนมากขึ้น จำนวนเมตรจะมากขึ้นด้วย

ดังนั้น อัตราส่วนคู่นี้ เป็นอัตส่วนตรง

ต้องเขียน บน : ล่าง = บน : ล่าง

คือ $x : 12 = \begin{cases} 30 : 20 \\ \text{--------} \end{cases}$

ต่อไปลงเหลืออีกอัตราส่วนหนึ่งคือ วัน

เอาอัตราส่วนของคน (ต้องเอาอัตราส่วนของจำนวนที่สมมติเป็นหลักเสมอ) ไปเทียบกับวัน

ลองคิดดูว่า ถ้าคนมากขึ้นจะทำงานเสร็จเร็วขึ้นหรือช้าลง

จะเห็นว่า ถ้าคนมากขึ้น งานก็จะเสร็จเร็วขึ้น

คือ ถ้าจำนวนคนมากขึ้น จำนวนวันจะน้อยลง ดังนั้น เป็นสัดส่วนกลับ

เราต้องเขียน บน : ล่าง = ล่าง : บน

คือ x : 12 = 4 : 9 (ความจริงไม่เท่ากัน แต่เขียนเพื่อให้เข้าใจเท่านั้น)

แล้วเราจึงเติมให้เต็มเป็น

$$x : 12 = \begin{cases} 30 : 20 \\ 4 : 9 \end{cases}$$

2. ชาย 20 คน เกี่ยวข้าว 40 ไร่แล้วใน 9 วัน ถ้าให้ชาย 8 คนเกี่ยวข้าว 48 ไร่ จะแล้วในกี่วัน

วิธีทำ ให้ x วันเป็นเวลาที่ชาย 8 คนเกี่ยวข้าวได้ 48 ไร่

แต่ 9 วันเป็นเวลาที่ชาย 20 คนเกี่ยวข้าวได้ 40 ไร่

วิธีคิด เขียนอัตราส่วนของ x ลงไปก่อนเลยดังนี้

$$x : 9 = \begin{cases} \text{----------} \\ \text{----------} \end{cases}$$

ต่อไปเอาอัตราส่วนของ x นี้เทียบกับอัตราส่วนอื่น ๆ ทีละครั้ง

เทียบกับคน จะเห็นว่า ถ้าคนมากขึ้น จำนวนวันจะน้อยลง (คือเสร็จเร็วขึ้น) หรือถ้าวันมากขึ้น ก็ต้องการคนน้อยลง เป็นสัดส่วนกลับ

ดังนั้นจะเขียน 8 : 20 ไม่ได้ ต้องเป็น 20 : 8 (ล่างต่อบน)

**เทียบกับไร่** จะเห็นว่าถ้าจำนวนวันมากขึ้น ก็จะเกี่ยวข้าวได้มากขึ้นด้วย เป็นสัดส่วนตรง ดังนั้นจึงเป็น 48 : 40 (บน : ล่าง)

**จึงได้สัดส่วนเป็น** $x : 9 = \begin{cases} 20 : 8 \\ 48 : 40 \end{cases}$

**ตัวอย่าง 4** ชาวนา 15 คนดำนาได้ 12 ไร่ในเวลา 3 วัน ถ้าจะให้ดำนา 28 ไร่ และให้เสร็จในเวลา 5 วัน จะต้องใช้ชาวนากี่คน

**วิธีทำ** ให้ชาวนา x คน ดำนา 28 ไร่แล้วในเวลา 5 วัน
แต่ชาวนา 15 คน ดำนา 12 ไร่แล้วในเวลา 3 วัน

$\therefore \quad x : 15 = \begin{cases} 28 : 12 \\ 3 : 5 \end{cases}$

$$\frac{x}{15} = \frac{28}{12} \times \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad x = 21$$

$\therefore$ ต้องใช้ชาวนา 21 คน

ตอบ 21 คน

**อธิบาย** ถ้าคนมากขึ้น จำนวนไร่ก็จะมากตามไปด้วย เป็นสัดส่วนตรง
ถ้าคนมากขึ้น ก็จะเกี่ยวได้เร็วขึ้น คือจำนวนวันจะน้อยลง เป็นสัดส่วนกลับ

**ตัวอย่าง 5** ในการระบายน้ำเข้านา ใช้เครื่องสูบชนิดเดียวกัน ซึ่งถ้าใช้ 12 เครื่องสูบอยู่ 26 วัน วันละ 7 ชั่วโมง จะสูบน้ำได้ 1300 ตัน ถ้าต้องการจะสูบน้ำให้ได้ 1500 ตันในเวลา 21 วัน ให้เครื่องทำงานวันละ 8 ชั่วโมง จะต้องใช้เครื่องสูบกี่เครื่อง

**วิธีทำ**

ให้สูบ x เครื่องสูบน้ำ 21 วัน ๆ ละ 8 ชั่วโมง ได้น้ำ 1500 ตัน
แต่สูบ 12 เครื่องสูบน้ำ 26 วัน ๆ ละ 7 ชั่วโมง ได้น้ำ 1300 ตัน

$$\therefore \quad x : 12 = \begin{cases} 26 & : 21 \\ 7 & : 8 \\ 1500 & : 1300 \end{cases}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{26}{21} \times \frac{7}{8} \times \frac{1500}{1300}$$

$$x = 15$$

**ตอบ** 15 เครื่อง

**อธิบาย** เอาอัตราส่วนของ x เป็นหลัก

**เทียบกับวัน** ถ้าเครื่องมากขึ้นก็จะเสร็จเร็วขึ้น

คือ ถ้าเครื่องมากขึ้น จำนวนวันจะน้อยลง เป็นสัดส่วนกลับ

ต้องเป็น ล่าง : บน คือ 26 : 21

**เทียบกับชั่วโมง** ถ้าเครื่องมากขึ้น ก็จะเสร็จเร็วขึ้น คือจำนวนชั่วโมงจะน้อยลง เป็นสัดส่วนกลับ เป็น ล่าง : บน คือ 7 : 8

**เทียบกับตัน** ถ้าเครื่องมากขึ้น ก็จะสูบน้ำได้มากขึ้น คือจำนวนตันจะมากขึ้นด้วย เป็นสัดส่วนตรง เป็น บน : ล่าง คือ 1500 : 1300

คำนวณแบบบัญญัติไตรยางศ์ก็จะได้ดังนี้

สูบน้ำได้ 1300 ตัน ในเวลา 26 วัน สูบทำงานวันละ 7 ชม. ใช้สูบ 12 เครื่อง

สูบน้ำได้ 1500 ตัน ในเวลา 26 วัน สูบทำงานวันละ 7 ชม. ใช้สูบ $12 \times \frac{1500}{1300}$ เครื่อง

สูบน้ำได้ 1500 ตัน ในเวลา 21 วัน สูบทำงานวันละ 7 ชม. ใช้สูบ $12 \times \frac{1500}{1300} \times \frac{26}{21}$ เครื่อง

สูบน้ำได้ 1500 ตัน ในเวลา 21 วัน สูบทำงานวันละ 8 ชม. ใช้สูบ $12 \times \frac{1500}{1300} \times \frac{26}{21} \times \frac{7}{8}$ เครื่อง

$= 15$ เครื่อง

**ตัวอย่าง 6** ไก่ 3 ตัว เป็ด 2 ตัว ราคารวมกัน 42 บาท แต่ถ้าซื้อไก่ 5 ตัว เป็ด 6 ตัว ต้องจ่ายเงินรวมกัน 94 บาท ไก่ตัวละเท่าไร เป็ดตัวละเท่าไร

**วิธีทำ**

ไก่ 3 ตัว กับเป็ด 2 ตัว ราคา 42 บาท

∴ ไก่ $3 \times 3 = 9$ ตัว กับเป็ด $2 \times 3 = 6$ ตัว ราคา $42 \times 3 = 126$ บาท

แต่ไก่ 5 ตัว กับเป็ด 6 ตัว ราคา 94 บาท

∴ ไก่ $9 - 5 = 4$ ตัว ราคา $126 - 94 = 32$ บาท

∴ ไก่ 3 ตัว ราคา $32 \times \frac{3}{4} = 24$ บาท

∴ เป็ด 2 ตัว ราคา $42 - 24 = 18$ บาท

เป็ด 1 ตัว ราคา $\frac{18}{2} = 9$ บาท

ไก่ 1 ตัว ราคา $\frac{32}{4} = 8$ บาท

**ตอบ** ไก่ตัวละ 8 บาท
เป็ดตัวละ 9 บาท

**ตัวอย่าง 7** ผู้รับเหมารับก่อกำแพง 104 เมตร ใน 20 วัน เขาจ้างกรรมกร 4 คน ครั้นทำไปได้ 12 วัน ก่อกำแพงไปได้เพียง 48 เมตรเท่านั้น เขาจะต้องจ้างกรรมกรเพิ่มอีกกี่คนจึงจะแล้วเสร็จทันตามกำหนด

**วิธีทำ** ให้กรรมกร x คนทำ $20 - 12 = 8$ วัน ก่อกำแพงได้ $104 - 48 = 56$ เมตร

แต่กรรมกร 4 คนทำ 12 วัน ก่อกำแพงได้ 48 เมตร

∴ $x : 4 = \begin{cases} 12 : 8 \\ 56 : 48 \end{cases}$

$\frac{x}{4} = \frac{12}{8} \times \frac{56}{48}$

∴ $x = 7$

∴ ต้องจ้างกรรมกรเพิ่มอีก $7 - 4 = 3$ คน

**ตอบ** 3 คน

## แบบฝึกหัด

1. ชาวนา 9 คนเกี่ยวข้าว 8 ไร่แล้วใน 12 ชั่วโมง ถ้าจะให้แล้วเสร็จในเวลา 18 ชั่วโมง และให้เกี่ยวข้าวได้ 28 ไร่ จะต้องใช้ชาวนากี่คน (21)

2. ชาย 9 คนทำงานได้เงิน 828 บาทในเวลา 24 วัน ถ้าต้องการทำงานให้ได้เงิน 9200 บาทในเวลาเพียง 16 วัน จะต้องช่วยกันทำงานกี่คน (150 คน)

3. ชาย 6 คนทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 30 วัน ทำงานวันละ 9 ชั่วโมง ถ้าต้องการทำงานเป็น 10 เท่าของงานนั้นให้แล้วใน 25 วัน โดยลดเวลาทำงานลงอีกวันละชั่วโมง จะต้องใช้คนทำงานกี่คน (81)

4. ชา 3 กิโลกรัม ราคาเท่ากับกาแฟ 4 กิโลกรัม และกาแฟ 6 กิโลกรัมราคาเท่ากับน้ำตาล 20 กิโลกรัม อยากรู้ว่าน้ำตาลเท่าไรจึงจะมีราคาเท่ากับชา 9 กิโลกรัม (น้ำตาล 40 กิโลกรัม)

5. ชายผู้หนึ่งเดินทางวันละ 11 ชั่วโมงอยู่ 12 วัน ไปได้ไกล 1056 ไมล์ เขาต้องการเดินทางต่อไปอีก 480 ไมล์ด้วยความเร็วเท่าเดิม แต่ลดเวลาเดินทางลงวันละ 5 ชั่วโมง จะเป็นเวลาทั้งสิ้นกี่วันกว่าจะถึงที่หมาย (22 วัน)

6. ในการพิมพ์หนังสือ ถ้าพิมพ์หนังสือหนา 320 แผ่น แต่ละหน้ามี 21 บรรทัด แต่ละบรรทัดเฉลี่ยแล้วมีคำ 11 คำ คิดเงินค่าพิมพ์ 4560 บาท จงหาค่าพิมพ์หนังสือซึ่งหนา 297 แผ่น มีตัวอักษรหน้าละ 28 บรรทัด บรรทัดหนึ่ง ๆ เฉลี่ยแล้วมีคำบรรทัดละ 10 คำ (5124 บาท)

7. กรรมกร 5 คนทำงานวันละ 8 ชั่วโมง ขุดคูได้ยาว 105 ฟุต กว้าง 6 ฟุต ลึก 1 ฟุต แล้วเสร็จในเวลา 3 วัน ถ้าจะให้กรรมกร 32 คนขุดคูยาว 126 ฟุต กว้าง 22 ฟุต ลึก 10 ฟุต ให้แล้วเสร็จใน 15 วัน จะต้องทำงานวันละกี่ชั่วโมง (11)

8. วัตถุสามชนิดมีความถ่วงจำเพาะ 2, 3, และ 4 ผสมกันเป็นอัตราส่วน 14 : 15 : 16 โดยน้ำหนัก จงหาอัตราส่วนของปริมาตร (7 : 5 : 4)

9. ในการถางป่าแห่งหนึ่ง ชาย 4 คนถางไปได้ 2 ไร่ 2 งานในเวลา 5 วัน จึงว่าจ้างชายอีก 2 คนไปช่วย ก็แล้วเสร็จในอีก 3 วันต่อมา จงหาว่าป่าแห่งนั้นมีกี่ไร่ (4 ไร่ 3 งาน)

10. โค 3 ตัวและสุกร 5 ตัวราคารวมกัน 1950 บาท แต่ถ้าซื้อโค 7 ตัวและสุกร 2 ตัว ต้องจ่ายเงิน 3100 บาท โคตัวละเท่าไร สุกรตัวละเท่าไร (โค 400 บาท, สุกร 150 บาท)

11. แหวนวงหนึ่งประดับเพชร 5 เม็ดราคา 70 บาท แหวนวงนี้ถ้าประดับเพชรขนาดเดียวกัน 9 เม็ดราคา 90 บาท ถ้าจะทำแหวนชนิดนี้สัก 3 วง วงหนึ่ง ๆ ประดับเพชรเช่นนี้สัก 10 เม็ด จะสิ้นเงินเท่าไร (285 บาท) ★ ★

12. เงินจำนวนหนึ่งซื้อข้าวสารราคาหาบละ 3.75 บาท พอเลี้ยงคน 8 คนได้ 12 วัน ถ้าเงินจำนวนเดียวกันนี้ซื้อข้าวสารราคาหาบละ 3 บาท จะพอเลี้ยงคน 6 คนได้กี่วัน (20) ★ ★

13. เรือลำหนึ่งมีคนโดยสาร 200 คน พ่อครัวมีอาหารพอเลี้ยงกันไปได้ 24 สัปดาห์เท่านั้น ครั้นต่อมาอีก 1 สัปดาห์มีคนโดยสารเพิ่มมาอีก 80 คน ดังนี้พ่อครัวจะมีอาหารพอเลี้ยงไปได้อีกกี่วัน (115 วัน) ★ ★

14. สุนัขตัวหนึ่งวิ่งไล่กระต่าย กระต่ายโดด 9 ครั้ง เมื่อสุนัขกระโดดได้ 4 ครั้ง สุนัขกระโดดครั้งหนึ่งเป็นระยะทาง 7 ฟุต แต่กระต่ายครั้งละ 3 ฟุตเท่านั้น ถ้าครั้งแรกกระต่ายอยู่ห่างสุนัข 16 หลา จงหาว่าสุนัขต้องกระโดดกี่ครั้งจึงจะจับกระต่ายได้ (192)

15. ช่างก่อสร้างผู้หนึ่งต้องการให้งานแล้วเสร็จในเวลา 17 วัน เขาจ้างคน 20 คนให้ทำงานวันละ 8 ชั่วโมง เมื่อทำไปได้ 6 วันก็ยังเหลืองานอีก 2 ใน 3 เขาจึงจ้างคนงานเพิ่มขึ้นเพื่อจะให้งานแล้วเสร็จทันตามกำหนด เขาควรจ้างคนอีกกี่คนเพื่อให้ทำงานนั้นทันกำหนดโดยเพิ่มเวลาทำงานขึ้นอีกวันละ 1 ชั่วโมง (15 คน)

16. ล้อหน้าของรถมีเส้นรอบวงยาว 13 ฟุต 9 นิ้ว ล้อหลัง 16 ฟุต 6 นิ้ว ถ้ารถนี้แล่นไปจนกระทั่งล้อหน้าหมุนมากกว่าล้อหลัง 768 รอบ จะเป็นระยะทางที่รถแล่นไปเท่าไร (12 ไมล์)

17. เครื่องยนต์เครื่องหนึ่งจำลองด้วยไม้ เครื่องยนต์จำลองนี้หนัก 24.2 ปอนด์ เครื่องยนต์จริงนั้นทำด้วยเหล็กซึ่งหนักลูกบาศก์ฟุตละ 490 ปอนด์ ปรากฏว่าเส้นทุกเส้นในเครื่องยนต์จริงยาวเป็น 8 เท่าของเครื่องยนต์จำลอง จงหาว่าเครื่องยนต์จริงจะหนักเท่าไร กำหนดให้ไม้ 1 ลูกบาศก์ฟุตหนัก 44 ปอนด์ (61.6 ตัน)

18. ผู้รับเหมาคนหนึ่งทำสัญญาสร้างถนนยาว 4 ไมล์ให้แล้วเสร็จในเวลา 184 วัน เขาใช้กรรมกร 77 คนสร้างถนนนี้ เมื่อทำไปได้ 52 วัน ถนนคงทำไปได้เพียง 1 ไมล์ เขาจึงว่าจ้างกรรมกรเพิ่มขึ้นจนแล้วเสร็จตามกำหนด จงหาว่าเขาว่าจ้างกรรมกรเพิ่มอีกกี่คน (14)

19. ทหารกรมหนึ่งประจำแนวรบมีจำนวนสองหมื่นคน มีเสบียงพอกินไปได้ 60 วันในอัตราคนละ 12 ออนซ์ต่อวัน ครั้นเวลาล่วงไปได้ 12 วัน ทหารส่วนหนึ่งย้ายไปประจำแห่งอื่น ขณะเดียวกันก็มีคำสั่งให้ทหารลดอาหารลงเป็นอัตราคนละ 10 ออนซ์ต่อวัน ในการนี้ทำให้เสบียงหมดลงใน 72 วันต่อมา จงหาจำนวนทหารที่ย้ายไปนั้น (4000)

20. ช่างก่อสร้างผู้หนึ่งรับเหมาก่อกำแพงยาว 1000 เมตรให้แล้วเสร็จในเวลา 77 วัน เขาใช้กรรมกร 56 คนก่อกำแพงนี้ โดยให้ทำงานวันเว้นวัน ครั้นทำไปได้ 54 วัน กำแพงแล้วเสร็จไปเพียง 448 เมตรเท่านั้น เขาจึงว่าจ้างกรรมกรเพิ่มขึ้นอีก และกำหนดให้ทำงานทุกวัน ก็ปรากฏว่าสร้างกำแพงเสร็จทันตามกำหนดพอดี จงหาว่ากรรมกรที่เพิ่มนั้นกี่คน (25)

21. ทหารกองหนึ่งมีอาหารพอกินไปได้นาน 4 สัปดาห์ ครั้นเวลาผ่านไปได้ 8 วันก็มีทหารมาสมทบเข้าอีกหน่วยหนึ่ง ซึ่งทำให้อาหารนั้นพอกินไปได้อีก 16 วัน ถ้าทหารหน่วยที่มาสมทบมีจำนวน 200 คน จงหาว่าเดิมทหารกองนี้มีกี่คน (800)

22. ช่างก่อสร้างผู้หนึ่งกำหนดจะสร้างตึกหลังหนึ่งให้แล้วเสร็จในเวลา 38 วัน เขาใช้ช่าง 60 คนสร้างตึกนี้ เมื่อสร้างแล้วเสร็จไปเพียง $\frac{3}{7}$ เขาก็เห็นว่างานนี้จะไม่แล้วเสร็จทันตามกำหนด ดังนั้นเขาจึงว่าจ้างช่างเพิ่มขึ้นอีกเป็น 110 คน ก็ปรากฏว่าตึกนี้แล้วเสร็จตามกำหนดพอดี จงหาว่าก่อนจะเพิ่มช่างนั้น การสร้างดำเนินมาแล้วกี่วัน (22)

23. ชายผู้หนึ่งเดินไปตามถนนด้วยความเร็วสม่ำเสมอ $3\frac{1}{2}$ ไมล์ต่อชั่วโมง รถยนต์คันหนึ่งแล่นตามมาข้างหลังผ่านชนหน้าชายผู้นั้นแล้วเลี้ยวมุมถนนหายไป นับแต่รถยนต์แล่นทันชายผู้นั้นจนกระทั่งเลี้ยวมุมถนน ชายผู้นั้นเดินได้เพียง 27 ก้าว และจะต้องเดินอีก 135 ก้าวจึงจะถึงมุมถนนที่รถยนต์เลี้ยว จงหาความเร็วของรถยนต์แล่นต่อหนึ่งชั่วโมง (21 ไมล์ต่อชั่วโมง — ข้อสอบเตรียมวิทยาศาสตร์ 2493)

24. สถาปนิกผู้หนึ่งรับก่อสร้างอาคารให้แล้วเสร็จทันตามสัญญาที่ทำกันไว้ เขาใช้กรรมกร 90 คนสร้างอาคารนั้น เมื่อการก่อสร้างเสร็จไปได้ครึ่งหนึ่ง เขาเห็นว่าจะไม่แล้วทันกำหนด จึงจ้างกรรมกรเพิ่มขึ้นอีก 20 คนให้ช่วยก่อสร้างอาคารนั้น ปรากฏว่าการก่อสร้างแล้วทันตามสัญญาพอดี ให้คำนวณหาว่า ถ้าสถาปนิกผู้นั้นจะจ้างกรรมกรแต่เริ่มแรกให้ก่อสร้างอาคารเสร็จตามสัญญาพอดีโดยไม่ต้องว่าจ้างภายหลังแล้ว เขาควรจะต้องว่าจ้างกรรมกรกี่คน (99)

---

เครื่องหมาย ★ ★ คือข้อสอบ ม. 8

# การแบ่งส่วน
# PROPORTIONAL PARTS

# 5

เรื่องแบ่งส่วนไม่มีอะไรยุ่งยาก เช่นโจทย์บอกให้แบ่งเงิน 100 บาทออกตามอัตราส่วน 1 : 4 ก่อนอื่นเราต้องเข้าใจความหมายคำว่า 1 : 4 (หนึ่งต่อสี่) เสียก่อนว่าหมายความว่าอย่างไร ความหมายก็คือให้เราแบ่งเงิน 100 บาทออกเป็นสอง จำนวนแรกมี 1 ส่วน จำนวนหลังมี 4 ส่วน โดยแต่ละส่วนนั้นต้องเท่ากัน ดังนั้น ก็คือให้เราแบ่งเงิน 100 บาทออกเป็น 5 ส่วน เป็นจำนวนแรกเสีย 1 ส่วน ดังนั้นก็เหลือเป็นจำนวนหลัง 4 ส่วน เป็นต้น

การศึกษาเรื่องการแบ่งส่วน (Proportional Parts) นี้ นักศึกษาจำต้องมีความรู้เรื่องอัตราส่วนมาแล้ว อย่างไรก็ตาม ตัวอย่างต่อไปนี้ ถ้าได้พิจารณาให้ดีก็จะเข้าใจได้โดยง่าย

**ตัวอย่าง 1** จงแบ่งเงิน 100 บาทออกเป็นอัตราส่วน 2 : 3

**วิธีทำ** รวมส่วนได้ $2 + 3 = 5$

$\therefore$ จำนวนแรก คือ $\frac{100}{5} \times 2 = 40$ บาท

จำนวนหลัง คือ $\frac{100}{5} \times 3 = 60$ บาท

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 2** จงแบ่งเงิน 600 บาท ออกเป็นอัตราส่วน 3 : 4 : 5

**วิธีทำ** รวมส่วน $3 + 4 + 5 = 12$

$\therefore$ จำนวนแรก $\frac{600}{12} \times 3 = 150$ บาท

จำนวนที่สอง $\frac{600}{12} \times 4 = 200$ บาท

จำนวนที่สาม $\frac{600}{12} \times 5 = 250$ บาท

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 3** จงแบ่งเงิน 120 บาทให้ ก. ข. ค. ตามแนวอัตราส่วน $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{6}$

**วิธีทำ** ส่วนแบ่งของ ก : ข : ค $= \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{6}$ หรือ $= 2 ; 3 : 1$

รวมส่วน $2 + 3 + 1 = 6$

$\therefore$ ก. ได้ $\frac{120}{6} \times 2 = 40$ บาท

ข. ได้ $\frac{120}{6} \times 3 = 60$ บาท

ค. ได้ $\frac{120}{6} \times 1 = 20$ บาท

**ตอบ**

อธิบาย . $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{6}$ เราทำให้เป็นจำนวนเต็มได้ โดยหา ค.ร.น. ของส่วนมาคูณตลอด ซึ่งไม่ทำให้ค่าเปลี่ยนแปลง เช่น 1 : 2 ก็คงเท่ากับ 2 : 4 หรือ 4 : 8

เป็นต้น ค.ร.น. ของ 3, 2, 6 คือ 6

เอา 6 คูณ $\frac{1}{3}$ ได้ 2, คูณ $\frac{1}{2}$ ได้ 3, คูณ $\frac{1}{6}$ ได้ 1

$\therefore$ อัตราส่วนจึงเป็น 2 : 3 : 1

**ตัวอย่าง 4** จงแบ่งเงิน 1200 บาทให้ ก. ข. ค. ให้ ก. ได้เป็น $1\frac{1}{2}$ เท่าของ ข. และให้ ค. ได้ครึ่งหนึ่งของเงินที่ ก. และ ข. ได้รับรวมกัน

**วิธีทำ** ให้ ข. ได้ 1 ส่วน ก. ได้เป็น $2\frac{1}{2}$ เท่าของ ข.

$\therefore$ ก. ได้ $1 \times 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ส่วน

เงินที่ ก. และ ข. ได้รับรวมกัน $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ ส่วน

ค. ได้ครึ่งหนึ่งของ ก. และ ข. รวมกัน $\therefore$ ค. ได้ $\frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4}$ ส่วน

$\therefore$ อัตราส่วนแบ่งของ ก : ข : ค $= \frac{3}{2} : 1 : \frac{5}{4}$

$= 6 : 4 : 5$ (เอาค.ร.น. 4 คูณตลอด)

รวมส่วน $6 + 4 + 5 = 15$

$\therefore$ ก. ได้ $\frac{1200}{15} \times 6 = 480$ บาท

ข. ได้ $\frac{1200}{15} \times 4 = 320$ บาท

ค. ได้ $\frac{1200}{15} \times 5 = 400$ บาท

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 5** จงแบ่งเงิน 850 บาทให้ ก. ข. ค. ให้ ก. ได้มากกว่า ข. $\frac{1}{2}$ เท่า และให้ ค. ได้น้อยกว่าเงินที่ ก.ข. ได้รับรวมกัน 150 บาท

**วิธีทำ** ก + ข ได้มากกว่า ค. 150 บาท

$\therefore$ ค. ได้ $\frac{850 - 150}{2} = 350$ บาท

$\therefore$ ก + ข ได้ $350 + 150 = 500$ บาท

ก. ได้มากกว่า ข. $\frac{1}{2}$ เท่า

$\therefore$ ถ้า ข. ได้ 1 ส่วน ก. ได้ $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ส่วน

$\therefore$ อัตราส่วน ก : ข $= \frac{3}{2} : 1$

$= 3 : 2$

$\therefore$ ก. ได้ $\frac{500}{5} \times 3 = 300$ บาท

ข. ได้ $\frac{500}{5} \times 2 = 200$ บาท

ค. ได้ 350 บาท

**ตอบ**

อธิบาย ค. ได้น้อยกว่า ก + ข 150 บาท คือ ก + ข ได้มากกว่า ค. 150 บาท เอาเงินที่มากกว่าไปลบออกจากจำนวนเงินทั้งหมด ก็จะเหลือเป็นจำนวนเงินที่ต้องแบ่งเท่า ๆ กัน คือ 850 − 150 = 700 บาท อยากรู้ ค. ได้เท่าไรก็เอา 2 คือจำนวนคนไปหาร ได้ 350 บาท ที่เหลือเป็นของ ก. และ ข. ก็คือ 850 − 350 = 500 บาท

บางคนอาจสงสัย ขอเทียบให้ดูจากตัวอย่างง่าย ๆ ดังนี้

แบ่งเงิน 10 บาทให้ ก. และ ข. ให้ ก. ได้มากกว่า ข. 4 บาท

วิธีทำก็คือ เอา 4 ลบออกจาก 10 เหลือ 6

เอา 2 หาร 6 เหลือ 3

เมื่อเอา 2 หารผลลัพธ์ต้องเป็นของคนได้น้อย คือ ข. ได้ 3 บาท

∴ ข. ได้ 3 + 4 = 7 บาท

หรือ 10 − 3 = 7 บาท

ทำเป็นวิธีสั้น ๆ ได้ดังนี้

∴ ข. ได้ $\frac{10-4}{2}$ = 3 บาท

∴ ก. ได้ 3 + 4 = 7 บาท

**ตัวอย่าง 5** จงแบ่งเงิน 1100 บาทให้ ก. ข. ค. ง. ให้ ก. ได้มากกว่า ข. 150 บาท ข. ได้มากกว่า ค. 100 บาท ค. ได้มากกว่า ง. 50 บาท

**วิธีทำ** ง. ได้น้อยที่สุด

∴ ง. ได้ $\frac{1100-[(150+100+50)+(100+50)+50]}{4}$ = 150 บาท

∴ ค. ได้ 150 + 50 = 200 บาท

ข. ได้ 200 + 100 = 300 บาท

ก. ได้ 300 + 150 = 450 บาท

**ตอบ**

**อธิบาย** โจทย์ให้แบ่งเงิน 1100 บาท กำหนดให้

ก. ได้มากกว่า ข. 150 บาท

ข. ได้มากกว่า ค. 100 บาท

ค. ได้มากกว่า ง. 50 บาท

**มีวิธีคิดคือ** เอาเงินซึ่งทุกคนได้มากกว่าคนที่ได้น้อยที่สุดนั้นไปหักออกจากจำนวนเงินทั้งหมด แล้วเอาจำนวนคนหาร ผลที่ได้เป็นส่วนแบ่งของคนที่ได้น้อยที่สุด

จากตัวอย่างเราก็หาได้ว่า ก. ได้มากกว่า ง. $150 + 100 + 50 = 300$ บาท

ข. ได้มากกว่า ง. $100 + 50 = 150$ บาท

ค. ได้มากกว่า ง. 50 บาท

ดังนั้นเงินที่มากกว่าคือ $300 + 150 + 50 = 500$ บาท

$\therefore$ เหลือจำนวนเงินที่ต้องการเท่า ๆ กัน $1100 - 500 = 600$ บาท

เอาจำนวนคนหาร ผลได้เป็นส่วนแบ่งของคนที่ได้น้อยที่สุด

$\therefore$ ง. ได้ $\frac{600}{4} = 150$ บาท

ซึ่งรวบรัดเอาได้ตามตัวอย่างนั้น คือ

$$\text{ง. ได้ } \frac{1100 - [(150 + 100 + 50) + (100 + 50) + 50]}{6}$$

$$= 150 \text{ บาท}$$

---

## แบบฝึกหัด ๕

1. จงแบ่งเงิน 1000 บาทให้ ก. ข. ค. ตามอัตราส่วน 2 : 3 : 5 (200, 300, 500)
2. จงแบ่งเงิน 3500 บาทให้ ก. ข. ค. ตามอัตราส่วน ก : ข = 2 : 3 ข : ค = 4 : 5 (800, 1200, 1500)
3. ในการระดมพลต้องการทหารประจำการทั้งสิ้น 50000 คน จึงคัดเลือกชายเข้าประจำการจากภาคหนึ่ง, สอง, สาม, และ สี่ ซึ่งมีอยู่ดังนี้ 175002 คน, 82434 คน,

22116 คน และ 20448 คน ตามลำดับ จงหาว่าภาคไหนเข้าประจำการเท่าไร (29167, 13739, 3686, 3408)

4. จงแบ่งเงิน 630 บาทให้แก่ชาย 10 คน หญิง 32 คน เด็ก 48 คน ให้ชายคนหนึ่งได้เป็น 2 เท่าของหญิง หญิง 32 คนได้เท่ากับเด็ก 48 คน จงหาว่าได้คนละเท่าไร (15, 7.50, 5)

5. โลหะผสมทองและเงิน 6 แท่งหนักเท่ากัน แท่งหนึ่งนั้นผสมทองและเงินเป็นอัตราส่วน 2 : 1 อีก 2 แท่งผสมทองและเงินเป็นอัตราส่วน 3 : 5 ที่เหลือผสมเป็นอัตราส่วน 7 : 5 ถ้านำโลหะทั้ง 6 แท่งนี้มาหลอมเป็นโลหะแท่งเดียว จะมีทองและเงินเป็นอัตราส่วนเท่าไร (19 : 17)

6. ดินปั้นประกอบด้วยดินประสิว 33 ส่วน ถ่าน 7 ส่วน กำมะถัน 5 ส่วน ถ้าดินปั้นหนัก 1 ตัน จะมีส่วนผสมหนักอย่างละกี่ปอนด์เศรดเวต ($14\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{9}$, $2\frac{2}{9}$)

7. แบ่งเงิน 1700 บาทให้ ก. ข. ค. ให้ ก ได้มากกว่าครึ่งหนึ่งของ ข. เท่ากับที่ ข. ได้น้อยกว่า ค. ปรากฏว่า ค. ได้น้อยกว่า ก ข. รวมกันอยู่ 300 บาท จะได้รับคนละเท่าไร (400, 600, 700)

8. เหรียญ 3 กองมีจำนวนเหรียญเป็นอัตราส่วน 5 : 6 : 3 กองที่สามมีน้อยกว่ากองที่ 1 และ 2 รวมกันอยู่ 400 เหรียญ จงหาว่ามีเหรียญอยู่กองละกี่เหรียญ (250, 300, 150)

9. จงแบ่งเงิน 34.10 บาทให้เด็ก 4 คนตามอัตราส่วน คนที่หนึ่ง : คนที่สอง = 3 : 5 คนที่สอง : คนที่สาม = 4 : 7 คนที่สาม : คนที่สี่ = 3 : 4 (3.60, 6.00, 10.50, 14.00)

10. เหรียญกองหนึ่งมีจำนวนเหรียญคราวน์, ชิลลิง และ เพนนี อยู่เป็นอัตราส่วน 3 : 2 : 1 ถ้าเหรียญกองนั้นมีค่าทั้งสิ้น £ 18. 15s. 10 d. จงหาว่ามีเหรียญอย่างละเท่าไร (66, 44, 22)

11. เหรียญสิ่ง สตางค์สิบ สตางค์ห้า รวมกัน 3 ชนิดคิดเป็นเงิน 810 บาท ถ้าอัตราส่วนของเหรียญเป็น 4 : 5 : 6 จงหาจำนวนเหรียญทั้ง 3 ชนิดว่ามีอย่างละกี่อัน ★ (1800; 2250; 2700)

12. ส้มเขียวหวาน 280 ผล ขายให้ ก. ข. และ ค. ตามอัตราส่วน $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} : \frac{7}{15}$ ถ้าราคาส้มผลละ 15 สตางค์ ก. ข. และ ค. จะต้องจ่ายเงินซื้อส้มคนละเท่าไร ★ (14.40; 10.80; 16.80)

13. แม่ค้ามีกะท้อนมากกว่ามะม่วง $\frac{1}{5}$ เขาขายกะท้อนไปราคา 16 ผลต่อ 3 บาท และมะม่วงหนึ่งผลขายไปเท่าราคากะท้อนสองผล เมื่อขายไปทั้งหมดแล้วได้เงินที่ขายกะท้อนต่ำกว่าที่ขายมะม่วง 60 บาท เขามีผลไม้อย่างละกี่ผล ★ (กะท้อน 480 ; มะม่วง 400)

14. คนงานในพระนครผู้หนึ่งใช้จ่ายรายได้ของเขาดังนี้ เป็นค่าอาหารร้อยละ 50 เป็นค่าเสื้อผ้าร้อยละ 15 และเป็นค่าเช่าบ้านร้อยละ 12 เหลือนอกนั้นเป็นรายได้เก็บไว้ ภายหลังเขาอพยพไปอยู่ต่างจังหวัด ปรากฏว่าจ่ายค่าอาหารลดลงครึ่งหนึ่ง จ่ายค่าเสื้อผ้าแพงขึ้นเป็น 3 เท่า และต้องเสียค่าเช่าบ้านแพงขึ้นเป็น $2\frac{1}{2}$ เท่า ส่วนรายได้สูงขึ้นอีก $\frac{1}{2}$ เท่า เมื่อเทียบกับขณะอยู่ในพระนคร อยากทราบว่ารายได้สุทธิแห่งใดจะดีกว่ากัน ★★ (ต่างจังหวัดดีกว่า) ข้อสอบเตรียมวิทยาศาสตร์ 2490

15. ร.ต. อ่างทอง ลำเลียงทหารออกจากกรุงเทพ ฯ พอไปถึงลัดหิบส่งทหารขึ้นบกเสีย $\frac{1}{3}$ แล้วรับจากเรืออื่นเพิ่มมาอีก 96 คน พอไปถึงจันทบุรีส่งทหารขึ้นบกอีกครึ่งหนึ่งของจำนวนที่มีอยู่ และรับจากเรืออื่นมาเพิ่มอีก 12 คน ครั้นถึงตราดปรากฏว่ามีทหารที่จะส่งขึ้นบกทั้งหมด 248 คน ต้องการทราบว่า ร.ต. อ่างทอง ลำเลียงทหารออกจากกรุงเทพ ฯ จำนวนเท่าใด [ ข้อสอบเข้าเตรียมนายเรือ : 564 ]

16. รายได้ของ ก. และ ข. เป็นอัตราส่วน 3 : 2 แต่รายจ่ายเป็น 7 : 3 ซึ่งปรากฏว่าเขาเหลือเงินอยู่คนละ 1000 บาท จงหารายได้ของคนทั้งสอง (2400; 1600)

17. ชาวนาสามคนมาพบกัน คนที่หนึ่งมีข้าว 5 ถัง คนที่สองมี 3 ถัง คนที่สามมี 8 สตางค์ 40 สตางค์ เมื่อแบ่งข้าวคนละเท่า ๆ กันแล้ว คนที่สามก็มอบสตางค์ 40 สตางค์ให้เป็นค่าข้าวแก่คนที่หนึ่งและที่สอง เขาจะแบ่งกันอย่างไรจึงจะยุติธรรม ★★ (35, 5)

18. ในการทำงานอย่างหนึ่งมีชาย, หญิง และเด็กรับจ้างทำงานนั้น ซึ่งได้ค่าจ้างทั้งสิ้น

3960 บาท ถ้าหญิง 1 คนได้ค่าจ้างวันละ 20 บาท ชาย 1 คนได้มากกว่าหญิงครึ่งหนึ่ง และเด็ก 1 คนได้น้อยกว่าหญิง 1 คนอยู่ 12 บาท งานนั้นทำอยู่ 6 วัน จงหาว่าคนทั้งหมดมีฝ่ายละกี่คน (11)

19. ค่าจ้างซึ่งจ่ายให้คนเรือของเรือเดินสมุทรลำหนึ่งเดือนละ 240000 บาท ในเรือมีกัปตัน 1 คน หัวหน้ากลาสี 3 คน และกลาสี 36 คน ค่าจ้างของกัปตันเป็น 4 เท่าของหัวหน้ากลาสีคนหนึ่ง ๆ และค่าจ้างของหัวหน้ากลาสีทั้งสิ้นเป็น 12 เท่าของค่าจ้างของกลาสี 1 คน จงหาว่าคนเหล่านี้ได้ค่าจ้างเดือนละเท่าไรต่อ 1 คน (กัปตัน 60000, หัวหน้า 15000, กลาสี 3606)

20. ในการแบ่งเงิน 18000 บาทให้แก่คน 200 คน ซึ่งมีชายหญิงและเด็ก อัตราส่วนของจำนวนเงินซึ่งแต่ละพวกได้รับเป็น 5 : 4 : 3 และอัตราส่วนของเงินซึ่งแต่ละคนได้รับเป็น 3 : 2 : 1 จงหาว่าคนทั้งหมดเป็นชาย, หญิง และเด็กฝ่ายละกี่คน (50, 60, 90)

21. ลูก 3 คนได้รับมรดกจากบิดามีโค 17 ตัว มีพินัยกรรมว่าให้ลูกคนโตได้ $\frac{1}{2}$ คนรองได้ $\frac{1}{3}$ คนสุดท้องได้ $\frac{1}{9}$ เขาแบ่งกันไม่ได้ เพื่อนของเขาจึงมอบโคให้ 1 ตัว เขาจึงแบ่งกันได้ตามพินัยกรรม จงแสดงให้เห็นว่าเพื่อนของเขาไม่ขาดทุน แต่กลับได้กำไรโคอีก 1 ตัว

22. น้อยหน่า 3 ผลราคาเท่ากับมังคุด 4 ผล มะม่วง 4 ผลราคาเท่ากับน้อยหน่า 9 ผล และละมุด 13 ผลราคาเท่ากับมะม่วง 7 ผล ถ้าน้อยหน่าราคา 7 ผล 3 บาท สตรีผู้หนึ่งต้องการซื้อผลไม้เหล่านี้ให้มีจำนวนอย่างละเท่า ๆ กัน แต่ต้องการซื้อด้วยเงินที่น้อยที่สุดที่จะน้อยได้ จงหาว่าสตรีผู้นั้นจะต้องจ่ายเงินเท่าใด และได้ผลไม้อย่างละกี่ผล (813 บาท, 364 ผล)

23. ในการขุดร่องน้ำต้องผ่านกรวด ดิน และทรายตามลำดับ ค่าจ้างขุดผ่านกรวดราคาเมตรละ 30 บาท ผ่านดินเมตรละ 20 บาท ผ่านทรายเมตรละ 16 บาท ปรากฏว่าตอนที่เป็นกรวดมากกว่าดินเป็นสองเท่า และตอนที่เป็นทรายมากกว่าตอนที่เป็นกรวดและดินปนกันอยู่ 50 เมตร ค่าจ้างทั้งหมดเป็นเงิน 4600 บาท จงหาความยาวของร่องน้ำตอนที่เป็นกรวด, ดิน และทรายตามลำดับ ($29\frac{11}{16}$, $59\frac{3}{8}$ และ $139\frac{1}{16}$ เมตร)

# หุ้นส่วน
# PARTNERSHIPS

# 6

เรื่องหุ้นส่วนก็คล้ายกับวิธีแบ่งส่วน หรือพูดได้ว่าคือการแบ่งส่วนนั่นเอง แต่แทนที่โจทย์จะบอกให้แบ่งเงินหรือแบ่งของอย่างอื่น โจทย์บอกให้แบ่งกำไร โดยบอกทุนของแต่ละคนให้ การบอกทุนก็คือการบอกส่วนหรือบอกอัตราส่วนให้นั่นเอง ในการแบ่งกำไรเขาถือตามทุน คือถือทุนเป็นหลัก เช่นคนสองคนเข้าหุ้นกันทำการค้า เสร็จแล้วมีกำไร เขาทั้งสองต้องแบ่งกำไรกัน ปัญหามีอยู่ว่าต้องแบ่งอย่างไรจึงจะเป็นที่พอใจกันทั้งสองฝ่าย คือแบ่งให้อย่างยุติธรรม และวิธียุติธรรมก็คือ แบ่งให้ตามทุนของคนที่ลง เช่น ก. ข. เข้าทุนกัน ก. ออกเงิน 1000 บาท ข. ออก500 บาท เสร็จแล้วได้กำไรจากการค้า 300 บาท วิธีแบ่งกำไรก็ถือทุนเป็นหลัก ใครลงทุนมากก็ควรได้กำไรมาก ใครลงทุนน้อยก็ควรได้กำไรน้อยลงตามส่วน (ตามปรกติแล้วการแบ่งกำไรกันนั้น แบ่งกันเมื่อสิ้นปี)

จากตัวอย่างที่ยกจะเห็นได้ว่า ทุนของ ก : ข = 1000 : 500

รวมทุนก็ได้ 1000 + 500 = 1500 บาท

∴ กำไรของ ก. $\frac{300}{1500} \times 1000 = 200$ บาท

กำไรของ ข. $\frac{300}{1500} \times 500 = 100$ บาท

ดังนี้จะเห็นได้ว่าคล้ายกับวิธีแบ่งส่วนนั่นเอง

**ตัวอย่าง 1** ก. และ ข. เข้าทุนกันทำการค้า ก. ลงทุน 5000 บาท ข. ลงทุน 7000 บาท สิ้นปีมีกำไร 1200 บาท เขาจะแบ่งกำไรกันอย่างไร

**วิธีทำ** ทุนของ ก. 5000 บาท ทุนของ ข. 7000 บาท

รวมทุน $5000 + 7000 = 12000$ บาท

∴ กำไรของ ก. $\frac{1200}{12000} \times 5000 = 500$ บาท

กำไรของ ข. $\frac{1200}{12000} \times 7000 = 700$ บาท

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 2** ก. และ ข. เข้าทุนกันทำการค้า ก. ลงทุน 750 บาท ข. ลงทุนน้อยกว่า ก. 500 บาท สิ้นปีมีกำไร 400 บาท จงแบ่งกำไร

**วิธีทำ** ทุนของ ก. 750 บาท ทุนของ ข. $750 - 500 = 250$ บาท

รวมทุน $750 + 250 = 1000$ บาท

∴ กำไรของ ก. $\frac{400}{1000} \times 750 = 300$ บาท

∴ กำไรของ ข. $\frac{400}{1000} \times 250 = 100$ บาท

**ตอบ**

ตัวอย่างที่ผ่านมานี้เป็นตัวอย่างซึ่งกล่าวถึงเงินทุนเฉย ๆ ไม่ได้กำหนดเวลาว่าใครลงทุนนานเท่าใด การที่โจทย์ไม่ได้กำหนดลงไปเช่นนั้นต้องถือว่าเวลาเท่ากัน ตามวิธีที่ได้ทำไว้ให้ดูแล้วนั้น แต่ในทางปฏิบัติที่แท้จริงแล้ว การเข้าหุ้นลงทุนกันนั้นไม่จำต้องลงทุนพร้อมกัน และตามปกติก็ไม่สู้จะมีการลงทุนพร้อมกันได้ ในทำนองเดียวกันเมื่อลงทุนไปแล้วไม่พอใจ หรือมีเหตุขัดข้องจะถอนทุนออกเสียก็ได้ เมื่อเป็นดังนี้ก็ทำให้การคำนวณต้องทวีความยุ่งยากขึ้นอีก

การลงทุนในเวลาที่ไม่เท่ากันนี้ การคำนวณถือเวลาเป็นหลักร่วมกับเงินทุน คนที่ลงทุนน้อยอาจจะได้กำไรที่แบ่งมากกว่าคนลงทุนมากก็ได้ ถ้าหากลงทุนนานกว่าคนลงทุนมากเป็นเวลานานพอ เช่น

นายแดงลงทุน 2000 บาทเวลา 5 เดือน นายดำลงทุน 4000 บาทในเวลา 2 เดือน การค้ำกำไร 900 บาท จงแบ่งกำไรให้นายแดงและนายดำ

วิธีทำก็คือ เทียบเวลาให้เท่ากันเสียก่อน คือ

นายแดงลงทุน 5 เดือน เป็นเงิน 2000 บาท

∴ 1 เดือน ลงทุน $2000 \times 5 = 10000$ บาท

นายดำลงทุน 2 เดือน เงิน 4000 บาท

∴ 1 เดือน ลงทุน $4000 \times 2 = 8000$ บาท

รวมทุนใน 1 เดือน $10000 + 8000 = 18000$ บาท

∴ กำไรของนายแดง $\frac{900}{18000} \times 10000 = 500$ บาท

กำไรของนายดำ $\frac{900}{18000} \times 8000 = 400$ บาท

ข้อฉงนก็คือ เทียบว่า 5 เดือน นายแดงลงทุน 2000 บาท

1 เดือน ลงทุน $2000 \times 5$

นักศึกษาอาจสงสัยว่าทำไม 5 เดือน ลงทุน 2000 บาท ครั้น 1 เดือนกลับเอา 5 คูณแทนที่จะเอาไปหาร เพราะ 1 เดือนทุนก็ควรจะน้อยลง

ถ้าหากท่านสงสัยอย่างนี้ แสดงว่าท่านสงสัยถูกแล้ว แต่ท่านยังเข้าใจผิด

**อธิบายได้ว่า** การที่เราเอา 5 ไปคูณ 2000 หรือเอาจำนวนเดือนไปคูณเงินทุน แทนที่จะเอาไปหาร ตามที่ควรจะเป็นนั้นก็เพราะ

เพื่อต้องการรู้ว่า ถ้าหากจะลงทุนทำการอย่างนั้นให้ได้ผลใน 1 เดือน (แทนที่จะเป็น 5 เดือน) จะต้องลงทุนเท่าไร

การที่ลงทุนในเวลาน้อยลง แต่จะให้ได้ผล คือให้ได้กำไรเท่าเดิมนั้น ต้องใช้เงินทุนเพิ่มขึ้น ซึ่งความจริงแล้วควรจะเขียนว่า นายแดงลงทุน 5 เดือน เงิน 2000 บาท

∴ ถ้าจะให้นายแดงลงทุนเพียง 1 เดือนให้ได้กำไรเท่าเดิม ต้องใช้เงินทุน $2000 \times 2$ แต่ถ้าเขียนอย่างนี้ยืดยาวเกินไปไม่เหมาะสม และถือกันว่าเป็นที่รู้อยู่ทั่วไป เข้าใจว่าพูดมาถึงนี่ นักศึกษาคงหายฉงนแล้ว

เมื่อหมดสงสัยแล้ว โปรดดูตัวอย่างต่อไป

**ตัวอย่าง 3** (ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ พ.ศ. 2494)

ก. และ ข. เข้าหุ้นกันทำการค้าขาย ก. ลงทุน 5000 บาท ข. ลงทุน 4500 บาท พอสิ้นเดือนที่ 4 ก. ถอนทุนออกเสียครึ่งหนึ่ง และสิ้นเดือนที่ 6 ข. เพิ่มทุนอีก $\frac{1}{3}$ ของทุนของเขา สิ้นปีมีกำไร 4120 บาท เขาควรจะแบ่งกำไรกันคนละเท่าไร

**วิธีทำ** ก. ลงทุน 5000 บาทไปจนถึงสิ้นเดือนที่ 4

$\therefore$ 4 เดือน ก. ลงทุน 5000 บาท

$\therefore$ 1 เดือน ก. ลงทุน $5000 \times 4 = 20000$ บาท

แล้วถอนทุนออกครึ่งหนึ่งคงเหลือ $\frac{5000}{2} = 2500$ ในเวลา $12 - 4 = 8$ เดือน

8 เดือน ก. ลงทุน 2500 บาท

1 เดือน ก. ลงทุน $2500 \times 8 = 20000$ บาท

รวมทุนของ ก. $20000 + 20000 = 40000$ บาท

ข. ลงทุน 4500 บาทไปจนถึงสิ้นเดือนที่ 6

$\therefore$ 6 เดือน ข. ลงทุน 4500 บาท

$\therefore$ 1 เดือน ข. ลงทุน $4500 \times 6 = 27000$ บาท

แล้วเพิ่มทุนอีก $\frac{1}{3}$ ของทุนของเขา $\therefore$ เพิ่ม $\frac{1}{3} \times 4500 = 1500$ บาท

$\therefore$ เหลือเวลาอีก $12 - 6 = 6$ เดือน ข. ลงทุนรวมเป็นเงิน $4500 + 1500 = 6000$ บาท

6 เดือน ข. ลงทุน 6000 บาท

$\therefore$ 1 เดือน ข. ลงทุน $6000 \times 6 = 36000$ บาท

รวมทุนของ ข. $27000 + 36000 = 63000$ บาท

รวมทุนของ ก. และ ข. $40000 + 63000 = 103000$ บาท

สิ้นปีมีกำไร 4120 บาท

$\therefore$ กำไรของ ก. $\frac{4120}{103000} \times 40000 = 1600$ บาท

กำไรของ ข. $\frac{4120}{103000} \times 63000 = 2520$ บาท

ตอบ $\begin{cases} \text{กำไรของ ก. } 1600 \text{ บาท} \\ \text{กำไรของ ข. } 2520 \text{ บาท} \end{cases}$

(หมายเหตุ กำไรของ ข. จะเอากำไรของ ก. ไปหักออกจากกำไรทั้งหมดก็ได้ คือ

$4120 - 1600 = 2500$)

ตามวิธีทำของตัวอย่างนี้ เมื่อเข้าใจวิธีทำแล้วอาจรวบรัดให้สั้นลงอีกได้

**ตัวอย่าง 4** ก. ข. เข้าทุนกันทำการค้า ก. ลงทุน 5000 บาท ข. ลงทุน 8000 บาท พอสิ้นเดือนที่ 4 ก. เพิ่มทุนเข้าไปอีกครึ่งหนึ่งของทุนของเขา พร้อมกับ ค. มาเข้าทุนด้วย 4000 บาท สิ้นเดือนที่ 6 ข. ถอนทุนออก 2000 บาท ดังนั้น ค. จึงเพิ่มทุนเข้าอีกเป็นทุนของ ค. ทั้งสิ้นเท่ากับทุนของ ก. ในขณะนั้น สิ้นปีมีกำไร 4340 บาท อยากทราบว่าเขาแบ่งกำไรกันอย่างไร

**วิธีทำ**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ก. ลงทุนครั้งแรก | 4 | เดือน | เงิน | 5000 บาท |
| $\therefore$ | 1 | เดือน | เงิน | $5000 \times 4 = 20000$ บาท |
| ครั้งหลัง | 8 | เดือน | เงิน | $5000 + \frac{5000}{2} = 7500$ บาท |
| $\therefore$ | 1 | เดือน | เงิน | $7500 \times 8 = 60000$ บาท |
| รวมทุนของ ก. ทั้งสิ้น | | | | $20000 + 60000 = 80000$ บาท |
| ข. ลงทุนครั้งแรก | 6 | เดือน | เงิน | 8000 บาท |
| $\therefore$ | 1 | เดือน | เงิน | $8000 \times 6 = 48000$ บาท |
| ครั้งหลัง | 6 | เดือน | เงิน | $8000 - 2000 = 6000$ บาท |
| $\therefore$ | 1 | เดือน | เงิน | $6000 \times 6 = 36000$ บาท |
| รวมทุนของ ข. ทั้งสิ้น | | | | $48000 + 36000 = 84000$ บาท |

ก. ลงทุนครั้งแรก 2 เดือน เงิน 4000 บาท

∴ 1 เดือน เงิน $4000 \times 2 = 8000$ บาท

ครั้งหลัง 6 เดือน เงิน 7500 บาท

∴ 1 เดือน เงิน $7500 \times 6 = 45000$ บาท

รวมทุนของ ค. ทั้งสิ้น $8000 + 45000 = 53000$ บาท

รวมทุนของ ก. ข. ค. ในเวลาที่เท่ากัน $80000 + 84000 + 53000 = 217000$ บาท

∴ กำไรของ ก. $\frac{4340}{217000} \times 80000 = 1600$ บาท

ของ ข. $\frac{4340}{217000} \times 84000 = 1680$ บาท

ของ ค. $\frac{4340}{217000} \times 53000 = 1060$ บาท

ตอบ

อธิบาย ก. ลงทุน 5000 บาท ครั้งแรกเป็นเวลา 4 เดือน

แล้วเพิ่มอีก $\frac{5000}{2} = 2500$ บาท รวมเป็นทุน $5000 + 2500 = 7500$ บาท

เงิน 7500 บาทนี้ลงทุนในเวลาที่เหลือ คือ $11 - 4 = 8$ เดือน

ข. ลงทุน 8000 บาท ครั้งแรกเป็นเวลา 6 เดือน

แล้วถอนออก 2000 บาท คงเหลือ $8000 - 2000 = 6000$ บาท

∴ เงิน 6000 บาทลงทุนในเวลาที่เหลืออีก 6 เดือน

ค. ลงทุน 4000 บาท จากต้นเดือนที่ 5 (คือสิ้นเดือนที่ 4) ถึงสิ้นเดือนที่ 6 เป็นเวลา 2 เดือน

แล้วเพิ่มทุนเข้าอีกเป็นทุนเท่ากับทุนของ ก. ขณะนั้น คือ 7500 บาท

ทุน 7500 บาทนี้ ลงทุนในเวลาที่เหลือ คือเหลืออีก 6 เดือน

**ตัวอย่าง 5** ก. มีโค 15 ตัว ข. มี 24 ตัว ค. มี 10 ตัว เขารวมกันเช่าทุ่งแห่งหนึ่งเพื่อนำโคไปเลี้ยง ก. นำโคไปเลี้ยง 4 วัน ข. เลี้ยง 5 วัน ค. เลี้ยง 12 วัน ถ้าค่าเช่าทุ่งเป็นเงิน 50 บาท เขาควรออกเงินกันคนละเท่าไร

**วิธีทำ**

ในเวลา 4 วัน ก. นำโคไปเลี้ยง 15 ตัว

ถ้าใน 1 วัน ก. ต้องนำโคไปเลี้ยง $15 \times 4 = 60$ ตัว (จึงจะเสียค่าเช่าเท่าเดิม)

ในเวลา 5 วัน ข. นำโคไปเลี้ยง 24 ตัว

ถ้าใน 1 วัน ข. ต้องนำโคไปเลี้ยง $24 \times 5 = 70$ ตัว (จึงจะเสียค่าเช่าเท่าเดิม)

ในเวลา 12 วัน ค. นำโคไปเลี้ยง 10 ตัว

ถ้าใน 1 วัน ค. ต้องนำโคไปเลี้ยง $10 \times 12 = 120$ ตัว (จึงจะเสียค่าเช่าเท่าเดิม)

รวมจำนวนโคทั้งสิ้น $60 + 70 + 120 = 250$ ตัว

$\therefore$ ก. ควรออกเงิน $\frac{50}{250} \times 60 = 12$ บาท

ข. ควรออกเงิน $\frac{50}{250} \times 70 = 14$ บาท

ค. ควรออกเงิน $\frac{50}{250} \times 150 = 24$ บาท

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 6** (ข้อสอบ ม. 8)

A. B. และ C. เข้าทุนกันทำการค้าขายอย่างหนึ่ง A ลงทุน 1100 บาท B ลงทุน 1300 บาท และ C ลงทุน 1700 บาท ต่อมาอีกกี่เดือนไม่ทราบ งานอันนี้ต้องการใช้ทุนเพิ่มอีก 500 บาท และ B เป็นผู้ออกไป เมื่อถึงปลายปีมีกำไร 2513.70 บาท และส่วนแบ่ง (กำไร) ของ A นั้นเป็น 623.70 บาท เงินทุนที่ B ออกเพิ่มไปอีก 500 บาทนั้น ออกไปเมื่อเดือนที่เท่าใด

**วิธีทำ** A และ C ลงทุนตลอดเวลา 12 เดือนเท่ากัน

$\therefore$ การแบ่งกำไรต้องมีส่วนเท่ากัน

A ลงทุน 1100 บาท ได้ส่วนแบ่งกำไร 623.70 บาท

$\therefore$ C ลงทุน 1700 บาท ได้ส่วนแบ่งกำไร $\frac{623.70}{1100} \times 1700 = 963.90$ บาท

$\therefore$ เป็นกำไรจากทุนทั้งสิ้นของ B $= 2513.70 - 623.70 - 963.90$

$= 926.10$ บาท

เฉพาะเงินกำไรของ B จากทุน 1300 บาท

A ลงทุน 1100 บาทได้กำไร 627 70 บาท

$\therefore$ B ลงทุน 1300 บาทได้กำไร $\frac{627.70}{1100} \times 1300 = 737.10$ บาท

$\therefore$ เงินกำไรของ B จากทุน 500 บาท $= 926.10 - 737.10 = 189$ บาท

(เทียบต่อไปว่าเงิน 500 บาทนี้ ถ้าลงทุนทั้ง 12 เดือนจะเป็นกำไรเท่าใด)

ในเวลา 12 เดือนทุน 1100 บาท ได้กำไร 627.70 บาท

$\therefore$ ในเวลา 12 เดือนทุน 500 บาท ได้กำไร $\frac{627.70}{1100} \times 500 = 283.50$ บาท

ทุน 500 บาทได้กำไร 283.50 บาท ในเวลา 12 เดือน

$\therefore$ ทุน 500 บาทได้กำไร 189 บาท ในเวลา $\frac{12}{283.50} \times 189 = 8$ เดือน

นั่นคือเงิน 500 บาทนี้ B ออกไปเมื่อ 8 เดือนหลัง คือลงทุน 1300 บาทมาแล้ว 4 เดือน

ดังนั้นจึงเพิ่มเงิน 500 นี้ เมื่อสิ้นเดือนแรกแล้ว

คือเพิ่มเมื่อต้นเดือนที่ห้า

ตอบ ต้นเดือนที่ห้า

---

## แบบฝึกหัด ๖

1. ชายสองคนเข้าทุนกันทำการค้าด้วยเงินทุน 4800 และ 5600 บาท สิ้นปีมีกำไร 2327 บาท จงแบ่งกำไรให้เขาทั้งสองนี้ (1074, 1253)
2. ก. ข. ค. เข้าหุ้นกันค้าสินค้าอย่างหนึ่งเป็นเงินทุนทั้งสิ้น 15000 บาท ก. ลงทุนมากกว่า ข. 2500 บาท และ ข. ลงทุนมากกว่า ค. 2500 บาท สิ้นปีได้กำไร 3000 บาท จงแบ่งกำไรให้ ก. ข. ค. ตามส่วนของทุนของเขา (1500, 1000, 500)
3. เด็กสามคนเข้าเงินกันซื้อลูกกินแบ่งส่วนหนึ่งราคา 5 บาท เด็กคนที่หนึ่งเข้าหุ้นน้อยกว่าคนที่สองอยู่ 75 สตางค์ คนที่สามเข้าหุ้นน้อยกว่าคนที่สองอยู่ 1 บาท ปรากฏว่าถูกรางวัลได้รับเงิน 1000 บาท จงแบ่งเงินให้เด็กทั้งสามคนนี้ (300, 450, 250)

4. ก. ข. ค. เข้าหุ้นกันทำการค้า เมื่อแบ่งกำไร ก. ได้รับกำไรเป็น $\frac{2}{5}$ ของกำไรทั้งหมด สำหรับ ข. และ ค. นั้นได้กำไรเท่ากัน ปรากฏว่าถ้าหากกำไรเพิ่มขึ้นจาก 8 % เป็น 10 % แล้ว กำไรของ ก. จะเพิ่มขึ้น 220 บาท จงหาทุนของแต่ละคน (11000, 8250, 8250)

5. แดงและดำเข้าหุ้นกันด้วยเงิน 4900 และ 1400 บาท ให้ดำเป็นผู้จัดการมีเงินรายได้ร้อยละ 6 ของกำไรทั้งสิ้น ที่เหลือแบ่งกันตามส่วนของทุน จงแบ่งกำไร 450 บาท ให้เขาทั้งสอง (329, 121)

6. ก. และ ข. ลงทุนด้วยเงิน 5000 และ 7500 บาท สิ้นปีมีกำไร 3200 บาท แต่ต้องจ่ายค่าของเสียหาย $\frac{1}{8}$ ค่าใช้จ่ายเบ็ดเตล็ด 30 บาท ค่าจัดการของ ก. ร้อยละ 8 จากทุนของเขา และค่าจัดการของ ข. ร้อยละ 4 จากทุนของเขา กำไรที่เหลือแบ่งกันตามส่วนของทุน จงหากำไรสุทธิของ ก และ ข. (1458, 2187)

7. ก ข. ค. เข้าทุนกันทำการค้า ก. ลงทุน 500 บาทในเวลา 3 เดือน ข. ลงทุน 650 บาทเป็นเวลา 8 เดือน ค. ลงทุน 300 บาทเป็นเวลา 11 เดือน ได้กำไรทั้งสิ้น 840 บาท เขาควรแบ่งกำไรกันคนละเท่าไร (126, 436.80, 277.20)

8. ก. ข. ค. นำสัตว์ไปเลี้ยงในทุ่งแห่งเดียวกัน ก. นำไปเลี้ยง 8 ตัวในเวลา 10 เดือน ข. นำไปเลี้ยง 7 ตัวในเวลา 12 เดือน ค. นำไปเลี้ยง 20 ตัวในเวลา 5 เดือน ค่าเช่าทุ่งนั้นทั้งสิ้นเป็นเงิน 660 บาท เขาควรแบ่งกันออกคนละกี่บาท (200, 210, 250)

9. ที่ดินแปลงหนึ่งเนื้อที่ 1500 ตารางเมตร ก. ข. ค. ร่วมกันเช่าปลูกพืชล้มลุก ก. เช่า 600 ตารางเมตรชั่วเวลา 8 เดือน ข. เช่า 400 ตารางเมตรชั่วเวลา 6 เดือน พื้นที่ส่วนที่เหลือ ค. เช่าตลอดเวลา 12 เดือน ถ้าเจ้าของที่ดินคิดค่าเช่าที่ดินแปลงนี้ละ 242 บาท ก. ข. และ ค. ควรจะเสียค่าเช่าตามส่วนของเวลาและพื้นที่คนละเท่าไร ★ (88, 44, 110)

10. แดงกับดำเช่าที่แห่งหนึ่งเลี้ยงวัวร่วมกัน แดงเอาวัวมาเลี้ยง 30 ตัว พร้อมกับดำเอามาเลี้ยง 20 ตัว อยู่มาได้ 2 เดือนเต็ม แดงขายวัวของเขาไปเสีย 10 ตัว หลังจากนั้น

ไปอีก 1 เดือน ดำเอาวัวมาเลี้ยงเพิ่มขึ้นอีก 5 ตัว และเขียวขอเอาวัวมาเลี้ยงร่วมด้วยอีก 15 ตัว ถ้าทั้งนี้เช่ากันเป็นเวลา 6 เดือน คิดค่าเช่ารวมทั้งสิ้น 80 บาท เขาทั้งสามควรเสียค่าเช่าคนละเท่าไร ★ (แดง 35, ดำ 35.75, เขียว 11.25)

11. สามคนเข้าหุ้นกันค้าขาย คนที่หนึ่งลงทุน $\frac{1}{3}$ ของทุนทั้งหมดในเวลา $\frac{1}{4}$ ของเวลาทั้งหมด คนที่สองลงทุน $\frac{1}{4}$ ของทุนทั้งหมดในเวลาเพียงครึ่งหนึ่งของเวลาทั้งหมด ทุนที่เหลือนอกนั้นเป็นของคนที่สามลงทุนตลอดเวลา ถ้าสิ้นปีมีกำไร 219000 บาท เขาจะได้ส่วนแบ่งกำไรกันคนละเท่าไร ★ (29200; 43800; 146000)

12. ก. ข. เข้าหุ้นกันค้าขาย เมื่อแบ่งกำไรกัน ก. ได้ 5 % ของทุนที่เขาลง และ ข. ได้ 4% ของต้นทุนของเขา ปรากฏว่าเขาได้กำไรคนละเท่า ๆ กัน ถ้าต้นทุนทั้งหมดเป็น 225000 บาท เขาได้ส่วนแบ่งกำไรคนละเท่าไร ★ (5000)

13. ก. กับ ข. เข้าหุ้นส่วนกัน ก. ลงทุน 2100 บาท ข. ลงทุน 1500 บาท พอประกอบกิจการมาได้ 4 เดือน ค. มาขอเข้าหุ้นด้วยอีก 2400 บาท พอสิ้นปีมีกำไรร้อยละ 10 ของทุนทั้งหมด ดังนี้เขาควรจะได้ผลกำไรคนละเท่าไร ★ ($242\frac{4}{13}$; $173\frac{1}{3}$; $184\frac{8}{13}$)

14. A และ B เข้าหุ้นกันทำการค้าขายอย่างหนึ่ง B ลงทุนมากกว่า A ครึ่งหนึ่ง เมื่อสิ้นเดือนที่ 8 แล้ว B ถอนเสีย $\frac{1}{2}$ ของทุนของเขา ต่อมาอีก 2 เดือน A ถอน $\frac{1}{4}$ ของทุนของเขา เมื่อสิ้นปีปรากฏว่าการค้าขายนั้นมีกำไร 5300 บาท A และ B ควรจะได้ส่วนแบ่งของกำไรคนละเท่าไร ✱ ★ (2300; 3000)

15. ก. กับ ข. เข้าหุ้นกันค้าขาย ก. ลงทุน 500 บาท ข. ลงทุน 450 บาท เมื่อครบ 4 เดือน ก. ถอนทุนออกเสียครึ่งหนึ่ง และเมื่อครบ 6 เดือน ข. ถอนทุนออกเสีย $\frac{1}{3}$ ในเวลาเดียวกัน ค. เข้ามาลงทุน 700 บาท ถ้าในปีนั้นได้กำไร 2540 บาท ก. ข. และ ค. จะได้ส่วนแบ่งกำไรคนละเท่าไร ★ ★ (800, 900, 840)

16. ก. ข. และ ค. เข้าหุ้นส่วนทำการค้าขายร่วมกัน ก. ลงทุน 22000 บาท ข. ลงทุน 26000 บาท และ ค. ลงทุน 34000 บาท ต่อมาภายหลังมีความจำเป็นจะต้องเพิ่มทุนอีก 10000 บาท ซึ่ง ข. รับเป็นผู้ออกเอง เมื่อการค้าครบกำหนด 12 เดือน ปรากฏ

ว่าได้กำไรทั้งสิ้น 50274 บาท และ ก. ได้รับส่วนแบ่งกำไร 12474 บาท อยากทราบว่า ข. เพิ่มทุน 10000 บาทเมื่อเขาทั้งสามเริ่มทำการค้ามาแล้วกี่เดือน (4) ข้อสอบเตรียมวิทยาศาสตร์ 2492

17. ก. ข. ค. เข้าทุนกันประกอบธุรกิจคนละ 14400 บาท พอล่วงมาได้ 6 เดือน ก. เพิ่มเงิน 4800 บาท และ ข. เพิ่มเงิน 7200 บาท เมื่อสิ้นเดือนที่ 8 ค. ถอนทุนออก 9600 บาท ถ้าสิ้นปี ก. ได้กำไร 3360 บาท จงหากำไรของ ข. และ ค. (3600, 2239.20)

18. ก. ข. เข้าทุนกันทำการค้าด้วยเงิน 5850 บาท และ 3900 บาทตามลำดับ ซึ่งเขารู้ว่าการค้านั้นจะได้กำไร 20% ของเงินทุนเมื่อปลายปี แต่เมื่อการค้าดำเนินไปได้ 9 เดือน ค. ก็มาเข้าทุนด้วยเงิน 4550 บาท จงหาว่าเขาจะได้กำไรคนละเท่าไร (1170, 780, 227.50)

19. ก. ทำงาน 6 วันๆละ 7 ชั่วโมง ข. ทำ 9 วันๆละ 4 ชั่วโมง ค. ทำ 7 วันๆละ 5 ชั่วโมง ถ้าค่าจ้างของ ก. ข. รวมกันเป็นเงิน 156 บาท จงหาว่า ก. ข. ค. ได้ค่าจ้างคนละเท่าไร (84, 72, 70)

20. ก. ข. เข้าทุนกันทำการค้า ก. ลงทุน 24000 บาท และถอนทุนออกเดือนละ 2000 บาททุกๆเดือน ข. ลงทุน 12000 บาท และเพิ่มทุนเข้าเดือนละ 2000 บาททุกเดือน เมื่อการค้าดำเนินไปได้ 6 เดือน มีกำไร 15228 บาท จงแบ่งกำไรให้ ก. และ ข. ตามส่วนของทุนที่เขาลง (ก. ได้ 8017 บาท, ข. ได้ 7191 บาท)

# ร้อยละ
# PERCENTAGE

# 7

ในการคำนวณแทบทุกประเภท มักจะคำนวณเป็นร้อยละเสมอ ดังนั้นเรื่องร้อยละ (Percentage) จึงเป็นเรื่องสำคัญ และโดยเฉพาะนักศึกษาจะได้พบอยู่เสมอ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นเรื่องที่นักศึกษาต้องทำความเข้าใจ

เมื่อกล่าวถึงร้อยละ นักศึกษาต้องเข้าใจว่าหมายถึงการกล่าวว่า ถ้าหากของนั้นมี 100 เช่น

ฝูงชนในงานฉลองรัฐธรรมนูญ เป็นผู้ชายเตี้ยร้อยละ 20 ดังนี้ ย่อมหมายความว่า ถ้าหากฝูงชนนั้นมี 100 คน จะเป็นผู้ชายเตี้ย 20 คน

แต่โดยแท้จริงแล้ว ฝูงชนนั้นย่อมจะไม่ใช่ร้อยคน เป็นการเทียบให้รู้ว่า ถ้าฝูงชนมี 100 คนแล้วจะเป็นผู้ชายเตี้ย 20 คนเท่านั้น การบอกเป็นร้อยละเช่นนี้ เราไม่อาจรู้จำนวนแท้จริงของจำนวนนั้น ๆ ได้ การบอกเป็นร้อยละนี้ เพียงบอกให้รู้ถึงส่วนสัมพันธ์กันเท่านั้น เช่นตามตัวอย่างข้างต้น เป็นการบอกว่าถ้าฝูงชนมี 100 คนจะเป็นชายเตี้ย 20 คน ดังนี้ย่อมจะรู้ได้ว่าเป็นผู้หญิงเตี้ย $100 - 20 = 80$ คน

หรืออาจพิจารณาได้ว่า ในฝูงชน 100 คน เป็นผู้ชายเตี้ย 20 คน

∴ ผู้ชายจะเป็น $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ ของจำนวนฝูงชนทั้งหมด

ถ้าโจทย์กำหนดให้ว่าฝูงชนนั้นมีกี่คน เราก็หาได้ว่ามีชายเท่าไร หญิงเท่าไร หรือถ้าโจทย์บอกให้ว่าฝูงชนนั้นมีชายเท่าไรหรือหญิงเท่าไร เราก็อาจหาจำนวนฝูงชนทั้งหมดได้ เช่น ถ้ากำหนดให้ฝูงชนทั้งหมดมี 6000 คน

ฝูงชน 100 คน เป็นชาย 20

∴ ฝูงชน 6000 คน เป็นชาย $\frac{20}{100} \times 6000 = 1200$ คน เป็นต้น

อนึ่ง ในการพิจารณาคำว่าร้อยละนั้น อาจมีปัญหาอยู่บ้าง แต่ปัญหานั้นเราก็อาจทำความเข้าใจได้ง่าย ๆ เช่น

**กรณีที่ 1** แม่ค้ามีมะม่วงอยู่ 700 ผล หายไปเสีย 100 ผล แล้วขายไปร้อยละ 10 จงหาว่าขายไปกี่ผล

คำว่าขายไปร้อยละ 10 นั้น หมายความว่ามะม่วง 100 ขายไป 10 ปัญหามีว่ามะม่วง 100 นั้นคิดจากไหน คิดจาก 700 ผลเดิม หรือคิดจาก 600 ผล (คือหายไปเสีย 100 ผล)

เราต้องคิดว่าตามปกตินั้นจะคิดจากมะม่วงที่มีอยู่แท้จริง

ซึ่งเดิมมี 700 จริง แต่ภายหลังหายไปเสีย 100 ผล เหลือ 600 ผล

และมะม่วงที่มีอยู่เวลาขายก็คือ 600 ผล ไม่ใช่ 700 ผล

ดังนั้นก็ต้องคิดจาก 600 ผล ไม่ใช่จาก 700 ผล คือ

มะม่วง 100 ขายไป 10

∴ 600 ผล ขายไป $\frac{10}{100} \times 600 = 60$ ผล

**กรณีที่ 2** ถังใบหนึ่งจุน้ำ 500 ลิตร แต่มีน้ำอยู่ในถัง 400 ลิตร น้ำรั่วไปเสียร้อยละ 10 จงหาว่าน้ำรั่วไปกี่ลิตร

คำว่าน้ำรั่วไปร้อยละ 10 หมายความว่าถ้าน้ำ 100 จะรั่วไป 10

ปัญหามีว่าน้ำ 100 นั้นจะคิดจากไหน จาก 500 ลิตรหรือ 400 ลิตร คือมีปัญหาขึ้นว่า น้ำรั่วไปร้อยละ 10 ของอะไร ของถังหรือของน้ำที่มีอยู่จริง เมื่อเกิดปัญหาเช่นนี้

เราต้องคิดถึงการคิดตามปกติวิสัย เพราะตามปกติวิสัยนั้น ย่อมจะหมายถึงร้อยละ 10 ของจำนวนน้ำที่มีอยู่จริง หาได้หมายถึงร้อยละ 10 ของถังไม่ ถ้าหากโจทย์ต้องการให้เป็นร้อยละ 10 ของถัง โจทย์ต้องกำหนดให้ชัดออกมาว่า **รั่วออกไปเสียร้อยละ 10 ของถัง** ถ้าพูดว่า รั่วออกไปเสียร้อยละ 10 เฉย ๆ ก็ย่อมหมายความว่าร้อยละ 10 ของจำนวนน้ำที่มีอยู่จริง

น้ำ 100 รั่วออกไป 10

∴ น้ำ 400 ลิตร รั่วออกไป $\frac{10}{100} \times 400 = 40$ ลิตร

**ข้อสังเกต 1** การบอกเป็นร้อยละไม่ต้องมีหน่วย เพราะจะเป็นหน่วยใด ๆ ก็ได้ผลเท่ากัน เช่น **มีเงิน 500 บาท ใช้ไปร้อยละ 10 ใช้ไปเท่าใด** เราเทียบว่า

เงิน 100 ใช้ไป 10

∴ เงิน 500 บาท ใช้ไป $\frac{10}{100} \times 500 = 50$ บาท

100 และ 10 ไม่ต้องใส่บาทลงไป แต่ 500 ต้องใส่ เพราะโจทย์บอกว่า 500 บาท เมื่อใส่บาททางซ้ายมือ ทางด้านขวามือคือ 50 ก็ต้องมีหน่วยเป็นบาทด้วย คือเป็น 50 บาท

การไม่ใส่หน่วยลงไปที่ 100 นั้น เนื่องจากว่าเราจะใส่หน่วยอะไรก็มีค่าเท่ากัน เช่น

เงิน 100 สตางค์ ใช้ไป 10 สตางค์

∴ เงิน 500 บาท ใช้ไป $\frac{10}{100} \times 500 = 50$ บาท

หรือ เงิน 100 สลึง ใช้ไป 10 สลึง

∴ เงิน 500 บาท ใช้ไป $\frac{10}{100} \times 500 = 50$ บาท

**ข้อสังเกต 2** คำว่าร้อยละนั้นใช้แทนด้วยเครื่องหมาย % ก็ได้

เช่น ร้อยละ 10 ก็เขียนได้ว่า 10 %

ร้อยละ 5 ก็เขียนได้ว่า 5 %

วิธีอ่าน 10 % หรือ 5 % นั้น อ่านได้สองอย่าง

10 % อ่านว่า ร้อยละ 10 ก็ได้ หรืออ่านว่า 10 เปอรเซนต์ (Percent) ก็ได้

5 % อ่านว่า ร้อยละ 5 ก็ได้ หรืออ่านว่า 5 เปอรเซนต์ (Percent) ก็ได้

**ตัวอย่าง 1** มะม่วง 500 ผล ขายไปเสีย 200 ผล ขายไปร้อยละเท่าไร

**วิธีทำ** มะม่วง 500 ผล ขายไป 200 ผล

$\therefore$ มะม่วง 100 ขายไป $\frac{200}{500} \times 100 = 40$

$\therefore$ ขายไปร้อยละ 40

**ตอบ** 40

**ตัวอย่าง 2** ก. เงิน 15 บาท เป็นร้อยละเท่าไรของเงิน 300 บาท

ข. 5 % ของเงิน 500 บาท มีค่าเท่าไร

**วิธีทำ** (ก) เงิน 300 บาท คิดเป็น 100

$\therefore$ เงิน 15 บาท คิดเป็น $\frac{100}{300} \times 15 = 5$

$\therefore$ เงิน 15 บาทคิดเป็นร้อยละ 5 ของเงิน 300 บาท

(ข) เงิน 100 มีค่า 5

$\therefore$ เงิน 500 บาทมีค่า $\frac{5}{100} \times 500 = 25$ บาท

หรือจะคิดว่า 5 % คือ $\frac{5}{100}$ ก็ได้

5 % ของ 500 บาท ก็คือ $\frac{5}{100}$ ของ 500 บาท

$= \frac{5}{100} \times 500 = 25$ บาท

**ตอบ** ก. ร้อยละ 5

ข. 25 บาท

**ตัวอย่าง 3** แม่ค้าซื้อมะม่วงต้นเงิน 24 บาท ครั้นภายหลังไปซื้อเพิ่มด้วยจำนวนเงินเท่าเดิม ปรากฏว่ามะม่วงลดราคาลงร้อยละ 25 ดังนั้นจึงได้มะม่วงเพิ่มขึ้นจากที่ซื้อครั้งแรก 10 ผล จงหาว่ามะม่วงลดราคาลงผลละเท่าไร และมะม่วงเท่าไร

**วิธีทำ** เดิมซื้อมะม่วงราคา 24 บาท ภายหลังราคาลดร้อยละ 25

$\therefore$ ราคาเดิม 100 ลดลง 25

ราคาเดิม 24 บาท ลดลง $\frac{25}{100} \times 24 = 6$ บาท

$\therefore$ เงิน 6 บาท คือราคาของมะม่วงที่เพิ่มขึ้น 10 ผล

เงิน 6 บาท ซื้อมะม่วงได้ 10 ผล

∴ เงิน 24 บาท ซื้อมะม่วงได้ $\frac{10}{6} \times 24 = 40$ ผล

∴ เงิน 24 บาท เดิมซื้อมะม่วงได้เพียง $40 - 10 = 30$ ผล

ครั้งแรกซื้อ 30 ผล ต้นเงิน 24 บาท

∴ 1 ผล ราคา $\frac{24}{30} = 80$ สตางค์

ครั้งหลังซื้อ 40 ผล ต้นเงิน 24 บาท

∴ 1 ผล ราคา $\frac{24}{40} = 60$ สตางค์

มะม่วงลดราคาลงใบละ $80 - 60 = 20$ สตางค์
จำนวนมะม่วงซื้อครั้งแรก 30 ผล
ครั้งหลัง 40 ผล
} ตอบ

**ตัวอย่าง 4** เลขจำนวนหนึ่งถ้าลดลงร้อยละ 10 จะมีค่าต่างกับเมื่อเพิ่มขึ้นร้อยละ 4 อยู่ 77 จงหาเลขจำนวนนั้น

**วิธีทำ** ถ้าเลขนั้นเดิมเป็น 100

ลดลงร้อยละ 10 เหลือ $100 - 10 = 90$

เพิ่มขึ้นร้อยละ 4 เป็น $100 + 4 = 104$

∴ ค่าต่างกัน $104 - 90 = 14$

ค่าต่างกัน 14 เลขจำนวนนั้นเป็น 100

∴ ค่าต่างกัน 77 เลขจำนวนนั้นเป็น $\frac{100}{14} \times 77 = 550$

**ตอบ** 550

**ตัวอย่าง 5** (ข้อสอบ ม. 8)

นาย ก. หาเงินได้ปีละ 2000 บาท และใช้เสีย $\frac{3}{5}$ ของเงินรายได้ นาย ข. หาได้เดือนละ 120 บาท และใช้เสีย $\frac{3}{8}$ ของรายได้ ในปีหนึ่งใครจะเก็บเงินได้มากกว่ากัน และมากกว่ากี่เปอร์เซนต์

**วิธีทำ** ก. หาได้ปีหนึ่ง 2000 บาท ใช้เสีย $\frac{3}{5}$

$\therefore$ ใช้ไป $2000 \times \frac{3}{5} = 1200$ บาท

$\therefore$ ก. เก็บไว้ได้ $2000 - 1200 = 800$ บาท

ข หาได้เดือนละ 120 บาท ดังนั้นปีหนึ่งหาได้ $120 \times 12 = 1440$ บาท

ใช้เสีย $\frac{3}{8}$ $\therefore$ ใช้ไป $1440 \times \frac{3}{8} = 540$ บาท

$\therefore$ ข. เก็บไว้ได้ $1440 - 540 = 900$ บาท

$\therefore$ ในปีหนึ่ง ข. เก็บได้มากกว่า ก. $900 - 800 = 100$ บาท

ข. เก็บไว้ได้ 900 บาท มากกว่า ก. 100 บาท

$\therefore$ ข. เก็บไว้ได้ 100 มากกว่า ก. $\frac{100}{900} \times 100 = 11\frac{1}{9}$

**ตอบ** ในปีหนึ่ง ข. เก็บได้มากกว่า มากกว่า $11\frac{1}{9}$ เปอรเซนต์

**หมายเหตุ** จะไปเทียบว่า

ก. หาได้ 2000 บาท เก็บไว้ได้ 800 บาท

$\therefore$ 100 บาท เก็บไว้ได้ $\frac{800}{2000} \times 100 = 40$

ข. หาได้ 1440 บาท เก็บไว้ได้ 900 บาท

$\therefore$ 100 เก็บไว้ได้ $\frac{900}{1440} \times 100 = 62\frac{1}{2}$

ดังนั้นจะอ้างว่า ข. เก็บได้มากกว่า ก. $62\frac{1}{2} - 40 = 22\frac{1}{2}$ เปอรเซนต์ไม่ได้ เพราะโจทย์ไม่ได้ถามว่า จำนวนเปอรเซนต์ที่เก็บได้มากกว่ากันเท่าไร แต่ถามว่าเก็บได้มากกว่ากันกี่เปอรเซนต์ ต่างหาก

## แบบฝึกหัด 7

1. ชายผู้หนึ่งมีรายได้ 3780 บาท ถ้าเขาใช้จ่ายเสียร้อยละ $66\frac{2}{3}$ เขาจะเหลือเงินเก็บไว้เท่าใด (1260)
2. ซื้อวิทยุเครื่องหนึ่งราคา 2425 บาท จ่ายครั้งแรกเพียง 20 % จะคงค้างจ่ายอีกเท่าไร (1940)

3. มรดกจำนวน 4275 บาท มีพินัยกรรมว่าให้แบ่งแก่ภรรยาและบุตร 2 คน ให้ภรรยาได้รับ $33\frac{1}{3}$ % จงหาว่าบุตรจะได้รับคนละเท่าไร (1425)

4. ถังน้ำมันจุน้ำมัน 42 แกลลอน รั่วออกไปเสีย 14 แกลลอน จงหาว่ารั่วออกไปร้อยละเท่าไร $(33\frac{1}{3})$

5. เป็นหนี้เขาอยู่ 2350 บาท จ่ายไปแล้ว 1100 บาท ยังคงค้างจ่ายอยู่อีกกี่เปอร์เซนต์ $(53\frac{9}{47})$

6. ชายผู้หนึ่งต้องใช้จ่าย 65 % ของรายได้ของเขา ปรากฏว่าเขาเก็บเงินไว้ได้ 434 บาท เขามีรายได้เท่าไร (1240)

7. พลเมืองของอำเภอหนึ่งมี 12175 คน ซึ่งมากกว่าเมื่อ 5 ปีก่อนอยู่ 25 % อยากทราบว่าเมื่อ 5 ปีก่อนมีพลเมืองทั้งสิ้นเท่าไร (9740)

8. ข้าราชการผู้หนึ่งมีเงินเดือนรวมปีหนึ่ง 7800 บาท ในเดือนหนึ่งเขาเก็บไว้ได้ร้อยละ 18 ของเงินเดือนของเขา จงหาว่าในปีหนึ่งเขาใช้จ่ายทั้งสิ้นเท่าไร (6396)

9. พลเมืองของตำบล 2 ตำบลต่างกันอยู่ 1100 คน ซึ่งถ้าพลเมืองในตำบลแรกลดลง 25 % และในตำบลหลังเพิ่มขึ้น 25 % แล้ว พลเมืองทั้งสองตำบลนั้นจะเท่ากันพอดี จงหาจำนวนพลเมืองของตำบลทั้งสองนั้น (3500, 2100)

10. เด็กคนหนึ่งซื้อดินสอด้วยเงิน 15 บาท ซึ่งถ้าราคาดินสอลดลง $33\frac{1}{3}$ % แล้ว เด็กคนนั้นจะได้ดินสอเพิ่มขึ้นอีก 10 แท่ง อยากทราบว่าเด็กคนนั้นซื้อดินสอมากี่แท่งดังนี้ (75)

11. เด็กคนหนึ่งวัดด้านของผ้ารูปสี่เหลี่ยมจตุรัสผิดไป 2 เซนติเมตร ซึ่งทำให้เขาคำนวณเนื้อที่มากกว่าที่เป็นจริงไปร้อยละ 4.04 จงหาว่าผ้าผืนนั้นยาวด้านละเท่าไร (1 เมตร)

12. ทหารกรมหนึ่งไปราชการสงคราม 17 % ป่วยเสียอีกร้อยละ 10 ของที่เหลือ จึงคงมีทหารออกรบ 2241 คน จงหาว่าทหารกรมนั้นมีทหารประจำการกี่คน (3000)

13. นมจำนวนหนึ่ง 100 ลิตร มีเนื้อนมแท้อยู่ 70 % นอกนั้นมีน้ำปน จะต้องผสมนมแท้ลงไปอีกเท่าไรจึงจะทำให้นมนั้นมีส่วนนมแท้ 80 % ★ (50)

14. โรงเรียนราษฎร์แห่งหนึ่ง ส่งชื่อเข้าสอบไล่ชั้นมัธยมบริบูรณ์จำนวนหนึ่ง ในเวลาสอบปรากฏว่าไม่ได้เข้าสอบเสียร้อยละ 4 นักเรียนที่เข้าสอบจริงสอบได้ร้อยละ 75 นักเรียนที่สอบตกมีจำนวน 18 คน โรงเรียนส่งชื่อนักเรียนเข้าสอบไล่กี่คน ★ (75)

15. ถังใบหนึ่งมีสุรากับน้ำผสมกันอยู่ 50 ลิตร เป็นสุราเสียร้อยละ 70 ถ้าจะให้มีสุราอยู่ในส่วนผสมเพิ่มขึ้นเป็นร้อยละ 75 จะต้องเติมสุราลงไปกี่ลิตร ★ (10)

16. พลเมืองของประเทศสยามเดี๋ยวนี้มากกว่าเมื่อ 10 ปีมาแล้ว 10 % และมากกว่าเมื่อ 4 ปีมาแล้ว 5 % เมื่อ 4 ปีที่แล้วมามีพลเมือง 11 ล้านคน อยากทราบว่าจำนวนเพิ่มขึ้นมาใน 10 ปีที่แล้วมาเป็นเท่าใด ★ ★ (1.05 ล้าน)

17. ภาษีสำหรับของอย่างหนึ่งเก็บเพิ่มขึ้นจาก 5 % เป็น 7 % แต่ปรากฏว่าเงินภาษีที่เก็บได้จากของอย่างนี้ลดลงไป $\frac{1}{3}$ จงหาว่าจำนวนของที่ใช้นี้ลดลงไปเท่าใด ★ ★ ($52\frac{8}{21}$ %)

81. ถ้าที่จริง 1 เมตร = 39.4 นิ้ว การที่คะเนว่า 1 ตารางเซนติเมตร = 0.16 ตารางนิ้ว นั้นจะผิดไปร้อยละเท่าไร จงตอบให้ถูกลงตัวเลขทศนิยมตัวที่สอง ★ ★ (3.07)

19. ไห 2 ใบบรรจุแอลกอฮอล์และน้ำ ใบที่หนึ่งจุ 12 ลิตร เป็นแอลกอฮอล์เสียร้อยละ 25 ใบที่สองจุ 20 ลิตร 25 % เป็นน้ำ แล้วเทรวมกันลงในถังซึ่งมีแอลกอฮอล์อยู่ $\frac{1}{4}$ แล้วเติมน้ำลงไปจนเต็ม ปรากฏว่าส่วนผสมเป็นแอลกอฮอล์เสียร้อยละ 55 จงหาว่าถังใบนี้จุเท่าไร (60 ลิตร)

20. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนที่เป็นโรคเกี่ยวกับตาเสีย 53 % เป็นโรคเกี่ยวกับหู 28 % และเป็นโรคทั้งสองอย่าง 7 % จงหาว่านักเรียนที่ไม่เป็นโรคเกี่ยวกับอะไรเลยนั้นมีอยู่ร้อยละเท่าไร (26)

21. นักธุรกิจลงทุนทำการค้าด้วยเงิน 12500 บาท และ 8500 บาท เขาตกลงกันว่า 60 % ของกำไรทั้งหมดแบ่งกันคนละเท่า ๆ กัน นอกนั้นแบ่งกันตามส่วนของทุน ถ้าคนหนึ่งได้ส่วนแบ่งมากกว่าอีกคนหนึ่ง 300 บาท จงหากำไรทั้งสิ้น (3937.50 บาท)

22. โลหะตะกั่วปนเงินหลอมผสมเข้ากับโลหะตะกั่วปนทองในอัตราส่วน 57 ต่อ 13 ตะกั่วในโลหะปนเงินมีร้อยละ 13.75 และตะกั่วในโลหะปนทองมีร้อยละ 16.25 อยากทราบว่าโลหะที่หลอมผสมใหม่มีตะกั่วร้อยละเท่าไร (ข้อสอบไล่เตรียมอุดม ๆ 2495 ตอบ ร้อยละ $14\frac{3}{14}$ หรือร้อยละ 14.21428)

23. สตรีผู้หนึ่งมีรายได้ปีละ 8000 บาท แต่ต้องเสียภาษีให้แก่อำเภอและเทศบาล ซึ่งเทศบาลคิดจากเงินที่เหลือจากที่เสียให้แก่อำเภอแล้ว; 75 % ของเงินที่เหลือจากเสียภาษีเป็นค่าใช้จ่าย ถ้าปรากฏว่าภาษีที่เสียให้แก่อำเภอมากกว่าที่เสียให้เทศบาลอยู่ 24 % และในปีหนึ่งหล่อนยังมีเงินเก็บไว้ 1824 บาท จงหาว่าอำเภอและเทศบาลเก็บภาษีร้อยละเท่าไร (ข้อสอบ ร.ร. เตรียมนายร้อย 2497 — 2498 ตอบ อำเภอ 5 % เทศบาล 4 %)

---

เครื่องหมาย ★★ คือข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# กำไร-ขาดทุน
# PROFIT AND LOSS

# 8

เรื่องกำไรและขาดทุนนี้ เป็นเรื่องของการค้าขาย ดังนั้นจึง
ต้องทำความเข้าใจสิ่งต่อไปนี้เสียก่อน

ทุน คือจำนวนเงินที่ผู้ขายซื้อของนั้น ๆ มา

ราคาขาย คือจำนวนเงินที่ผู้ขายได้จากการขายของนั้นไป

กำไร คือจำนวนเงินที่ขายได้มากกว่าราคาทุน

$\therefore$ กำไร = ราคาขาย − ทุน

ขาดทุน คือการที่ขายของไปต่ำกว่าราคาทุน

$\therefore$ จำนวนเงินที่ขาดทุน = ราคาทุน − ราคาขาย

คำอธิบายต่อไปนี้จะทำให้เข้าใจได้ดีขึ้น

(1) แม่ค้าซื้อมะม่วงมา 20 บาท (ดังนั้นทุนคือ 20 บาท)
แล้วขายไปทั้งสิ้นได้เงิน 25 บาท (ราคาขายคือ 25 บาท)

ดังนั้นแม่ค้าได้กำไร 25 − 20 = 5 บาท

(2) แม่ค้าซื้อมะม่วงมา 20 บาท (ทุนคือ 20 บาท)
ขายไปทั้งสิ้นได้เงิน 15 บาท (ราคาขายคือ 15 บาท)

ดังนั้น แม่ค้าขาดทุน 20 − 15 = 5 บาท

## จงสังเกตตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1** ซื้อมะม่วงมา 100 ผล สิ้นเงิน 25 บาท ขายไปผลละ 30 สตางค์ จะได้กำไรทั้งสิ้นเท่าไร

**วิธีทำ** มะม่วง 100 ผล เป็นเงินทุน 25 บาท

ขายไป 1 ผล ได้เงิน 30 สตางค์

∴ ขายไป 100 ผล ได้เงิน $30 \times 100 = 3000$ สตางค์

$= 30$ บาท

∴ ได้กำไรทั้งสิ้น $30 - 25 = 5$ บาท

**ตอบ** 5 บาท

**ตัวอย่าง 2** แม่ค้าซื้อมะม่วงมาราคา 4 ผล 3 บาท สิ้นเงิน 45 บาท แล้วจึงขายไปทั้งหมดในราคา 3 ผล 4 บาท จะได้กำไรทั้งสิ้นเท่าไร

**วิธีทำ** ซื้อสิ้นเงิน 3 บาท เป็นจำนวนมะม่วงที่ซื้อมา 4 ผล

∴ ซื้อสิ้นเงิน 45 บาท เป็นจำนวนมะม่วงที่ซื้อมา $\frac{4}{3} \times 45 = 60$ ผล

ขายไป 3 ผล ได้เงิน 4 บาท

∴ ขายไป 60 ผล ได้เงิน $\frac{4}{3} \times 60 =$ 80 บาท

∴ ได้กำไรทั้งสิ้น $80 - 45 =$ 35 บาท

**ตอบ** 35 บาท

**ตัวอย่าง 3** แม่ค้าซื้อมะม่วงมาราคา 4 ผล 3 บาท แล้วขายไปทั้งหมดในราคา 3 ผล 4 บาท ได้กำไรทั้งสิ้น 7 บาท จงหาจำนวนมะม่วง

**วิธีทำ** ซื้อมา 4 ผล เป็นราคาทุน 3 บาท

∴ ซื้อมา 1 ผล เป็นทุน $\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$ บาท

ขายไป 3 ผล เป็นราคาขาย 4 บาท

∴ ขายไป 1 ผล เป็นราคาขาย $\frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$ บาท

$\therefore$ มะม่วง 1 ผล ได้กำไร $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$ บาท

ได้กำไร $\frac{7}{12}$ บาท เป็นมะม่วง 1 ผล

$\therefore$ ได้กำไร 7 บาท เป็นมะม่วง $\frac{12}{7}\times 7 = 12$ ผล

ตอบ 12 ผล

## การคิดได้กำไรขาดทุนเป็นร้อยละ

จากตัวอย่างซึ่งได้ผ่านมาแล้ว 3 ตัวอย่าง นักศึกษาจะเห็นได้ว่าไม่มีอะไรยุ่งยาก และไม่น่าจะเป็นเรื่องยุ่งยาก แต่เท่าที่ได้พบเห็นมีนักศึกษาเป็นจำนวนมากที่ไม่เข้าใจเรื่องนี้ ในเมื่อโจทย์บอกกำไรหรือขาดทุนให้เป็นร้อยละ ความจริงการบอกกำไร—ขาดทุนเป็นร้อยละ ไม่มีอะไรที่จะคิดผิดไปจากตัวอย่างข้างต้น แต่นักศึกษาส่วนมากก็ทำโจทย์ไม่ได้ เมื่อเป็นดังนี้ เราจึงต้องทำความเข้าใจเรื่องร้อยละ เกี่ยวกับเรื่องนี้เสียก่อน

มีหลักอยู่ว่า ต้องคิดจากทุน 100 เสมอ

**คิดอย่างไร**

อธิบายได้ง่าย ๆ จากกรณีต่อไปนี้

**กรณีที่ 1** ซื้อของมาราคา 50 บาท ขายไปได้กำไรร้อยละ 10

ก่อนอื่นต้องดีความหมายของคำว่า "ได้กำไรร้อยละ 10"

ได้กำไร คือ การที่ขายไปได้ราคามากกว่าราคาทุน

ได้กำไรร้อยละ 10 คือขายไปมากกว่าราคาทุน เป็นจำนวนเงินร้อยละสิบ

คือ ถ้าทุนเป็น 100 แล้วละก็จะได้กำไร 10

ดังนั้น ทุน 50 บาท จึงได้กำไร $\frac{10}{100}\times 50 = 5$ บาท

**(หมายเหตุ** เขียนว่า ทุน 100 เฉย ๆ ได้กำไร 10 เฉย ๆ ไม่ต้องใส่ว่าร้อยบาท หรือร้อยดอลล่าร์ หรือร้อยอะไร ๆ คำว่าร้อยละ 10 หมายถึงร้อยอะไร ๆ ก็ได้ ถ้า 100 อะไร 10 ก็คงเป็นอันนั้น

เช่น ทุน 100 บาท ก็ได้กำไร 10 บาท ทุน 100 เหรียญอเมริกัน ก็ได้กำไร 10 เหรียญอเมริกัน ดังนั้นจึงเขียนว่า ทุน 100 ได้กำไร 10 เฉยๆ)

**กรณีที่ 2** ซื้อของมา 200 บาท ขายไปขาดทุนร้อยละ5

ขาดทุนร้อยละ 5 คือทุน 100 ขาดทุน 5

ดังนั้น ทุน 200 บาท ขาดทุน $\frac{5}{100} \times 200 = 10$ บาท

**กรณีที่ 3** ซื้อของมา 5 ชิ้นราคาชิ้นละ 40 บาท ขายไปทั้งสิ้นได้กำไรร้อยละ 10

ได้กำไรร้อยละ 10 หมายความว่าทุน 100 ได้กำไร 10

จงเข้าใจว่า คำว่าทุน 100 นั้น เป็นจำนวนเงินไม่ใช่จำนวนของ

จะไปว่าทุน 100 ได้กำไร 10

$\therefore$ ทุน 5 ได้กำไร ----- ตะก็เป็นอันว่าผิดอย่างมาก

จะต้องว่า ทุน 100 ได้กำไร 10

$\therefore$ ทุน $5 \times 40 = 200$ บาท ได้กำไร $\frac{10}{100} \times 200 = 20$ บาท

**กรณีที่ 4** ซื้อของมาราคา 200 บาท ขายไป 240 บาท ได้กำไรร้อยละเท่าไร

ทุน 200 บาท ขาย 240 บาท ได้กำไร $240 - 200 = 40$ บาท

ถามว่ากำไร 40 บาทนี้ได้จากทุนเท่าไร

ตอบว่าได้จากทุน 200 บาท

คือทุน 200 บาทได้กำไร 40 บาท

โจทย์ถามว่า ได้กำไรร้อยละเท่าไร

คือ ถามว่า ถ้าทุน 100 จะได้กำไรเท่าไร

ดังนั้น ---- จึงเทียบว่า

ทุน 200 บาทได้กำไร 40 บาท

$\therefore$ ทุน 100 (เฉย ๆ) ได้กำไร $\frac{40}{200} \times 100 = 20$ (เฉย ๆ)

$\therefore$ ได้กำไรร้อยละ 20

**กรณีที่ 5** ซื้อของมา 500 บาท ขายไป 400 บาท ขาดทุนร้อยละเท่าไร

ทุน 500 บาท ขายไป 400 บาท ขายไปน้อยกว่าซื้อมา $\therefore$ ขาดทุน

$\therefore$ ทุน 500 บาท ขาดทุน $500 - 400 = 100$ บาท

โจทย์ถามว่า ขาดทุนร้อยละเท่าไร คือถามว่าถ้าทุน 100 จะขาดทุนเท่าไร

ทุน 500 บาทขาดทุน 100 บาท

∴ ทุน 100 ขาดทุน $\frac{100}{500} \times 100 = 20$

∴ ขาดทุนร้อยละ 20

**กรณีที่ 6** ซื้อของมา 400 บาท ขายไปได้กำไรร้อยละ 25 ขายไปเท่าไร

ก่อนอื่นต้องตีความหมายคำว่าขายไปได้กำไรร้อยละ 25

ได้กำไรร้อยละ 25 หมายถึงทุน 100 ได้กำไร 25

ทุน 100 ได้กำไร 25 ∴ ขายไป 100 + 25 = 125

ทุน 100 ขายไป 125

∴ ทุน 400 บาท ขายไป $\frac{125}{100} \times 400 = 500$ บาท

∴ ขายไป 500 บาท

**กรณีที่ 7** ซื้อของมาอย่างหนึ่งแล้วขายไป 300 บาท ได้กำไรร้อยละ 20 ทุนซื้อมาเท่าไร

ได้กำไรร้อยละ 20

หมายความว่า ทุน 100 ได้กำไร 20

∴ ทุน 100 ขายไป 100 + 20 = 120

ขายไป 120 เป็นทุน 100

∴ ขายไป 300 บาท เป็นทุน $\frac{100}{120} \times 300 = 250$ บาท

∴ ทุนซื้อมา 280 บาท

**กรณีที่ 8** ขายของไปอย่างหนึ่งขาดทน 125 บาท คิดเป็นร้อยละ 25 จงหาว่าทุนเท่าไร

ก่อนอื่นต้องคิดปัญหาขาดทุน 125 บาท คิดเป็นร้อยละ 25 เสียก่อน

ขาดทุน 125 บาทนี้ ทุนเท่าไรเรายังไม่รู้

แต่ขาดทุนร้อยละ 25 เป็นทุนเท่าไรเรารู้ได้ คือ

ทุน 100 ขาดทุน 25

คิดต่อไปว่า ตามโจทย์ขายไปขาดทุน 125 บาท จากทุนเท่าไรไม่รู้

แต่ถ้าทุน 100 แล้วละก้อ ขาดทุน 25

หรือพูดใหม่ว่า ถ้าขาดทุน 25 แล้วทุนจะเป็น 100

$\therefore$ ขาดทุน 125 บาท ทุนจะเป็นเท่าไร

จึงเทียบได้ว่า

ขาดทุน 25 เป็นทุน 100

$\therefore$ ขาดทุน 125 บาท เป็นทุน $\frac{100}{25} \times 125 = 500$ บาท

$\therefore$ ทุนคือ 500 บาท

เมื่อได้พิจารณากรณีทั้งแปดนี้มาแล้ว ถ้าเข้าใจก็เป็นอันว่าตัวอย่างซึ่งนักศึกษาจะได้พบต่อไปนี้เป็นของง่าย ถ้าไม่เข้าใจ โปรดอย่าเพิ่งข้ามเลยไป บางคนอาจคิดว่ากรณีทั้ง 8 นี้ไม่สำคัญ เป็นโจทย์ง่าย ๆ ขอบอกว่า โจทย์ง่าย ๆ เหล่านี้แหละเป็นรากฐานของโจทย์ยาก ถ้านักศึกษาไม่เข้าใจกับของง่าย ๆ นี้เสียก่อนแล้ว ก็เป็นการแน่นอนว่านักศึกษาจะไม่มีวันเข้าใจกับของยาก คือโจทย์ที่ยากกว่านี้

เมื่อท่านเข้าใจ โปรดดูตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4** ของอย่างหนึ่งถ้าขาย 400 บาทจะขาดทุนร้อยละ 20 จะต้องขายเท่าใดจึงจะได้กำไรร้อยละ 12

**วิธีทำ** ทุน 100 ขาดทุน 20 $\therefore$ ขายไป $100 - 20 = 80$

ขายไป 80 เป็นทุน 100

$\therefore$ ขายไป 400 บาท เป็นทุน $\frac{100}{80} \times 400 = 500$ บาท

จะขายให้ได้กำไรร้อยละ 12

$\therefore$ ทุน 100 ต้องขายไป $100 + 12 = 112$

$\therefore$ ทุน 500 บาท ต้องขายไป $\frac{112}{100} \times 500 = 560$ บาท

**ตอบ** 560 บาท

**ตัวอย่างที่ 5** ก. ขายของอย่างหนึ่งให้ ข. คิดเอากำไร 10 % ข. ขายให้ ค. คิดเอากำไร 5 % ค. ขายให้ ง. ขาดทุน 20 % ปรากฏว่า ง. ซื้อเป็นเงิน 924 บาท จงหาราคาทุนที่ ก. ซื้อมา

**วิธีทำ** ค. ขายให้ ง. ขาดทุน 20 %

∴ ค. ซื้อมา 100 ขายให้ ง. 100 − 20 = 80

∴ ง. ซื้อ 80 เป็นทุนของ ค. 100

∴ ง. ซื้อ 924 บาท เป็นทุนของ ค. $\frac{100}{80} \times 924 = 1155$ บาท

คือ ค. ซื้อมา 1155 บาท หรือคือ ข. ขายให้ ค. 1155 บาท

ข. ขายให้ ค. ได้กำไร 5 %

ข. ลงทุน 100 ขายให้ ค. 100 + 5 = 105

∴ ค. ซื้อ 105 เป็นทุน ข. ซื้อมา 100

∴ ค. ซื้อ 1155 บาท เป็นทุน ข. ซื้อมา $\frac{100}{105} \times 1155 = 1100$ บาท

คือ ก. ขายให้ ข. 1100 บาท

ก. ขายให้ ข. ได้กำไร 10 %

∴ ก. ซื้อมา 100 ขายให้ ข. 100 + 10 = 110

∴ ข. ซื้อมา 110 เป็นทุนของ ก. 100

∴ ข. ซื้อมา 1100 บาท เป็นทุนของ ก. $\frac{100}{110} \times 1100 = 1000$ บาท

∴ ราคาทุนที่ ก. ซื้อมา 1000 บาท

ตอบ 1000 บาท

**ตัวอย่าง 6** ก. ขายรถยนต์ให้ ก. ได้กำไร 10 % ข. เอาไปขายให้ ค. คิดเอากำไรอีก 5 % ค. เอาไปขายให้ ง. โดยยอมขาดทุน 9300 บาท ปรากฏว่าราคาที่ ง. ซื้อ ค. เท่ากับราคาที่ ก. ซื้อมา จงหาราคาที่ ง. ซื้อ

**วิธีทำ** สมมติให้ทุนของ ก. เป็น 100

$\therefore$ ก. ขายให้ ข. $100 + 10 = 110$

ข. ขายให้ ค. เอากำไร 5 %

คือ ถ้าทุน ข. 100 ข. ขายให้ ค. $100 + 5 = 105$

$\therefore$ ทุน ข. 110 ข. ขายให้ ค. $\frac{105}{100} \times 110 = \frac{231}{2}$

ค. ขายให้ ง. เท่ากับที่ ก. ซื้อ

ก. ซื้อมา 100 $\therefore$ ง. ซื้อ 100

$\therefore$ ค. ขาดทุน $\frac{231}{2} - 100 = \frac{31}{2}$

$\frac{31}{2}$ คิดเป็นเงิน 9300

$\therefore$ 100 คิดเป็นเงิน $\frac{9300 \times 100 \times 2}{2}$ — 60000 บาท

$\therefore$ ง. ซื้อมา 60000 บาท

**ตอบ** 60000 บาท

**อธิบาย** เราอาจสมมติให้ทุนของ ก. เป็นเท่าใดก็ได้ เมื่อเรารู้ทุนของ ก. ตามที่สมมตินั้นแล้ว เราก็ย่อมรู้ทุนและราคาขายของคนอื่น ๆ ได้ เมื่อเรารู้ว่า ค. ขายให้ ง. เท่าใด ก็หาเงินที่ ก. ขาดทุนได้ แต่เงินขาดทุนของ ก. คิดเป็นเงิน 9300 บาท เราก็เทียบจากทุนของ ก. ที่เราสมมติขึ้นนั่นก็ได้คำตอบ

**ตัวอย่าง 7** ขายของอย่างหนึ่งขาดทุน 100 บาท ซึ่งถ้าเพิ่มราคาขายอีก 300 บาท ก็จะได้กำไรร้อยละ 25 จงหาว่าทุนเท่าไร

**วิธีทำ** ขายของไปขาดทุน 100 บาท

$\therefore$ ถ้าเพิ่มราคาขายอีก 300 บาท ก็ได้กำไร $300 - 100 = 200$ บาท ซึ่งจะได้กำไร 25 %

คือ ทุน 100 ได้กำไร 25

ได้กำไร 25 เป็นทุน 100

∴ ได้กำไร 200 เป็นทุน $\frac{100}{25} \times 200 = 800$ บาท

∴ ทุน 800 บาท

**ตอบ** 800 บาท

**อธิบาย** ขายขาดทุน 100 บาท คือราคาขายต่ำกว่าราคาทุน 100 บาท

เพิ่มราคาขายอีก 300 บาท

เอา 100 บาทใน 300 บาทไปใช้ที่ขาดทุนเสีย

∴ ราคาจึงยังสูงกว่าราคาทุน 200 บาท คือกำไร

**ตัวอย่าง 8** พ่อค้าบีดราคาสินค้าอย่างหนึ่งไว้ 600 บาท และลดให้ผู้ซื้ออีก ร้อยละ 10 ของราคาที่บีดไว้ ซึ่งพ่อค้าก็ยังคงได้กำไรร้อยละ 8 จงหาราคาทุน

**วิธีทำ** พ่อค้าลดราคาให้ร้อยละ 10 ของราคาที่บีดไว้

∴ บีดราคาไว้ 100 ลดให้ 10

∴ บีดราคาไว้ 100 ขายจริง $100 - 10 = 90$

∴ บีดราคาไว้ 600 บาท ขายจริง $\frac{90}{100} \times 600 = 540$ บาท

ซึ่งพ่อค้าก็ยังคงได้กำไรร้อยละ 8

คือ ทุน 100 เป็นราคาขาย 108

ราคาขาย 108 เป็นทุน 100

∴ ราคาขาย 540 บาท เป็นทุน $\frac{100}{108} \times 540 = 500$ บาท

**ตอบ** 500 บาท

**ตัวอย่าง 9** พ่อค้าบีดราคาสินค้าอย่างหนึ่งไว้โดยคิดเอากำไรร้อยละ 20 ครั้นเวลาขายพ่อค้ายอมลดราคาให้ผู้ซื้อ 125 บาทจากราคาที่บีดไว้ จึงขาดทุนร้อยละ 5 จงหาราคาที่บีดไว้

**วิธีทำ** บีดราคาไว้สูงกว่าต้นทุนร้อยละ 20

คือ ทุน 100 บีดราคาไว้ 120

แต่ขายไปจริงขาดทุนร้อยละ 5

คือ ทุน 100 ขายไปจริงเพียง $100 - 5 = 95$

คือ ทุน 100 ขายต่ำกว่าราคาที่บีดไว้ $120 - 95 = 25$

ขายต่ำกว่าราคาที่บีดไว้ 25 เป็นทุน 100

∴ ขายต่ำกว่าราคาที่บีดไว้ 125 เป็นทุน $\frac{100}{25} \times 125 = 500$ บาท

**ตอบ** 500 บาท

---

## แบบฝึกหัด ๘

1. ซื้อของมาราคา 800 บาท ขายไปได้กำไรร้อยละ 4 ขายไปเท่าไร (832)
2. ขายของไปอย่างหนึ่งขาดทุนร้อยละ 12 ซึ่งเป็นเงิน 36 บาท ซื้อของนั้นมาเท่าไร และขายไปเท่าไร (300, 264)
3. ขายของไปอย่างหนึ่ง 465 บาท ขาดทุน 7% ถ้าจะให้ได้กำไร 10% จะต้องขายไปเท่าไร (550)
4. พ่อค้าขายของอย่างหนึ่งไปราคา 1056 บาท ขาดทุนร้อยละ 12 ถ้าขายไป 1212 บาท จะได้กำไรหรือขาดทุนร้อยละเท่าไร (1)
5. ขายของอย่างหนึ่งคิดเอากำไรร้อยละ 20 ซึ่งถ้าคิดเอากำไรลดลงร้อยละ 75 ก็ยังคงได้กำไรอยู่อีก 30 บาท จงหาราคาทุน (600 บาท)
6. แม่ค้าซื้อมะม่วงมา 4 ผล 3 บาท ขายไป 3 ผล 4 บาท ได้กำไรทั้งสิ้น 7 บาท จงหาว่าได้กำไรร้อยละเท่าไร ($77\frac{7}{9}$)
7. พ่อค้าผู้หนึ่งคิดราคาสินค้าสูงกว่าต้นทุน 10% ครั้นเวลาขายพ่อค้ากลับลดให้ผู้ซื้ออีก 10% จากราคาที่บีดไว้ เขาจะขาดทุนหรือได้กำไรร้อยละเท่าไร (ขาดทุนร้อยละ 1)

8. ต้นทุนของอย่างหนึ่งเป็นเงิน 114 บาท 60 สตางค์ จะต้องบวกราคาขายเท่าไร เพื่อว่าเมื่อลดราคาให้แก่ผู้ซื้อ 10 % แล้วคงมีกำไร 20 % ★ (152 บาท 80 สตางค์)

9. แดงขายจักรยานคันหนึ่งให้แก่ดำ ได้กำไรร้อยละ 5 ดำขายต่อให้เขียว 153 บาท ได้กำไรร้อยละ 2 เดิมแดงซื้อจักรยานคันนั้นมาด้วยราคาเท่าไร ★ ($142\frac{6}{7}$)

10. แดงต่อเรือลำหนึ่งแล้วขายให้ดำได้กำไรร้อยละ 25 ดำขายให้เขียวไปอีกต่อหนึ่งขาดทุนร้อยละ 15 ถ้าเขียวรับซื้อเรือลำนั้นไว้เป็นเงิน 340 บาท แดงลงทุนต่อเรือลำนั้นเท่าไร ★ (320)

11. ฉันซื้อนาฬิกาข้อมือมา 4 เรือน แล้วขายไปทั้งหมดเป็นเงิน 3600 บาท เมื่อมาคิดดูปรากฏว่ามีกำไรเรือนละ $\frac{2}{5}$ ของต้นทุนนาฬิกา 2 เรือน อยากทราบว่าฉันซื้อนาฬิกาข้อมือมาเรือนละเท่าไร ★ (750)

12. ชายคนหนึ่งซื้อม้า 3 ตัว ลูกหมู 7 ตัว เป็นเงิน 1000 บาท เขาขายม้าทั้งหมดไปได้กำไรร้อยละ 8 และขายลูกหมูทั้งหมดได้กำไรร้อยละ 12 เงินกำไรที่เขาได้รับทั้งสิ้น 84 บาท เขาซื้อม้ามาราคาตัวละเท่าไร ★ (300)

13. ขายของไปราคา 1200 บาทก็ได้กำไร แต่ถ้าขายไป 1250 บาทจะได้กำไรเพิ่มขึ้น 20% จงหาราคาทุน (1000)

14. พ่อค้าคนหนึ่งซื้อของมาด้วยราคา 4 ชิ้นต่อ 3 บาท และขายไปด้วยราคา 5 ชิ้นต่อ 4 บาท ในที่สุดเขาขายได้กำไร 240 บาท จงหาจำนวนของที่เขาซื้อมาขายว่าเป็นกี่ชิ้น ★★ (4800)

15. ซื้อเก้าอี้ตัวหนึ่งราคาแพงกว่าราคาที่ลงทุนทำร้อยละ 4 แล้วขายไปขาดทุนร้อยละ $6\frac{1}{4}$ จงแสดงว่าราคาขายนั้นน้อยกว่าราคาที่ลงทุนทำร้อยละ $2\frac{1}{2}$ ★★

16. ชายคนหนึ่งขายของสิ่งหนึ่งราคา 36 บาท และได้กำไรร้อยละ $33\frac{1}{3}$ ถ้าเขาขายราคา 33 บาท จะได้กำไรร้อยละเท่าไร ★★ ($22\frac{2}{9}$)

17. นาฬิกาเรือนหนึ่งราคา 5.75 บาท ถ้าขายลดราคาร้อยละ 5 ผู้ขายยังมีกำไรร้อยละ $9\frac{1}{4}$ ราคาต้นทุนของนาฬิกาจะเป็นเท่าใด ★★ (5)

18. พ่อค้าทุจริตคนหนึ่งบิดราคาขายสินค้าอย่างหนึ่งให้มากกว่าราคาทุน 5 % แล้วยังใช้เครื่องชั่งทุจริต ซึ่งคันชั่งจะตรงเมื่อน้ำหนักที่ปลายคันชั่งข้างหนึ่งมากกว่าน้ำหนักที่ปลายอีกข้างหนึ่ง $\frac{1}{15}$ จงหาว่าเขาได้กำไรร้อยละเท่าใด ★★ (12)

19. พ่อค้าบิดราคาของไว้โดยประกาศว่าจะลดราคาจากราคาที่บิดไว้ร้อยละ 20 และถ้าซื้อเงินสดจะลดให้อีกร้อยละ 10 ซึ่งแม้กระนั้นเขาก็ยังคงได้กำไรอยู่อีกร้อยละ 5 ถ้าปรากฏว่าราคาขายเงินสดต่ำกว่าราคาที่บิดไว้ 735 บาท จงหาราคาทุน (1800)

20. แม่ค้าผู้หนึ่งซื้อผลไม้จากที่ 2 แห่ง ๆ ละ 10 บาท ปรากฏว่าได้ผลไม้มากกว่ากันอยู่ 10 ผล แล้วขายไปทั้งหมดผลละ 50 สตางค์ ได้กำไรร้อยละ 25 จงหาว่าแม่ค้าซื้อผลไม้มาจากแห่งไหนเท่าไร (30, 20)

21. พ่อค้าซื้อสินค้ามา 30 ชิ้น ซึ่งเป็นชนิดดีเสีย 8 ชิ้น สิ้นเงินรวมกัน 3150 บาท เขาขายชนิดดีไป 1 ชิ้น แพงกว่าชนิดเลว 1 ชิ้นร้อยละ $33\frac{1}{3}$ ปรากฏว่าเขาได้กำไรทั้งสิ้นร้อยละ 40 ของเงินทุน จงหาว่าเขาขายชนิดดีและเลวไปชิ้นละเท่าไร (180, 135)

22. แม่ค้าซื้อไข่มา 216 ฟอง ในราคา 12 ฟอง 10 บาท แล้วขายไปราคา 10 ฟอง 12 บาท แม้ว่าไข่จะแตกไปเสียบ้าง เขาก็คงได้กำไรร้อยละ 20 จงหาว่าไข่แตกกี่ฟอง (36)

23. โรงงานสุราแห่งหนึ่งยอมให้ผู้แทนจำหน่ายเอากำไร 25 % แต่ผู้แทนจำหน่ายก็ไม่เอากำไรถึงอัตราที่โรงงานกำหนดให้ คงขายส่งให้แก่ร้านค้าในราคาที่ต่ำกว่าที่โรงงานกำหนดร้อยละ 10 ร้านค้าขายให้ผู้บริโภคโดยเอากำไร $33\frac{1}{3}$ % ต่อมาภายหลังผู้แทนจำหน่ายเอากำไรเต็มอัตราตามที่โรงงานกำหนด แต่ร้านค้าก็คงขายตามราคาที่ขายอยู่เดิม ซึ่งทำให้ร้านค้าได้กำไรน้อยลงขวดละ 5 บาท จงหาราคาสุราชนิดนี้ในท้องตลาด (ขวดละ 60 บาท)

24. ก. ขายวิทยุโทรภาพเครื่องหนึ่งให้ ข. คิดเอากำไร $12\frac{1}{2}$ % ข. ขายต่อให้ ค. โดยเอากำไรถึง $33\frac{1}{3}$ % ค. ขายต่อไปให้ ง. ขาดทุน 1800 บาท ซึ่งถ้า ก. ขายให้ ง. ในราคาที่ ง. ซื้อจาก ค. แล้ว ก. ก็จะยังคงได้กำไรอยู่อีกถึง 5 % จงหาว่าถ้า ก. ขายให้ ค. ในราคาที่ ค. ซื้อจาก ข. แล้ว ก. จะได้กำไรเป็นเงินเท่าไร (2000 บาท)

25. บริษัท อี. อี. บราวน์ ในต่างประเทศ กำหนดให้ตัวแทนในประเทศไทยขายสินค้าของเขา โดยเอากำไร 75 % จากราคาที่บริษัทส่งให้ โดยไม่รวมค่าภาษี ต่อมาตัวแทนรวมค่าภาษีเข้าไปเสียก่อนแล้วจึงเอากำไร 75 % ตามที่บริษัทกำหนด ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ประชาชนซื้อสินค้าชนิดหนึ่งของบริษัทบราวน์แพงกว่าเดิม 350 บาท จงหาว่าภาษีของสินค้าชนิดนี้เป็นเงินเท่าไร (200 บาท)

26. พ่อค้าขายของอย่างหนึ่งไปราคา 55 บาทก็ได้กำไร จำนวนเปอร์เซนต์ที่ได้กำไรนั้นเท่ากับ $\frac{1}{5}$ ของราคาทุนที่คิดเป็นบาท จงหาราคาทุน (50 บาท)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การเฉลี่ย
# AVERAGES

# 9

การเฉลี่ย คือการ หาเลขจำนวนหนึ่งซึ่งเป็นค่ากลางระหว่างเลขหลายจำนวนซึ่งไม่เท่ากัน และค่าของส่วนเฉลี่ยนั้น เมื่อคูณกับจำนวนค่าของค่าต่าง ๆ นั้นแล้วย่อมได้เท่ากับผลบวกของค่าของจำนวนเหล่านั้น

ดังนั้น การเฉลี่ยก็คือ การรวมค่าของเลขหลายจำนวนเข้าด้วยกัน แล้วหารด้วยจำนวนค่าของเลขเหล่านั้น

$$\therefore \quad \text{ส่วนเฉลี่ย} = \frac{\text{ผลบวกของค่าของเลขหลายจำนวน}}{\text{จำนวนค่าของเลขเหล่านั้น}}$$

(1) จงหาส่วนเฉลี่ยของ 3, 4, 5

$$\therefore \quad \text{ส่วนเฉลี่ย} = \frac{3+4+5}{3} = 4$$

(2) จงหาส่วนเฉลี่ยของ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$

ผลบวก $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{5}{6}$

$$\therefore \quad \text{ส่วนเฉลี่ย} = \frac{\frac{5}{6}}{5}$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{6}$$

**ตัวอย่าง 1** พลเมืองในอำเภอ 3 อำเภอมี 16503 คน, 18927 คน และ 30543 คน ตามลำดับ จงหาส่วนเฉลี่ย

**วิธีทำ** ส่วนเฉลี่ย $= \frac{16503 + 18927 + 30543}{3}$

$= 21991$

**ตอบ** 21991 คน

**ตัวอย่าง 2** ส่วนเฉลี่ยของเลข 25 จำนวนเป็น 18 ส่วนเฉลี่ยของ 12 จำนวนแรกเป็น 14 ของ 12 จำนวนหลังเป็น 17 จงหาเลขจำนวนที่ 13

**วิธีทำ** ผลบวกของเลขทั้งหมด $= 25 \times 18 = 450$

ผลบวกของ 12 จำนวนแรก $= 12 \times 14 = 168$

ผลบวกของ 12 จำนวนหลัง $= 12 \times 17 = 204$

$\therefore$ เลขจำนวนที่ 13 $= 450 - (168 + 204)$

$= 78$

**ตอบ** 78

**ตัวอย่าง 3** เลขสามจำนวน จำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สองอยู่ 14 จำนวนที่สองมากกว่าจำนวนที่สามอยู่ 5 จงหาเลขสามจำนวนนี้ ถ้าผลเฉลี่ยของเลขสามจำนวนนี้เป็น 45

**วิธีทำ** ผลบวกของเลขสามจำนวนนี้ $= 45 \times 3 = 135$

$\therefore$ เลขจำนวนที่สาม $= \frac{135 - (14 + 5 + 5)}{3} = 37$

เลขจำนวนที่สอง $= 37 + 5 = 42$

เลขจำนวนแรก $= 37 + 5 + 14 = 56$

**ตอบ**

**หมายเหตุ** ดูเรื่องแบ่งส่วนประกอบ

**ตัวอย่าง 4** รถไฟขบวนหนึ่งแล่นไปยังเมืองหนึ่งด้วยความเร็วชั่วโมงละ 40 กิโลเมตร และแล่นกลับที่เดิมด้วยความเร็วชั่วโมงละ 60 กิโลเมตร จงหาความเร็วเฉลี่ยทั้งขาไปและกลับ

**วิธีทำ**

ขาไปแล่นได้ทาง 40 กิโลเมตร ในเวลา 1 ชม.

∴ ทาง 1 กิโลเมตร ในเวลา $\frac{1}{40}$ ชม.

ขากลับแล่นได้ทาง 60 กิโลเมตร ในเวลา 1 ชม.

∴ ทาง 1 กิโลเมตร ในเวลา $\frac{1}{60}$ ชม.

∴ ทั้งไปและกลับเป็นทาง 2 กิโลเมตร แล่นในเวลา $\frac{1}{40}+\frac{1}{60}=\frac{1}{24}$ ชม.

เวลา $\frac{1}{24}$ ชม. แล่นได้ทาง 2 กม.

∴ เวลา 1 ชม. แล่นได้ทาง $2\times 24=48$ กม.

∴ ความเร็วเฉลี่ย 48 กม./ชม

**ตอบ** ชั่วโมงละ 48 กิโลเมตร

อธิบาย ต้องทำระยะทางให้เท่ากันเสียก่อน หรือจะทำโดยสมมติทางให้เป็น x ก็ได้ดังนี้

ขาไป ทาง 40 กม. แล่นได้ใน 1 ชม.

∴ ทาง x กม. แล่นได้ใน $\frac{x}{40}$ ชม.

ขากลับ ทาง 60 กม. แล่นได้ใน 1 ชม.

∴ ทาง x กม. แล่นได้ใน $\frac{x}{60}$ ชม.

∴ ทาง 2x กม. แล่นได้ใน $\frac{x}{40}+\frac{x}{60}=\frac{x}{24}$ ชม.

เวลา $\frac{x}{24}$ ชม. แล่นได้ทาง 2x กม.

∴ เวลา 1 ชม. แล่นได้ทาง $2x\times\frac{24}{x}=48$ กม.

**ตัวอย่าง 5** ก. ข. ค. เข้าทุนกันซื้อบ้านหลังหนึ่งด้วยเงินคนละ 400 บาท แต่ยังไม่พอ จึงให้ ง. ช่วยออกเงินให้อีก ปรากฏว่าเงินที่ ง. ออกไปนั้นมากกว่าส่วนเฉลี่ยของจำนวนเงินของเขาทั้งสี่อยู่ 300 บาท จงหาราคาบ้านหลังนี้

**วิธีทำ** รวมทุนของ ก. ข ค. $= 400 \times 3 = 1200$ บาท

$\therefore$ ส่วนเฉลี่ย $= \frac{1200 + 300}{3}$

$= 500$ บาท

$\therefore$ เงินที่ ง. ออกไป $= 500 + 300 = 800$ บาท

$\therefore$ ราคาบ้าน $= 800 + 1200 = 2000$ บาท

**ตอบ** 2000 บาท

**อธิบาย** วิธีหาส่วนเฉลี่ยของ ก. ข. ค. นั้น มีวิธีคือ

เราทราบว่าส่วนเฉลี่ยนั้นคือส่วนที่ได้เท่ากันทุกคน

แต่ส่วนเฉลี่ยนั้น น้อยกว่าเงินที่ ง. ออกไปอยู่ 300 บาท

ด้วยเหตุนี้ เงินทุนของ ก. ข. ค. แต่ละคนย่อมน้อยกว่าส่วนเฉลี่ย

ฉะนั้นเงินทุน ก + ข + ค รวมกับส่วนเฉลี่ย แล้วหารด้วยจำนวนคน (คือ 3)

จึงเป็นส่วนเฉลี่ย ถ้าไม่เข้าใจ ลองสมมติให้ส่วนเฉลี่ยเป็น x บาท

$\therefore$ 4 คนเป็นเงิน $4x$ บาท (ดังนั้น $4x$ คือราคาบ้าน)

เงินที่ ง. ออกไปคือ $x + 300$ บาท

ทุนของ ก. ข. ค. $= 1200$ บาท

$\therefore$ เงินทุนทั้งหมด คือ $1200 + (x + 300) = 4x$

จะได้ $x = 500$

---

## แบบฝึกหัด ๑

1. จงหาส่วนเฉลี่ยของ 7, 9, 12, 25, 17, 34, 50 (22)
2. จงหาส่วนเฉลี่ยของ $8\frac{2}{3}$, $5\frac{17}{60}$, $7\frac{11}{30}$, $25\frac{1}{2}$, $(11\frac{169}{240})$
3. จงหาส่วนเฉลี่ยของ 0.25, 6.12, 89.4, 0.0516 (23.9554)
4. ประชากรของประเทศไทยเฉพาะที่เป็นไทยแท้ในปี 2488 มี 14,995132 คน ในปี 2498 มี 16,854,142 คน จงหาว่าประชากรเพิ่มขึ้นโดยเฉลี่ยปีละเท่าไร (185901)

5. พลเมืองของเมือง 3 เมือง ใน พ.ศ. 2488 มี 22350, 43425 และ 10630 คน ในปี 2498 สองเมืองแรกเพิ่มขึ้นร้อยละ 6 และ 8 ตามลำดับ เมืองหลังลดลงร้อยละ 10 จงหาพลเมืองเฉลี่ยในปี 2498 (26719)

6. เลข 4 จำนวน จำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สองอยู่ 4 จำนวนที่สองมากกว่าจำนวนที่สามอยู่ 3 จำนวนที่สามมากกว่าจำนวนสุดท้ายอยู่ 2 ผลเฉลี่ยของเลข 4 จำนวนนี้เป็น 13 จงหาเลข 4 จำนวนนั้น (18, 14, 11, 9)

7. เลข 5 จำนวนมีส่วนเฉลี่ยเป็น 12 ส่วนเฉลี่ยของ 3 จำนวนแรกเป็น $9\frac{1}{3}$ ส่วนเฉลี่ยของ 3 จำนวนหลังเป็น $13\frac{2}{3}$ จงหาเลขจำนวนที่สาม (9)

8. เลข 5 จำนวน จำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สองอยู่ 5 จำนวนที่สองน้อยกว่าจำนวนที่สามอยู่ 3 ผลเฉลี่ยของสามจำนวนแรกเป็น $10\frac{2}{3}$ ผลเฉลี่ยของ 3 จำนวนหลังเป็น $16\frac{1}{3}$ จงหาผลเฉลี่ยของสองจำนวนหลัง (19)

9. ค่าเฉลี่ยของเลข 3 จำนวนเป็น 14 เลขจำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สองอยู่สามเท่าเลขจำนวนที่สองมากกว่าจำนวนที่สามอยู่สองเท่า จงหาเลขสามจำนวนนี้ (32, 8, 2)

10. ซื้อมะม่วงด้นเงิน 60 บาท $\frac{1}{3}$ ของจำนวนซื้อมาผลละ 50 สตางค์ นอกนั้นซื้อมาผลละ 75 สตางค์ จงหาว่าซื้อมะม่วงมากี่ผล (100)

11. รถไฟขบวนหนึ่งออกแล่นด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ 30 ไมล์ ครั้นพอไปได้ $\frac{1}{3}$ ของทาง ก็ลดความเร็วลง $\frac{1}{6}$ เมื่อแล่นไปได้ครึ่งทางเพิ่มความเร็วขึ้นอีกเป็น 2 เท่าของความเร็วในขณะนั้นจนตลอดทาง จงหาความเร็วเฉลี่ย (36)

12. ผลไม้กระจาดหนึ่งมีเงาะ ละมุด มะม่วง และน้อยหน่า เงาะและละมุดมีเท่ากัน ซึ่งเป็น $\frac{4}{5}$ ของจำนวนทั้งหมด เงาะราคาผลละ 5 สตางค์ ละมุดราคาผลละ 10 สตางค์ มะม่วงและน้อยหน่ามีเท่ากัน มะม่วงราคาผลละ 50 สตางค์ ราคาเฉลี่ยของผลไม้เป็นผลละ 14 สตางค์ จงหาว่าน้อยหน่าราคาผลละเท่าไร และผลไม้ทั้งหมดมีกี่ผล (30, 100)

13. จงแบ่งเงิน 245 บาท ให้คนหมู่หนึ่ง $\frac{1}{3}$ ของคนหมู่นั้นได้คนละ 20 บาท $\frac{1}{4}$ ของคนหมู่นั้นได้คนละ 30 บาท นอกนั้นได้คนละ 15 จงหาว่าคนหมู่นั้นมีกี่คน (12)

14. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียน 600 คน เป็นนักเรียนชั้นเตรียมอุดมและชั้นมัธยม ชั้นเตรียมอุดมมี 2 ห้อง ชั้นมัธยมมี 20 ห้อง อายุเฉลี่ยของนักเรียนเตรียมคนละ 18 ปี

อายุเฉลี่ยของนักเรียนมัธยมคนละ 14 ปี อายุเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมดคนละ 14 ปี $4\frac{4}{5}$ เดือน จงหาว่าชั้นเตรียมและชั้นมัธยมมีนักเรียนห้องละกี่คน (20, 20)

15. ชายผู้หนึ่งขายที่ดินผืนหนึ่ง โดยแบ่งขายเป็น 3 ส่วน $\frac{1}{5}$ ของที่ดินผืนนั้นขายตารางวาละ 50 บาท $\frac{3}{8}$ ของที่ดินที่เหลือขายตารางวาละ 40 บาท ที่เหลือขายไปได้เงิน 12000 บาท เมื่อเฉลี่ยแล้วคงเป็นราคาขายตารางวาละ 37 บาท จงหาว่าเขาขายที่ดินส่วนสุดท้ายไปตารางวาละกี่บาท และที่ดินผืนนั้นมีพื้นที่เท่าไร (30, 2 ไร่)

16. ในขบวนรถไฟโดยสารขบวนหนึ่ง มีชั้นโดยสาร 3 ชั้น คนโดยสารชั้นที่หนึ่งน้อยกว่าคนโดยสารชั้นที่สอง สองเท่า คนโดยสารชั้นที่สามมากกว่าคนโดยสารชั้นที่หนึ่งและที่สองรวมกันอยู่ 36 คน ระยะทางเฉลี่ยของคนโดยสารชั้นที่หนึ่งคนละ 120 กิโลเมตร ชั้นที่สองคนละ 50 กิโลเมตร ชั้นที่สามคนละ 25 กิโลเมตร ค่าโดยสารชั้นที่หนึ่งกิโลเมตรละ 30 สตางค์ ชั้นที่สองกิโลเมตรละ 20 สตางค์ ชั้นที่สามกิโลเมตรละ 10 สตางค์ ถ้าปรากฏว่าค่าโดยสารทั้งหมดเก็บได้เป็นจำนวน 9361.20 บาท จงหาว่าชั้นไหนมีคนโดยสารเท่าไร (122, 366, 524)

17. สตรีผู้หนึ่งซื้อส้มราคา 3 ผล 2 บาท มังคุด 6 ผล 5 บาท และเงาะกิโลกรัมละ 10 บาท ด้วยเงินค่าซื้อผลไม้ทั้ง 3 ชนิดเท่ากัน และถ้าเฉลี่ยผลไม้ทั้ง 3 ชนิดราคาผลละ 50 สตางค์พอดี เฉพาะส้มและมังคุดซื้อได้รวมกัน 162 ผล อยากทราบว่าเขาซื้อเงาะเฉลี่ยได้กิโลกรัมละกี่ผล (33) ข้อสอบโต้เตรียมอุดม ฯ 2495

18. ก. ข. ค. เข้าหุ้นกันซื้อรถจักรยานยนต์ ก. ลงทุน 2000 บาท ข. ลงทุน 3000 บาท แต่ยังไม่พอจึงขอให้ ค. มาเข้าด้วย ปรากฏว่าส่วนทุนที่ ค. ออกไปนั้นน้อยกว่าส่วนเฉลี่ยของทุน ก. ข. ค. อยู่ 1200 บาท จงหาว่าจักรยานยนต์คันนั้นราคาเท่าไร (5400 บาท)

19. ก. ข. ค. เข้าหุ้นกันซื้อของอย่างหนึ่ง ทุนของ ข. มากกว่าทุนของ ก. เท่ากับที่ทุนของ ค. มากกว่าทุนของ ข. และเงินของ ข. ที่มากกว่า ก. นี้เป็น $\frac{1}{7}$ ของเงินทุนของ ข. เอง แต่เงินที่ยังไม่พอซื้อ ง. จึงนำเงินทุนมาเข้าด้วย ซึ่งมากกว่าส่วนเฉลี่ยทุนของ ก. ข. ค. ง. อยู่ 300 บาท ถ้าส่วนเฉลี่ยทุนของ ก. ข. ค. เป็นเงิน 700 บาท จงหาทุนของแต่ละคน (600, 700, 800, 1100)

# ของผสม
# MIXTURES

# 10

ของผสม คือของที่เกิดจากผสมวัตถุต่าง ๆ ส่วนของของผสมไม่แน่นอน แล้วแต่ว่าจะผสมให้มีส่วนใหนเท่าใด เช่น ของผสมระหว่างนมและน้ำ ถ้าผู้ขายต้องการได้กำไรมาก ๆ เขาก็จะผสมน้ำลงไปให้มาก อาจจะเป็นนม 3 ลิตรเติมน้ำ 1 ลิตร หรือจะเป็นนม 5 ลิตรกับน้ำ 2 ลิตรก็ได้

ของผสมต่างกับสารประกอบ (Compounds) ในประการสำคัญคือ สารประกอบจะมีส่วนของวัตถุต่าง ๆ แน่นอนคงตัวเสมอไป เช่น น้ำเป็นสารประกอบที่เกิดจากการรวมกันของ ก๊าซไฮโดรเจน และ ออกซิเจน ในอัตราส่วน 2 : 1 เสมอไป ด้วยเหตุนี้การคำนวณเรื่องสารประกอบจึงไม่มีอะไรยุ่งยาก ส่วนใหญ่ของการคำนวณเรื่องนี้ เป็นการคำนวณเกี่ยวกับของผสม

ประการสำคัญที่จะต้องยึดเป็นหลักก็คือ จะต้องหาปริมาณและราคาของสิ่งต่าง ๆ ที่นำมาผสมกันนั้นให้ได้ เมื่อหาปริมาณและราคาของสิ่งทั้งหมดได้แล้ว ก็หาราคาทุนได้ การหาราคาทุน ก็คือหาราคาเฉลี่ยนั่นเอง เช่น

เอาสุราอย่างดี 3 ลิตร ราคาลิตรละ 16 บาท ผสมกับสุราอย่างเลว 2 ลิตร ราคาลิตรละ 6 บาท

เราหาราคาทุนของของผสมได้โดยหาว่า สุราอย่างดี 3 ลิตรราคาเท่าไร สุราอย่างเลว 2 ลิตรราคาเท่าไร แล้วหาดูว่าของผสมคือสุราที่ผสมกันนั้นรวมกันเป็นกี่ลิตร และราคารวมกันเท่าไร เอาราคาทั้งหมดตั้ง หารด้วยจำนวนลิตร ก็จะได้ราคาทุนของสุราผสม 1 ลิตร ซึ่งมีวิธีทำดังนี้

สุราอย่างดี 3 ลิตร ราคา $16 \times 3 = 48$ บาท

สุราอย่างเลว 2 ลิตร ราคา $6 \times 2 = 12$ บาท

$\therefore$ สุราผสม $3 + 2 = 5$ ลิตร ราคา $48 + 12 = 60$ บาท

$\therefore$ สุราผสม 1 ลิตร ราคา $\frac{60}{5} = 12$ บาท

**ตัวอย่าง 1** น้ำตาล 6 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 2.50 บาท ผสมกับน้ำตาล 3 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 4 บาท จงหาว่าน้ำตาลผสมราคากิโลกรัมละเท่าไร

**วิธีทำ** น้ำตาล 6 ก.ก. ราคา ก.ก.ละ 2.50 บาทเป็นราคา $2.50 \times 6 = 15$ บาท

น้ำตาล 3 ก.ก. ราคา ก.ก.ละ 4.00 บาทเป็นราคา $4 \times 3 = 12$ บาท

$\therefore$ น้ำตาลผสม $6 + 3 = 9$ ก.ก. ราคา $15 + 12 = 27$ บาท

$\therefore$ น้ำตาลผสม 1 ก.ก. ราคา $\frac{27}{9} = 3$ บาท

**ตอบ** 3 บาท

**ตัวอย่าง 2** สุรา 5 ลิตรราคาลิตรละ 8 บาท ผสมกับสุรา 2 ลิตรราคาลิตรละ 22 บาท แล้วขายไปลิตรละ 15 บาท จะได้กำไรหรือขาดทุนลิตรละเท่าไร

**วิธีทำ** สุรา 5 ลิตร ๆ ละ 8 บาท ราคา $8 \times 5 = 40$ บาท

สุรา 2 ลิตร ๆ ละ 22 บาท ราคา $22 \times 2 = 44$ บาท

$\therefore$ สุราผสม $5 + 2 = 7$ ลิตร ราคา $40 + 44 = 84$ บาท

$\therefore$ สุราผสม 1 ลิตร ราคา $\frac{84}{7} = 12$ บาท

ขายไปลิตรละ 15 บาท $\therefore$ ได้กำไรลิตรละ $15 - 12 = 3$ บาท

**ตอบ** 3 บาท

**ตัวอย่าง 3** สุราอย่างดีราคาลิตรละ 50 บาท อย่างเลวลิตรละ 10 บาท พ่อค้าผู้หนึ่งนำสุราอย่างดี 1 ลิตร อย่างเลว 4 ลิตร และน้ำ 1 ลิตรมาผสมกัน แล้วขายไปเอากำไร 20 % จงหาว่าเขาขายไปลิตรละเท่าไร

**วิธีทำ** สุราอย่างดี 1 ลิตร ราคาทุน 50 บาท

สุราอย่างเลว 4 ลิตร ราคาทุน $10 \times 4 = 40$ บาท

น้ำ 1 ลิตร ไม่มีราคาเลย

$\therefore$ สุราผสม $1 + 4 + 1 = 6$ ลิตร ราคาทุน $50 + 40 + 0 = 90$ บาท

$\therefore$ สุราผสม 1 ลิตร ราคาทุน $\frac{90}{6} = 15$ บาท

ขายไปได้กำไร 20 %

ทุน 100 ขายไป $100 + 20 = 120$

$\therefore$ ทุน 15 บาท ขายไป $\frac{120}{100} \times 15 = 18$ บาท

$\therefore$ ขายไปลิตรละ 18 บาท

**ตอบ** 18 บาท

อธิบาย ในการคิด ต้องหาจำนวนลิตรของของผสมให้ได้เสียก่อน

ในที่นี้สุราอย่างดี 1 ลิตร อย่างเลว 4 ลิตร น้ำ 1 ลิตร

$\therefore$ จำนวนลิตรของของผสมจึงเท่ากับ $1 + 4 + 1 = 6$ ลิตร

เมื่อหาจำนวนลิตรทั้งหมดแล้ว ต้องหาราคาทั้งหมด

อย่างดี 1 ลิตรราคา 50 บาท อย่างเลว 4 ลิตรราคา 40 บาท ส่วนน้ำถือว่าไม่มีราคา ดังนั้นจึงไม่ต้องคิดด้วย

ฉะนั้น ราคาผสมจึงเป็น $50 + 40 = 90$ บาท

**ตัวอย่าง 4** นม 150 ลิตร มีน้ำปนอยู่ 20 % พ่อค้าเติมน้ำลงไปจนปรากฏว่ามีน้ำปนอยู่ 40 % จงหาว่าเขาเติมน้ำลงไปกี่ลิตร

**วิธีทำ** ครั้งแรกมีน้ำปน 20 % $\therefore$ เป็นนมแท้ 80 %

ผสมแล้วมีน้ำปน 40 % $\therefore$ เป็นนมแท้ 60 %

นมแท้ 80 % เป็นนมผสมน้ำ 150 ลิตร

$\therefore$ นมแท้ 60 % เป็นนมผสมน้ำ $\frac{150}{60} \times 80 = 200$ ลิตร

$\therefore$ เติมน้ำลงไป $200 - 150 = 50$ ลิตร

**หมายเหตุ** ต้องเทียบเอาเปอรเซนต์ของนมเป็นหลัก เพราะนมไม่เปลี่ยนแปลง จะเทียบว่าน้ำ 20 % เป็นของผสม 150 $\therefore$ น้ำ 40 % เป็นของผสมเท่าไรไม่ได้ เพราะน้ำเปลี่ยนแปลง

## การคำนวณหาอัตราส่วนของของผสม

ในกรณีที่โจทย์บอกราคาสิ่งของที่นำมาผสมกันให้ และบอกราคาของของผสมให้ เราอาจคำนวณหาอัตราส่วนการผสมนั้นได้

จากความจริงที่ว่า ราคาของของผสมเป็นราคาซึ่งมีค่าอยู่ในระหว่างราคาของสิ่งซึ่งนำมาผสมกัน กล่าวคือ **ราคาผสมจะต่ำกว่าราคาของที่นำมาผสมซึ่งมีราคาแพง และจะมีราคาสูงกว่าราคาของที่นำมาผสมซึ่งมีราคาถูกเสมอไป** และด้วยเหตุนี้ราคาของของผสมจึงเป็นราคาเท่าทุน คือไม่ขาดทุนและไม่ได้กำไร และดังนั้น

**ราคาของซึ่งสูงกว่าราคาผสม จะเท่ากับ ราคาของซึ่งต่ำกว่าราคาผสม**

ฉะนั้นหลักประการสำคัญในการคำนวณหาอัตราส่วนของของผสมนี้ จึงอยู่ที่การต้องหาราคาทุนของแต่ละชนิด และราคาทุนของของผสมให้ได้ แล้วจึงดำเนินการคำนวณเป็นขั้น ๆ ดังนี้

### หลักการคำนวณ

**ขั้นที่ 1** หาว่าของชนิดใดราคาทุนสูงกว่าราคาของของผสมเท่าใด และชนิดใดต่ำกว่าเท่าใด

**ขั้นที่ 2** ราคาสูง = ราคาต่ำ

ขั้นที่ 3 ใส่ราคาสูงไว้ทางด้านราคาสูง ใส่ราคาต่ำไว้ทางด้านราคาต่ำ เขียนเครื่องหมายเท่ากับไว้ระหว่างกลาง

ขั้นที่ 4 หาเลขมาคูณทั้งสองข้าง ซึ่งจะทำให้ผลคูณทั้งสองข้างเท่ากัน

ขั้นที่ 5 เลขที่นำมาคูณนั้น คืออัตราส่วนของสิ่งที่นำมาผสมกัน

**ตัวอย่าง 5** จะต้องเอาน้ำตาลทรายชนิดกิโลกรัมละ 3 บาท และชนิดกิโลกรัมละ 2.50 บาทมาผสมกันเป็นอัตราส่วนอย่างไร ราคาผสมจึงจะเป็นกิโลกรัมละ 2.60 บาท

**วิธีทำ**

ขั้นที่ 1
- น้ำตาลชนิด ก.ก.ละ 3 บาท ราคาสูงกว่าราคาผสม $3 - 2.60 = .40$ บาท
- น้ำตาลชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท ราคาต่ำกว่าราคาผสม $2.60 - 2.50 = .10$ บาท

ราคาผสมเป็นราคาเท่าทุน

ขั้นที่ 2 $\therefore$ ราคาสูงกว่าราคาผสม = ราคาต่ำกว่าราคาผสม

ขั้นที่ 3 และ 4 $.40 \times 1 = .10 \times 4$

ขั้นที่ 5 $\therefore$ ต้องผสมชนิด ก.ก.ละ 3 บาทและชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท เป็นอัตราส่วน 1:4

**ตอบ**

**ข้อสังวรณ์** ตามตัวอย่างที่ 5 นั้น ราคาที่สูงกว่าราคาผสมคือ ชนิด ก.ก.ละ 3 บาท และราคาที่ต่ำกว่าราคาผสม คือชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท เราเอา 1 คูณทางด้านราคาสูง คือชนิด ก.ก.ละ 3 บาท ฉะนั้นหมายความว่าส่วนผสมของชนิด ก.ก.ละ 3 บาทจึงเป็น 1 ส่วน และเราเอา 4 คูณทางด้านราคาต่ำ คือชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท ฉะนั้นหมายความว่าส่วนผสมของชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท จึงเป็น 4 ส่วน ดังนั้นเราต้องตอบว่า **ผสมชนิด ก.ก.ละ 3 บาท และ 2.50 บาทเป็นอัตราส่วน 1 : 4** จะตอบกลับกันว่า ผสมชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท และ 3 บาทเป็นอัตราส่วน 1 : 4 ไม่ได้ หรือจะตอบเฉย ๆ ว่า ผสมเป็นอัตราส่วน 1 : 4 ก็ไม่ได้

**ข้อแนะนำ** ขอแนะนำว่าจะเอาเลขตัวใดไปคูณเป็นอัตราส่วนนั้น จะเอาเลขตัวใดก็ได้ โดยไม่ต้องเสียเวลานึก เช่นตามตัวอย่าง 5 ถ้าเราคูณ .40 ด้วย 7 ผลก็จะได้ 2.80 ดังนั้นเราจึงต้องคูณ .10 ด้วย 28 เพื่อที่จะให้ผลคูณทั้งสองข้างเท่ากัน อัตราส่วนจึงเป็นชนิด ก.ก.ละ 3 บาทต่อชนิด ก.ก.ละ 2.50 บาท = 7 : 28 แต่การตอบเป็นอัตราส่วนต้องทอนเป็นอย่างต่ำเสียก่อน 7 : 28 เอา 7 ทอนคงได้คำตอบ 1 : 4

**ตัวอย่าง 6** สุรา 4 ชนิด ราคาลิตรละ 12, 15, 24, และ 30 บาท ตามลำดับ ผสมกันแล้วขายไปลิตรละ 25 บาท ซึ่งได้กำไร 25 % จงหาว่าผสมกันเป็นอัตราส่วนอย่างไร

**วิธีทำ** ขายไปลิตรละ 25 บาท ได้กำไร 25 %

คือ ทุน 100 ขายไป 100 + 25 = 125

ขายไป 125 เป็นทุน 100

∴ ขายไป 25 บาท เป็นทุน $\frac{100}{125} \times 25 = 20$ บาท

สุราชนิดที่ 1 ราคาต่ำกว่าราคาทุนของสุราผสม $20 - 12 = 8$ บาท

สุราชนิดที่ 2 ราคาต่ำกว่าราคาทุนของสุราผสม $20 - 15 = 5$ บาท

สุราชนิดที่ 3 ราคาสูงกว่าราคาทุนของสุราผสม $24 - 20 = 4$ บาท

สุราชนิดที่ 4 ราคาสูงกว่าราคาทุนของสุราผสม $30 - 20 = 10$ บาท

ราคาต่ำ = ราคาสูง

$8 \times \underline{1} + 5 \times \underline{2} = 4 \times \underline{2} + 10 \times \underline{1}$

∴ ผสมสุราชนิดที่ 1; ชนิดที่ 2; ชนิดที่ 3; ชนิดที่ 4 เป็นอัตราส่วน 1 : 2 : 2 : 1

ตอบ

**อธิบาย** คิดเหมือนตัวอย่างที่ 5 ผิดกันแต่ว่าโจทย์ไม่บอกราคาทุนของของผสมให้ บอกแต่ทุนของสิ่งที่นำมาผสม และบอกขายได้กำไรเท่าไรให้ ซึ่งโจทย์ต้องการให้เราคำนวณหาราคาทุนของของผสมเสียขั้นหนึ่งก่อน เมื่อหาราคาทุนของของผสมได้แล้ว ต่อจากนั้นก็ดำเนินเหมือนตัวอย่างที่ 5

แต่ของต่าง ๆ มีถึง 4 ชนิด เราต้องเลือกชนิดสูงและชนิดต่ำกว่าราคาผสมให้ดีแล้วจึงหาเลขมาคูณ

วิธีคูณต้องคูณเลขแต่ละตัว แล้วจึงบวกกัน ไม่ใช่บวกกันก่อนคูณ

**หมายเหตุ** คำตอบของเลขชนิดนี้มีได้หลายคำตอบ คือ

ครั้งแรกเราเขียน

ราคาต่ำ = ราคาสูง

$8\times(\ldots.)+5\times(\ldots.) = 4\times(\ldots.)+10\times(\ldots)$

เราอาจหาเลขใด ๆ มาคูณก็ได้ ทำให้มีคำตอบได้หลายคำตอบ เช่น

$8\times\underline{10}+5\times\underline{30} = 4\times\underline{40}+10\times\underline{7}$

$\therefore$ อัตราส่วนเป็น 10 : 30 : 40 : 7

หรือ $8\times\underline{15}+5\times\underline{20} = 4\times\underline{25}+10\times\underline{12}$

$\therefore$ อัตราส่วนเป็น 15 : 20 : 25 : 12

**วิธีคิดที่รวดเร็ว** คือคูณด้วยเศษส่วน ทำให้เลขแต่ละจำนวนมีค่าเป็น 1

คือ $8\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{5} = 4\times\frac{1}{4}+10\times\frac{1}{10}$

$\therefore$ อัตราส่วนเป็น $\frac{1}{8}:\frac{1}{5}:\frac{1}{4}:\frac{1}{10}$

คูณตลอดด้วย ค.ร.น. 40 ได้ 5 : 8 : 10 : 4

(คือ $8\times\underline{5}+5\times\underline{8} = 4\times\underline{10}+10\times\underline{4}$)

---

## แบบฝึกหัด 10

1. สุรา 2 ชนิด ชนิดแรกราคาลิตรละ 6 บาท จำนวน 5 ลิตร ชนิดหลังราคาลิตรละ 5 บาท จำนวน 5 ลิตร เมื่อผสมเข้าด้วยกันแล้ว จะเป็นราคาทุนลิตรละเท่าไร (5.50)
2. น้ำตาลทรายชนิดดีราคา ก.ก. ละ 5 บาท 12 ก.ก. ผสมกับชนิดเลวราคา ก.ก. ละ 3 บาท 20 ก.ก. เมื่อผสมแล้วขายไปเอากำไร ก.ก.ละ 25 สตางค์ อยากทราบว่าเขาขายไป ก.ก.ละเท่าไร (4.00)
3. น้ำตาลสามชนิดราคาไม่เท่ากัน ราคาของชนิดแรกและชนิดที่สองเป็น 3 : 2 ราคาของชนิดที่สองและสามเป็น 3 : 4 พ่อค้าผู้หนึ่งซื้อชนิดแรกและชนิดที่สองมา 2 : 3 ชนิดที่

สองและชนิดที่สาม 4 : 3 ปรากฏว่าเขาจ่ายเงินเท่า ๆ กัน แล้วขายไป ก.ก. ละ 5 บาท ได้กำไรทั้งสิ้น 37 บาท ซึ่งถ้าเขาลดราคาลง $\frac{1}{5}$ ก็จะได้กำไรทั้งสิ้น 8 บาท จงหาว่าพ่อค้าซื้อชนิดไหนเท่าไร และชนิดไหนราคา ก.ก. ละเท่าไร (8, 12, 9 ก.ก.; 4.50, 3.00, 4.00)

4. กุ้งแห้งสองอย่าง ราคาแพงกว่ากัน ก.ก. ละ 3 บาท เอาชนิดแพงผสมมากกว่า 3 ก.ก. แล้วขายไป ก.ก. ละ 10 บาท ได้กำไรทั้งสิ้น 18 บาท จงหาว่าผสมอย่างละกี่ ก.ก. (6, 3)

5. พ่อค้าสุราซื้อสุราชนิดราคาขวดละ 15.90 บาท 10 ขวด ชนิดขวดละ 5.20 บาท 15 ขวด ชนิดขวดละ 6.90 บาท 18 ขวด เขาต้องการกำไรทั้งสิ้น 55 บาท จะต้องขายไปขวดละเท่าไรหลังจากนำมาผสมกันแล้ว (9.40)

6. พ่อค้าสุราซื้อสุรามาสองชนิด ราคาลิตรละ 19.80 บาทและ 12.60 บาท แล้วผสมกันในอัตราส่วน 7 : 5 เขาขายไปได้กำไรร้อยละ 25 จงหาว่าเขาขายไปลิตรละเท่าไร (21)

7. พ่อค้าสุราซื้อสุราชนิดโหลละ 72 บาทมา 6 โหล และชนิดโหลละ 54 บาทมากกว่าชนิดแรก 20 โหล แล้วผสมกันขายไปโหลละ 63 บาท เขาจะได้กำไรร้อยละเท่าไร ($8\frac{1}{3}$)

8. พ่อค้าซื้อกุ้งแห้งมา 2 ชนิด ๆ แรก ก.ก.ละ 4 บาท ชนิดที่สอง ก.ก. ละ 10 บาทผสมกันแล้วขายไป 3 ก.ก. 26 บาท ซึ่งได้กำไร 2 บาท จงหาว่าเขานำมาผสมกันเป็นอัตราส่วนอย่างไร (2 : 1)

9. พ่อค้ากาแฟมีกาแฟสองชนิด ชนิดแรกราคาทุนชั่งละ 9 บาท ชนิดหลังชั่งละ 12 บาท เมื่อผสมกันแล้วขายไปชั่งละ 11 บาท ได้กำไร 10 % จงหาอัตราส่วนการผสม (1 : 2)

10. จะต้องใช้ส่วนผสมอย่างไร จึงจะทำให้กาแฟราคากิโลกรัมละ 7.50 บาท 8 บาทและ 9.50 บาท มีราคาผสมกิโลกรัมละ 9 บาท (2 : 1 : 4 หรือ 1 : 1 : 5 หรือ....)

11. เหล้า 160 ลิตรราคาลิตรละ 3.75 บาท เมื่อเติมน้ำแล้วขายไปลิตรละ 3 บาท คงได้กำไร 10% อยากทราบว่าเติมน้ำลงไปกี่ลิตร ★ (60)

12. พ่อค้าซื้อข้าวชนิด 10 % มา 10 กระสอบ ราคากระสอบละ 120 บาท กับข้าวชนิด 15 % อีก 15 กระสอบ ราคากระสอบละ 90 บาท เอาข้าว 2 ชนิดนี้ผสมกัน จะต้องขายกระสอบละเท่าไรจึงจะได้กำไร 10 % ★ (112.20)

13. ถ้าเอาน้ำตาลทรายชนิดที่หนึ่งราคากิโลกรัมละ 5.50 บาท ผสมกับชนิดที่สองราคากิโลกรัมละ 4.50 บาท จะต้องผสมด้วยอัตราส่วนอย่างไร เมื่อขายกิโลกรัมละ 5.70 บาท จึงจะมีกำไร 20 % ★ (1 : 3)

14. สุรา 5 ชนิดราคาลิตรละ 13, 16, 20, 26 และ 30 บาท ผสมกันแล้วขายไปลิตรละ 30 บาท ได้กำไรร้อยละ 20 จงหาอัตราส่วนการผสม (1 : 2 : 1 : 5 : 6 หรือ 1 : 2 : 3 : 5 : 8 หรือ.....)

15. นม 150 ลิตร เป็นนมแท้ 65 % ถ้าจะให้เป็นนม 85 % จะต้องเติมนมแท้ลงไปอีกกี่ลิตร (200)

16. นมจำนวนหนึ่ง 100 ลิตร มีเนื้อนมแท้อยู่ 70 % นอกนั้นมีน้ำปน จะต้องผสมนมแท้ลงไปอีกเท่าไรจึงจะทำให้นมมีส่วนนมแท้ 80 % ★ (50 ลิตร)

17. พ่อค้าคนหนึ่งผสมเหล้า 50 ลิตร ซึ่งมีราคา 900 บาทกับน้ำซึ่งไม่มีค่าเลย และขายของผสมนี้ลิตรละ 16.50 บาท ได้กำไร 10 % จงหาว่าของผสมนี้มีน้ำร้อยละเท่าไร ★★ ($16\frac{2}{3}$)

18. ชายผู้หนึ่งผสมแป้งราคาถุงละ 45 บาท 32 บาท และ 40 บาทเข้าด้วยกัน แล้วขายไปถุงละ 42 บาท ปรากฏว่าได้กำไรร้อยละ 20 อยากทราบว่าเขาผสมแป้งขายโดยใช้ส่วนผสมอย่างไร ★★ (1 : 5 : 1)

19. ในโรงงานแห่งหนึ่งใช้คน 45 คน สำหรับคนงานที่เป็นหญิงให้ค่าจ้างวันละ 25 สตางค์ และคนงานที่เป็นชายวันละ 70 สตางค์ ถ้าใน 1 สัปดาห์มีวันทำงานเพียง 6 วัน โรงงานจ่ายเงินค่าจ้าง 137.70 บาท คนงานที่จ้างนั้นเป็นชายและหญิงอย่างละกี่คน ★★ (26, 19)

20. น้ำตาลถังหนึ่ง 80 ลิตร มีน้ำตาลชนิดดีอยู่ 70 % นอกนั้นเป็นน้ำตาลเลว ถ้าต้องการให้มีน้ำตาลชนิดดีถึง 85% จะต้องเติมน้ำตาลชนิดดีเข้าไปกี่ลิตร (ข้อสอบชุด ป.ป. —80)

21. ขวดใบหนึ่งมีหมึกกับน้ำผสมกันอยู่ 150 ลิตร เป็นหมึกเสียร้อยละ 70 เอาหมึกเติมลงไปในขวดนั้นจนส่วนผสมเพิ่มขึ้นเป็นร้อยละ 75 อยากทราบว่าหมึกที่เติมลงไปในขวดกี่ลิตร (ข้อสอบชุด ป.ป. —30)

22. โลหะผสมชนิดหนึ่งประกอบด้วยตะกั่วและสังกะสี คิดตามน้ำหนักเป็นอัตราส่วน 4 : 3 ถ้าเอาสังกะสีเพิ่มเข้าไปอีก 27 กรัม อัตราส่วนของตะกั่วกับสังกะสีจะกลายเป็น 5 : 6 จงหาน้ำหนักของโลหะผสมนี้เมื่อยังไม่ได้เพิ่มสังกะสี (ข้อสอบชุด ป.ป. —105 กรัม)

23. อัตราส่วนของนักเรียนแผนกวิทยาศาสตร์ และ อักษรศาสตร์ ในโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาแห่งหนึ่งเป็น 5 : 4 ถ้ามีนักเรียนเพิ่มขึ้นทั้งสองแผนกในอัตราส่วน 4 : 5 จะทำให้อัตราส่วนเดิมกลายเป็น 29 : 25 และทำให้มีจำนวนนักเรียนทั้งสิ้นถึง 540 คน จงหาจำนวนนักเรียนแต่ละแผนกเมื่อยังไม่เพิ่ม (ข้อสอบชุด ป.ป. —250, 200)

24. ถัง 3 ใบ จุใบละ 32 ลิตร ใบที่หนึ่งบรรจุเหล้าและน้ำที่ผสมอย่างละเท่า ๆ กันอยู่ครึ่งถัง ใบที่สองบรรจุเหล้า 9 ลิตรผสมกับน้ำได้ $\frac{3}{4}$ ถัง ใบที่สามบรรจุเหล้า 12 ลิตร ปนกับน้ำจนเต็มถัง ถ้าเทเหล้าและน้ำจากใบที่สามลงในใบที่สองจนเต็ม แล้วเทจากใบที่สองลงในใบที่หนึ่งจนเต็ม จงหาปริมาตรของเหล้าและของน้ำในถังใบที่หนึ่ง (ข้อสอบชิงทุนไปนอกของ ก.พ. —14, 18 ลิตร)

25. มีขวดขนาดเท่ากันสองขวด ขวดที่หนึ่งใส่น้ำเชื่อมไว้เต็ม ขวดที่สองใส่น้ำสุกไว้ครึ่งหนึ่ง เทน้ำเชื่อมจากขวดที่หนึ่งลงจนเต็มขวดที่สอง เมื่อเขย่าเข้ากันดีแล้วจึงเทน้ำเชื่อมเจือน้ำสุกลงในขวดที่หนึ่งจนเต็มอีก และเมื่อเขย่าขวดแล้วจึงกลับเทลงในขวดที่สองจนเต็มอีกครึ่งหนึ่ง ส่วนของน้ำเชื่อมในขวดที่สองครั้งสุดท้ายนี้มีเท่าไร (ข้อสอบชุด ป.ป. — $\frac{5}{8}$)

26. ของเหลวอย่างหนึ่งคือเหล้าและน้ำปนกันอยู่เต็มขวดในอัตราส่วน 3 : 1 ต้องรินออกเท่าใดเมื่อเอาน้ำเติมแทนให้เต็มตามเดิมแล้ว จะทำให้ของผสมมีอัตราส่วน 1 : 1 (ข้อสอบเข้าเตรียมนายร้อย แห่ง ร.ร. นายร้อย จ.ป.ร. — $\frac{1}{3}$ ขวด)

27. น้ำตาล 2 ชนิดปนกันอยู่ในถัง 2 ถัง ถังแรกมีน้ำตาลชนิดดีปนอยู่ 25 % ถังที่สองมีน้ำตาลชนิดเลวปนอยู่ 25 % เหมือนกัน เทน้ำตาลจากทั้งสองถังนั้นลงในถังใบที่สาม แล้วเอาน้ำตาลชนิดเลวเติมลงไป 4 ลิตรก็เต็มถังพอดี ปรากฏว่าน้ำตาลสองชนิดในถังใบที่สามนี้เท่ากันพอดี จงหาว่าถังทั้งสามใบนั้นมีความจุใบไหนเท่าไร (12, 20, 36)

28. ถ้าเอาเหล้าปนน้ำจำนวน 2 ลิตร (เป็นน้ำเสียร้อยละ 12) ไปผสมกับเหล้าปนน้ำอีก 3 ลิตร (เป็นน้ำเสียร้อยละ 7) แล้วเติมน้ำลงไปอีก $\frac{1}{2}$ ลิตร ส่วนผสมครั้งสุดท้ายนี้มีน้ำอยู่ร้อยละเท่าไร (ข้อสอบชุด ป.ป. — $17\frac{3}{11}$)

29. เจ้าของร้านสั่งให้ลูกจ้างผสมแป้งชนิดหนึ่งหนัก 30 ปอนด์ ราคาทุนปอนด์ละ 1 s 6 d เข้ากับแป้งอีกชนิดหนึ่งหนัก 30 ปอนด์ ราคาทุนปอนด์ละ 2 s. แล้วกำหนดให้ขายแป้งผสมนี้โดยหวังกำไรร้อยละ $66\frac{2}{3}$ ครั้นขายไปได้ 20 ปอนด์ เจ้าของร้านจึงรู้ว่าลูกจ้างใช้แป้งชนิดราคาทุนปอนด์ละ 2 s. 6 d. แทนที่จะใช้แป้งชนิดราคาทุนปอนด์ละ 2s. ผสม อยากทราบว่าแป้งผสมที่เหลือจะต้องขายปอนด์ละเท่าไร จึงจะให้ได้กำไรทั้งหมดร้อยละ $66\frac{2}{3}$ ตามที่ตั้งใจไว้แต่แรก ★★ (3 s. 10 d.) ข้อสอบเตรียมวิทยาศาสตร์ พ.ศ. 2494

30. ฉันซื้อส้มเขียวหวานและชมภู่สำแหรกมาเป็นอัตราส่วน 3 : 2 แล้วแบ่งขายไปเสียบ้าง เป็นอัตราส่วน 7 : 6 คงเหลือส้มและชมภู่เป็นอัตราส่วน 5 : 2 รวมกันได้ 350 ผล พอดี ฉันซื้อส้มและชมภู่มาอย่างละกี่ผล (ข้อสอบชุด ป.ม. 2493 — 600, 400)

31. ถังของผสม 2 ใบ ใบแรกจุ 12 ลิตร 30 % เป็นน้ำ ใบที่สองจุ 20 ลิตร 72 % เป็นน้ำ เขาเทของผสมจากถังสองใบนั้นลงผสมกันลงไปในถังใบที่สาม ซึ่งจุ 10 ลิตรจนเต็มพอดี ปรากฏว่าของผสมในถังใบที่สามมีน้ำ 55 % จงหาว่าเขาเทของผสมจากถังใบไหนเท่าไร (จากใบแรก $4\frac{1}{21}$ ลิตร จากใบที่สอง $5\frac{20}{21}$ ลิตร)

32. พ่อค้าผู้หนึ่งมีน้ำตาลทรายชนิดกิโลกรัมละ 4.20 บาทอยู่ 35 กิโลกรัม เขานำน้ำตาลชนิดซึ่งถูกกว่าเป็นจำนวน 60 กิโลกรัมมาผสม ซึ่งถ้าเขาขายไปกิโลกรัมละ 3.60 บาท เขาก็จะไม่ขาดทุนไม่ได้กำไร แต่แม้กระนั้นเขาก็ยังเอาน้ำตาลชนิดราคากิโลกรัมละ

2.20 บาทมาผสมอีก ซึ่งถ้าเขาขายน้ำตาลผสมครั้งหลังนี้ไปกิโลกรัมละ 2.80 บาท เขาก็จะได้กำไร $14\frac{2}{7}$% จงหาว่าน้ำตาลผสมมีน้ำตาลชนิดกิโลกรัมละ 2.20 บาทอยู่กี่กิโลกรัม (437)

33. กระจาด 3 ใบ ใบแรกมีความจุ 11 ลิตร ในกระจาดมีถั่ว 3 ชนิดปนกันอยู่ คือ ถั่วลิสง 70% ถั่วเหลือง 22% นอกนั้นเป็นถั่วเขียว กระจาดใบที่สองมีความจุเป็น 3 เท่าของใบแรก มีถั่ว 3 ชนิดบรรจุเช่นกันคือ ถั่วลิสง 40% ถั่วเหลือง 50% นอกนั้นเป็นถั่วเขียว ใบที่สามมีถั่วเหลืองอย่างเดียว เมื่อเทถั่วจากกระจาดทั้งสามใบรวมกันแล้วปรากฏว่ามีถั่วลิสงอยู่ 20% จงหาว่า

(1) ถั่วเหลืองในกระจาดใบที่สามมีกี่ลิตร ($60\frac{1}{2}$)

(2) ในของผสมครั้งสุดท้ายนี้ มีถั่วเขียวร้อยละเท่าไร (4)

34. ถังสองใบมีความจุถังละ 40 ลิตร แต่ละใบมีเหล้าและน้ำผสมกันอยู่เต็ม ใบแรกมีเหล้าและน้ำเป็นอัตราส่วน 2 : 3 ตักเอาของเหลวจากถังทั้งสองมาถังละ $\frac{1}{4}$ แล้วเทลงสลับถังกันเสีย เมื่อของผสมเข้ากันดีแล้ว ก็ตักออกมาอีกถังละ $\frac{1}{3}$ แล้วเทสลับกันเช่นเดิม ปรากฏว่าในถังใบที่หนึ่งมีน้ำมากกว่าเหล้าอยู่ $1\frac{1}{3}$ ลิตร จงหาว่าเดิมนั้นในถังใบที่สองมีเหล้าและน้ำอยู่อย่างละกี่ลิตร (เหล้า 24, น้ำ 16)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# เกณฑ์ส่วน

# PROBLEMS ON WORKS AND PIPES

# 11

เกณฑ์ส่วน เป็นเรื่อง การคำนวณ เกี่ยวกับแรงงานและเวลาซึ่งคลุมไปถึงการคำนวณเกี่ยวกับท่อน้ำด้วย

โจทย์เรื่องเกณฑ์ส่วนนี้ ส่วนใหญ่เป็นการคำนวณเกี่ยวกับแรงงานหลายแรงงาน ซึ่งแต่ละแรงงานมีความสามารถไม่เท่ากัน โจทย์จะกำหนดความสามารถของแรงงานหนึ่ง ๆ ในการทำงานอย่างหนึ่งในเวลาที่ไม่เท่ากัน ประการสำคัญที่จะต้องคำนวณก็คือ จะต้องเปรียบเทียบแรงงานของแรงงานต่าง ๆ ว่า แรงงานไหนมีความสามารถมากกว่ากันกี่เท่า หรือเป็นเศษส่วนเท่าไรของกันและกัน ซึ่งก็คือการหาอัตราส่วนของแรงงานเหล่านั้นนั่นเอง

แต่โดยที่แรงงานต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้นั้น จะนำมาเปรียบเทียบกันยังไม่ได้ เพราะได้กล่าวแล้วว่า เวลาการทำงานของแต่ละแรงงานไม่เท่ากัน เราต้องทำเวลาซึ่งไม่เท่ากันนั้นให้เท่ากันเสียก่อน วิธีที่ทำเวลาให้เท่ากันนั้นจะให้เป็นเท่าไรก็ได้ แต่ที่สะดวกและมีผิดพลาดได้น้อยก็คือ ทำให้เป็น 1 เหมือนกันทุก ๆ แรงงาน อาจเป็น 1 วัน 1 ชม. หรือ 1 นาทีนั้น แล้วแต่ความเหมาะสมของโจทย์แต่ละชนิดหรือแต่ละข้อ

เมื่อได้กล่าวถึงแรงงานและเวลาแล้ว ก็ต้องกล่าวถึงจำนวนงานที่แรงงานทำได้ด้วย เพราะทั้งสามสิ่งนี้ย่อมจะรวมกันอยู่อย่างแยกไม่ออก โดยเฉพาะในการคำนวณเรื่องเกณฑ์ส่วนนี้

จำนวนงานนี้ โดยทั่วไปโจทย์จะไม่บอกให้เป็นตัวเลข เช่น โจทย์จะกล่าวเพียงว่า คน 10 คนทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 20 วัน เช่นนี้เป็นต้น เมื่อเป็นเช่นนี้เราจึงมีความจำเป็นต้องสมมติแรงงานให้เป็นตัวเลข เพื่อสะดวกแก่การคำนวณในขั้นต่อไป การสมมติอาจสมมติให้เป็นเท่าไรก็ได้ เช่น เป็น 100 เป็น 10 เป็น 1 ที่สะดวกและง่ายในการคิดนั้นได้แก่การสมมติให้เป็น 1 ดังนั้นจึงขอทำความตกลงว่าตัวอย่างทุกตัวอย่างในเรื่องนี้ จะสมมติให้เป็น 1 ทั้งสิ้น (ถ้าผู้ใดจะสมมติเป็นอย่างอื่นก็ไม่ผิด และมีสิทธิที่จะทำได้)

ดังนั้นจาก คน 10 คนทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 20 วัน เราก็เขียนได้ว่า

คน 10 คน ทำงาน 20 วัน ทำงานได้ 1

ตัวอย่างต่อไปนี้จะทำให้เข้าใจดี

**ตัวอย่าง 1** ก. ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 4 วัน ถ้า ข. ทำงานนั้นจะแล้วใน 12 วัน ถ้าให้ ก. และ ข. ช่วยกันทำงานนั้นมาแต่เริ่มแรกจะแล้วเสร็จในกี่วัน

**วิธีทำ** สมมติให้งานนั้นเป็น 1

ใน 4 วัน ก. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ก. ทำงานได้ $\frac{1}{4}$

ใน 12 วัน ข. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ข. ทำงานได้ $\frac{1}{12}$

ใน 1 วัน ก. ทำงานได้ $\frac{1}{4}$ ข. ทำได้ $\frac{1}{12}$

∴ ใน 1 วัน ก. และ ข. ช่วยกันทำงานได้ $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

งาน $\frac{1}{3}$ ก. และ ข. ช่วยกันทำแล้วในเวลา 1 วัน

∴ งาน 1 ก. และ ข. ช่วยกันทำแล้วในเวลา $1 \times \frac{3}{1} = 3$ วัน

**ตอบ** 3 วัน

**ตัวอย่าง 2** ก. ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 10 วัน ข. ทำงานนั้นเหมือนกันแล้วใน 12 วัน ค. ทำงานนั้นแล้วใน 15 วัน ถ้าให้ ก. ข ค. ช่วยกันทำจะแล้วในกี่วัน

**วิธีทำ**

10 วัน ก. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ก. ทำงานได้ $\frac{1}{10}$

12 วัน ข. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ข. ทำงานได้ $\frac{1}{12}$

15 วัน ค. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ค. ทำงานได้ $\frac{1}{15}$

ดังนั้นใน 1 วัน ก. ข. ค. ช่วยกันทำงานได้ $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{1}{4}$

งาน $\frac{1}{3}$ ก. ข. ค. ทำแล้วใน 1 วัน

∴ งาน 1 ก. ข. ค. ทำแล้วใน $1 \times \frac{4}{1} = 4$ วัน

**ตอบ** 4 วัน

**ตัวอย่าง 3** ก. ข. ค. ช่วยกันทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 2 วัน ถ้าให้ ก. ทำงานนั้นคนเดียวตั้งแต่ต้นจะแล้วใน 6 วัน และให้ ค. ทำบ้างจะแล้วใน 12 วัน ถ้าให้ ข. ทำกี่วันแล้ว

**วิธีทำ** ให้งานนั้นเป็น 1

ใน 2 วัน ก. ข. ค. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ก. ข. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{2}$

6 วัน ก. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ก. ทำงานได้ $\frac{1}{6}$

12 วัน ค. ทำงานได้ 1

∴ 1 วัน ค. ทำงานได้ $\frac{1}{12}$

∴ ใน 1 วัน ก. และ ค. ทำงานได้ $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$

แต่ 1 วัน ก. ข. ค. ทำได้ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ 1 วัน ข. คนเดียวทำงานได้ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

งาน $\frac{1}{4}$ ข. ทำแล้วใน 1 วัน

$\therefore$ งาน 1 ข. ทำแล้วใน $1 \times \frac{4}{1} = 4$ วัน

ตอบ 4 วัน

**ตัวอย่าง 4** ก. ข. ช่วยกันทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 6 วัน ข. ค. ช่วยกันทำงานนั้นแล้วใน 8 วัน และ ก. ค. ช่วยกันทำงานนั้นเหมือนกันแล้วใน 12 วัน ถ้าให้ ก. ข. ค. ทำงานนั้นตั้งแต่ต้นจนจบแต่ลำพัง ใครจะทำเสร็จในกี่วันบ้าง

**วิธีทำ**

6 วัน ก. ข. ทำงานได้ 1

$\therefore$ 1 วัน ก. ข. ทำงานได้ $\frac{1}{6}$

8 วัน ข. ค. ทำงานได้ 1

$\therefore$ 1 วัน ข. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{8}$

12 วัน ก. ค. ทำงานได้ 1

1 วัน ก. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{12}$

[จะเห็นได้ว่า 1 วัน ก + ข ทำงานได้ $\frac{1}{6}$

1 วัน ข + ค ทำงานได้ $\frac{1}{8}$

1 วัน ก + ค ทำงานได้ $\frac{1}{12}$

$\therefore$ ใน 1 วัน ก + ข + ข + ค + ก + ค ช่วยกันทำงานได้ $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$

$\therefore$ 1 วัน 2 (ก + ข + ค) ทำงานได้ $\frac{3}{8}$

$\therefore$ 1 วัน ก + ข + ค ทำงานได้ $\frac{3}{8 \times 2} = \frac{3}{16}$]

$\therefore$ ใน 1 วัน ก. ข. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}) = \frac{3}{16}$

$\therefore$ 1 วัน ก. ทำงานได้ $\frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ (เอางานของ ข. ค. ลบออกจากของ ก.ข.ค.)

1 วัน ข. ทำงานได้ $\frac{3}{16} - \frac{1}{12} = \frac{5}{48}$ (เอางานของ ก. ค. ลบออกจากของ ก.ข.ค.)

1 วัน ค. ทำงานได้ $\frac{3}{16} - \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$ (เอางานของ ก. ข. ลบออกจากของ ก.ข.ค.)

งาน $\frac{1}{16}$ ก. ทำแล้วใน 1 วัน

$\therefore$ งาน 1 ก. ทำแล้วใน $1 \times 16 = 16$ วัน

งาน $\frac{5}{48}$ ข. ทำแล้วใน 1 วัน

งาน 1 ข. ทำแล้วใน $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$ วัน

งาน $\frac{1}{48}$ วัน ค. ทำแล้วใน 1 วัน

งาน 1 ค. ทำแล้วใน 48 วัน

**ตอบ**
- ก. ทำแล้วใน 16 วัน
- ข. ทำแล้วใน $9\frac{3}{5}$ วัน
- ค. ทำแล้วใน 48 วัน

อธิบาย ตัวอย่างนี้มีวิธีทำยืดยาว เท่าที่ทำยืดยาวมานี้ เพื่อให้ผู้ศึกษาเข้าใจ ถ้าเข้าใจดีแล้ว ก็อาจย่นย่อเสียได้

ขั้นแรก โจทย์บอกกำลังงานให้เป็นคู่ๆ คือ ก.ข. ข.ค. และ ก.ค. เราต้องหาว่าในวันหนึ่งคู่หนึ่งทำงานได้เท่าไร แล้วเอางานที่ทำได้นั้นมารวมกัน ก็จะเป็นงานที่ ก. ข. ข. ค. ก. ค ทำได้ใน 1 วัน ดังเกตดู ก.ข. ข.ค. ก.ค. จะเห็นว่าการทำงานของ ก. เป็นสองเท่า ของ ข. เป็นสองเท่า ของ ค. เป็นสองเท่า คืองานที่ ก. ทำได้เป็น 2 ส่วน ข. 2 ส่วน ค. 2 ส่วน ซึ่งเท่ากับ ก. ข. ค. ทำงานนั้น 2 ครั้งได้ใน 1 วัน

คือ ทำ 2 ครั้งได้งาน $\frac{3}{8}$

$\therefore$ ทำ 1 ครั้งงานก็จะได้น้อยลงไปครั้งหนึ่ง คือเอา 2 ไปหาร $\frac{3}{8}$ ได้ $\frac{3}{16}$ ถ้าเขียนตามวิธีพีชคณิตก็จะได้

| | |
|---|---|
| $(ก + ข) + (ข + ค) + (ก + ค)$ | ทำงานได้ $\frac{3}{8}$ |
| $ก + ข + ข + ค + ก + ค$ | ทำงานได้ $\frac{3}{8}$ |
| $2ก + 2ข + 2ค$ | ทำงานได้ $\frac{3}{8}$ |
| $2(ก + ข + ค)$ | ทำงานได้ $\frac{3}{8}$ |
| $\therefore (ก + ข + ค)$ | ทำงานได้ $\frac{3}{8 \times 2} = \frac{3}{16}$ |

ขั้นต่อไป เราทราบว่า 1 วัน ข.ค. ทำงานได้ $\frac{1}{8}$

แต่เราทราบแล้วว่า 1 วัน ก. ข. ค. ทำได้ $\frac{3}{16}$

∴ 1 วัน ก. ทำงานได้เท่าใดก็หาได้โดยเอางานของ ก. ข. ค. ตั้งลบด้วยงานของ ข. ค. ก็จะเหลือเป็นงานของ ก. ที่ทำได้ใน 1 วัน

คนอื่น ๆ ก็ทำโดยทำนองเดียวกันนี้

**เมื่อเข้าใจแล้วอาจย่อวิธีทำตัวอย่างที่ 4 ได้ดังนี้**

1 วัน ก. ข. ทำงานได้ $\frac{1}{6}$

1 วัน ข. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{8}$

1 วัน ก. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{12}$

∴ 1 วัน ก ข. ค. ทำงานได้ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)=\frac{3}{16}$

∴ 1 วัน ก. ทำงานได้ $\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

1 วัน ข. ทำงานได้ $\frac{3}{16}-\frac{1}{12}=\frac{5}{48}$

1 วัน ค. ทำงานได้ $\frac{3}{16}-\frac{1}{6}=\frac{1}{48}$

∴ ก. ทำงานนี้แล้วใน 16 วัน
ข. ทำงานนี้แล้วใน $\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$ วัน
ค. ทำงานนี้แล้วใน 48 วัน

} ตอบ

**ตัวอย่าง 5** ถังน้ำใบหนึ่งมีท่อ 3 ท่อ ท่อแรกและท่อที่สองไขน้ำเข้าเต็มถังใน เวลา 20 และ 30 นาทีตามลำดับ ส่วนท่อที่สามเป็นท่อสำหรับไขน้ำออก ซึ่งถ้ามีน้ำเต็มจะไขออกหมดในเวลา 48 นาที ขณะที่ถังว่างอยู่เปิดท่อทั้งสามพร้อมกัน นานเท่าไรน้ำจึงจะเต็มถังพอดี

**วิธีทำ** ท่อที่ 1 ไข 20 นาที ได้น้ำ 1 ถัง

∴ ไข 1 นาที ได้น้ำ $\frac{1}{20}$ ถัง

ท่อที่ 2 ไข 30 นาที ได้น้ำ 1 ถัง

∴ ไข 1 นาที ได้น้ำ $\frac{1}{30}$ ถัง

∴ ท่อที่ 1 และ 2 ช่วยกันไข 1 นาที ได้น้ำ $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$ ถัง

คือในเวลา 1 นาที น้ำไหลเข้า $\frac{1}{12}$ ถัง
ท่อที่ 3 ใน 48 นาที หมดน้ำ 1 ถัง
∴ ใน 1 นาที หมดน้ำ $\frac{1}{48}$ ถัง
∴ ในเวลา 1 นาที มีน้ำอยู่ในถัง $\frac{1}{12} - \frac{1}{48} = \frac{1}{16}$ ถัง
น้ำเข้าถังได้ $\frac{1}{16}$ ถัง ในเวลา 1 นาที
∴ น้ำเข้า 1 ถัง ในเวลา 16 นาที

ตอบ 16 นาที

ทำแบบเข้าใจแล้ว

ในเวลา 1 นาที
- ท่อที่ 1 ใส่น้ำเข้าถังได้ $\frac{1}{20}$ ถัง
- ท่อที่ 2 ใส่น้ำเข้าถังได้ $\frac{1}{30}$ ถัง
- ท่อที่ 3 ใส่น้ำเข้าถังได้ $\frac{1}{48}$ ถัง

∴ ใน 1 นาที มีน้ำในถัง $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{48} = \frac{1}{16}$ ถัง
∴ น้ำจะเต็มถังในเวลา 16 นาที

ตอบ 16 นาที

ตัวอย่างต่อไปนี้จะย่นย่อให้สั้นลงตามสมควร

**ตัวอย่าง 6** ถังน้ำใบหนึ่งมีท่อ 3 ท่อ ท่อที่ 1 และที่ 2 ใส่น้ำเข้าเต็มถังในเวลา 8 และ 24 ชั่วโมงตามลำดับ ท่อที่ 3 ใส่น้ำออกหมดถังในเวลา 12 ชั่วโมง เมื่อเปิดท่อทั้ง 3 พร้อมกันอยู่นาน 2 ชั่วโมง ก็ปิดท่อที่สามเสีย จงหาว่าเป็นเวลาทั้งสิ้นเท่าไรกว่าน้ำจะเต็มถัง

**วิธีทำ**

ใน 2 ช.ม.
- ท่อที่ 1 ใส่น้ำเข้าได้ $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ถัง
- ท่อที่ 2 ใส่น้ำเข้าได้ $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ ถัง
- ท่อที่ 3 ใส่น้ำออกได้ $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ถัง

∴ ใน 2 ช.ม. มีน้ำอยู่ในถัง $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ถัง
∴ ยังเหลือที่ว่างในถังอยู่อีก $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ถัง

ใน 2 ช.ม. ท่อที่ 1 และท่อที่ 2 ใช้น้ำเข้าได้ $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ ถัง

น้ำ $\frac{1}{3}$ ถัง ท่อที่ 1 และท่อที่ 2 ใช้เวลา 2 ช.ม.

∴ น้ำ $\frac{5}{6}$ ถัง ท่อที่ 1 และท่อที่ 2 ใช้เวลา $2\times3\times\frac{5}{6}=5$ ชั่วโมง

∴ ต้นเวลาทั้งสิ้น $2+5=7$ ช.ม.

**ตอบ** 7 ชั่วโมง

**ตัวอย่าง 7** ในการสูบน้ำออกจากบ่อน้ำบาดาลแห่งหนึ่งซึ่งมีน้ำเต็ม ก้นบ่อมีน้ำซึมเข้าบ่ออยู่ตลอดเวลา ถ้าบ่อว่างอยู่จะมีน้ำเข้าเต็มบ่อในเวลา $32\frac{4}{23}$ นาที เครื่องสูบน้ำมีสองเครื่อง เครื่องแรกสูบน้ำออกได้นาทีละ 30 ลิตร สูบหลังนาทีละ 20 ลิตร แต่สูบเครื่องแรกชำรุด เมื่อทำงาน 15 นาที ต้องหยุดพัก 10 นาทีเป็นดังนี้เรื่อยไป ถ้าบ่อมีน้ำ 750 ลิตร จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าไรจึงจะสูบน้ำออกหมด

**ข้อวินิจฉัย** สูบแรกทำงาน 15 นาที หยุดพัก 10 นาที

ดังนั้นในเวลา $15+10=25$ นาที สูบแรกทำงาน 15 นาที

ส่วนสูบหลังทำงานตลอดเวลา และน้ำซึมเข้าตลอดเวลา

**วิธีทำ** สูบแรก $15+10=25$ นาที สูบน้ำ 15 นาที

∴ สูบแรกสูบ 25 นาที สูบน้ำออกได้ $30\times15=450$ ลิตร

สูบหลัง สูบน้ำออกได้นาทีละ 20 ลิตร

∴ สูบหลังสูบ 25 นาที สูบน้ำออกได้ $20\times25=500$ ลิตร

∴ ใน 25 นาที สูบทั้งสองสูบน้ำออกได้ $450+500=950$ ลิตร

แต่บ่อนี้มีน้ำซึมเข้าเต็มบ่อในเวลา $32\frac{4}{23}$ นาที $=\frac{750}{23}$ นาที

ในเวลา $\frac{750}{23}$ นาที น้ำซึมเข้าเต็มบ่อ $=750$ ลิตร

∴ 25 นาที น้ำซึมเข้า $750\times\frac{23}{750}\times25=575$ ลิตร

ดังนั้นใน 25 นาที จึงสูบน้ำออกได้เพียง $950-575=375$ ลิตร

น้ำ 375 ลิตร สูบออกในเวลา 25 นาที

∴ น้ำ 750 ลิตร สูบออกในเวลา $\frac{25}{375}\times750=50$ นาที

**ตอบ** 50 นาที

**ตัวอย่าง 8** ชาย 2 คนและเด็ก 3 คน ช่วยกันทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 16 วัน ถ้าให้ชาย 5 คนและเด็ก 6 คนช่วยกันทำงานนั้นบ้าง จะแล้วในเวลาเพียง 7 วัน อยากทราบว่า ถ้าให้ชาย 4 คนและเด็ก 8 คนทำงานนั้นจะแล้วในกี่วัน

**วิธีทำ** ทำงานนั้นแล้วใน 16 วัน ใช้ชาย 2 คน เด็ก 3 คน

$\therefore$ ถ้าจะให้แล้วใน 1 วัน ต้องใช้ชาย $2\times16=32$ คน เด็ก $3\times16=48$ คน

และ ทำงานนั้นแล้วใน 7 วัน ใช้ชาย 5 คน เด็ก 6 คน

$\therefore$ ถ้าจะให้แล้วใน 1 วัน ต้องใช้ชาย $5\times7=35$ คน เด็ก $6\times7=42$ คน

$\therefore$ ชาย 32 คนและเด็ก 48 คน ทำงานได้เท่ากับชาย 35 คน และเด็ก 42 คน

$\therefore$ ชาย 1 คน ทำงานได้เท่ากับเด็ก 2 คน

แต่ชาย 2 คนและเด็ก 3 คนซึ่งเท่ากับเด็ก 7 คน ทำงานนั้นแล้วใน 16 วัน

$\therefore$ ชาย 4 คนและเด็ก 8 คน ซึ่งเท่ากับเด็ก 16 คนทำงานนั้นแล้วใน $\frac{16}{16}\times7=7$ วัน

**ตอบ** 7 วัน

อธิบาย ในเวลา 16 วันใช้ชาย 2 คนกับเด็ก 3 คน งานนั้นก็แล้วเสร็จ จะเห็นว่าถ้าจะให้เสร็จใน 1 วัน ต้องใช้จำนวนคนทำงานมากขึ้นอีก 16 เท่า ดังนั้นจึงเอา 16 ไปคูณจำนวนคน เป็นชาย 32 คนเด็ก 48 คน ในกรณีหลังก็ในทำนองเดียวกัน ต้องเอา 7 ไปคูณจำนวนคน เป็นชาย 35 คนและเด็ก 42 คน ซึ่งทำเสร็จใน 1 วันเหมือนกัน

จะเห็นได้ว่า งานนั้นใช้ชาย 32 คนเด็ก 48 คน แล้วใน 1 วัน

และถ้าใช้ชาย 35 คนเด็ก 42 คน ก็แล้วใน 1 วันเหมือนกัน

ดังนั้นชาย 32 คนเด็ก 48 คน จึงทำงานได้เท่ากับชาย 35 คนเด็ก 42 คน

เราเขียนตามวิธีพีชคณิตเพื่อจะได้เข้าใจได้ คือ

ชาย 32 + เด็ก 48 = ชาย 35 + เด็ก 42

หรือ 32 ช. + 48 ด. = 35 ช. + 42 ด.

∴ 48 ด. − 42 ด. = 35 ช. − 32 ช.

6 ด. = 3 ช.

หรือ 3 ช. = 6 ด.

∴ 1 ช. = 2 ด.

คือ ชาย 1 คน ทำงานได้เท่ากับเด็ก 2 คน

วิธีคิดดังนี้ไม่ต้องเขียนลงไปในวิธีทำ เพราะไม่จำเป็น คงทำในเศษกระดาษเท่านั้น

---

## แบบฝึกหัด 11

1. ก. ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 20 วัน ข. ทำงานนั้นแล้วใน 25 วัน ถ้าให้ช่วยกันทำตั้งแต่ต้นงานนั้นจะแล้วในกี่วัน (11$\frac{1}{9}$)
2. ท่อ 2 ท่อไขน้ำเข้าเต็มถังในเวลา 8 นาที ท่อหนึ่งสามารถไขให้เต็มถังในเวลา 24 นาที จงหาว่าอีกท่อหนึ่งจะไขน้ำเข้าเต็มถังนั้นในเวลานานเท่าใด (12)
3. ก. ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 20 วัน ข. ทำงานนั้นแล้วใน 12 วัน ถ้า ก. และ ข. ทำงานนั้นร่วมกันได้ 6 วัน ก็ให้ ค. ทำต่อซึ่งเสร็จใน 2 วันต่อมา ถ้าให้ ค. ทำงานนั้นคนเดียวตั้งแต่ต้น จะแล้วในเวลากี่วัน (10)
4. ก. และ ข. ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 15 วัน แต่ถ้าเขาร่วมกันทำไปได้ 6 วัน ข. ก็หยุด ก. ทำต่อไปคนเดียว เขาจะทำแล้วใน 30 วัน ถ้าให้ ก. ทำตั้งแต่ต้นคนเดียวจะแล้วในเวลากี่วัน (30)
5. ถังใบหนึ่งมี 3 ท่อ สองท่อแรกไขน้ำเข้าเต็มถังในเวลา 3 และ 5 นาที ท่อหลังไขน้ำออกหมดถังในเวลา 7$\frac{1}{2}$ นาที ถ้าเปิด 3 ท่อพร้อมกันขณะที่ถังยังว่างนานเท่าไร น้ำจึงจะเต็มถัง (2$\frac{1}{2}$)
6. งานอย่างหนึ่ง ถ้าให้ชาย 4 คนทำจะแล้วใน 1 ชั่วโมง ถ้าให้หญิง 2 คนทำจะแล้วใน

3 ชั่วโมง และเด็ก 6 คนจะแล้วใน 2 ชั่วโมง ถ้าให้ชายหญิงและเด็กฝ่ายละหนึ่งคนช่วยกันทำงานนั้นจะแล้วในกี่ชั่วโมง (2)

7. ก. ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 15 ชั่วโมง ถ้าปรากฏว่า ข. ทำงานนั้น 4 ชั่วโมงได้เท่ากับ ก. ทำใน 3 ชั่วโมง และ ค. ทำงานนั้น 6 ชั่วโมงได้เท่ากับที่ ข. ทำใน 5 ชั่วโมง ถ้าให้ ค. ทำงานนั้นตั้งแต่ต้นคนเดียวจะแล้วในกี่ชั่วโมง (24)

8. ในการทำงานอย่างหนึ่ง ชาย 2 คนและเด็ก 5 คน ทำงานนั้นไปได้ 6 วันก็เสร็จไปครึ่งหนึ่ง และยังให้ชายและเด็กฝ่ายละ 1 คนมาทำช่วยอีก ต่อมาอีก 3 วันงานนั้นแล้วไป $\frac{1}{3}$ จงหาว่าถ้าจะให้งานที่เหลือนั้นแล้วในอีก 1 วันต่อมา จะต้องเอาชายมาช่วยทำอีกกี่คน (3)

9. งานอย่างหนึ่ง ก. ทำแล้วใน 6 ชั่วโมง ข. ใน 5 ชั่วโมง ค. ใน $4\frac{1}{2}$ ชั่วโมง เขาร่วมกันทำงานพร้อมกันทั้งสามคน แต่เมื่ออีก 2 ชั่วโมง 10 นาทีงานจะเสร็จนั้น ข. หยุดเสีย และอีก 1 ชั่วโมงครึ่งทีงานจะเสร็จ ค. ก็หยุดอีก คงมี ก. คนเดียวที่ทำตั้งแต่ต้นจนเสร็จ จงหาว่าในการทำงานครั้งนี้ใช้เวลาทั้งสิ้นเท่าไร (3 ชั่วโมง)

10. สูบน้ำด้วยเครื่อง สูบน้ำได้นาทีละ 80 และ 100 แกลลอนตามลำดับ ในการสูบน้ำออกจากบ่อใช้สูบทั้งสองนี้ ปรากฏว่าถ้าใช้สูบเครื่องเล็กทำงาน ระดับน้ำจะลดลงไปนาทีละ 1 นิ้ว และถ้าให้สูบพร้อมกันทั้งสองเครื่องตั้งแต่ต้น ระดับน้ำจะลดลงไปจนหมดบ่อในเวลา 2 ชั่วโมง จงหาว่าถ้าใช้สูบเครื่องใหญ่ทำงานเครื่องเดียวตั้งแต่ต้น นานเท่าไรน้ำจึงจะหมดบ่อ และจงหาว่าบ่อลึกเท่าไร (3 ช.ม. 36 นาที; ลึก $22\frac{1}{2}$ ฟุต)

11. ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าให้ชาย 3 คนกับเด็ก 4 คนทำจะแล้วใน 6 วัน ถ้าให้หญิง 4 คนกับเด็ก 8 คนทำจะแล้ว 5 วัน และถ้าชาย 3 คนกับเด็ก 1 คนจะทำแล้วใน 8 วัน จงหาว่าถ้าให้หญิงคนเดียวทำงานนี้ตามลำพังตั้งแต่ต้นจะแล้วในกี่วัน (45)

12. ชาย 15 คนหญิง 12 คนและเด็ก 9 คน ทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 50 วัน ถ้าจะให้ชาย 9 คนหญิง 15 คนและเด็ก 18 คน ทำงานอย่างหนึ่งซึ่งเป็น 4 เท่าของงานอันแรก จะแล้วเสร็จในกี่วัน กำหนดว่าความสามารถของชายหญิงและเด็กแต่ละคนเป็นอัตราส่วน 3 : 2 : 1 (208)

13. ชาวนาผู้หนึ่งไถนาหนึ่งแปลงแล้วใน 28 วัน แต่ถ้าเขาไถโดยใช้รถแทรกเตอร์ จะไถนาแปลงนั้นแล้วเสร็จใน 11 วัน ถ้าปรากฏว่าเขาไถนาไปได้ 9 วัน แล้วจึงใช้รถแทรกเตอร์ จงหาว่ารถแทรกเตอร์ทำงานกี่วันจึงจะเสร็จการไถนาแปลงนั้น $(7\frac{13}{29})$

14. หลังจากที่ ก. ทำงานอย่างหนึ่งชั่วเวลาหนึ่ง ข. ก็รับงานนั้นไปทำแล้วเสร็จใน 7 วัน นับจากวันที่ ก. เริ่มลงมือทำ ถ้างานนี้ ก. ทำคนเดียวก็แล้วใน 9 วัน ข. คนเดียวแล้วใน 6 วัน จงหาว่า ก. ทำอยู่กี่วัน

15. ผู้ใหญ่ 4 คนและเด็ก 10 คน ช่วยกันทำงานได้ 6 วันเสร็จงานไปครึ่งหนึ่ง ครั้นเพิ่มผู้ใหญ่ให้อีก 2 คนและเด็กอีก 2 คนมาช่วยด้วย ปรากฏว่าทั้งหมดทำงานเสร็จไปได้อีก $\frac{1}{3}$ ของงานทั้งสิ้นในเวลา 3 วัน ถามว่า ถ้าจะให้งานที่เหลือเสร็จในวันเดียว จะต้องเพิ่มเด็กมาช่วยงานกี่คน ★★ (12)

16. A. และ B. รับทำงานคนละครึ่ง A. เริ่มทำแต่ 9 นาฬิกา B. เริ่มทำแต่ 10.30 นาฬิกา ทั้งสองคนหยุดพักเวลาเที่ยง ปรากฏว่าเขาทั้งสองทำงานแล้วไป $\frac{1}{5}$ ของงานทั้งหมด เขาเริ่มทำงานกันอีกเวลา 13.00 นาฬิกา A. ทำงานส่วนของเขาเสร็จเมื่อเวลา 16 นาฬิกา B. จะทำส่วนของเขาเสร็จเวลาอะไร ★★ (20.30)

17. A. และ B. เคยช่วยกันพิมพ์หนังสือ 4500 หน้าแล้วใน 100 ชั่วโมง ครั้งหนึ่ง A. และ B. รับทำงานเช่นที่กล่าวแล้วมาช่วยกันทำ เมื่อทำไปได้ 36 ชั่วโมง C. มาพิมพ์แทน B. ครึ่งหนึ่งของงานสำเร็จเมื่อเป็นเวลา 54 ชั่วโมงนับจากเวลาตั้งต้น เมื่อทำไปได้ 80 ชั่วโมงนับจากเริ่มทำ B. กลับมา ทั้งสามคนช่วยกันทำต่อไปแล้วทันเวลาพอดี จงหาว่า A B. และ C. ต่างคนพิมพ์ได้ชั่วโมงละกี่หน้า ★★ (13, 32, 22)

18. งานชิ้นหนึ่งมอบให้ ก. ข. ค. ช่วยกันทำ 5 วันแล้ว การทำงานของคนทั้งสามทำดังนี้ ก ทำทุกวัน ข. ทำเฉพาะวันแรกกับวันที่สอง ค. ทำเฉพาะวันที่สาม สี่, ห้า เท่านั้น ปรากฏว่างานชิ้นนี้ ถ้าให้ ข. และ ค ช่วยกันทำตลอด 6 วันก็แล้วเสร็จ ข. และ ค. ช่วยกันทำงาน 2 วันได้งานเท่ากับ ก. ทำคนเดียว 3 วัน จงหาดูว่าถ้าปล่อยให้คนทั้งสามต่างคนต่างทำงานชิ้นเดียวกันนี้ คนหนึ่ง ๆ จะต้องทำกี่วันจึงจะเสร็จ ★★(9,18,9)

19. เรือสองลำเหมือนกันทุกสิ่งทุกอย่าง ลำแรกสร้างแล้วใน 4 เดือน ลำที่สองแล้วใน 7 เดือน ๆ หนึ่งคิด 30 วัน วันหนึ่งทำ 10 ชั่วโมง คนงานทำเรือลำที่หนึ่งมีจำนวนเป็น 2 เท่าของจำนวนคนงานที่ทำลำที่สอง และคนงานของเรือลำที่หนึ่งทำงานนอกเวลาอีกวันละ 2 ชั่วโมง และค่าจ้างที่เขาได้รับสำหรับนอกเวลาเป็น $1\frac{1}{2}$ เท่าของค่าจ้างที่ได้รับเมื่อทำงานในเวลา เงินค่าจ้างทั้งสองลำเป็นจำนวน 1740 บาท ลำหนึ่ง ๆ เสียค่าจ้างเท่าไร ★★ (1040, 700)

20. ชายหนึ่งคนหญิงหนึ่งคนและเด็กหนึ่งคน รับจ้างทำงานเหมาอย่างหนึ่งรวมกัน โดยชายมีส่วนต้องทำงานนั้นแต่เพียง 9 วัน หญิง 10 วัน และเด็ก 12 วันก็เสร็จ และจำนวนงานที่ชาย หญิง และเด็กทำได้ในวันหนึ่งเป็นอัตราส่วนดังนี้ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ ถ้าได้ค่าจ้างเหมารวมทั้งสิ้น 614 บาท อยากทราบว่า เขาควรจะแบ่งเงินค่าจ้างตามส่วนของงานที่ได้ทำคนละเท่าไร ★★ ข้อสอบเตรียมวิทยาศาสตร์ 2493 (270, 200, 144)

21. ห้องหนึ่งมีเนื้อที่พื้น 2000 ตารางฟุต น้ำไหลเข้าห้องได้สูงชั่วโมงละ 6 นิ้วตลอดเวลาเมื่อน้ำไหลเข้าได้สูง $1\frac{1}{2}$ ฟุต จึงเริ่มสูบน้ำออก โดยสูบออกได้ชั่วโมงละ 1800 ลูกบาศก์ฟุต ถ้าสูบน้ำทำงาน 10 นาทีต้องหยุดพัก 3 นาที ต่อกันเรื่อยไป ถามว่านานเท่าไรน้ำในห้องจึงจะหมด (ข้อสอบชุด ป.ม. 2495 —7 ธ.ม. 45 นาที)

22. ก. รับจ้างทำงานได้ค่าจ้างชั่วโมงละ 6 บาท ต่อมา ข. รับงานนั้นมาทำต่อไป แต่ผู้จ้างให้ค่าจ้างเพียงชั่วโมงละ 4 บาท ข. ทำต่อไปจนงานนั้นเสร็จ ซึ่งนับรวมเวลาทั้งสิ้นเป็นเวลา 19 ชั่วโมงครึ่ง ถ้าปรากฏว่าเขาได้ค่าจ้างรวมกัน 101.50 บาท จงหาว่าเขาทำงานคนละกี่ชั่วโมง และได้ค่าจ้างทั้งสิ้นคนละเท่าไร ($11\frac{3}{4}$ ธ.ม., $7\frac{3}{4}$ ธ.ม. ; 70.50 บาท, 31 บาท)

23. ก. ข. ค. ทำงานอย่างหนึ่งจะแล้วใน 60 วัน แต่เมื่อทำไปได้ 10 วัน ก. ก็หยุด หลังจากนั้นอีก 20 วัน ข. หยุดอีกคนหนึ่ง ค. จึงต้องเพิ่มเวลาทำงานอีกวันละ $\frac{1}{3}$ ของเวลาเดิมที่เขาทำ งานนั้นจึงแล้วเสร็จใน 196 วันต่อมา ถ้าให้ ก. ทำงานนั้นตั้งแต่ต้นคนเดียวโดยไม่เพิ่มเวลาทำงานจะแล้วใน 222 วัน ถ้าให้ ข. ทำงานนั้นคนเดียวบ้างจะแล้วในกี่วัน (120) ข้อสอบเข้าเตรียมนายเรือ

---

# การคำนวณขั้นสูง

## เกี่ยวกับจำนวนงานไม่คงที่สัมพันธ์กับเวลาและแรงงาน

# 12

ในเรื่องสัดส่วนที่ได้ศึกษากันมาแล้วนั้น จำนวนงานมีค่าคงที่ เช่น โค 20 ตัว กินหญ้าหมดทุ่งในเวลา 10 วัน ก็หมายความว่า

โค 20 ตัว กินหญ้าหมดทุ่งในเวลา 10 วัน

$\therefore$ โค 10 ตัว กินหญ้าหมดทุ่งในเวลา $\frac{10 \times 20}{10} = 20$ วัน

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าโคจะกินหญ้านานกี่วัน ก็คงกินหญ้าหมดจำนวนหญ้าเท่ากัน

คือ กิน 10 วัน หมดหญ้า 1 ทุ่ง

กิน 20 วัน ก็หมดหญ้า 1 ทุ่ง

อย่างนี้เป็นการคำนวณโดยถือว่าจำนวนงานคงที่ คือหญ้าในทุ่งนั้นมีอยู่เท่าเดิม คงที่อยู่เสมอ ไม่ว่าจะเป็นกี่วัน กี่เดือน หรือกี่ปีก็ตาม

แต่ถ้าเป็นกรณีที่จำนวนงานไม่คงที่ คือ หญ้างอกขึ้นทุกวัน ซึ่งจำนวนหญ้าในทุ่งจะมากขึ้นทุกวันแล้ว การคำนวณก็ต้องเป็นอีกแบบหนึ่ง ซึ่งจะสังเกตได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1** ในฤดูฝน หญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งงอกโดยสม่ำเสมอ ซึ่งถ้าให้โค 20 ตัวกินหญ้าในทุ่งนั้นจะหมดใน 96 วัน แต่ถ้าโค 30 ตัวจะกินหมดในเวลาเพียง 60 วัน อยากทราบว่าถ้าจะให้โคกินหญ้าให้หมดทุ่งนั้นใน 24 วัน ต้องใช้โคกี่ตัว

**วิธีทำ** ให้ โค 1 ตัวกินหญ้า 1 วัน หมดหญ้า 1 ส่วน

$\therefore$ โค 20 ตัวกิน 96 วัน หมดหญ้า $20 \times 96 = 1920$ ส่วน

และโค 30 ตัวกิน 60 วัน หมดหญ้า $30 \times 60 = 1800$ ส่วน

$\therefore$ ในเวลา $96-60=36$ วัน หญ้างอก $1920-1800=120$ ส่วน

$\therefore$ 1 วันหญ้างอก $\frac{120}{36} = \frac{10}{3}$ ส่วน

$\therefore$ 96 วันหญ้างอก $\frac{10}{3} \times 96 = 320$ ส่วน

$\therefore$ เดิมมีหญ้าอยู่ในทุ่ง $1920 - 320 = 1600$ ส่วน

จะให้โคกินให้หมดในเวลา 24 วัน

แต่ใน 24 วัน หญ้างอก $\frac{10}{3} \times 24 = 80$ ส่วน

$\therefore$ โคต้องกินหญ้าทั้งสิ้น $1600 + 80 = 1680$ ส่วน

หญ้า 1 ส่วน กินหมดใน 1 วัน ใช้โค 1 ตัว

$\therefore$ หญ้า 1680 ส่วน กินหมดใน 1 วัน ใช้โค $1 \times 1680$ ตัว

$\therefore$ หญ้า 1680 ส่วน กินหมดใน 24 วัน ใช้โค $\frac{1 \times 1680}{24} = 70$ ตัว

ตอบ 70 ตัว

อธิบาย เราจะเห็นว่าใน 96 วัน โคกินหญ้าทั้งสิ้น 1920 ส่วน

แต่ใน 60 วัน โคกินหญ้าทั้งสิ้น 1800 ส่วนเท่านั้น

จำนวนหญ้าซึ่งแตกต่างกันนั้น คือจำนวนหญ้าซึ่งงอกขึ้นระหว่างเวลา 96 วันและ 60 วัน คือ 36 วัน หญ้างอก 120 ส่วน

อาจมีบางคนสงสัยว่าทำไมไม่เอาโคมาเกี่ยวข้องด้วย ขอตอบว่าจำนวนโคนั้นได้เอามาเกี่ยวข้องแล้วคือ $20 \times 96$ และ $30 \times 60$ นั่นเอง

เมื่อหาได้ว่า 1 วันหญ้างอกเท่าไรแล้ว เราก็หาหญ้าเดิมในสนามได้ ซึ่งเราอาจหาได้สองทาง คือ หาว่า 96 วันหญ้างอกเท่าไร แล้วเอาไปลบออกจากจำนวนหญ้าซึ่งโคกินใน 96 วันทางหนึ่ง ตามตัวอย่าง

กับอีกทางหนึ่ง หาว่า 60 วันหญ้างอก $\frac{10}{3} \times 60 = 200$ ส่วน

แต่ โคกิน 60 วัน หมดหญ้า 1800 ส่วน

$\therefore$ เดิมมีหญ้าในทุ่ง $1800 - 200 = 1600$ ส่วน ซึ่งได้เท่ากันทั้งสองทาง

ขั้นต่อไปโจทย์ต้องการให้กินหมดใน 24 วัน เราก็หาว่า 24 วันหญ้างอกเท่าไร แล้วเอาไปรวมกับหญ้าเดิม เอาจำนวนวันหาร ผลลัพธ์ก็ได้เป็นจำนวนโค

**ตัวอย่าง 2** แกะ 19 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งหมดใน 13 วัน ซึ่งถ้าให้แกะ 16 ตัวกินจะหมดในเวลา 16 วัน ถ้าให้แกะ 107 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งนี้ จะกินหมดในกี่วัน

**วิธีทำ** ให้แกะ 1 ตัวกินหญ้า 1 วัน หมดหญ้า 1 ส่วน

$\therefore$ แกะ 19 ตัวกินหญ้า 13 วัน หมดหญ้า $19 \times 13 = 247$ ส่วน

แกะ 16 ตัว กินหญ้า 16 วัน หมดหญ้า $16 \times 16 = 256$ ส่วน

$\therefore$ ในเวลา $16 - 13 = 3$ วัน หญ้างอก $256 - 247 = 9$ ส่วน

$\therefore$ 1 วัน หญ้างอก $\frac{9}{3} = 3$ ส่วน

$\therefore$ 13 วัน หญ้างอก $3 \times 13 = 39$ ส่วน

$\therefore$ เดิมมีหญ้าในทุ่ง $247 - 39 = 208$ ส่วน

หญ้างอกวันละ 3 ส่วน

$\therefore$ หญ้าที่งอกมาแต่ละวัน จะเท่ากับที่แกะ 3 ตัวกินได้ในวันหนึ่ง ๆ

$\therefore$ คงเป็นแกะที่กินหญ้าที่มีอยู่เดิมในทุ่งเพียง $107 - 3 = 104$ ตัว

แกะ 1 ตัว กินหญ้า 1 ส่วน หมดใน 1 วัน

$\therefore$ แกะ 1 ตัว กินหญ้า 208 ส่วน หมดใน $1 \times 208$ วัน

แกะ 104 ตัว กินหญ้า 208 ส่วน หมดใน $\frac{1 \times 208}{104} = 2$ วัน

นั่นคือ แกะ 107 ตัว กินหญ้าหมดทุ่งนี้ในเวลา 2 วัน

ตอบ 2 วัน

**อธิบาย** เมื่อเราหาได้แล้วว่า หญ้างอกวันละเท่าไรได้แล้ว คืองอกวันละ 3 ส่วน เราจะเห็นได้ว่า จำนวนหญ้าที่งอกขึ้นมานี้ ถ้าให้แกะ 3 ตัวกินแล้วก็จะหมดพอดี คืองอกวันละ 3 ส่วน แกะ 3 ตัวกิน 1 วันหมดหญ้า 3 ส่วน ดังนั้นถ้าเราแบ่งแกะออกมาเสีย 3 ตัวสำหรับให้กินหญ้าที่งอกออกมาทุก ๆ วัน หญ้าที่งอกออกมาก็จะหมดไป เหมือนกับหญ้าไม่งอกออกเลย ฉะนั้นคงมีแกะเหลืออยู่

$107 - 3 = 104$ ตัว และแกะจำนวนนี้ก็คงกินหญ้าซึ่งมีอยู่เดิมในทุ่ง (เพราะแกะ 3 ตัวกินหญ้าที่งอกออกมาหมดไปทุกวัน) แกะ 3 ตัวก็ดี หญ้าที่งอกออกมาก็ดี เป็นอันไม่ต้องพูดถึง เพราะเท่ากับเป็นพวกหนึ่งต่างหาก วันหนึ่งหญ้างอกออกมาเท่าไร แกะ 3 ตัวก็กินหมดไป

∴ หญ้าที่เหลือ แกะ 104 ตัวก็จะกินหมดใน $\frac{208}{104} = 2$ วัน

**ข้อสังเกต** โจทย์จะบอกว่าหญ้างอกหรือไม่บอกก็ได้ เพราะถ้าหญ้างอกแล้ว เมื่อเราเทียบดูตามวิธีธรรมดา จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้จะไม่ถูกต้อง แสดงว่าหญ้างอกและงอกโดยสม่ำเสมอ

## แบบฝึกหัด 12

1. โค 30 ตัว กินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งซึ่งงอกโดยสม่ำเสมอหมดในเวลา 20 วัน ซึ่งถ้าให้โค 15 ตัวกินแล้วจะหมดในเวลา 44 วัน ถ้าต้องการให้กินหมดในเวลา 4 วัน ต้องใช้โคกินกี่ตัว (140)
2. ในทุ่งแห่งหนึ่งหญ้างอกโดยสม่ำเสมอ ถ้าให้โค 20 ตัวกินหญ้าในทุ่งนั้นจะหมดใน 24 วัน ถ้าให้โค 38 ตัวกินจะหมดใน 12 วัน ปรากฏว่ามีโคกินหญ้าในทุ่งนั้นอยู่ฝูงหนึ่ง ซึ่งกินอยู่ 72 วันหญ้าก็หมด จงหาจำนวนโคฝูงนั้น (8)
3. แกะ 29 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งหมดในเวลา 7 สัปดาห์ ถ้าให้แกะ 25 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งนั้นจะหมดในเวลา 9 สัปดาห์ ถ้าจะให้กินหมดใน 6 สัปดาห์ จะต้องให้แกะกินกี่ตัว (32)
4. ม้า 40 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งหมดใน 12 วัน และถ้าให้ม้า 25 ตัวจะกินหมดใน 20 วัน จงหาว่าถ้าให้ม้า 30 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งนี้ ซึ่งหญ้างอกโดยสม่ำเสมอจะกินหมดในเวลากี่วัน $(16\frac{4}{11})$
5. โค 48 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่ง ซึ่งหญ้างอกโดยสม่ำเสมอจะหมดในเวลา 8 วัน และโค 64 ตัวกินหมดใน 5 วัน จงหาว่าถ้าให้โค 40 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งนั้นตั้งแต่ต้นกี่วันจึงจะหมด $(11\frac{3}{7})$

6. โค 70 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งซึ่งงอกโดยสม่ำเสมอหมดในเวลา 20 วัน แต่ถ้าให้โค 50 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งนี้จะหมดในเวลา 30 วัน จงหาว่าถ้าให้โค 22 ตัวกินหญ้าในทุ่งนี้ตั้งแต่ต้นจะหมดในเวลากี่วัน (100)

7. ในทุ่งแห่งหนึ่งหญ้างอกโดยสม่ำเสมอ โค 20 ตัวกินหมดทุ่งในเวลา $25\frac{1}{2}$ วัน และโค 21 ตัวกินหมดในเวลา 24 วัน ถ้าให้โค 26 ตัวกินหญ้าในทุ่งนี้จะกินหมดในเวลากี่วัน ($18\frac{6}{11}$)

8. ถ้าโค 17 ตัวกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งหมดในเวลา 30 วัน ถ้าให้ 19 ตัวจะกินหมดทุ่งนั้นในเวลา 24 วัน แต่เมื่อกินไปได้ 6 วัน โค 4 ตัวก็ออกไปหากินที่ทุ่งแห่งอื่น จะต้องนำโคเข้าไปอีกกี่ตัวจึงจะกินหญ้าในทุ่งนี้หมดในเวลา 8 วัน กำหนดว่าโคทุกตัวมีความสามารถเท่ากัน และหญ้างอกในอัตราคงที่ (40)

9. เดิมมีหญ้าในทุ่งอยู่หนัก 525 ตันโดน และงอกขึ้นมาทุกวันโดยสม่ำเสมอ ถ้าให้โค 11 ตัวกินหญ้าในทุ่งนี้จะหมดใน 48 วัน และ 6 ตัวหมดใน 98 วัน กำหนดให้โคทุกตัวมีความสามารถเท่ากัน จงหาว่าโคตัวหนึ่ง ๆ กินหญ้าได้วันละเท่าไร (15 ปอนด์ 10 ออนซ์)

10. โค 29 ตัวกินหญ้าหมดทุ่งใน 7 วัน โค 25 ตัวกินหมดใน 9 วัน ถ้าจะให้หมดใน 6 วันต้องใช้โคกี่ตัว กำหนดให้โคทุกตัวมีความสามารถเท่ากัน และหญ้างอกโดยสม่ำเสมอ (32)

11. ในการกินหญ้าในทุ่งแห่งหนึ่งซึ่งงอกโดยสม่ำเสมอ โค 50 ตัวกินหมดในเวลา 60 วัน โค 40 ตัวกินหมดใน 80 วัน ปรากฏว่ามีโคอยู่ฝูงหนึ่งกินหญ้าอยู่ในทุ่งแห่งนี้ ซึ่งพอกินไปได้ 120 วันก็เหลือหญ้าอยู่ $\frac{2}{3}$ ของจำนวนหญ้าซึ่งควรมีในทุ่ง เมื่อไม่มีโคฝูงนี้กิน กำหนดว่าโคทุกตัวมีความสามารถเท่ากัน จงหาจำนวนโคฝูงนี้ (10)

12. ถังน้ำใบหนึ่งรองน้ำฝนจนเต็ม แต่ฝนก็ยังตกอยู่โดยสม่ำเสมอ จึงมีน้ำฝนไหลลงถังอยู่โดยสม่ำเสมอเช่นกัน ที่ก้นถังมีท่อขนาดเดียวกันอยู่หลายท่อ ซึ่งถ้าเปิด 10 ท่อ น้ำจะไหลออกหมดในเวลา 20 นาที แต่ถ้าเปิด 8 ท่อ น้ำจะไหลออกหมดถังในเวลา 35 นาที จงหาว่าถ้าเปิด 12 ท่อ นานเท่าไรน้ำจึงจะหมดถัง (14 นาที)

---

# การคำนวณเรื่องอัตราเร็ว

## PROBLEMS ON SPEED

# 13

อัตราเร็วของวัตถุใด คือระยะทางที่วัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในระยะเวลาหนึ่ง เช่นเรากล่าวว่า รถไฟมีอัตราเร็ว 30 ไมล์/ชม. หรือเรือมีอัตราเร็ว 20 กม./ชม. ก็หมายความว่า รถไฟแล่นในเวลา 1 ชั่วโมงได้ระยะทาง 30 ไมล์ หรือเรือแล่น 1 ชั่วโมงได้ระยะทาง 20 กิโลเมตร

โดยทั่วไปอัตราเร็วก็คือความเร็วเฉลี่ยนั่นเอง เช่น เราทราบว่ารถไฟแล่นได้ทาง 120 ไมล์ในเวลา 4 ชม. เราอาจหาอัตราเร็วของรถไฟขบวนนี้ได้ โดยหาว่าใน 1 ชั่วโมงจะไปได้ 30 ไมล์ ซึ่งก็คือความเร็วเฉลี่ยนั่นเอง ด้วยเหตุนี้

$$\text{อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

เมื่อกล่าวถึงอัตราเร็วเราต้องพูดถึงหน่วยของมันด้วย เช่น เราจะกล่าวว่า รถไฟมีอัตราเร็ว 30 ดังนี้ย่อมเป็นการไม่ถูกต้อง หน่วยของอัตราเร็วก็คือ หน่วยระยะทางและเวลา เช่นเราต้องเขียนว่า รถไฟมีอัตราเร็ว 30 ก.ม./ช.ม. หรือจะกล่าวว่ารถไฟมีอัตราเร็วชั่วโมงละ 30 ก.ม. ก็ได้

หน่วยของอัตราเร็วจะเป็นหน่วยชนิดใดก็ได้เช่น ไมล์/ชม. หรือ ก.ม./ช.ม. หรือ ฟุต/วินาที เมตร/วินาที ก็ได้แล้วแต่ความเหมาะสมและความจำเป็น

**การเคลื่อนที่ของวัตถุ** วัตถุที่เคลื่อนที่อาจจำแนกได้เป็น 2 ประเภท คือ ก. วัตถุที่ไม่มีความยาว ข. วัตถุที่มีความยาว

ก. **วัตถุที่ไม่มีความยาว** ในการคำนวณเรามีความจำเป็นต้องกำหนดให้วัตถุบางชนิดเป็นวัตถุที่ไม่มีความยาว เช่นคนเดินถือว่าคนไม่มีความยาว รถยนต์ เรือ เครื่องบิน เหล่านี้เราถือว่าไม่มีความยาว เพราะถ้ากำหนดให้สิ่งเหล่านี้มีความยาว จะทำให้การคำนวณยุ่งยาก เพราะมีความยาวเพียงเล็กน้อย

วัตถุที่ไม่มีความยาวนี้ ถือว่าเป็น จุด จุดหนึ่ง

ข. **วัตถุที่มีความยาว** เช่น รถไฟ เรือพ่วง แถวทหาร ขบวนแห่

## หลักการคำนวณ

ประการสำคัญในการคำนวณนั้น ต้องทำเวลาให้เท่ากันเสียก่อนจึงจะบวกลบระยะทางกันได้ จงดังเกตข้อต่อไปนี้

1. **วัตถุเคลื่อนเข้าหากัน** โดยปกติวัตถุ 2 ชนิดที่เคลื่อนที่เข้าหากันย่อมมีอัตราเร็วไม่เท่ากัน เราทราบว่าการที่วัตถุเคลื่อนที่เข้าหากันนั้น ย่อมจะมีเวลาที่มันจะพบกัน ณ ที่ใดที่หนึ่ง และการที่วัตถุเคลื่อนที่ต่างก็เคลื่อนที่เข้าหากันนั้น ย่อมจะพบกันเร็วกว่าที่วัตถุหนึ่งอยู่นิ่ง และอีกวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เข้าหาแต่เพียงวัตถุเดียว

เช่น ก. และ ข. อยู่ห่างกัน 100 เมตร ก. เคลื่อนที่เข้าหา ข. ด้วยความเร็วนาทีละ 15 เมตร ข. ก็เคลื่อนที่เข้าหา ก. ด้วยความเร็วนาทีละ 10 เมตร

ดังนี้เราจะพบว่า 1 นาที ก. ทำให้ทางหมดไป 15 เมตร

และ 1 นาที ข. ทำให้ทางหมดไป 10 เมตร

∴ ใน 1 นาที ก. และ ข. ทำให้ทางหมดไป $15 + 10 = 25$ เมตร

ทาง 25 เมตร ก. และ ข. ช่วยกันทำให้หมดไปใน 1 นาที

∴ ทาง 100 เมตร ก. และ ข. ทำให้หมดไปใน $\frac{100}{25} = 4$ นาที

นั่นคือในเวลา 4 นาที ทาง 100 เมตรนั้นหมด ซึ่งหมายความว่า ก. และ ข. พบกันนั่นเอง

2. วัตถุเคลื่อนที่ตามกัน เมื่อวัตถุ 2 ชนิดเคลื่อนที่ตามกัน ถ้าหากวัตถุทั้งสองนั้นมีความเร็วไม่เท่ากันแล้ว และถ้าวัตถุที่มีความเร็วมากกว่าอยู่ข้างหลัง คือเคลื่อนที่ตามวัตถุที่ช้า ก็จะมีเวลาหนึ่งซึ่งวัตถุอันเร็วตามวัตถุอันช้านั้นทัน แต่ถ้าวัตถุที่มีความเร็วมากกว่าเคลื่อนที่ไปข้างหน้าวัตถุที่ช้าแล้ว วัตถุทั้งสองจะห่างจากกันทุกขณะ

เราต้องหาอัตราเร็วให้ได้ว่าในเวลาที่เท่ากัน วัตถุอันเร็วเคลื่อนที่ไปได้มากกว่าอันช้าเท่าไร เช่น

**ก. และ ข. อยู่ห่างกัน 25 เมตร ก. และ ข. เคลื่อนที่ไปทางเดียวกัน ข. เคลื่อนไปข้างหน้าด้วยความเร็วนาทีละ 15 เมตร ก. เคลื่อนตามไปด้วยความเร็วนาทีละ 20 เมตร**

เราหาได้ว่า 1 นาที ก. เคลื่อนที่ไปได้ 20 เมตร

1 นาที ข. เคลื่อนที่ไปได้ 15 เมตร

∴ ใน 1 นาที ก. เคลื่อนไปได้มากกว่า ข. $20 - 15 = 5$ เมตร

นั่นคือใน 1 นาที ก. ใกล้ ข. เข้าไปได้ 5 เมตร หรือพูดได้ว่า ถ้า ข. อยู่ห่าง ก. 5 เมตรแล้ว ก. จะเคลื่อนทัน ข. ในเวลา 1 นาที เราเทียบได้ว่า

ห่างกัน 5 เมตร ก. ทัน ข. ในเวลา 1 นาที

∴ ห่างกัน 25 เมตร ก. ทัน ข. ในเวลา $\frac{25}{5} = 5$ นาที

**ตัวอย่าง 1** ชายสองคนอยู่ห่างกัน 150 เมตร คนแรกเดินได้นาทีละ 10 เมตร คนหลังเดินได้นาทีละ 20 เมตร เขาออกเดินพร้อมกัน จงหาว่า

ก. ถ้าเขาเดินเข้าหากันจะพบกันที่ไหน เมื่อไร

ข. ถ้าเดินไปทางเดียวกัน คนหลังเดินตามเขาจะพบกันที่ไหน เมื่อไร

ค. ถ้าเดินไปตรงกันข้าม นานเท่าไรเขาจึงจะอยู่ห่างกัน 450 เมตร

**วิธีทำ**

ก. ในเวลา 1 นาที เขาช่วยกันเดินได้ทาง $10 + 20 = 30$ เมตร

ทาง 30 เมตร เขาช่วยกันเดินใน 1 นาที

$\therefore$ ทาง 150 เมตร เขาช่วยกันเดินใน $\frac{150}{30} = 5$ นาที

นั่นคือเขาจะพบกันเมื่อออกเดินไปแล้ว 5 นาที

$\therefore$ คนแรกเดิน 5 นาทีได้ทาง $5 \times 10 = 50$ เมตร

$\therefore$ เขาจะพบกัน ณ ที่ซึ่งห่างจากคนแรกยืนอยู่ 50 เมตร

ข. ในเวลา 1 นาที คนหลังเดินได้มากกว่าคนแรก $20 - 10 = 10$ เมตร

เขาอยู่ห่างกัน 150 เมตร ดังนั้นคนหลังต้องเดินมากกว่าคนแรก 150 เมตร จึงจะทันคนแรก

คนหลังเดินได้มากกว่าคนแรก 10 เมตร ในเวลา 1 นาที

$\therefore$ คนหลังเดินได้มากกว่าคนแรก 150 เมตร ในเวลา $\frac{150}{10} = 15$ นาที

นั่นคือ คนหลังจะเดินทันคนแรกเมื่อออกเดินไปแล้ว 15 นาที

คนแรกเดิน 15 นาทีได้ทาง $15 \times 10 = 150$ เมตร

$\therefore$ คนหลังเดินตามไปทัน ณ ที่ซึ่งห่างจากคนแรกยืนอยู่ 150 เมตร

ค. ถ้าเดินไปในทางตรงข้าม เวลา 1 นาที เขาจะเดินออกไปห่างกัน $10+20=30$ เมตร แต่เขาอยู่ห่างกันแล้ว 150 เมตร $\therefore$ เขาต้องเดินห่างกันไปอีก $450-150=300$ เมตร

เขาเดินออกห่างกัน 30 เมตร ใน เวลา 1 นาที

$\therefore$ เขาเดินออกห่างกัน 300 เมตร ในเวลา $\frac{300}{30} = 10$ นาที

**ตอบ**

(ก) พบกัน ณ ที่ห่างจากคนแรกยืน 50 เมตร เมื่อออกเดินไป 5 นาที

(ข) พบกัน ณ ที่ห่างจากคนแรกยืน 150 เมตร เมื่อออกเดินไป 15 นาที

(ค) เมื่อออกเดินไปได้ 10 นาที

**ตัวอย่าง 2** รถยนต์คันหนึ่งแล่นระหว่างเมืองสองเมือง ถ้าแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 24 กิโลเมตรจะถึงที่หมายช้าไป 10 นาที แต่ถ้าแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 30 กิโลเมตรจะถึงเร็วไป 1 นาที จงหาระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง

**วิธีทำ** ทาง 24 ก.ม. ใช้เวลาแล่น 1 ชั่วโมง

∴ ทาง 1 ก.ม. ใช้เวลาแล่น $\frac{1}{24}$ ชั่วโมง

และ ทาง 30 ก.ม. ใช้เวลาแล่น 1 ชั่วโมง

∴ ทาง 1 ก.ม. ใช้เวลาแล่น $\frac{1}{30}$ ชั่วโมง

ดังนั้น ทาง 1 ก.ม. ใช้เวลาแล่นต่างกัน $\frac{1}{24} - \frac{1}{30} = \frac{1}{120}$ ชั่วโมง

$= \frac{1}{2}$ นาที

แต่ทางระหว่างเมืองทั้งสองนั้น ใช้เวลาแล่นต่างกัน $10 + 1 = 11$ นาที

รถยนต์ใช้เวลาแล่นต่างกัน $\frac{1}{2}$ นาที ในระยะทาง 1 ก.ม.

∴ เวลาแล่นต่างกัน 11 นาที ในระยะทาง $11 \times \frac{2}{1} = 22$ ก.ม.

**ตอบ** 22 กิโลเมตร

**ตัวอย่าง 3** รถยนต์คันหนึ่งออกจากกรุงเทพ ฯ เวลา 15 นาฬิกา ถึงหัวหินเวลา 18 นาฬิกา แต่ในวันเดียวกันนั้นเวลา 13.30 นาฬิกา มีรถยนต์ออกจากหัวหินมากรุงเทพ ฯ ถึงกรุงเทพ ฯ พร้อมกับที่คันแรกถึงหัวหิน จงหาว่ารถสองคันนี้ส่วนกันเมื่อเวลาเท่าไร

**วิธีทำ** รถคันแรกแล่นตลอดทางใช้เวลา $18 - 15 = 3$ ชั่วโมง

รถคันหลังแล่นตลอดทางใช้เวลา $18 - 13.30 = 4\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

คันหลังออกแล่นไปก่อนคันแรก $15 - 13.30 = 1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

สมมติให้ทางเป็น 1

คันหลังแล่น $4\frac{1}{2}$ ช.ม. ได้ทาง 1

∴ คันหลังแล่น 1 ช.ม. ได้ทาง $\frac{2}{9}$ ของทางทั้งสิ้น

คันหลังแล่น $1\frac{1}{2}$ ช.ม. ได้ทาง $\frac{2}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$ ของทางทั้งสิ้น

คงเหลือระยะทางที่แล่นพร้อมกัน $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ของทางทั้งสิ้น

คันแรกแล่น 3 ช.ม. ได้ทาง 1

∴ 1 ช.ม. ได้ทาง $\frac{1}{3}$ ของทางทั้งสิ้น

ดังนั้นใน 1 ช.ม. รถทั้งสองช่วยกันแล่นได้ทาง $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$ ของทางทั้งสิ้น

ทาง $\frac{5}{9}$ ช่วยกันแล่นในเวลา 1 ชั่วโมง

∴ ทาง $\frac{2}{3}$ ช่วยกันแล่นในเวลา $1 \times \frac{9}{5} \times \frac{2}{3} = 1\frac{1}{5}$ ชั่วโมง

$= 1$ ช.ม. 12 นาที

ดังนั้นรถทั้งสองคันพบกันเมื่อเวลา 13.30 น. + 1 ช.ม. 12 นาที = 14.42 นาฬิกา

**ตัวอย่าง 4** ก. และ ข. ขับรถไปยังเมือง ๆ หนึ่งด้วยความเร็ว 30 และ 40 กิโลเมตรตามลำดับ ก. ออกเดินทางล่วงหน้าไปก่อน 3 ชั่วโมง ปรากฏว่าขณะที่ ก. ไปถึงปลายทางนั้น ข. ก็ไปถึงพร้อมกันพอดี จงหาระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง

**วิธีทำ** ก. ออกเดินทางก่อน 3 ช.ม ∴ ไปได้ทาง $3 \times 30 = 90$ ก.ม.

ใน 1 ช.ม. ข. ไปได้ไกลกว่า ก. $40 - 30 = 10$ ก.ม.

ระยะทาง 10 ก.ม. ข. ไปได้ไกลกว่า ก. ในเวลา 1 ช.ม.

∴ ระยะทาง 90 ก.ม. ข. ไปได้ไกลกว่า ก. ในเวลา $\frac{90}{10} = 9$ ช.ม.

∴ ระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง $9 \times 40 = 360$ ก.ม.

**ตอบ** 360 กิโลเมตร

**อธิบาย** ขณะที่ ข. ออกเดินทางนั้น ก. ออกเดินทางไปแล้ว 3 ชั่วโมง ซึ่งได้ทาง 90 ก.ม. ซึ่ง ข. จะไปทัน ก. ก็ต่อเมื่อเดินทางไปได้มากกว่า ก. 90 ก.ม. แต่ 1 ช.ม. ข.ไปได้มากกว่า ก. 10 ก.ม. ∴ ทาง 90 ก.ม. ข. ก็ทัน ก. ในเวลา 9 ช.ม. ดังนั้นระยะทางระหว่างเมืองทั้งสองก็คือ ระยะทางซึ่ง ข. เดินทางไปนั่นเอง

∴ จึงเท่ากับ $9 \times 40 = 360$ ช.ม.

**ตัวอย่าง 5** ก. และ ข. ขับรถยนต์จากกรุงเทพ ฯ และหัวหิน ก. ขับจากกรุงเทพ ฯ ไปหัวหินเวลา 5.00 น ด้วยความเร็วชั่วโมงละ 40 กิโลเมตร ข. ขับจากหัวหินมากรุงเทพ ฯ เวลา 6.30 น. ด้วยความเร็วชั่วโมงละ 30 กิโลเมตร เมื่อเวลา 7.00 น. รถยนต์ของ ก. เกิดขัดข้องต้องหยุดแก้ไขอยู่เป็นเวลาครึ่งชั่วโมงจึงเดินทางต่อไปได้ แต่ต้องลดความเร็วลง $\frac{3}{8}$ ของความเร็วเดิม ก. และ ข. ส่วนทางกันเมื่อเวลา 9.24 น. จงหาระยะทางระหว่างกรุงเทพ ฯ และหัวหิน

**วิธีทำ** ก. ออกจากกรุงเทพ ฯ 5.00 น. เครื่องเสียเวลา 7.00 น.

∴ เครื่องเสียเมื่อ ก. เดินทางไปได้ 2 ช.ม. ได้ระยะทาง $2\times40=80$ กิโลเมตร

ต่อไปลดความเร็วลง $\frac{3}{8}$ ฉะนั้นลดลงชั่วโมงละ $40\times\frac{3}{8}=15$ กิโลเมตร

คงแล่นต่อไปด้วยความเร็วชั่วโมงละ $40-15=25$ กิโลเมตร

ก พบ ข. เมื่อ 9.24 น.

∴ เมื่อลดความเร็วแล้วยังคงแล่นต่อไปอีก 9.24 น. $-$ 7.30 น. $=\frac{19}{10}$ ชั่วโมง

1 ช.ม. ก. ขับไปได้ 25 ก.ม.

∴ $\frac{19}{10}$ ช.ม. ก. ขับไปได้ $25\times\frac{19}{10}=47.50$ ก.ม.

∴ เป็นระยะที่ ก. ขับไปได้จนส่วนทางกับ ข. $=80+47.5=127.5$ ก.ม.

ข. ออกจากหัวหินมากรุงเทพ ฯ เวลา 6.30 น พบ ก. เมื่อ 9.24 น.

∴ เป็นเวลาที่ ข. เดินทางทั้งสิ้น $9.24-6.30=2.54=\frac{29}{10}$ ชั่วโมง

1 ชั่วโมง ข. ขับมาได้ 30 ก.ม.

∴ $\frac{29}{10}$ ชั่วโมง ข. ขับมาได้ $30\times\frac{29}{10}=87$ ก.ม

∴ ระยะทางระหว่างกรุงเทพ ฯ หัวหิน $127.5+87=214.5$ กิโลเมตร

**ตอบ** 214.5 กิโลเมตร

**ตัวอย่าง 6** เด็กคนหนึ่งได้ยินเสียงกู่ของคนเองส์ท้อนมาจากหน้าผา หลังจากเขากู่ไปในเวลา 1 วินาที ถ้าหน้าผาห่างจากเขา 550 ฟุต จงหาอัตราเร็วของเสียงต่อวินาที

**วิธีทำ** เขาได้ยินเสียงเขาเองในเวลา 1 วินาที

ดังนั้นเสียงเดินทางจากเขาไปถึงหน้าผาแล้วกลับมาถึงเขาในเวลา 1 วินาที

นั่นคือเสียงเดินทางได้ 2 เท่าของระยะจากเขาถึงหน้าผาได้ในเวลา 1 วินาที

∴ เสียงเดินทางได้วินาทีละ $550\times2=1100$ ฟุต

**ตอบ** 1100 ฟุตต่อวินาที

**ตัวอย่าง 7** ชายผู้หนึ่งยืนบนหาดห่างจากฝั่งทะเล 100 หลา พอเขาเห็นแสงไฟซึ่งเกิดจากการยิงปืนของเรือลำหนึ่ง เขาก็วิ่งไปยังเรือซึ่งจอดอยู่ชายฝั่งทันทีด้วยความเร็วชั่วโมงละ 20 ไมล์ 800 หลา พอเขาไปถึงชายฝั่ง เขาก็ได้ยินเสียงปืน จงหาว่าเรือลำนั้นอยู่ห่างจากชายฝั่งเท่าไร (เสียงเดินทางได้วินาทีละ 1100 ฟุต)

**วิธีทำ** เขาวิ่ง 1 ชั่วโมง ได้ทาง 20 ไมล์ 800 หลา = 36000 หลา

ทาง 36000 หลา เขาวิ่งได้ในเวลา 1 ช.ม. = 60 × 60 วินาที

∴ ทาง 100 หลา เขาวิ่งได้ในเวลา $\frac{60\times60\times100}{36000}$ = 10 วินาที

แต่เวลา 10 วินาทีเสียงเดินทางได้ 1100 × 10 = 11000 ฟุต

∴ เรืออยู่ห่างจากฝั่ง 11000 ฟุต = 2 ไมล์ 146 หลา 2 ฟุต

ตอบ

## แบบฝึกหัด 13

1. ในการยิงเป้าซึ่งอยู่ห่าง 550 หลา ผู้ยิงได้ยินเสียงกระสุนปืนกระทบเป้า หลังจากเขายิงไกปืนไปแล้ว 4 วินาที ชายอีกคนหนึ่งยืนอยู่ห่างจากเป้าและผู้ยิงเป็นระยะทางเท่า ๆ กัน เขาได้ยินกระสุนปืนกระทบเป้าหลังจากได้ยินเสียงปืน $2\frac{1}{2}$ วินาที จงหาอัตราเร็วของเสียง (1100 ฟุต/วินาที)
2. ชายคนหนึ่งเดินทางโดยรถไฟบ้าง และโดยจักรยานบ้าง ได้ทางทั้งหมด100 ไมล์ในเวลา 4 ชั่วโมง ถ้าเขาไปโดยรถไฟตลอดทางเขาจะถึงที่หมายเร็วขึ้น $\frac{2}{3}$ ชั่วโมง และจะทุ่นเวลาเข้า $\frac{1}{3}$ ของเวลาที่เขาได้ไปโดยรถจักรยาน ระยะทางทั้งหมดที่เขาขี่จักรยานเป็นเท่าใด (40 ไมล์)
3. ทางแข่งเรือยาว $1\frac{3}{4}$ ไมล์ เรือลำชนะทำเวลา 9 นาที 4 วินาที ลำที่แพ้ทำเวลา 9 นาที 20 วินาที เรือลำชนะถึงปลายทางก่อนลำที่แพ้กี่หลา ★★ (88)
4. เวลาเที่ยงวัน ก. และ ข. ขี่จักรยานออกเดินทางไปพร้อมกัน ก. ขี่ไปชั่วโมงละ 9 กิโลเมตร ได้ 2 ชั่วโมงก็หยุดพักเสีย 15 นาที แล้วจึงขี่ต่อไปชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร ฝ่าย ข. นั่งเรือยไปชั่วโมงละ 7 กิโลเมตร ดังนี้เมื่อไร ข. จึงจะทัน ก. ★★ (16.30 น.)

5. เด็กคนหนึ่งเดินไปโรงเรียน ถ้าเขาเดินได้นาทีละ 18 เมตร จะถึงโรงเรียนก่อนโรงเรียนเข้าเรียน $1\frac{1}{2}$ นาที ถ้าเขาเดินได้นาทีละ $13\frac{1}{2}$ เมตร จะถึงโรงเรียนเมื่อเข้าเรียนแล้ว 1 นาที จงหาว่าบ้านของเขาห่างจากโรงเรียนเท่าไร (135 เมตร)

6. ก กับ ข. พายเรือแข่งกัน ก. พายได้ 4 ครั้งเมื่อ ข. พายได้ 5 ครั้ง แต่ ข. ต้องพาย 6 ครั้งจึงจะได้ทางเท่ากับที่ ก. พาย 5 ครั้ง เรือของ ก. อยู่หน้าเรือของ ข. เป็นระยะทางเท่ากับที่ ข. พาย 10 ครั้ง จงหาว่า ข. จะต้องพายกี่ครั้งจึงจะทัน ก. (250)

7. ก. และ ข. เดินไปทางเดียวกัน ในเส้นทางที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสยาวด้านละ 100 หลา เขาทั้งสองเริ่มต้นที่มุมซึ่งอยู่ตรงกันข้าม ก เดินได้ 19 หลา เมื่อ ข. เดินได้ 16 หลา จงหาว่าเขาจะเดินทันกันที่ไหน และจะผ่านมุมซึ่งเขาต่างคนนนกครั้ง (ทันกัน ณ ที่ซึ่งห่างจากที่ ก. ตั้งต้น 66 หลา 2 ฟุต, ก. ผ่าน 3 ครั้ง, ข. ผ่าน 2 ครั้ง)

8. ชายผู้หนึ่งขับรถไปยังเมืองเมืองหนึ่งด้วยความเร็ว 43 กิโลเมตรต่อชั่วโมง แล้วกลับด้วยความเร็ว 65 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขาสิ้นเวลาทั้งไปกลับ 9 ชั่วโมง จงหาระยะทางถึงเมืองนั้น ($232\frac{11}{12}$ กิโลเมตร)

9. รถคันหนึ่งออกจากกรุงเทพ ฯ เวลาเที่ยงด้วยความเร็วชั่วโมงละ 45 กิโลเมตร ครั้นเวลา 13.30 นาฬิกา ก็มีรถอีกคันหนึ่งแล่นตามไปด้วยความเร็วชั่วโมงละ 63 กิโลเมตร จงหาว่ารถคันหลังแล่นไปทันคันแรกที่ไหน ($236\frac{1}{4}$ ก.ม. ห่างจากกรุงเทพ ฯ)

10. ชายผู้หนึ่งเดินทางโดยรถไฟและรถยนต์สิ้นเวลา 3 ชั่วโมงก็ถึงที่หมาย ถ้าเขาเดินทางโดยรถไฟตลอดทางก็จะถึงที่หมายเร็วขึ้น 1 ชั่วโมง และประหยัดเวลาได้ $\frac{2}{5}$ ของเวลาซึ่งเดินทางโดยรถยนต์ จงหาว่าเขาเดินทางโดยรถไฟและรถยนต์อย่างละกี่กิโลเมตร ถ้าระยะทางทั้งหมดที่เขาเดินทางเป็น 60 กิโลเมตร (15, 45)

11. เรือลำหนึ่งเกยหินอับปางจึงยิงปืนขอความช่วยเหลือนาทีละนัด เมื่อเรือช่วยชีวิตเห็นแล้วยิงปืนแล่นตรงไปยังเรือนั้นด้วยความเร็ว $3\frac{1}{3}$ ไมล์ต่อชั่วโมง เมื่อแจวไปได้ 308 ฟุต จึงได้ยินเสียงปืนนัดที่สอง ถ้าเสียงเคลื่อนที่วินาทีละ 1100 ฟุต และคิดว่าแล่งไม่เสียเวลาในการเคลื่อนที่เลย จงหาว่าเรืออยู่ห่างจากฝั่งเท่าไร

12. ในการยิงเป้าในถนนตรงสายหนึ่ง ชายอีกผู้หนึ่งซึ่งยืนอยู่บนถนนนั้นได้ยินเสียงปืนพร้อม ๆ กับเสียงกระสุนปืนกระทบเป้า จงหาว่าชายผู้นี้อยู่ห่างจากเป้าเท่าไร ถ้าชาย

ผู้ยิงอยู่บนถนนห่างจากเป้า 500 หลา ลูกปืนแล่นด้วยความเร็ว 2000 ฟุตต่อวินาที เสียงเดินได้ 1100 ฟุตต่อวินาที ($337\frac{1}{2}$ ฟุต)

13. ก. ข. ค. ออกเดินไปยังที่แห่งหนึ่งพร้อมกัน และไปถึงที่หมายพร้อมกัน ปรากฏว่า ก. เดินด้วยความเร็วชั่วโมงละ $4\frac{1}{2}$ ไมล์ตลอดทาง ข. เดินชั่วโมงละ 5 ไมล์อยู่ 1 ชั่วโมง 10 นาที แล้วจึงเปลี่ยนเป็นชั่วโมงละ $4\frac{1}{3}$ ไมล์จนตลอดทาง ค. ออกเดินครึ่งแรกชั่วโมงละ 5 ไมล์ แล้วก็เปลี่ยนเป็นชั่วโมงละ 4 ไมล์จนตลอดทาง จงหาว่า ค. เดินชั่วโมงละ 5 ไมล์เป็นระยะทางเท่าใด ($11\frac{2}{3}$ ไมล์)

14. ในถนนสายหนึ่ง มีรถยนต์ประจำทางออกแล่น 12 นาทีต่อ 1 คัน และแต่ละคันแล่นด้วยความเร็ว 7 ไมล์ต่อชั่วโมง ชายผู้หนึ่งเดินไปตามถนนสายนี้ด้วยความเร็วชั่วโมงละ 4 ไมล์ เขาเดินไปได้ 3 ไมล์ จงหาว่ารถยนต์ผ่านหน้าเขากี่คัน (2)

15. ชายสองคนเดินทางจากสองตำบลซึ่งอยู่ห่างกัน 12 ไมล์ เขาพบกันเมื่ออยู่ห่างจากตำบลหนึ่ง 4 ไมล์ ถ้าเขาเริ่มต้นออกเดินจากตำบลเดียวกัน และเมื่อคนเดินเร็วไปถึงอีกตำบลหนึ่งเขาก็เดินกลับทันที จงหาว่าเขาจะพบกันที่ไหน (ณ ที่ห่างจากตำบลนั้น 4 ไมล์)

16. ชายผู้หนึ่ง เดินบ้าง วิ่งบ้าง ขี่รถจักรยานบ้าง ตลอดทาง 3 ไมล์สิ้นเวลา 17 นาที เขาวิ่งเร็วกว่าเดินเป็นสองเท่า และขี่จักรยานเร็วเป็นสองเท่าของการวิ่ง เขาเสียเวลาขึ้นรถอยู่ 5 วินาที จงหาว่าแต่ละไมล์เขาเสียเวลาเท่าไร ($9\frac{2}{3}$, $4\frac{5}{6}$, $2\frac{5}{12}$, นาที)

17. ขบวนรถไฟโดยสาร และขบวนรถสินค้าแล่นสวนกันบนรางขนานขณะที่อยู่ห่างกัน 1870 หลา คนขับรถโดยสารได้เบิดหวูดขึ้น ต่อมา 5 วินาที คนขับรถสินค้าจึงได้ยินหวูดนั้น และได้เบิดหวูดตอบไปทันที ต่อมาอีก $4\frac{8}{13}$ วินาทีคนขับรถโดยสารจึงได้ยินหวูดตอบนั้น ถ้าเสียงมีความเร็ว 1100 ฟุตต่อวินาที จงหาความเร็วของรถไฟสองขบวนนี้ (ข้อสอบเข้าจุฬา ฯ 2492 — 30 ไมล์/ชม.; 15 ไมล์/ชม.)

18. รถไฟคันหนึ่งแล่นเข้าสู่อุโมงค์ในภาคใต้แห่งหนึ่งด้วยความเร็ว 44 ฟุตต่อวินาที ที่ระยะ 1 ไมล์จากหน้าผา คนขับเบิดหวูดสัญญาณขึ้น จงหาว่ารถจะแล่นต่อไปได้อีกกี่ฟุต คนขับจึงจะได้ยินเสียงหวูดสะท้อนมาจากหน้าผา ถ้าความเร็วของเสียงเท่ากับ 1100 ฟุตต่อวินาที (ข้อสอบเข้าจุฬา ฯ 2492 — $406\frac{2}{13}$ ฟุต)

19. ชายคนหนึ่งเดินไปตามถนนสายหนึ่งด้วยความเร็ว 3 ไมล์ต่อชั่วโมง ทั้งสองข้างถนนมีรถรางอยู่ข้างละสาย สายหนึ่งแล่นไปทางเดียวกับเขา อีกสายหนึ่งแล่นสวนทางกับเขา ถ้ารถรางบนสายหนึ่ง ๆ แล่นห่างระยะห่างกันครึ่งไมล์ และแล่นด้วยความเร็ว 12 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาว่า

(ก) รถรางที่แล่นไปทางเดียวกับเขา จะแล่นผ่านเขาชั่วโมงละกี่คัน (18)

(ข) รถรางที่แล่นสวนทางกับเขาจะแล่นผ่านเขาชั่วโมงละกี่คัน (30)

(ข้อสอบไปนอกรอง ก.พ.)

20. ชายผู้หนึ่งเดินทางได้วันละ 30 ไมล์ แต่เดินได้ช้าลงวันละ 4 ไมล์ทุกวัน หลังจากนั้น 4 วัน ชายอีกคนหนึ่งก็ออกเดินจากที่แห่งเดียวกันและไปทางเดียวกัน ชายผู้นี้ออกเดินด้วยความเร็ววันละ 50 ไมล์ แต่ก็ต้องเดินช้าลงวันละ 4 ไมล์ทุกวันเหมือนกัน จงหาว่าคนหลังจะเดินทันคนแรกเมื่อไรและที่ไหน ($6\frac{2}{3}$ วันหลังจากคนแรกออกเดิน; เมื่อเดินไปได้ 124 ไมล์)

21. ชายผู้หนึ่งเดินไปตามทางของม้าแข่งซึ่งเป็นวงกลมด้วยความเร็วชั่วโมงละ 3 ไมล์ ม้าตัวหนึ่งวิ่งไปทางเดียวกับชายผู้นั้นและผ่านเขาทุก ๆ 2 นาที จงหาว่าถ้าม้าตัวนั้นวิ่งสวนทางกับเขาในอัตราเร็วเท่าเดิม ม้าจะผ่านเขาครั้งหนึ่ง ๆ กินเวลาเท่าไร ($1\frac{3}{7}$ นาที)

22. รถยนต์สองคันแล่นออกจากกรุงเทพ ฯ ไปตามถนนประชาธิปัตย์ คันแรกออกก่อนคันหลัง 2 ชั่วโมง คันหลังแล่นผ่านคันแรกเมื่อรถทั้งสองคันอยู่ห่างจากกรุงเทพ ฯ 120 กิโลเมตร ซึ่งถ้ารถแต่ละคันลดความเร็วลงชั่วโมงละ 5 ไมล์แล้ว รถคันหลังจะทันรถคันแรกเพียง 75 กิโลเมตรจากกรุงเทพ ฯ จงหาอัตราเร็วของรถยนต์ทั้งสองคันนั้น (20 กม./ชม.; 30 กม./ชม.)

23. ทหารกองหนึ่งเดินแถวไปตามถนน แถวทหารกองนี้ยาว 5 กิโลเมตร ผู้บังคับแถวขี่จักรยานยนต์เริ่มจากปลายแถวจนถึงหัวแถวแล้วกลับทันทีมาถึงปลายแถว ปรากฏว่าตลอดเวลานั้นแถวทหารเคลื่อนที่ไปได้ 10 กิโลเมตร กำหนดให้อัตราเร็วของกองทหารและของจักรยานยนต์คงที่ จงหาว่าผู้บังคับแถวขี่จักรยานยนต์เป็นระยะทางเท่าใด (16.2 กิโลเมตร)

24. ถ้าเร่งรถให้เร็วขึ้นชั่วโมงละ 6 ไมล์ จะเดินทางซึ่งยาว 336 ไมล์ทุ่นเวลาไป 30 นาที จงหาอัตราเร็วของรถโดยปกติคือยังไม่ได้เร่ง และตอบให้ถูกเพียงทศนิยมตำแหน่งเดียว (60.6 ไมล์ต่อชั่วโมง)

25. ชายผู้หนึ่งขว้างก้อนหินลงไปในบ่อด้วยอัตราเร็ววินาทีละ 8 ฟุต เขาได้ยินเสียงก้อนหินกระทบน้ำหลังจากขว้าง 3 วินาที

ถ้าวัตถุซึ่งถูกขว้างลงเบื้องล่างด้วยอัตราเร็ว v ฟุตต่อวินาที จะไปได้ทาง s ฟุต เมื่อวัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในเวลา t วินาทีแล้ว

$$S = \frac{1}{2} gt^2 + vt$$

[$g = 32$ โดยประมาณ]

จงหาความลึกของบ่อ (154 ฟุต)

26. ชายผู้หนึ่งขับรถกลับจากธุระ เขาต้องการจะกลับให้เร็วกว่าขาไป $\frac{3}{5}$ ของเวลาที่ใช้เมื่อไป จงหาว่าเขาต้องเร่งรถให้เร็วขึ้นอีกเท่าไร ($\frac{5}{3}$ ของความเร็วเดิม)

27. ชายผู้หนึ่งยืนอยู่ใกล้ฝั่งทะเล เขาแลเห็นประกายไฟจากการยิงปืนของเรือลำหนึ่งซึ่งกำลังแล่นเข้าหาฝั่ง เขาได้ยินเสียงปืนหลังจากเห็นแล้ว 15 วินาที ทันใดนั้นเขาก็ออกเดินเข้าหาฝั่งด้วยความเร็วชั่วโมงละ 3 ไมล์ เขาแลเห็นประกายไฟจากการยิงปืนนัดที่สองของเรือลำนั้น หลังจากเห็นประกายไฟครั้งแรก 5 นาที ซึ่งพอเห็นเขาก็หยุดทันที อีก $10\frac{1}{2}$ วินาทีเขาจึงได้ยินเสียงปืนนัดที่สอง กำหนดให้เสียงมีความเร็ว 1200 ฟุตต่อวินาที และกำหนดให้แสงไม่กินเวลาในการเคลื่อนที่เลย จงหาอัตราเร็วของเรือลำนั้นต่อวินาที (13.82 ฟุต)

28. เรือลำหนึ่งกำลังแล่นเข้าสู่ท่าในเวลาหมอกจัดจึงยิงปืนสัญญาณ ซึ่งท่าเรือก็ยิงตอบในทันทีที่ได้ยินเสียงปืน คนบนเรือได้ยินเสียงตอบในเวลา $25\frac{1}{2}$ วินาที หลังจากที่ได้ยิงปืนนัดแรกออกไป; ขณะที่ได้ยินก็ยิงปืนนัดที่สองออกไปอีก ซึ่งท่าเรือก็ยิงตอบอีก คราวนี้คนบนเรือได้ยินเสียงตอบในเวลา $24\frac{1}{2}$ วินาที หลังจากที่ได้ยิงปืนนัดที่สอง; ถ้าเสียงเดินทางวินาทีละ 1100 ฟุต จงหาอัตราเร็วของเรือที่แล่นเข้าสู่ท่า (15 ไมล์ต่อชั่วโมง)

# การคำนวณเรื่องรถไฟ

# PROBLEMS ON TRAINS

# 14

การคำนวณเรื่องรถไฟ แตกต่างกับเรื่องอัตราเร็วที่ผ่านมาแล้วในข้อที่ต้องคิดความยาวของรถไฟเข้าด้วย โจทย์เกี่ยวกับรถไฟนั้นมีสิ่งที่ควรทราบ คือ

1. รถไฟผ่านจุด เช่น คน เสาโทรเลข หรือรถยนต์ และวัตถุอื่นซึ่งโจทย์ไม่กำหนดความยาวให้ ถือว่าเป็นจุด คือไม่มีความยาวซึ่งอยู่นิ่ง

รถไฟจะแล่นเป็นระยะทางเท่ากับความยาวของรถไฟนั้น

2. ผ่านจุดเคลื่อนที่

ก. รถไฟสวนกับจุดนั้น เช่น รถไฟสวนกับคนซึ่งเดินสวนทางกับรถไฟในเวลา 5 วินาที

∴ ทางที่รถไฟแล่นในเวลา 5 วินาที = ความยาวของรถไฟ — ระยะทางที่คนเดินได้ใน 5 วินาที

ข. รถไฟผ่านสิ่งหน้าจุดซึ่งเคลื่อนที่ไปทางเดียวกัน เช่น รถไฟแล่นผ่านชนหน้าคนซึ่งเดินไปทางเดียวกับรถไฟ พ้นไปในเวลา 10 วินาที

∴ ทางที่รถไฟแล่นได้ในเวลา 10 วินาที = ความยาวของรถไฟ + ระยะทางที่คนเดินไปใน 10 วินาที

3. <u>ผ่านวัตถุมีความยาวซึ่งนิ่งอยู่กับที่</u> เช่น รถไฟแล่นผ่านสถานีพ้นไปในเวลา 15 วินาที

∴ ทางที่รถไฟแล่นได้ใน 15 วินาที = ความยาวของรถไฟ + ความยาวของสถานี

4. <u>รถไฟแล่นสวนกัน</u> เริ่มนับเวลาตั้งแต่หัวของรถไฟจดกันจนกระทั่งท้ายรถจดกัน เช่น รถไฟสองขบวนสวนกันในเวลา 10 วินาที

ผลบวกของความเร็วของรถทั้งสองในเวลา 10 วินาที = ผลบวกของความยาวของรถทั้งสอง. หรือในเวลา 10 วินาที รถไฟช่วยกันแล่นได้ทาง = ผลบวกความยาวของรถไฟทั้งสอง

5. <u>รถไฟผ่านขึ้นหน้ากัน</u> รถไฟจะผ่านขึ้นหน้ากันไปได้ก็ต่อเมื่อรถขบวนเร็วแล่นได้ทางมากกว่าขบวนช้า = ความยาวของรถไฟทั้งสองรวมกัน




เริ่มทันกันคือเริ่มผ่าน ผ่านพ้นไปแล้ว

เช่น รถไฟขบวนหนึ่งแล่นผ่านขึ้นหน้าอีกขบวนหนึ่งในเวลา 5 นาที คือในเวลา 5 นาที รถขบวนเร็วแล่นได้ทางมากกว่าขบวนช้า = ผลบวกของความยาวของรถทั้งสองขบวน

<u>ตัวอย่าง 1</u> รถไฟขบวนหนึ่งยาว 66 หลา แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 45 ไมล์ จะผ่านเสาโทรเลขต้นหนึ่งในเวลาเท่าไร

<u>วิธีทำ</u> ทางที่รถต้องแล่น = ความยาวของรถไฟ คือ 66 หลา

ทำเป็นฟุตได้ 66 × 3 = 198 ฟุต

ทาง 45 ไมล์ = 45 × 1760 × 3 ฟุต รถไฟแล่นได้ในเวลา 1 ช.ม. = 60 × 60 วินาที

∴ ทาง 198 ฟุต รถไฟแล่นได้ในเวลา $\frac{60\times60\times198}{45\times1760\times3}$ = 3 วินาที

<u>ตอบ</u> 3 วินาที

**ตัวอย่าง 2** รถไฟขบวนหนึ่งยาว 560 ฟุต แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 30 ไมล์ จะผ่านสถานียาว 1200 ฟุตในเวลาเท่าไร

**วิธีทำ** ทางที่รถต้องแล่น = ความยาวของขบวนรถ + ความยาวของสถานี

$= 560 + 1200 = 1760$ ฟุต

รถไฟแล่นได้ชั่วโมงละ 30 ไมล์ $= 30 \times 1760 \times 3$ ฟุต

ทาง $30 \times 1760 \times 3$ ฟุต รถไฟแล่นในเวลา 1 ช.ม. $= 60 \times 60$ วินาที

$\therefore$ ทาง 1760 ฟุต รถไฟแล่นในเวลา $\frac{60 \times 60 \times 1760}{30 \times 1760 \times 3} = 40$ วินาที

**ตอบ** 40 วินาที

**ตัวอย่าง 3** รถไฟสองขบวน มีความเร็วชั่วโมงละ 30 และ 40 ไมล์ ตามลำดับ ออกแล่นพร้อมกันจากเมืองสองเมืองซึ่งอยู่ห่างกัน 140 ไมล์ นานเท่าไรจึงจะพบกัน

**วิธีทำ** ใน 1 ชั่วโมง รถทั้งสองช่วยกันแล่นได้ทาง $30 + 40 = 70$ ไมล์

ทาง 70 ไมล์ ช่วยกันแล่นในเวลา 1 ชั่วโมง

$\therefore$ ทาง 140 ไมล์ ช่วยกันแล่นในเวลา $\frac{140}{70} = 2$ ชั่วโมง

$\therefore$ กว่ารถไฟจะพบกันเป็นเวลานาน 2 ชั่วโมง

**ตอบ** 2 ชั่วโมง

**ตัวอย่าง 4** รถไฟสองขบวนอยู่ห่างกัน 20 กิโลเมตร แล่นตามกันบนรางขนานด้วยความเร็วชั่วโมงละ 30 และ 40 กิโลเมตรตามลำดับ นานเท่าไรรถขบวนหลังซึ่งเร็วกว่าจึงจะแล่นทันขบวนแรก (แล่นทันหมายความว่าหัวรถทั้งสองขบวนอยู่ในระดับเดียวกัน)

**วิธีทำ** กว่าจะแล่นทันกัน ขบวนหลังต้องแล่นได้มากกว่าขบวนแรก 20 กิโลเมตร

ใน 1 ชั่วโมงขบวนหลังแล่นได้มากกว่าคันแรก $40 - 30 = 10$ กิโลเมตร

แล่นได้มากกว่า 10 กิโลเมตร ในเวลา 1 ชั่วโมง

$\therefore$ แล่นได้มากกว่า 20 กิโลเมตร ในเวลา $\frac{20}{10} = 2$ ชั่วโมง

$\therefore$ จะทันกันในเวลา 2 ชั่วโมง

**ตอบ** 2 ชั่วโมง

**ตัวอย่าง 5** รถไฟสองขบวนแล่นสวนกัน ขบวนแรกยาว 300 เมตร แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 40 กิโลเมตร ขบวนหลังยาว 200 เมตร แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 60 กิโลเมตร นานเท่าไรจึงจะสวนกันสุดขบวน

**วิธีทำ** ทางที่รถต้องช่วยกันแล่น = ความยาวของรถทั้ง 2 ขบวน

$= 300 + 200 = 500$ เมตร

ใน 1 ชั่วโมง รถทั้งสองช่วยกันแล่นได้ $40 + 60 = 100$ กิโลเมตร

ทาง 100 กิโลเมตร $= 100 \times 1000$ เมตร ช่วยกันแล่นใน 1 ชม. $= 60 \times 60$ วินาที

$\therefore$ ทาง 500 เมตร ช่วยกันแล่นใน $\frac{60 \times 60 \times 500}{100 \times 1000} = 18$ วินาที

$\therefore$ สวนกันสุดขบวนในเวลา 18 วินาที

**ตอบ** 18 วินาที

**ตัวอย่าง 6** รถไฟสองขบวนแล่นตามกัน ขบวนแรกยาว 300 เมตร แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 40 กิโลเมตร ขบวนหลังยาว 200 เมตร แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 60 กิโลเมตร นานเท่าไรขบวนหลังจึงจะแล่นผ่านหน้าขบวนแรก

**วิธีทำ** ทางที่รถขบวนเร็วต้องแล่นมากกว่าขบวนแรก $300 + 200 = 500$ เมตร

ใน 1 ชั่วโมง ขบวนหลังแล่นได้มากกว่าขบวนแรก $60 - 40 = 20$ กม.

ทาง 20 กม. $= 20 \times 1000$ เมตร ขบวนหลังแล่นได้มากกว่าใน $60 \times 60$ วินาที

$\therefore$ ทาง 500 เมตร ขบวนหลังแล่นได้มากกว่าใน $\frac{60 \times 60 \times 500}{20 \times 1000} = 90$ วินาที

$\therefore$ แล่นผ่านหน้าสิ้นเวลานาน 1 นาที 30 วินาที

**ตอบ** 1 นาที 30 วินาที

**ตัวอย่าง 7** รถไฟขบวนหนึ่ง แล่นผ่านพ้นสถานียาว 440 เมตร ในเวลา 25 วินาที และแล่นผ่านพ้นสถานียาว 340 เมตร ในเวลา 20 วินาที จงหาอัตราเร็วและความยาวของรถไฟขบวนนั้น

**วิธีทำ**

รถไฟแล่นได้ทาง = ความยาวของสถานี 440 เมตร + ความยาวของรถไฟใน 25 วินาที ... (1)

และแล่นได้ทาง = ความยาวของสถานี 340 เมตร + ความยาวของรถไฟใน 20 วินาที ... (2)

(1) − (2); ∴ รถไฟแล่นได้ทาง $440 - 340 = 100$ เมตร ในเวลา $25 - 20 = 5$ วินาที

ใน 5 วินาที รถไฟแล่นได้ทาง 100 เมตร

ใน $60 \times 60$ วินาที รถไฟแล่นได้ทาง $\frac{100 \times 60 \times 60}{5} = 72000$ เมตร

$= 72$ กิโลเมตร

และใน 5 วินาที รถไฟแล่นได้ทาง 100 เมตร

∴ 20 วินาที รถไฟแล่นได้ทาง $\frac{100 \times 20}{5} = 400$ เมตร

20 วินาที รถไฟแล่นได้ 400 เมตร แต่ผ่านพ้นสถานีได้ยาวเพียง 340 เมตร

∴ รถไฟขบวนนี้ยาว $400 - 340 = 60$ เมตร

**ตอบ** { อัตราเร็ว 72 กม./ชม.
ความยาว 60 เมตร

**ตัวอย่าง 8** รถไฟขบวนหนึ่งยาว 88 หลา แล่นผ่านชายคนหนึ่งซึ่งกำลังเดินไปทางเดียวกับรถไฟด้วยความเร็วชั่วโมงละ 6 ไมล์ และผ่านพ้นชายผู้นั้นในเวลา 10 วินาที จงหาอัตราเร็วของรถไฟ

(**วินิจฉัย** หาให้ได้ว่า 10 วินาที ชายผู้นั้นเดินได้เท่าไร

เพราะ 10 วินาที รถไฟแล่นได้เท่ากับทางที่ชายคนนั้นเดิน + ความยาวของรถไฟ)

**วิธีทำ** 1 ชั่วโมง = $60 \times 60$ วินาที ชายผู้นั้นเดินได้ 6 ไมล์ $= 6 \times 1760 \times 3$ ฟุต

∴ ในเวลา 10 วินาที ชายผู้นั้นเดินได้ $\frac{1 \times 17\,60 \times 3 \times 10}{60 \times 60} = 88$ ฟุต

∴ ใน 10 วินาที รถไฟแล่นได้ 88 หลา + 88 ฟุต = 352 ฟุต

10 วินาที รถไฟแล่นได้ 352 ฟุต

1 ชม. = $60 \times 60$ วินาที รถไฟแล่นได้ $\frac{352 \times 60 \times 60}{10 \times 1760 \times 3} = 24$ ไมล์

**ตอบ** 24 ไมล์/ชม.

**ตัวอย่าง 9** รถไฟขบวนหนึ่งยาว 90 เมตร แล่นผ่านชายผู้หนึ่งซึ่งเดินไปทางเดียวกับรถไฟ ด้วยความเร็วการเดินชั่วโมงละ 9 กิโลเมตรในเวลา 12 วินาที และแล่นผ่านหญิงคนหนึ่งซึ่งกำลังเดินไปทางเดียวกับรถไฟในเวลา 10 วินาที จงหาอัตราเร็วการเดินของหญิงผู้นั้น

**วิธีทำ** เวลา $60 \times 60$ วินาที ชายเดินได้ $9 \times 1000$ เมตร

$\therefore$ 12 วินาที ชายเดินได้ $\frac{9 \times 1000 \times 12}{60 \times 60} = 30$ เมตร

$\therefore$ ในเวลา 12 วินาที รถไฟแล่นได้ทาง $30 + 90 = 120$ เมตร

$\therefore$ ใน 10 วินาที รถไฟแล่นได้ทาง $\frac{120}{12} \times 10 = 100$ เมตร

$\therefore$ 10 วินาที หญิงเดินได้ $100 - 90 = 10$ เมตร

$\therefore$ $60 \times 60$ วินาที หญิงเดินได้ $\frac{10}{10} \times 60 \times 60 = 3600$ เมตร

$\therefore$ หญิงผู้นั้นเดินได้ชั่วโมงละ 3 กม. 600 เมตร

**ตอบ**

**อธิบาย** ใน 12 วินาที ชายเดินได้ 30 เมตร

แต่รถไฟต้องแล่น = ความยาว + ทางที่ชายเดิน

$\therefore$ 12 วินาที รถไฟแล่นได้ $90 + 30 = 120$ เมตร

10 วินาที แล่นได้ $\frac{120}{12} \times 10 = 100$ เมตร

แต่เมื่อผ่านหญิง รถไฟต้องแล่น = ความยาว + ทางที่หญิงเดิน

$\therefore$ 10 วินาที หญิงเดินได้ $100 - 90 = 10$ เมตร

**ตัวอย่าง 10** รถไฟขบวนหนึ่งแล่นระหว่างเมืองสองเมืองเป็นประจำ คนขับรถไฟสังเกตเห็นว่า ถ้าแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 36 กิโลเมตร จะถึงเร็วกว่าปกติ 20 นาที แต่ถ้าแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 24 กิโลเมตร จะถึงช้ากว่าปกติ 30 นาที จงหาระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง

**วิธีทำ** ทาง 36 กม. ใช้เวลาแล่น 60 นาที

∴ ทาง 1 กม. ใช้เวลาแล่น $\frac{60}{36}=\frac{10}{6}$ นาที

และทาง 24 กม. ใช้เวลาแล่น 60 นาที

∴ ทาง 1 กม. ใช้เวลาแล่น $\frac{60}{24}=\frac{5}{2}$ นาที

∴ แล่นทาง 1 กม. เวลาต่างกัน $\frac{5}{2}-\frac{10}{6}=\frac{5}{6}$ นาที

เวลาต่างกัน $\frac{5}{6}$ นาที เป็นระยะทางที่ไปได้ 1 กม.

∴ เวลาต่างกัน $30+20=50$ นาที เป็นระยะทาง $1\times\frac{6}{5}\times 50=60$ กม.

∴ ระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง 60 กิโลเมตร

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 11** รถโดยสารและรถสินค้าแล่นตามกันมาด้วยความเร็ว 45 และ 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมงตามลำดับ รถโดยสารมีความยาวเป็น $1\frac{1}{2}$ เท่าของรถสินค้า รถโดยสารแล่นผ่านขบวนหน้ารถสินค้าไปในเวลา 2 นาที และตอดอุโมงค์แห่งหนึ่งในเวลา 1 นาที จงหาความยาวของอุโมงค์

**วิธีทำ** 1 ชม. รถโดยสารแล่นได้มากกว่ารถสินค้า $45-30=15$ กม.

หรือ 60 นาที รถโดยสารแล่นได้มากกว่ารถสินค้า $15\times 1000$ เมตร

∴ 2 นาที รถโดยสารแล่นได้มากกว่ารถสินค้า $\frac{15\times 1000\times 2}{60}=500$ เมตร

นั่นคือความยาวของรถทั้งสองรวมกันยาว 500 เมตร

ถ้ารถสินค้ายาว 1 รถโดยสารยาว $1\frac{1}{2}$

รวมส่วน $1+1\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

∴ รถสินค้ายาว $500\times\frac{2}{5}=200$ เมตร

∴ รถโดยสารยาว $500-200=300$ เมตร

60 นาที รถโดยสารแล่นได้ทาง $45\times 1000$ เมตร

∴ 1 นาที รถโดยสารแล่นได้ทาง $\frac{45\times 1000}{60}=750$ เมตร

∴ อุโมงยาว $750-300=450$ เมตร

**ตอบ** 450 เมตร

# แบบฝึกหัด 15

1. รถบรรทุกคนโดยสารยาว 95 เมตร ใช้ผีจักรชั่วโมงละ 60 กิโลเมตร แล่นสวนทางกับรถบรรทุกสินค้ายาว 130 เมตร ใช้ผีจักรชั่วโมงละ 45 กิโลเมตร รถทั้งสองขบวนนี้จะแล่นผ่านกันในเวลาเท่าไร ★ ($7\frac{5}{7}$ วินาที)
2. รถไฟขบวนหนึ่งแล่นผ่านพ้นคนยืนอยู่ในเวลา 4 วินาที และผ่านพ้นชานชลาซึ่งยาว 132 หลาได้ในเวลา 9 วินาที รถแล่นชั่วโมงละกี่ไมล์ ★ (54)
3. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนชานชลาสถานีซึ่งยาว 132 หลา เห็นรถไฟขบวนหนึ่งผ่านพ้นตัวเขาได้ในเวลา 3 วินาที และแล่นผ่านสถานีพ้นในเวลา $7\frac{1}{2}$ วินาที รถไฟขบวนนี้แล่นชั่วโมงละกี่ไมล์ ★ (60)
4. ชายคนหนึ่งยืนที่ชานชลา สังเกตเห็นรถไฟขบวนหนึ่งแล่นผ่านพ้นเขาไปในเวลา 9 วินาที ถ้ารถไฟขบวนนี้วิ่งชั่วโมงละ 20 ไมล์ รถไฟขบวนนี้จะยาวเท่าไร ★ (264 ฟุต)
5. ชายผู้หนึ่งเดินได้เร็วชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร มีรถไฟขบวนหนึ่งซึ่งยาว 100 เมตร แล่นมาทันเขาแล้วผ่านพ้นไปในเวลา 15 วินาที จงหาอัตราเร็วของรถไฟ (ข้อสอบชุด ป. — 30 กม./ชม.)
6. รถไฟขบวนแรกแล่นได้ชั่วโมงละ 40 ไมล์ ในระหว่างที่แล่นเข้าไปในอุโมงค์ พบรถไฟขบวนที่สองสวนทางมา รถไฟขบวนที่สองยาวเป็นครึ่งหนึ่งของรถไฟขบวนแรก และมีผีจักรแล่นได้ชั่วโมงละ 60 ไมล์ ผ่านพ้นกันในเวลา $4\frac{1}{2}$ วินาที ถ้ารถไฟขบวนแรกแล่นผ่านอุโมงค์ในเวลา 4 นาที $37\frac{1}{2}$ วินาที จงหาความยาวของอุโมงค์ (ข้อสอบชุด ป. — 3 ไมล์)
7. รถไฟสองขบวนยาว 92 ฟุตและ 84 ฟุต ถ้าแล่นสวนกันจะผ่านพ้นกันในเวลา $1\frac{1}{2}$ วินาที ถ้าแล่นตามกันขบวนเร็วจะผ่านพ้นขบวนหน้าไปในเวลา 6 วินาที จงหาอัตราเร็วของรถไฟทั้งสองขบวนนี้ (50 ไมล์/ชม., 30 ไมล์/ชม.)
8. รถไฟขบวนหนึ่งยาว 88 หลา แล่นผ่านขบวนหน้าชายผู้หนึ่งซึ่งเดินไปทางเดียวกับรถไฟด้วยความเร็วการเดินชั่วโมงละ 4 ไมล์ ในเวลา 10 วินาที และแล่นผ่านขบวนหน้าชาย

อีกผู้หนึ่งซึ่งเดินไปทางเดียวกับรถไฟเหมือนกันในเวลา 9 วินาที จงหาอัตราเร็วการเดินของชายผู้นั้น (2 ไมล์/ชม.)

9. รถไฟขบวนหนึ่งยาว 88 หลา แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 35 ไมล์ พบกับรถไฟอีกขบวนหนึ่งซึ่งวิ่งสวนทางมา และมีความยาวเท่ากันเมื่อเวลาเที่ยง และผ่านพ้นกันในเวลา 6 วินาที หลังจากนั้น 15 นาทีรถขบวนแรกก็พบกับรถซึ่งวิ่งสวนมาอีกขบวนหนึ่งยาว 132 หลา และผ่านพ้นกันในเวลา 6 วินาทีอีกเหมือนกัน จงหาว่าเมื่อไรรถขบวนสุดท้ายนี้จึงจะแล่นทันขบวนที่สอง (13 นาฬิกา 15 นาที 18 วินาที)

10. รถไฟแล่นจากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง ซึ่งถ้าแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 30 กิโลเมตรจะถึงช้ากว่าปกติ 1 ชั่วโมง 30 นาที แต่ถ้าแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 50 กิโลเมตร จะถึงเร็วกว่าปกติ 38 นาที จงหาอัตราเร็วปกติและระยะทางระหว่างเมืองทั้งสอง (45 กม./ชม ; 135 กิโลเมตร)

11. รถโดยสารขบวนหนึ่งอยู่ที่ปลายทางข้างหนึ่งของทางซึ่งยาว 120 ไมล์ และรถสินค้าอีกขบวนหนึ่งอยู่ที่ปลายทางอีกข้างหนึ่ง ต่างแล่นเข้าหากัน มาพบกันกึ่งกลางของทาง แต่รถสินค้าออกก่อนรถโดยสาร 1 ชั่วโมง และแล่นด้วยอัตราเร็วเพียง $\frac{2}{3}$ ของรถโดยสารเท่านั้น จงหาอัตราเร็วของรถทั้งสอง ★★ (ช.ม. ละ 20; 30 ไมล์)

12. รถไฟสองคันตั้งต้นออกจากกรุงเทพ ฯ และอยุธยาพร้อม ๆ กัน และแล่นเข้าหากัน คันที่ออกจากกรุงเทพ ฯ แล่นเร็วชั่วโมงละ 30 กิโลเมตร คันที่ออกจากอยุธยาแล่นเร็วชั่วโมงละ 50 กิโลเมตร เมื่อรถทั้งสองพบกันปรากฏว่า คันหนึ่งแล่นได้มากกว่าอีกคันหนึ่ง $17\frac{1}{2}$ กิโลเมตร จงหาระยะทางระหว่างกรุงเทพ ฯ กับอยุธยา ★★ (70 กม.)

13. รถไฟ A และ B สองขบวนแล่นสวนทางกัน และต่างเปิดหวูดสัญญาณขณะเมื่อเข้าอุโมงค์ซึ่งยาว 2 ไมล์หย่อน 70 หลา เมื่อขณะ A เข้าปากช่องอุโมงค์ได้ยินเสียงหวูดของ B ส่วน B เข้าอุโมงค์ไปแล้ว $17\frac{1}{4}$ วินาที จึงได้ยินเสียงหวูดของ A ถ้าอัตราเร็วของเสียงเป็น 1150 ฟุตต่อ 1 วินาที รถขบวน B แล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละกี่ไมล์ ★★ ($34\frac{1}{11}$) ข้อสอบเข้าเตรียมนายเรือ และ ม. 8

14. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่สถานีรถไฟ สังเกตเห็นรถไฟขบวนหนึ่งแล่นผ่านพ้นสถานีนั้นซึ่งยาว

88 หลาในเวลา 21 วินาที และแล่นผ่านพ้นตัวเขาเองในเวลา 9 วินาที อยากทราบว่ารถไฟขบวนนั้นยาวเท่าไร และมีอัตราความเร็วชั่วโมงละเท่าไร (ข้อสอบชุด ป.ป. — 33 หลา, 15 ไมล์/ชม.)

15. รถไฟขบวนหนึ่งยาว 88 หลา แล่นทันชายผู้หนึ่งซึ่งเดินเร็ว 4 ไมล์ต่อชั่วโมง ตามทางขนานกับทางรถไฟ และแล่นผ่านพ้นชายผู้นั้นจนสุดขบวนในเวลา 10 วินาที ภายหลังแล่นทันชายอีกผู้หนึ่งและผ่านสุดขบวนในเวลา 9 วินาที อยากทราบว่าชายคนที่สองเดินในอัตราเร็วชั่วโมงละกี่ไมล์ (ข้อสอบไล่เตรียมอุดม ฯ 2494 — 2 ไมล์)

16. รถไฟสองขบวนแล่นตามกัน ขบวนหน้าตอดอุโมงค์แห่งหนึ่งในเวลา 1 นาที 48 วินาที พอสุดขบวนไปได้ 2 นาที ขบวนหลังก็แล่นมาถึงอุโมงค์ และแล่นผ่านอุโมงค์นั้นไปในเวลา 1 นาที 12 วินาที จากนั้นอีก 9 นาที ขบวนหลังก็แล่นผ่านขบวนหน้าขบวนแรกไปถ้าอุโมงค์ยาว 600 เมตร จงหาความเร็วและความยาวของรถทั้งสองขบวนนี้ (30 กม./ชม.; 40 กม./ชม.; 300 เมตร, 200 เมตร)

17. ในคราวส่วนสนามลูกเสือคราวหนึ่ง มีลูกเสือเข้าเดินส่วนสนามทั้งสิ้น 10809 คน จัดแบ่งลูกเสือออกเดินเป็นแถว ๆ แถวละ 9 คน เว้นระยะระหว่างแถวต่อแถว 1.00 เมตร อยากทราบว่า ถ้าลูกเสือเดินส่วนสนามด้วยความเร็ว 6 กิโลเมตร ต่อชั่วโมง ผ่านผู้เป็นประธาน จะสิ้นเวลานานเท่าไรจึงจะสุดขบวน (ข้อสอบไล่เตรียมอุดม ฯ 2496—12 นาที)

18. รถสินค้ากับรถด่วนแล่นสวนทางกัน รถสินค้ายาว 1980 ฟุต รถด่วนยาว 220 หลา ถ้ารถสินค้าวิ่งด้วยความเร็ว 15 ไมล์ต่อชั่วโมง และรถด่วนวิ่งด้วยความเร็ว 66 ฟุตต่อวินาที รถทั้งสองเริ่มสวนกันเวลาเที่ยงตรง เวลาเท่าไรท้ายรถทั้งสองขบวนจึงจะห่างกัน $1\frac{1}{2}$ ไมล์ (ข้อสอบชุด ป.ม. 2494 — 12.02 น.)

19. จงจกตัวหนึ่งเกาะอยู่ที่ท้ายขบวนรถไฟ เมื่อรถขบวนนี้ออกแล่นด้วยความเร็วชั่วโมงละ 36 กิโลเมตร จงจกตัวนี้เริ่มไต่จากท้ายขบวนมายังหัวรถจักรด้วยความเร็วสม่ำเสมอ ปรากฏว่าจงจกตัวนี้ผ่านสถานีซึ่งยาว 300 เมตร ในเวลา 28 วินาที จงจกใช้เวลาไต่อยู่ 2 นาที 20 วินาที ก็ถึงสุดหัวรถจักรพอดี จงหาความยาวของรถไฟขบวนนี้ (ข้อสอบ ร.ร. เตรียมนายร้อย 2497 — 100 เมตร)

20. ขณะที่รถไฟกำลังแล่น ชายผู้หนึ่งซึ่งอยู่ในขบวนรถไฟออกเดินไปยังท้ายขบวนด้วยความเร็วชั่วโมงละ 5 กิโลเมตร เขาสังเกตเห็นว่าเขาผ่านอุโมงค์แห่งหนึ่งซึ่งยาว 1000 เมตร ในเวลา 2 นาที 24 วินาที ภายหลังที่เขากลับมานั่งแล้ว เขาเดินไปยังท้ายขบวนอีกด้วยอัตราเร็วเท่าเดิม แต่รถไฟชลอผีจักรลง $\frac{1}{3}$ ของผีจักรเดิมเมื่อผ่านสถานีแห่งหนึ่งซึ่งยาว 500 เมตร เขาสังเกตเห็นว่าเขาผ่านสถานีนั้นในเวลา 2 นาที จงหาอัตราเร็วของรถไฟเมื่อยังไม่ชลอผีจักร (30 กิโลเมตร/ชม.)

21. ชายผู้หนึ่งนั่งอยู่บนรถไฟโดยสาร เขาเห็นรถสินค้าขบวนหนึ่งแล่นตามมาข้างหลัง แล้วเขาก็ออกเดินจากท้ายขบวนไปยังหัวขบวนด้วยความเร็วชั่วโมงละ 4 กิโลเมตร เขาสังเกตเห็นว่ารถสินค้าแล่นผ่านตัวเขาไปสุดขบวนในเวลา 1 นาที 48 วินาที และแล่นผ่านขบวนรถไฟโดยสารซึ่งเขาโดยสารไปนั้นในเวลา 2 นาที ถ้ารถโดยสารยาวเป็น $\frac{14}{15}$ เท่าของรถสินค้า จงหาความยาวของรถโดยสารและรถสินค้า (140 เมตร, 150 เมตร)

---

เครื่องหมาย ★ ★ คือข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การคำนวณเรื่องกระแสน้ำ

# PROBLEMS ON STREAMS

# 15

เราได้ทราบว่า เมื่อวัตถุเคลื่อนไปด้วยความเร็วคงที่ และเรารู้ความเร็วของวัตถุนั้นแล้ว เราก็อาจหาได้ว่าในระยะทางเท่าใด วัตถุนั้นเคลื่อนที่ตลอดทาง ในเวลาไปเท่าใด ดังที่เราได้ศึกษามาแล้ว ในเรื่อง อัตราเร็ว และเวลากับการแข่งขัน แต่ในกรณีที่มีสิ่งอันขัดขวางการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นแล้ว เราก็จะคำนวณตามวิธีดังที่เคยทำมาแล้วไม่ได้ และในทำนองเดียวกัน ถ้ามีสิ่งที่ช่วยให้วัตถุนั้นเคลื่อนไปแล้ว เราก็จะคำนวณตามวิธีดังที่เคยทำมาแล้วไม่ได้เช่นกัน ขอให้นักศึกษาพิจารณาคำอธิบายต่อไปนี้

เมื่อเรากล่าวถึงอัตราเร็ว โดยทั่วไปย่อมหมายถึงความเร็วที่ไปได้ด้วยความสามารถของวัตถุที่เคลื่อนที่นั่นเอง เช่นถ้าเรากล่าวว่า เรือมีอัตราเร็ว 15 ไมล์ต่อชั่วโมง เราก็ย่อมเข้าใจกันทั่วไปว่า เรือนั้นจะเคลื่อนที่ไปในน้ำได้ระยะทาง 15 ไมล์ในเวลา 1 ชั่วโมง และน้ำนั้นต้องเป็นน้ำนิ่ง อย่างไรก็ตาม ตามปกติโจทย์จะกำหนดมาให้เลยว่า เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละเท่าไร **ดังนั้น เมื่อเรือแล่นในน้ำนิ่ง เรือนั้นจะเคลื่อนที่ไปได้ด้วยอัตราเร็วของฝีจักรของเรือนั้น**

**เมื่อเรือแล่นตามน้ำ** เมื่อเรือแล่นไปตามน้ำ สายน้ำซึ่งไหลไปทางเดียวกับเรือ จะช่วยพาให้เรือนั้นแล่นไปได้เร็วยิ่งขึ้น เช่น

เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 15 ไมล์

สายน้ำไหลชั่วโมงละ 5 ไมล์

เมื่อเรือแล่นตามสายน้ำในเวลา 1 ชั่วโมงจะไปได้ไกล $15 + 5 = 20$ ไมล์

ดังนั้น อัตราเร็วตามน้ำ = อัตราเร็วในน้ำนิ่ง + อัตราเร็วสายน้ำ ★

**เมื่อเรือแล่นทวนน้ำ** เมื่อเรือแล่นทวนน้ำ สายน้ำจะต้านทานเรือไว้ เช่น เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 15 ไมล์ สายน้ำไหลชั่วโมงละ 5 ไมล์ ถ้าให้เรือนั้นแล่นทวนน้ำใน 1 ชั่วโมง เราจะเห็นว่าเมื่อเรือนั้นแล่นในน้ำนิ่งได้ 15 ไมล์นั้น สายน้ำจะดันเรือกลับมา 5 ไมล์ คือถ้าน้ำไม่ไหลทวนเรือไว้แล้ว 1 ชั่วโมงเรือจะไปได้ 15 ไมล์ แต่ 1 ชั่วโมงน้ำจะไหลไปได้ 5 ไมล์ ดังนั้น แทนที่เรือจะไปได้ 15 ไมล์ จึงไปได้เพียง $15 - 5 = 10$ ไมล์เท่านั้น

ดังนั้น อัตราเร็วทวนน้ำ = อัตราเร็วในน้ำนิ่ง − อัตราเร็วสายน้ำ ★

เราอาจเขียนความจริงอันนี้ได้ว่า

อัตราเร็วตามน้ำ = อัตราเร็วในน้ำนิ่ง + อัตราเร็วสายน้ำ ..... (1)

อัตราเร็วทวนน้ำ = อัตราเร็วในน้ำนิ่ง − อัตราเร็วสายน้ำ ..... (2)

เอาบรรทัดแรก (1) รวมกับบรรทัดหลัง (2) เราได้

อัตราเร็วตามน้ำ + อัตราเร็วทวนน้ำ = 2 (อัตราเร็วในน้ำนิ่ง)

หรือ 2 (อัตราเร็วในน้ำนิ่ง) = อัตราเร็วตามน้ำ + อัตราเร็วทวนน้ำ

$$\therefore \text{อัตราเร็วในน้ำนิ่ง} = \frac{\text{อัตราเร็วตามน้ำ} + \text{อัตราเร็วทวนน้ำ}}{2} \text{ ★}$$

เอาบรรทัดแรกตั้ง เอาบรรทัดหลังไปลบออก เราได้

อัตราเร็วตามน้ำ − อัตราเร็วทวนน้ำ = 2 (อัตราเร็วสายน้ำ)

หรือ 2 (อัตราเร็วสายน้ำ) = อัตราเร็วตามน้ำ − อัตราเร็วทวนน้ำ

$$\therefore \text{อัตราเร็วสายน้ำ} = \frac{\text{อัตราเร็วตามน้ำ} - \text{อัตราเร็วทวนน้ำ}}{2} \text{ ★}$$

เราอาจรวมความสัมพันธ์เหล่านี้ไว้เป็นข้อ ๆ และสั้น ๆ ได้ดังนี้

1. ตามน้ำ = น้ำนิ่ง + สายน้ำ
2. ทวนน้ำ = น้ำนิ่ง − สายน้ำ

$$3.\ \text{น้ำนิ่ง} = \frac{\text{ตาม} + \text{ทวน}}{2}$$

$$4.\ \text{สายน้ำ} = \frac{\text{ตาม} - \text{ทวน}}{2}$$

**ข้อควรระวัง** ก่อนที่จะนำตัวเลขต่าง ๆ มาบวกลบคูณหารกันตามความสัมพันธ์ข้างต้นนี้ อย่าลืมว่า **ต้องทำเวลาให้เท่ากันเสียก่อน** เช่น

**กรณี 1** เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 30 กิโลเมตร สายน้ำไหลได้นาทีละ 100 เมตร

เราต้องทำเวลาให้เท่ากันเสียก่อน ซึ่งจะทำให้เป็นเท่าใดก็ได้ เพียงแต่ต้องให้เท่ากันเท่านั้น และอย่าลืมว่า ผลลัพธ์ที่ได้ก็ต้องเป็นความเร็วในเวลาเท่านั้นด้วย เช่น ตามกรณีข้างบน เราทำให้เวลาเป็น 1 ชั่วโมง

1 ชั่วโมง เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ 30 กม.

1 นาที สายน้ำไหลได้ 100 เมตร

∴ 1 ชั่วโมง (= 60 นาที) สายน้ำไหลได้ $100 \times 60 = 6000$ เมตร $= 6$ กม.

∴ 1 ชั่วโมง เรือแล่นตามน้ำได้ $30 + 6 = 36$ กม.

1 ชั่วโมง เรือแล่นทวนน้ำได้ $30 - 6 = 24$ กม.

**กรณี 2** เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ทาง 10 กิโลเมตรในเวลา 10 นาที สายน้ำไหล 5 นาทีได้ทาง 1 กิโลเมตร

เราจะเห็นว่า เวลาที่กำหนดให้นั้นไม่เท่ากัน เราต้องทำเวลาให้เท่ากันเสียก่อน ซึ่งจะเป็นเท่าใดก็ได้ เราทำให้เป็น 5 นาทีเท่ากันจะได้ดังนี้

10 นาที เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ 10 กม.

∴ 5 นาที เรือแล่นในน้ำนิ่งได้ $\frac{10}{10} \times 5 = 5$ กม.

แต่ตามโจทย์ 5 นาที สายน้ำไหลได้ 1 กม.

∴ 5 นาที เรือแล่นตามน้ำได้ $5 + 1 = 6$ กม.

5 นาที เรือแล่นทวนน้ำได้ $5 - 1 = 4$ กม.

เมื่อจะตอบควรตอบเป็น 1 ชั่วโมง ซึ่งเทียบได้ดังนี้

5 นาที เรือแล่นตามน้ำได้ 6 กม.

∴ 1 ชั่วโมง $= 60$ นาที เรือแล่นตามน้ำได้ $\frac{6}{5} \times 60 = 72$ กม.

การหาทวนน้ำก็ทำนองเดียวกัน ตัวอย่างต่อไปนี้จะทำให้เข้าใจดี

**ตัวอย่าง 1** ชายผู้หนึ่งแจวเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 12 กิโลเมตร ถ้าให้ชายผู้นี้แจวเรือทวนน้ำซึ่งไหลด้วยความเร็วชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร เป็นเวลา 20 นาที เขาจะไปได้ไกลเท่าไร

**วิธีทำ** 1 ชม. เขาแจวได้ 12 กม.

1 ชม. น้ำไหล 6 กม.

∴ 1 ชม. เขาแจวทวนน้ำไปได้เพียง $12 - 6 = 6$ กม.

∴ เวลา 20 นาที $= \frac{20}{60}$ ชม. เขาไปได้ไกล $6 \times \frac{20}{60} = 2$ กม.

**ตอบ** 2 กิโลเมตร

**ตัวอย่าง 2** ชายผู้หนึ่งแจวเรือทวนน้ำ 40 นาทีไปได้ไกล 4 กิโลเมตร ซึ่งถ้าให้เขาแจวในน้ำนิ่ง เขาจะแจวได้ชั่วโมงละ 8 กิโลเมตร ถ้าเขาแจวตามน้ำในระยะทาง 5 กิโลเมตร จะเสียเวลานานเท่าไร

**วิธีทำ** แจวทวนน้ำ 40 นาที ได้ทาง 4 กม.

∴ แจวทวนน้ำ 60 นาที ได้ทาง $4 \times \frac{60}{40} = 6$ กม.

อัตราเร็วของสายน้ำ = อัตราเร็วในน้ำนิ่ง − อัตราเร็วทวนน้ำ

∴ อัตราเร็วของสายน้ำ $= 8 - 6 = 2$ กม./ชม.

อัตราเร็วตามน้ำ = อัตราเร็วในน่านน้ำ + อัตราเร็วสายน้ำ

∴ อัตราเร็วตามน้ำ = 8 + 2 = 10 กม./ชม.

ทาง 10 กม. เขาแจวตามน้ำในเวลา 1 ชม.

∴ ทาง 5 กม. เขาแจวตามน้ำในเวลา $\frac{1}{10} \times 5 = \frac{1}{2}$ ชม. = 30 นาที

ตอบ 30 นาที

**ตัวอย่าง 3** เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นตามน้ำได้ชั่วโมงละ 40 กิโลเมตร ทวนน้ำได้ชั่วโมงละ 20 กิโลเมตร จงหาอัตราเร็วของเรือในน่านน้ำ

**วิธีทำ** อัตราเร็วในน่านน้ำ $= \frac{\text{อัตราเร็วตามน้ำ + อัตราเร็วทวนน้ำ}}{2}$

∴ อัตราเร็วในน่านน้ำของเรือ $= \frac{40+20}{2} = 30$ กม./ชม.

ตอบ 30 กม./ชม.

**ตัวอย่าง 4** เรือเร็วลำหนึ่ง แล่นทวนน้ำจากเมืองหนึ่งไปยังเมืองหนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างกัน 60 กิโลเมตรเสียเวลา 2 ชั่วโมง แล้วแล่นตามน้ำกลับด้วยกำลังเครื่องเท่าเดิมเสียเวลา 56 นาที จงหาอัตราเร็วของสายน้ำ

**วิธีทำ** เรือทวนน้ำ 2 ชม. = 120 นาที ได้ระยะทาง 60 กิโลเมตร

∴ เรือทวนน้ำ 56 นาที ได้ระยะทาง $\frac{60}{120} \times 56 = 28$ กม.

อัตราเร็วสายน้ำ $= \frac{\text{ตามน้ำ} - \text{ทวนน้ำ}}{2}$

$= \frac{56-28}{2}$

$= 14$ กม./ชม.

ตอบ ชั่วโมงละ 14 กิโลเมตร

**ตัวอย่าง 5** เรือเร็วลำหนึ่ง แล่นตามน้ำจากเมืองหนึ่งไปเมืองหนึ่งเสียเวลา 1 ชั่วโมง แล่นกลับเสียเวลา $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง ถ้าหากน้ำไม่ไหลเรือจะแล่นเสียเวลาเท่าไร

**วิธีทำ** สมมติให้ระยะทางระหว่างเมืองทั้งสองยาว 1

∴ เรือแล่นตามน้ำ 1 ชั่วโมง ได้ทาง 1

แต่เรือแล่นทวนน้ำ $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ชั่วโมง ได้ทาง 1

∴ เรือแล่นทวนน้ำ 1 ชั่วโมง ได้ทาง $1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ ของทางทั้งหมด

$$\text{อัตราเร็วในน้ำนิ่ง} = \frac{\text{ตาม} + \text{ทวน}}{2}$$

$$= \frac{1+\frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{3}\times\frac{1}{2}$$

$= \frac{5}{6}$ ของทางทั้งสิ้นในเวลา 1 ชม.

ระยะทาง $\frac{5}{6}$ เรือแล่นน้ำนิ่งเสียเวลา 1 ชั่วโมง

∴ ระยะทาง 1 เรือแล่นในน้ำนิ่งเสียเวลา $1\times\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ ชั่วโมง

$=1$ ชั่วโมง 20 นาที

∴ ถ้าน้ำไม่ไหลเรือจะแล่นเสียเวลา 1 ชั่วโมง 20 นาที

**ตอบ** 1 ชั่วโมง 20 นาที

**ตัวอย่าง 6** ชายผู้หนึ่งพายเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 10 กิโลเมตรอยู่เสมอ วันหนึ่งน้ำขึ้น เขาพายเรือตามน้ำจากบ้านไปตลาด เมื่อเสร็จธุระปรากฏว่าน้ำลงเสียแล้ว เขาต้องพายเรือทวนน้ำกลับ เขารู้ว่าสายน้ำไหลทั้งขึ้นและลงมีอัตราเร็วเท่ากัน และเมื่อทวนน้ำเขาเสียเวลาเป็น 3 เท่าของเมื่อพายตามน้ำ จงหาอัตราเร็วของสายน้ำ

**วิธีทำ** เขาพายทวนน้ำเสียเวลาเป็น 3 เท่าของพายตามน้ำในระยะทางที่เท่ากัน

คือพายตามน้ำเร็วกว่าพายทวนน้ำ 3 เท่า

∴ ถ้าพายทวนน้ำได้ทาง 1 ในเวลาที่เท่ากัน เขาจะพายตามน้ำได้ทาง 3

นั่นคือ 3 (อัตราเร็วทวนน้ำ) = อัตราเร็วตามน้ำ

$$\text{จาก อัตราเร็วในน้ำนิ่ง} = \frac{\text{อัตราเร็วตามน้ำ} + \text{อัตราเร็วทวนน้ำ}}{2}$$

[ ในที่นี้ อัตราเร็วในน้ำนิ่ง $= 10$ กม./ชม. และ อัตราเร็วตามน้ำ $= 3$ (อัตราเร็วทวนน้ำ) ]

ฉะนั้น
$$10 = \frac{3(\text{อัตราเร็วทวนน้ำ}) + (\text{อัตราเร็วทวนน้ำ})}{2}$$

$$10 = \frac{4(\text{อัตราเร็วทวนน้ำ})}{2}$$

$$10 = 2(\text{อัตราเร็วทวนน้ำ})$$

$\therefore$ อัตราเร็วทวนน้ำ $= \frac{10}{2} = 5$ กม./ชม.

$\therefore$ อัตราเร็วของสายน้ำ $= 10 - 5 = 5$ กม./ชม.

**ตอบ** ชั่วโมงละ 5 กิโลเมตร

**ตัวอย่าง 7** เครื่องบินโดยสารมีความเร็ว 300 ไมล์ต่อชั่วโมง เครื่องบินลำนี้แล่นสวนสายลมซึ่งมีความเร็ว 30 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาว่าถ้าเครื่องบินลำนี้บินอยู่ 20 นาที จะไปได้ไกลเท่าไร

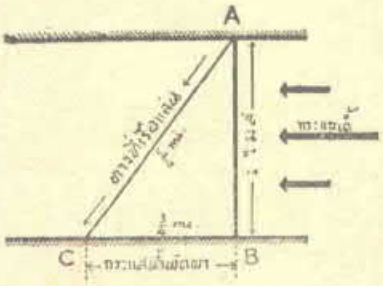
**วิธีทำ** เครื่องบินมีความเร็ว 300 ไมล์ต่อชั่วโมง แต่ลมต้านไว้ 30 ไมล์

$\therefore$ 1 ชั่วโมง เครื่องบินคงไปได้เพียง $300 - 30 = 270$ ไมล์

$\therefore$ 20 นาที $= \frac{20}{60}$ ชั่วโมง เครื่องบินไปได้ไกล $270 \times \frac{20}{60} = 90$ ไมล์

**ตอบ** 90 ไมล์

**ตัวอย่าง 8** ชายผู้หนึ่งต้องการ ข้ามฟาก ไปยังบ้านซึ่งอยู่ตรงข้ามคนละฝั่งกับที่ซึ่งเขายืนอยู่ เขามีเรืออยู่ลำหนึ่ง และเขาพายเรือนี้ด้วยอัตราเร็ว 4 ไมล์ต่อชั่วโมง เขาหันหัวเรือมุ่งตรงไปยังบ้าน ถ้าสายน้ำไหลชั่วโมงละ 3 ไมล์ และแม่น้ำกว้าง 1 ไมล์ จงหาว่าเมื่อเขาไปถึงอีกฝั่งหนึ่งนั้นเรือแล่นไปได้เท่าไร และเรือแล่นไปถึงอีกฝั่งหนึ่งห่างจากบ้านเท่าไร และใช้เวลาเท่าไร




**วิธีทำ** เขาพายเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 4 ไมล์

ทาง 4 ไมล์ เขาพายเรือในเวลา 1 ชั่วโมง

∴ แม่น้ำกว้าง 1 ไมล์ เขาพายเรือในเวลา $\frac{1}{4}$ ชั่วโมง

แต่สายน้ำไหล 1 ชั่วโมง พาเรือลอยไป 3 ไมล์

$\frac{1}{4}$ ชั่วโมงพาเรือลอยไป $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ไมล์

ให้ A เป็นที่ๆ เขายืนอยู่

B เป็นบ้าน

C เป็นที่ซึ่งเรือไปถึงอีกฝั่งหนึ่ง ซึ่งถูกสายน้ำพัดพาไป

∴ A B คือระยะความกว้างของแม่น้ำ $= 1$ ไมล์

B C คือระยะที่น้ำพัดพาเรือไปในเวลา $\frac{1}{4}$ ชั่วโมง $= \frac{3}{4}$ ไมล์

A C คือระยะที่เรือแล่นไปในเวลา $\frac{1}{4}$ ชั่วโมง

A B C เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม B เป็นมุมฉาก

$$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (1)^2 + (\tfrac{3}{4})^2$$

$$= 1 + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{25}{16}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{5}{4}$$

∴ เรือแล่นไปได้ทาง $\frac{5}{4}$ ไมล์ $= 1\frac{1}{4}$ ไมล์

ห่างจากบ้านเท่ากับระยะที่สายน้ำพัดพาไปใน $\frac{1}{4}$ ชั่วโมง คือ $\frac{3}{4}$ ไมล์

ใช้เวลา $\frac{1}{4}$ ชั่วโมง $= 15$ นาที

**ตอบ**

# แบบฝึกหัด 16

1. เรือลำหนึ่งแล่นตามน้ำ ได้ทาง 5 กิโลเมตรในเวลา 5 นาที แล้วแล่นทวนน้ำกลับที่เดิมอีกในเวลา 15 นาที จงหาอัตราเร็วของสายน้ำ (20 กม./ชม.)
2. ทาง 80 เส้น เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นตามน้ำด้วยความเร็วสม่ำเสมอสิ้นเวลา 16 นาที แล่นทวนน้ำสิ้นเวลา 20 นาที ถ้าแล่นในน้ำนิ่งจะสิ้นเวลาเท่าไร ★ ($17\frac{7}{9}$ นาที)
3. ชายคนหนึ่งลงว่ายน้ำในแม่น้ำ ซึ่งสายน้ำไหลชั่วโมงละ $1\frac{1}{3}$ ไมล์ เขาว่ายน้ำตามน้ำในเวลาที่กำหนดให้ ได้ระยะทางเป็นห้าเท่าของที่ว่ายทวนน้ำ เขาว่ายในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละกี่ไมล์ ★ (2)
4. เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นตามน้ำในระยะทาง 76 กิโลเมตรกินเวลา 4 ชั่วโมง และแล่นทวนน้ำในระยะทาง 56 กิโลเมตรกินเวลา $3\frac{1}{2}$ ชั่วโมง จงหาความเร็วของสายน้ำ ($1\frac{1}{2}$ กม./ชม)
5. น้ำไหลด้วยอัตราเร็วชั่วโมงละ $2\frac{1}{4}$ กิโลเมตร ชายคนหนึ่งพายเรือตามน้ำไปได้ 20 กิโลเมตรในเวลา $3\frac{1}{5}$ ชั่วโมง จงหาว่า ถ้าเขาพายทวนน้ำให้ได้ระยะทางเท่ากัน เขาจะต้องพายนานเท่าใด ★★ ($11\frac{3}{7}$ ชม.)
6. ชายผู้หนึ่งพายเรือด้วยความเร็วคงที่ตลอดเวลา ตั้งต้นพายจากคลองที่สายน้ำนิ่งใน $\frac{1}{4}$ ชั่วโมงได้ทาง 1 ไมล์ ก็พอดีถึงแม่น้ำซึ่งสายน้ำไหลชั่วโมงละ $1\frac{1}{3}$ ไมล์ เขาพายไปตามน้ำ $\frac{1}{4}$ ชั่วโมง แล้วก็พายกลับไปยังที่ตั้งต้นเดินทางใหม่ จงหาว่าเมื่อพายกลับนั้นสิ้นเวลาเท่าใด ★★ (45 นาที)
7. ชายผู้หนึ่งแจวเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 9 ไมล์ ถ้าเขาแจวเรือทวนน้ำจะต้องใช้เวลานานเป็น 3 เท่าของเวลาที่ใช้แจวเรือตามน้ำ จงหาความเร็วของสายน้ำไหล ★★ ($4\frac{1}{2}$ ไมล์)
8. เรือลำหนึ่งแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 12 ไมล์ ถ้าแล่นในแม่น้ำซึ่งสายน้ำไหลชั่วโมงละ 3 ไมล์ จงหา
   (ก) จงหาอัตราเร็วของเรือเมื่อแล่นทวนน้ำ (15 ไมล์/ชม.)
   (ข) ถ้าไปกลับในระยะทาง 120 ไมล์ จะมีอัตราเร็วเฉลี่ยชั่วโมงละเท่าไร ($11\frac{1}{4}$ ไมล์/ชม.)

9. ชายผู้หนึ่งแจวเรือทวนน้ำได้ทาง 10 ไมล์ ในเวลาเท่ากับที่เขาแจวตามน้ำได้ทาง 20 ไมล์ ถ้าเขาแจวในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 3 ไมล์ จงหาอัตราเร็วของสายน้ำ (1 ไมล์/ชม.)

10. มีเรือกอดส่งออยู่สองลำ ชายคนหนึ่งว่ายน้ำจากเรือลำหนึ่งไปยังอีกลำหนึ่งในอัตราเร็ว 3 ไมล์ต่อชั่วโมง และกระแสน้ำพัดช่วยชั่วโมงละ 200 หลา พอว่ายไปได้ $\frac{3}{4}$ ชั่วโมง กระแสน้ำพัดกลับและต้านเขาไว้ในอัตราเท่าเดิม ตอนนี้กำลังเขาอ่อนลง คงทำความเร็วได้เพียง $2\frac{1}{2}$ ไมล์ต่อชั่วโมง เขาว่ายทวนน้ำอยู่ 1 ชั่วโมงเต็มจึงถึงที่หมาย จงหาระยะทางระหว่างเรือสองลำ (ข้อสอบชุด ป.ป. — 4 ไมล์ 1270 หลา)

11. เรือบรรทุกไม้แล่นทวนน้ำ เมื่อแล่นไปได้ $1\frac{1}{2}$ กิโลเมตร ไม้แผ่นหนึ่งตกน้ำ กว่าจะรู้ว่าไม้ตกน้ำเป็นเวลา 18 นาที เมื่อรู้ก็กลับตามมาทันที ปรากฏว่าไปทันไม้แผ่นนั้น ณ ที่ซึ่งเรือเริ่มออกแล่นพอดี จงหาอัตราเร็วของสายน้ำ (2.5 กม.ต่อชั่วโมง)

12. เครื่องบินลำหนึ่งมีอัตราเร็ว 110 ไมล์ต่อชั่วโมง เครื่องบินลำนี้บินทวนลมไปเป็นทาง 300 ไมล์ แล้วบินตามลมกลับในเวลาที่เท่ากับที่บินไป ปรากฏว่าเครื่องบิน บินเลยที่ตั้งต้นเดิมไปได้ถึง 150 ไมล์ จงหาอัตราเร็วของลมเป็นไมล์ต่อชั่วโมง (22)

13. ชายผู้หนึ่งรู้ว่า ถ้าสายน้ำไหลชั่วโมงละ 2 ไมล์ เขาจะแจวเรือตามน้ำในระยะทาง 12 ไมล์ ในเวลาเท่ากับที่เขาแจวตามน้ำในระยะทาง 16 ไมล์ เมื่อสายน้ำไหลชั่วโมงละ 4 ไมล์ จงหาว่าเขาแจวเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละกี่ไมล์ (4)

14. เครื่องบินลำหนึ่งมีอัตราเร็ว 320 ไมล์ต่อชั่วโมง ความเร็วของลมเป็น 47 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาว่า

(ก) ถ้าบินตามลมจะมีความเร็วชั่วโมงละกี่ไมล์ (368)

(ข) ถ้าบินทวนลมจะมีความเร็วชั่วโมงละกี่ไมล์ (272)

(ค) ถ้าบินตามลมไปแล้วกลับทวนลมมายังที่เดิมในเวลา 5 ชั่วโมง จะไปได้ไกลเท่าไร (728 ไมล์)

15. แม่น้ำสายหนึ่งไหลชั่วโมงละ 3 ไมล์ต่อชั่วโมง เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นตามน้ำไปเป็นระยะทาง 60 ไมล์ ในเวลา 3 ชั่วโมง จงหาว่า

(ก) ถ้าเรือแล่นกลับที่เดิมจะสิ้นเวลาเท่าไร ($4\frac{2}{7}$ ชม.)

(ข) อัตราเร็วเฉลี่ยของเรือทั้งไปและกลับชั่วโมงละเท่าไร ($16\frac{8}{17}$ ไมล์)

16. เด็ก 2 คนช่วยกันพายเรือตามน้ำแล้วแจวกลับในเวลา 3 ชั่วโมง เป็นทางที่เขาไปได้ 16 ไมล์ ถ้าอัตราเร็วในการพายตามน้ำของเขาทั้งสองมากกว่า 3 เท่าของอัตราเร็วสายน้ำอยู่ 4 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็วของสายน้ำและอัตราเร็วของเขาเมื่อพายในน้ำนิ่ง (4, 12, ไมล์/ชม.)

17. เรือจ้างลำหนึ่งแจวทวนกระแสน้ำซึ่งไหลได้ชั่วโมงละ $1\frac{1}{2}$ ไมล์ ไปส่งคนโดยสารที่ท่าแห่งหนึ่ง แล้วก็แจวกลับมารับคนโดยสาร ณ ที่ซึ่งอีก 2 ไมล์ก็จะถึงท้ายเรือครั้งแรก สิ้นเวลารวม 2 ชั่วโมง 10 นาที จงหาว่าท่านั้นอยู่ห่างจากที่ตั้งต้นเท่าไร (5 ไมล์)

18. ชายผู้หนึ่งแจวเรือออกจากคลองไปยังแม่น้ำ จากที่ๆ ออกเรือจนถึงแม่น้ำเป็นทางยาว 1 ไมล์ เขาแจวอยู่นาน 15 นาทีก็ถึงแม่น้ำ แล้วเขาก็แจวไปตามน้ำอีก 15 นาทีไปได้ไกล $1\frac{1}{3}$ ไมล์ เมื่อเสร็จธุระก็แจวกลับ อยากทราบว่านานเท่าไรกว่าเขาจะถึงที่เดิม (45 นาที)

19. ก. และ ข. แจวเรือในแม่น้ำ เขาตั้งต้นจากที่แห่งเดียวกัน ก. แจวตามน้ำ ข. ทวนน้ำ ในเวลา $3\frac{3}{4}$ นาที เขาอยู่ห่างกัน 5 เฟอรลอง ทันใดนั้น ก. ก็กลับแจวตาม ข. มา ต่อมาอีก $12\frac{1}{2}$ นาที ก็ปรากฏว่าเรือทั้งสองลำแล่นได้ทางทั้งสิ้นรวมกันได้ 1 ไมล์ 7 เฟอรลอง กำหนดว่า ก. และ ข. แจวได้ในอัตราคงที่ และกระแสน้ำไหลอย่างสม่ำเสมอตลอดเวลาแล้ว จงหาอัตราเร็วของกระแสน้ำ (2 ไมล์ต่อชั่วโมง)

20. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ ณ จุด A เขาต้องการข้ามไปบ้าน B ซึ่งอยู่ตรงข้าม เขาหันหัวเรือตรงยังบ้าน แล้วพายด้วยอัตราเร็ว 4 ไมล์ต่อชั่วโมง สายน้ำไหลชั่วโมงละ 3 ไมล์ แม่น้ำกว้าง 1 ไมล์ ถ้าเขาพายได้ชั่วโมงละ 5 ไมล์ จงหาว่าเขาจะสิ้นเวลากี่นาทีจึงจะไปถึงบ้าน B. (24)

21. เด็กคนหนึ่งยืนอยู่ริมฝั่งน้ำ เขาต้องการข้ามแม่น้ำซึ่งกว้าง 300 เมตร ไปยังโรงเรียนซึ่งตั้งอยู่ริมฝั่งตรงกันข้ามกับที่เขายืนอยู่ เขาเริ่มพายเรือข้ามแม่น้ำ โดยให้ลำเรือตั้งฉากกับสายน้ำซึ่งไหลด้วยความเร็วชั่วโมงละ 2.4 กิโลเมตร เด็กคนนี้พายเรือในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 1.8 กิโลเมตร เมื่อเขาไปถึงอีกฝั่งหนึ่ง เขาก็เดินเลียบชายฝั่งไปยังโรงเรียนทันที ด้วยความเร็วชั่วโมงละ 6 กิโลเมตร จงหาว่า

ก. เมื่อเขาไปถึงอีกฝั่งหนึ่งนั้น เขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าไร (500 เมตร)

ข. เขาใช้เวลาทั้งสิ้นเท่าไร กว่าเขาจะถึงโรงเรียน (14 นาที)

22. ชายคนหนึ่งพายเรือได้ชั่วโมงละ 4 ไมล์ เขาต้องการจะข้ามตรงไปยังบ้านซึ่งอยู่ริมน้ำตรงกันข้ามกับริมฝั่งที่เขายืนอยู่ เขาหันหัวเรือสู้สายน้ำ ปรากฏว่าเรือของเขาแล่นตรงไปยังบ้านที่อยู่ตรงข้าม ถ้าสายน้ำไหลชั่วโมงละ 1.3 ไมล์ และแม่น้ำกว้าง 1 ไมล์ จงหาว่าเขาใช้เวลานานเท่าไร ในการพายเรือข้ามแม่น้ำครั้งนี้ (15.9 นาที)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การแข่งขัน
# RACES AND GAMES OF SKILL

# 16

การแข่งขันอาจจำแนกได้เป็นสองอย่าง คือ

1. การแข่งความเร็ว (RACE) ได้แก่การวิ่งแข่ง หรือการแข่งความเร็วของวัตถุต่าง ๆ เช่น รถ เรือ เป็นต้น
2. การแข่งความชำนาญ (GAME OF SKILL) ได้แก่การแข่งขัน การเล่นที่มีการนับแต้ม เช่น บิลเลียด, เทนนิส, ปิงปอง หรือการเล่นนับแต้มอื่น ๆ อย่างไรก็ตาม การแข่งขันซึ่งแยกมาเป็นสองอย่างนี้ มีวิธีการคำนวณโดยทำนองเดียวกัน การคำนวณก็คือ ต้องพยายามเปรียบเทียบความสามารถของคู่แข่งขันให้ได้ เช่น โจทย์กำหนดว่า ก. วิ่งได้ 10 เมตร ใน 1 วินาที ข. วิ่งได้ 22 เมตร ใน 2 วินาที เราจะเปรียบเทียบทันทีไม่ได้ว่าความสามารถของ ก. และ ข. เป็นอย่างไร เราต้องทำเวลาให้เท่ากันเสียก่อน การศึกษาเรื่องอัตราเร็วมาด้วยความเข้าใจอันดี ย่อมจะเป็นการได้เปรียบที่จะเข้าใจเรื่องนี้ได้รวดเร็ว

โดยปกติโจทย์จะกำหนดความสามารถของคู่แข่งขันให้เป็นคู่ ๆ ถ้าเป็นการแข่งขันในระยะทางที่ต่างกัน ต้องทำระยะทางให้เท่ากันเสียก่อนจึงจะเปรียบเทียบกันได้ เช่น ในการแข่งขันทาง 100 เมตร ก. ชนะ ข. 10 เมตร

แต่ถ้าให้ ข. แข่งกับ ค. ข. ชนะ ค. 10 เมตร จะไปเข้าใจทันทีว่า ถ้าให้ ก. แข่งกับ ค. แล้ว ก. ต้องชนะ ค. $10 + 10 = 20$ เมตรไม่ได้

เพราะการแข่งขันทำกันคนละครั้ง คือ

**ระหว่าง ก. กับ ข.** ก. วิ่งได้ 100 เมตร ข. วิ่งได้ $100 - 10 = 90$ เมตร

**ระหว่าง ข. กับ ค.** ข. วิ่งได้ 100 เมตร ค. วิ่งได้ $100 - 10 = 90$ เมตร

จะเห็นได้ว่า ถ้า ก. วิ่งได้ 100 เมตร ข. วิ่งได้ 90 เมตร -------(1)

แต่ ถ้า ข. วิ่งได้ 100 เมตร ค. วิ่งได้ 90 เมตร

จะเอาที่ ค. วิ่งได้ไปเทียบกับ ก. ยังไม่ได้ เพราะการวิ่งของ ข. ไม่เท่ากัน ถ้าต้องการจะเทียบดูว่า ถ้าให้ ค. และ ก. แข่งกัน ก. จะชนะ ค. เท่าไรแล้ว ต้องทำระยะทางที่ ข. วิ่งเมื่อแข่งกับ ค. ให้เท่ากับที่ ข. วิ่งได้เมื่อแข่งกับ ก. ดังนี้

ข. วิ่งได้ 100 เมตร ค. วิ่งได้ 90 เมตร

$\therefore$ ข. วิ่งได้ 90 เมตร ค. วิ่งได้ $\frac{90}{100} \times 90 = 81$ เมตร ------(2)

จาก (1) เราทราบว่า ก. วิ่ง 100 เมตร ข. วิ่ง 90 เมตร

จาก (2) เราได้ ข. วิ่ง 90 เมตร ค. วิ่ง 81 เมตร

จะเห็นว่า เมื่อ ข. วิ่งได้ 90 เมตรนั้น ก. วิ่งได้ 100 เมตร ขณะเดียวกันที่ ค. วิ่งได้ 81 เมตร

ดังนั้น เราจึงหาได้ว่า ถ้าให้ ก. วิ่งแข่งกับ ค. แล้ว เมื่อ ก. วิ่งได้ 100 เมตร (คือหมดระยะทางแข่งขัน) ค. วิ่งได้ทางเพียง 81 เมตร

$\therefore$ ก. ชนะ ค. $100 - 81 = 19$ เมตร

**ตัวอย่าง 1** ในการวิ่งแข่งขันระยะทาง 100 เมตร ก. ชนะ ข. 20 เมตร และถ้าให้ ข. แข่งกับ ค. บ้าง ข. ชนะ ค. 10 เมตร ถ้าให้ ก และ ค. แข่งกันบ้าง ก. จะชนะ ค. เท่าไร

วิธีทำ

เมื่อ ก. แข่งกับ ข. ก. วิ่งชนะ ข. ดังนั้น ก. วิ่งเต็มระยะทาง 100 เมตร

$\therefore$ ก. วิ่ง 100 เมตร ข. วิ่ง $100 - 20 = 80$ เมตร

เมื่อ ข. แข่งกับ ค. ข. วิ่งชนะ ค. ดังนั้น ข. วิ่งตลอดทาง 100 เมตร

$\therefore$ ข. วิ่ง 100 เมตร ค. วิ่ง $100 - 10 = 90$ เมตร

$\therefore$ ข. วิ่ง 80 เมตร ค. วิ่ง $\frac{90 \times 80}{100} = 72$ เมตร

$\therefore$ เมื่อ ข. วิ่งได้ 80 เมตร ก. วิ่งได้ 100 เมตร ค. วิ่งได้ 72 เมตร

ดังนั้น เมื่อ ค. วิ่งแข่งกับ ก. ในระยะทาง 100 เมตร ก. จะวิ่งได้ 100 เมตร

ขณะที่ ค. วิ่งได้ 72 เมตร

$\therefore$ ก. ชนะ ค. $100 - 72 = 28$ เมตร

ตอบ 28 เมตร

อธิบาย เราทราบว่า ก. วิ่งเร็วกว่า ข. และ ค. ดังนั้น ก. ย่อมต้องวิ่งเต็ม 100 เมตร ขณะที่ ก. วิ่งได้ 100 เมตรนั้น ข. วิ่งได้เพียง 80 เมตร และ ค. ต้องวิ่งได้น้อยกว่า 80 เมตรลงไปอีก

และเราทราบว่า ถ้า ข. วิ่งได้ 100 เมตร ค. วิ่งได้ 90 เมตร ดังนั้น ขั้นต่อไปก็คือ ทำให้ ข. วิ่งในระยะทาง 80 เมตร แล้วเราก็จะทราบว่า ค. วิ่งได้เท่าไร

เมื่อทราบว่า ค. วิ่งได้เท่าไร เมื่อ ข. วิ่งได้ 80 เมตรแล้วก็ไปลบจาก 100 เมตร ซึ่ง ก. วิ่งได้ เมื่อ ข. วิ่งได้ 80 เมตร

ตัวอย่าง 2 ในการวิ่งแข่งขันระยะทาง 200 เมตร ข. ต่อให้ ค. 10 เมตร ก็ถึงหลักชัยพร้อมกัน และ ก. ต่อให้ ข. 20 เมตร ก็ถึงหลักชัยพร้อมกัน ถ้าให้ ก. และ ค. วิ่งแข่งกันบ้าง ก. ต้องต่อให้ ค. เท่าไรจึงจะถึงหลักชัยพร้อมกัน

วิธีทำ ข. วิ่ง 200 เมตร ค. วิ่ง 200 − 10 = 190 เมตร

ก. วิ่ง 200 เมตร ข. วิ่ง 200 − 20 = 180 เมตร

ข. วิ่ง 200 เมตร ค. วิ่ง 190 เมตร

∴ ข. วิ่ง 180 เมตร ค. วิ่ง $\frac{190\times180}{200}$ = 171 เมตร

เมื่อ ข. วิ่ง 180 เมตร ก. วิ่งได้ 200 เมตร ค. วิ่งได้ 171 เมตร

∴ ก. ต้องต่อให้ ค. 200 − 171 = 29 เมตร

ตอบ 29 เมตร

**ตัวอย่าง 3** ในการแข่งขันทาง 100 เมตร ก. ต่อให้ ข. 10 เมตร แต่แพ้ ข. 5 เมตร แต่ถ้า ก. ต่อให้ ค. 15 เมตร ค. กลับแพ้ ก. อีก 5 เมตร ถ้าให้ ข. และ ค. แข่งกันในระยะทาง 450 เมตร ข. ต้องต่อให้ ค. กี่เมตรจึงจะถึงหลักชัยพร้อมกัน

วิธีทำ เมื่อ ก. แข่งกับ ข. ก. ต่อให้ ข. 10 เมตร

∴ ทางที่ ก. วิ่งคือ 100 เมตร ทางที่ ข. วิ่ง คือ 100 − 10 = 90 เมตร

แต่ ก. แพ้ ข. 5 เมตร ดังนั้น ก. วิ่งได้ได้เพียง 100 − 5 = 95 เมตร

นั่นคือ ก. วิ่งได้ 95 เมตร เมื่อ ข. วิ่งได้ 90 เมตร

∴ ถ้า ก. วิ่งได้ 1 เมตร ข. วิ่งได้ $\frac{90}{95} = \frac{18}{19}$ เมตร

เมื่อ ก. แข่งกับ ค. ก. ต่อให้ ค. 15 เมตร

∴ ทางที่ ก. วิ่ง คือ 100 เมตร ทางที่ ค. วิ่ง คือ 100 − 15 = 85 เมตร

แต่ ค. ยังแพ้ ก. อีก 5 เมตร

∴ ค. วิ่งได้เพียง 85 − 5 = 80 เมตร

นั่นคือ ก. วิ่งได้ 100 เมตร ค. วิ่งได้ 80 เมตร

∴ ถ้า ก. วิ่งได้ 1 เมตร ค. วิ่งได้ $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ เมตร

แต่ ก. วิ่งได้ 1 เมตร ข. วิ่งได้ $\frac{18}{19}$ เมตร

$\therefore$ ข. วิ่งได้ $\frac{18}{19}$ เมตร ก. วิ่งได้ $\frac{4}{5}$ เมตร

$\therefore$ ข. วิ่งได้ 450 เมตร ก. วิ่งได้ $\frac{4}{5} \times \frac{19}{18} \times 450 = 380$ เมตร

$\therefore$ ข. ต้องต่อให้ ก. $450 - 380 = 70$ เมตร

**ตอบ** 70 เมตร

**อธิบาย** ก. ต่อให้ ข. 10 เมตร หมายความว่า

ก. วิ่งตลอดทางคือ 100 เมตร ข. อยู่หน้า ก. 10 เมตร $\therefore$ คงเหลือทางซึ่ง ข. ต้องวิ่งเพียง $100 - 10 = 90$ เมตร

ก. แพ้ ข. 5 เมตร หมายความว่า

ข. ไปถึงหลักชัยแล้ว แต่ ก. ยังไปไม่ถึงหลักชัย อยู่ห่างหลักชัยอีก 5 เมตร ดังนั้นขณะที่ ข. วิ่งได้ทาง 90 เมตรนั้น ก. วิ่งได้ไม่ถึง 100 เมตร คงวิ่งได้เพียง $100 - 5 = 95$ เมตร

ก. ต่อให้ ค. 15 เมตร หมายความว่า

ก. วิ่งตลอดทางคือ 100 เมตร ค. วิ่งเพียง $100 - 15 = 85$ เมตร

แต่ ค. ยังแพ้ ก. อยู่อีก 5 เมตร หมายความว่า

ขณะที่ ก. วิ่งได้ถึงหลักชัยนั้น ค. ยังอยู่ห่างจากหลักชัย 5 เมตร ดังนั้นทางที่ ค. ต้องวิ่ง 85 เมตรนั้น ค. คงวิ่งได้เพียง $85 - 5 = 80$ เมตร ขณะที่ ก. วิ่งได้ 100 เมตร

**ขั้นต่อไป** ก็คือทำให้ระยะทางที่ ก. วิ่งทั้งสองครั้งเท่ากัน เราก็สามารถเปรียบเทียบการวิ่งของ ข และ ค. ได้ โดยเทียบให้คนที่วิ่งเร็วกว่า วิ่งเต็มระยะทาง 450 เมตร

**ตัวอย่าง 4** ก. ข. ค. เล่นกีฬาชนิดหนึ่ง ซึ่งชนะเมื่อได้แต้ม 1000 ก. ทำแต้มได้ 60 เมื่อ ข. ทำได้ 45 และ ข. ทำได้ 30 ขณะที่ ค. ทำ 25 จงหาว่า ก. ชนะ ข. กี่แต้ม และ ข. ชนะ ค. กี่แต้ม

วิธีทำ ก. ได้ 60 ข. ได้ 45

$\therefore$ ก. ได้ 1060 ข. ได้ $\frac{45}{60} \times 1000 = 750$

$\therefore$ ก. ชนะ ข. $1000 - 750 = 250$

ข. ได้ 30 ค. ได้ 25

$\therefore$ ข. ได้ 750 ค. ได้ $\frac{25}{30} \times 750 = 625$

$\therefore$ ข. ชนะ ค. $750 - 625 = 125$

ตอบ { ก. ชนะ ข. 250 แต้ม
ข. ชนะ ค. 125 แต้ม

ตัวอย่าง 5 ก. ข. ค. ไปยิงนกด้วยกัน ก. ยิง 4 นัดได้นก 1 ตัว ข. ยิง 5 นัด ได้นก 2 ตัว ค. ยิง 8 นัดได้นก 3 ตัว ปรากฏว่าเขาหมดกระสุนปืนไปคนละเท่า ๆ กัน ได้นกรวมกัน 41 ตัว จงหาว่าคนไหนยิงได้กี่ตัว

วิธีทำ ก. ยิง 4 นัด ได้นก 1 ตัว

$\therefore$ ก. ยิง 1 นัด ได้นก $\frac{1}{4}$ ตัว

ข. ยิง 5 นัด ได้นก 2 ตัว

$\therefore$ ข. ยิง 1 นัด ได้นก $\frac{2}{5}$ ตัว

ค. ยิง 8 นัด ได้นก 3 ตัว

$\therefore$ ค. ยิง 1 นัด ได้นก $\frac{3}{8}$ ตัว

$\therefore$ ก. ข. ค. ยิงคนละ 1 นัดรวม 3 นัด ได้นก $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{41}{40}$ ตัว

ได้นก $\frac{41}{40}$ ตัว ใช้กระสุนปืนคนละ 1 นัด

$\therefore$ ได้นก 41 ตัว ใช้กระสุนปืนคนละ $1 \times \frac{40}{41} \times 41 = 40$ นัด

$\therefore$ ก. ยิงนกได้ $\frac{40 \times 1}{4} = 10$ ตัว
ข. ยิงนกได้ $\frac{40 \times 2}{8} = 16$ ตัว
ค. ยิงนกได้ $\frac{40 \times 3}{8} = 15$ ตัว
} ตอบ

อธิบาย โจทย์บอกว่าหมดกระสุนปืนไปคนละเท่า ๆ กัน เราต้องทำให้ทุกคนยิงเท่า ๆ กัน จะเทียบให้เป็นเท่าไรก็ได้ แต่ที่สะดวกคือ 1. หาดูว่าถ้ายิงคนละ 1 นัดจะได้นก

รวมกันกี่ตัว แม้การทำเช่นนี้จะผิดความจริงไปบ้าง คือนกเป็นเศษส่วน แต่เป็นการคำนวณซึ่งยังไม่สำเร็จ เมื่อสำเร็จแล้วก็ลงตัวพอดี หรือจะทำอีกวิธีหนึ่งก็ได้ คือหาเลขมาจำนวนหนึ่งซึ่ง 4, 5, 8 หารได้ (คือ ค.ร.น.) แล้วเทียบให้ทุกคนยิงได้เท่านั้นนัด การคำนวณต่อไปคงเป็นวิธีทำนองเดียวกัน

## แบบฝึกหัด 17

1. ในการแข่งขันวิ่งเร็วทาง 100 เมตร ก. ชนะ ข. 20 เมตร เมื่อ ข. แข่งกับ ค. ข. ชนะ ค. 5 เมตร ถ้าให้ ก. แข่งกับ ค. ในทาง 200 เมตร ก. จะชนะ ค. กี่เมตร (48)
2. ในการแข่งขันวิ่งเร็วระยะทาง 200 เมตร ก. ชนะ ข. 31 เมตร และชนะ ค. 18 เมตร ถ้าให้ ค. แข่งกับ ข. ในทาง 350 หลา ใครจะชนะและชนะกี่หลา (ค. ชนะ 25 หลา)
3. ในการเล่นบิลเลียดเกม 50 ก. ต่อให้ ข. 15 แต้ม ต่อให้ ค. 20 แต้ม ถ้าให้เล่นเกม 70 ข. ต้องต่อให้ ค. กี่แต้ม (10)
4. ในการวิ่งแข่งทาง 400 หลา ก. ต่อให้ ข. 30 หลา แต่แพ้ 20 หลา ถ้า ก. ไม่ต่อให้ ข. เลย ก. จะชนะ ข. กี่หลา ($10\frac{10}{19}$)
5. ก. และ ข. ไปยิงนก ก. ยิง 7 นัดเมื่อ ข. ยิง 3 นัด ก. ยิง 4 นัดได้นกหนึ่งตัว ข. ยิง 2 นัดได้นก 1 ตัว ถ้าหาก ข. ยิงผิดทั้งสิ้น 36 นัด จงหาว่า ก. ยิงนกได้กี่ตัว (42)
6. ในการเล่นเกมอย่างหนึ่ง ซึ่งชนะเมื่อได้แต้ม 100, ก. ต่อให้ ข. 10 แต้ม แต่ถ้า ข. เล่นกับ ค. ในเกมซึ่งชนะเมื่อได้แต้ม 75 แล้ว ข. ต่อให้ ค. ได้ 15 แต้ม และถ้า ข. เล่นกับ ง. ในเกม 90 แต้ม ข. ต่อให้ ง. ได้ 9 แต้ม จงหาว่าถ้า ก. คู่กับ ง. และ ข. คู่กับ ค. ในการแข่งขันเกม 362 แต้ม คู่ไหนจะชนะ และชนะกี่แต้ม (ก.ง. ชนะ 38 แต้ม)
7. ก. ข. วิ่งแข่งกันในระยะทาง 1 ไมล์ ก. ชนะ 80 หลา และถ้า ก. แข่งกับ ค. ก. ชนะ ค. 20 วินาที ถ้าให้ ข. แข่งกับ ค. บ้าง ข. ชนะ ค. 5 วินาที จงหาว่า ก. วิ่งตลอดทาง 1 ไมล์สิ้นเวลาเท่าไร (5 นาที 15 วินาที)
8. ในการวิ่งแข่งขัน ก. ต่อให้ ข. 110 หลาในระยะทาง 2 ไมล์ และ ก. ต่อให้ ค.

120 หลาในระยะทาง 5 ไมล์ ถ้า ข. และ ค. วิ่งทาง 1 ไมล์ ใครจะชนะและชนะเท่าไร (ข้อสอบชุดครูมูล — ค. ชนะ $31\frac{3}{7}$ หลา)

9. ในการแข่งขันวิ่งเร็วระหว่าง ก. กับ ข. ก. วิ่งได้มากกว่า ข. 5 ฟุตทุก ๆ 55 หลา เมื่อ ก. ไปถึงหลักชัย ก็ชนะ ข. 53 หลา 1 ฟุต จงหาว่าเขาวิ่งแข่งในระยะทางเท่าไร (1 ไมล์)

10. ก. ข. วิ่งแข่งกัน ก. แพ้ แต่ถ้า ก. วิ่งเร็วขึ้นอีก $\frac{1}{3}$ ก. จะชนะ ข. และในการแข่งขันทาง 2 ไมล์ ข. แพ้ ก. 22 หลา จงหาว่าถ้า ก. และ ข. วิ่งแข่งกันในทาง 106 เมตร ข. จะชนะ ก. กี่เมตร (26 เมตร)

11. ก. วิ่งได้ 100 หลาในเวลา 10.5 วินาที และ ข. วิ่งได้ 100 หลาในเวลา 11.2 วินาที ถามว่าถ้า ก. วิ่งระยะนั้นจะต้องต่อให้ ข. เท่าไร (ข้อสอบเข้าเตรียมจุฬา ๆ —6.25 หลา)

12. ในสนามแข่ง 100 เมตร ก. ชนะ ข. 5 เมตร ในสนามแข่ง 200 เมตร ข. ชนะ ค. 10 เมตร ถ้า ก. กับ ค. แข่งกันในสนาม 400 เมตร และวิ่งด้วยฝีเท้าเช่นเดิม ก. จะชนะ ค. เท่าใด ★★ (39)

13. ในการวิ่งแข่งทาง 100 หลา A. ต่อให้ B. ได้ 10 หลา และต่อให้ C. ได้ 15 หลา ถ้า B และ C วิ่งแข่งทาง 150 หลา B ควรต่อให้ C เท่าใด ★★ ($8\frac{1}{3}$)

14. ก. กับ ข. วิ่งแข่งกัน ก. ต่อให้ ข. 5 นาที ปรากฏว่าเมื่อ ก. วิ่งได้ 50 เมตร ข. วิ่งได้ 42 เมตร จงหาว่านานเท่าไร ก. จึงจะทัน ข. (45)

15. ในการแข่งขันวิ่งเร็วทาง 200 เมตร ก. ต่อให้ ข. 8 เมตร ก. และ ค. ออกวิ่งจากที่ตั้งต้นด้วยกัน แต่ ก. ออกวิ่งก่อน ค. ปรากฏว่า ก. วิ่งตลอดทางสิ้นเวลา 25 นาที และชนะ ค. 40 เมตร แต่ ก. ไปถึงหลักชัยภายหลัง ข. 1 นาที เมื่อ ข. วิ่งไปได้ 15 นาทีนั้น ค. วิ่งอยู่ข้างหลัง ข. 48 เมตร จงหาว่า ก. ออกวิ่งก่อน ค. กี่นาที (5)

16. ในการแข่งขันวิ่งเร็วทาง 180 เมตร ก. ต่อให้ ข. และ ค. เป็นระยะทาง เมื่อไปถึงหลักชัยนั้น ก. และ ค. ถึงพร้อมกัน และชนะ ข. 30 เมตร ถ้าปรากฏว่าขณะที่ ก. วิ่งไปได้ 108 เมตรนั้น ก. อยู่หน้า ข. 14 เมตร และอยู่หลัง ค. 8 เมตร จงหาว่า ก. ต่อให้ ข. และ ค. เท่าไร (ต่อให้ ข. 10 เมตร ต่อให้ ค. 20 เมตร)

17. ก. และ ข. แจวเรือแข่งกัน ก. แจวได้ 35 ครั้งใน 1 นาที และการแจวครั้งหนึ่ง ๆ เรือแล่นไปเป็นทาง 18 ฟุต ข. แจวได้ 33 ครั้งใน 1 นาที และครั้งหนึ่ง ๆ เรือแล่นไป 20 ฟุต ถ้าทางแข่งขันยาว 1 ไมล์ ใครจะชนะ และชนะกี่วินาที (ข. ชนะ $21\frac{9}{11}$ วินาที)

18. ก. และ ข. วิ่งสวนทางกันในทางวงกลมยาว 550 หลา เขาออกวิ่งจากที่แห่งเดียวกัน ข. ออกก่อน ก. 100 หลา เขาสวนทางกันเมื่อ ก. วิ่งไปได้ 250 หลา จงหาว่าใครจะมาถึงจุดเริ่มต้นก่อนกัน และชนะกันกี่หลา (ก. ถึงก่อน และชนะ ข. 10 หลา)

19. ก. ข. เดินทางไปยังตำบลหนึ่งซึ่งอยู่ห่างออกไป $4\frac{1}{2}$ ไมล์ เขาตั้งต้นจากที่แห่งเดียวกัน ก. ให้ ข. ออกเดินทางไปก่อน 3 นาทีแล้วเขาจึงตามไป เมื่อ ข. ไปถึงตำบลที่หมายก็กลับทันที หลังจากนั้นเป็นระยะทางยาว 1 ไมล์ ข. ก็สวนทางกับ ก. ถ้า ก. เดินทางได้ 1 ไมล์ในเวลา 18 นาที จงหาอัตราเร็วของ ข. ใน 1 ชั่วโมง (5 ไมล์)

20. ก. ข. ค. วิ่งแข่งกันในระยะทาง 240 เมตร เขาวิ่งจากที่แห่งเดียวกัน แต่ ค. ออกวิ่งก่อน ก. 1 วินาที ก. ออกวิ่งก่อน ข. 3 วินาที แม้กระนั้น ข. ก็ยังชนะ ก. 10 เมตร และชนะ ค. 24 เมตร อยากทราบว่าถ้าให้ ก. และ ค. วิ่งแข่งกันในทาง 100 เมตร ก. จะต้องต่อให้ ค. กี่เมตรจึงจะถึงหลักชัยพร้อมกัน (10 เมตร)

---

เครื่องหมาย ★ ★ คือข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การคำนวณเรื่องนาฬิกา
# PROBLEMS ON HANDS OF CLOCKS

# 17

การคำนวณเรื่องนาฬิกานี้ เป็นการคำนวณเกี่ยวกับเข็มของนาฬิกา โดยทั่วไปย่อมเป็นที่ทราบกันว่า เข็มนาฬิกามีอยู่สองเข็ม คือ เข็มสั้นและเข็มยาว เข็มสั้นแสดงเวลาเป็นชั่วโมง เข็มยาวแสดงเวลาเป็นนาที ปกติเข็มทั้งสองนี้อยู่บนแกนเดียวกัน (ความจริงคนละแกนแต่ส่วมครอบกันอยู่) และเรารู้ย่อมทราบว่าบนหน้าปัทม์นาฬิกานั้น เขาแบ่งไว้เป็นช่อง ๆ มีรวม 60 ช่อง เรียกว่าช่องนาที และเขายังได้แบ่งช่องใหญ่ไว้อีก โดยเอา 5 ช่องนาทีเป็น 1 ช่องใหญ่ เรียกว่าช่องชั่วโมง ด้วยเหตุนี้ช่องชั่วโมงจึงมีทั้งหมด 12 ช่อง

เราทราบว่า 60 นาทีเป็น 1 ชั่วโมง

ดังนั้นเข็มยาวซึ่งแสดงเวลาเป็นนาที เมื่อเคลื่อนไปได้ 1 รอบ คือ 60 ช่อง ก็จะเป็นเวลา 1 ชั่วโมง ขณะเดียวกันนี้เข็มสั้นก็จะเคลื่อนไปพร้อมกัน คือ เคลื่อนไป 1 ช่องชั่วโมง ซึ่งเท่ากับ 5 ช่องนาที

นั่นคือ เข็มยาวเดินไป 60 ช่องนาที เข็มสั้นเดินไปได้ 5 ช่องนาที

คือ เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที จะเห็นได้ว่า

การเดินหรือการเคลื่อนที่ของเข็มยาวและเข็มสั้น ก็คือการแข่งขันในวงกลมนั่นเอง และเป็นการแข่งขันที่คงที่ คือ เข็มยาวจะเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ขณะที่เข็มสั้นเดินไป 5 ช่องนาทีเสมอไป

การคำนวณเรื่องนาฬิกานี้ อาจแบ่งออกได้เป็น 2 อย่าง คือ

การคำนวณเกี่ยวกับนาฬิกาเรือนเดียว และการคำนวณเกี่ยวกับนาฬิกาหลายเรือน

## ก. การคำนวณเกี่ยวกับนาฬิกาเรือนเดียว

ได้แก่การคำนวณหาเวลาเมื่อ

- เข็มตั้งฉากกัน
- เข็มซ้อนกันหรือทับกัน
- เข็มอยู่ตรงกันข้ามหรือต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

### 1. เข็มตั้งฉากกัน

เข็มทั้งสองจะตั้งฉากกัน เมื่ออยู่ห่างกัน 15 ช่องนาที

ดังนั้นในเวลา 1 ชั่วโมง เข็มจะตั้งฉากกัน 2 ครั้ง

### วิธีคิดหาเวลาที่เข็มตั้งฉากกัน

จากความรู้ที่ว่าเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาทีในเวลา 60 นาที

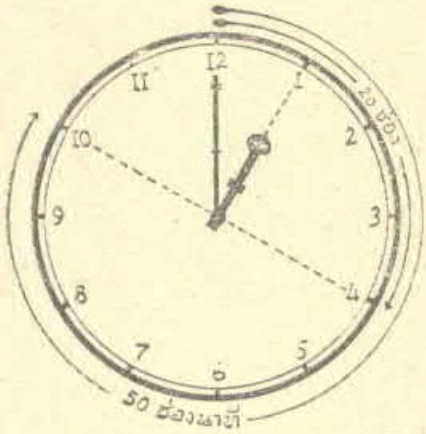
เราจึงหาดูว่า เข็มยาวจะต้องเดินมากกว่าเข็มสั้นกี่ช่องนาที จึงจะห่างกัน 15 ช่องนาที วิธีที่จะรู้ว่าเข็มยาวต้องเดินมากกว่าเข็มสั้นเท่าไรนั้น มีวิธีคิดคือ

จับเข็มสั้นให้อยู่กับที่ แล้วหมุนเข็มยาวไปให้ห่างจากเข็มสั้น 15 ช่องนาที

ระยะทางที่เข็มยาวเคลื่อนไป คือระยะที่เข็มยาวจะต้องเดินให้ได้มากกว่าเข็มสั้น

(โปรดระวังว่าในเวลา 1 ชั่วโมง เข็มจะอยู่ห่างกัน 15 ช่องนาที 2 ครั้งเสมอไป)

เช่น **ระหว่าง 13.00 น. และ 14.00 น. เข็มจะตั้งฉากกันเมื่อไร**




เวลา 13.00 น. นาฬิกายาวอยู่ที่เลข 12 เข็มสั้นอยู่ที่เลข 1

จับเข็มสั้นให้อยู่กับที่ หมุนเข็มยาวไปที่เลข 4 ก็จะอยู่ห่างกัน 15 ช่องนาที ระยะที่เข็มยาวเคลื่อนไปคือ 20 ช่องนาที

∴ **เข็มจะตั้งฉากกันครั้งแรกเมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 20 ช่องนาที**

ต่อไปหมุนเข็มยาวไปที่เลข 10 (เข็มสั้นอยู่กับที่) ก็จะอยู่ห่างกัน 15 ช่องนาทีอีก ระยะทางที่เข็มยาวเคลื่อนไปคือ 50 ช่องนาที

∴ **เข็มจะตั้งฉากกันครั้งที่สองเมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 50 ช่องนาที**

เมื่อทราบเช่นนี้แล้วก็คำนวณหาเวลาออกมาได้ดังนี้

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาทีในเวลา 60 นาที

**เข็มตั้งฉากกันครั้งแรก** เมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 20 ช่องนาที

ในเวลา $\frac{60}{55} \times 20 = 21\frac{9}{11}$ นาที

**เข็มตั้งฉากกันครั้งที่สอง** เมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 50 ช่องนาที

ในเวลา $\frac{60}{55} \times 50 = 54\frac{6}{11}$ นาที

คือ เข็มตั้งฉากกันครั้งแรก เวลา 13 นาฬิกา $21\frac{9}{11}$ นาที

เข็มตั้งฉากกันครั้งหลัง เวลา 13 นาฬิกา $54\frac{6}{11}$ นาที

2. **เข็มซ้อนกัน หรือที่เรียกว่า ทับกัน** ใน 1 ชั่วโมงเข็มซ้อนกัน 1 ครั้ง

วิธีคิดคือ ดูว่าเวลาแรกเริ่มนั้น เข็มยาวอยู่ห่างเข็มสั้นกี่ช่องนาที ซึ่งเข็มยาวจะต้องเดินให้ได้มากกว่าเข็มสั้นเท่านั้นช่องนาที จึงจะทับเข็มสั้นได้

เช่น ระหว่างเวลา 5 นาฬิกา และ 6 นาฬิกา เข็มจะซ้อนกันเมื่อไร

เวลา 5 นาฬิกา เข็มยาวอยู่ที่เลข 12

เข็มสั้นอยู่ที่เลข 5

∴ ห่างกัน 25 ช่องนาที

ดังนั้นเข็มยาวต้องเดินให้ได้มากกว่าเข็มสั้น 25 ช่องนาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

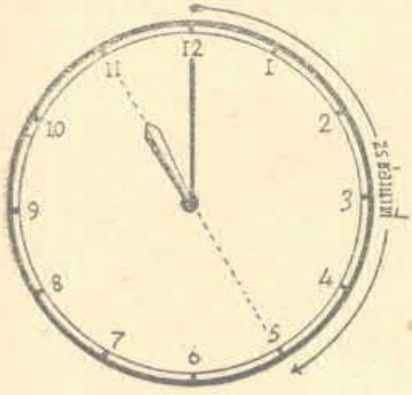
∴ เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 25 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 25 = 27\frac{3}{11}$ นาที

คือเข็มจะซ้อนกันเมื่อเวลา 5 นาฬิกา $27\frac{3}{11}$ นาที

3. **เข็มอยู่ตรงกันข้าม หรือที่ว่าต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน** ใน 1 ชั่วโมง เข็มอยู่ตรงข้ามกัน 1 ครั้ง

เข็มอยู่ตรงข้ามกันคือ อยู่ห่างกัน 30 ช่องนาที วิธีคิดเช่นเดียวกับเรื่องเข็มตรงฉากเว้นแต่แทนที่จะเป็น 15 ช่องนาที กลับห่างกัน 30 ช่องนาทีเท่านั้น

เช่น ระหว่างเวลา 11.00 นาฬิกา และ 12.00 นาฬิกา เมื่อไรเข็มจึงจะชี้ตรงกันข้ามพอดี




วิธีคิด เวลา 11.00 นาฬิกา เข็มสั้นอยู่ที่เลข 11

เข็มยาวอยู่ที่เลข 12

จับเข็มสั้นให้อยู่นิ่ง หมุนเข็มยาวไปให้อยู่ห่างกับเข็มสั้น 30 ช่องนาที คือที่เลข 5 ระยะที่เข็มยาวเคลื่อนไป คือ 25 ช่องนาที

ดังนั้นเข็มจะอยู่ตรงกันข้าม เมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 25 ช่องนาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

∴ เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 25 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 25 = 27\frac{3}{11}$ นาที

คืออยู่ตรงกันข้ามเวลา 11 นาฬิกา $27\frac{3}{11}$ นาที

**ทำแบบใช้สูตร**

ให้ T เป็นจำนวนนาที ที่เข็มยาวเคลื่อนไป

D เป็นจำนวนช่องนาทีที่เข็มทั้งสองห่างกันครั้งแรก

R เป็นจำนวนช่องนาทีที่โจทย์ต้องการให้เข็มอยู่ห่างกัน เช่น ทับกัน R = 0, ตรงกันข้าม R = 30

จะได้สูตร $T = \frac{12}{11}(D \pm R)$

ใช้สูตรนี้ เมื่อต้องการหาเวลาที่**เข็มทับกัน หรืออยู่ตรงกันข้าม**

ถ้า D มีค่ามากกว่า R หรือเท่ากับ R ใช้ D − R ถ้า D มีค่าน้อยกว่า R ใช้ D+R

จงดูเกตตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1** เมื่อไรเข็มจะทับกันระหว่างเวลา 9.00 นาฬิกา และ 10.00 นาฬิกา

**วิธีทำ** เวลา 9 นาฬิกา เข็มอยู่ห่างกัน 45 ช่องนาที

∴ เข็มยาวต้องเดินมากกว่าเข็มสั้น 45 ช่องนาทีจึงจะทับกัน

เข็มยาวเดินมากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

∴ เข็มยาวเดินมากกว่าเข็มสั้น 45 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 45 = 49\frac{1}{11}$ นาที

∴ เข็มจะทับกันเวลา 9 นาฬิกา $49\frac{1}{11}$ นาที

**ตอบ**

**ทำแบบใช้สูตร** เวลา 9 น. เข็มห่างกัน 45 ช่องนาที

∴ D = 45

เข็มทับกัน R = 0 (คือเข็มไม่ห่างกันเลย)

จากสูตร $T = \frac{12}{11}(D \pm R)$

$= \frac{12}{11}(45 \pm 0)$

$= \frac{12}{11} \times 45 = 49\frac{1}{11}$

∴ เข็มทับกันเวลา 9 นาฬิกา $49\frac{1}{11}$ นาที

**ตัวอย่าง 2** เมื่อไรเข็มจะอยู่ตรงข้ามกัน ระหว่างเวลา

(ก) 8 นาฬิกา และ 9 นาฬิกา

(ข) 13 นาฬิกา และ 14 นาฬิกา

**วิธีทำ** (ก) เวลา 8 นาฬิกา เข็มอยู่ห่างกัน 40 ช่องนาที

∴ ต้องหมุนเข็มยาวมาอีก 10 ช่องนาที จึงจะอยู่ตรงข้าม (ห่างกัน 30 ช่องนาที)

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

∴ เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 10 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 10 = 10\frac{10}{11}$ นาที

∴ ระหว่างเวลา 8 และ 9 นาฬิกา เข็มอยู่ตรงข้ามเวลา 8 นาฬิกา $10\frac{10}{11}$ นาที

(ข) เวลา 13 นาฬิกา เข็มอยู่ห่างกัน 5 ช่องนาที

∴ เข็มยาวต้องเดินได้มากกว่าเข็มสั้น $30 + 5 = 35$ ช่องนาทีจึงจะอยู่ตรงข้าม

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

∴ เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 35 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 35 = 38\frac{2}{11}$ นาที

ระหว่างเวลา 13 และ 14 นาฬิกา เข็มอยู่ตรงข้ามกันเวลา 13 นาฬิกา $38\frac{2}{11}$ นาที

**ตอบ**

**ทำแบบใช้สูตร**

(ก) สูตร $T = \frac{12}{11}(D \pm R)$

$D = 40$, $R = 30$; D มากกว่า R ∴ ใช้ $D - R$

$$T = \frac{12}{11}(D - R)$$
$$= \frac{12}{11}(40 - 30)$$
$$= \frac{12}{11} \times 10 = 10\frac{10}{11}$$

∴ เข็มอยู่ตรงข้ามเวลา 8 นาฬิกา $10\frac{10}{11}$ นาที

(ข) สูตร $T = \frac{12}{11}(D \pm R)$

เวลา 13 น. เข็มห่างกัน 5 ช่องนาที

$D = 5$, $R = 30$; D น้อยกว่า R ใช้ $D + R$

$$\therefore \quad T = \frac{12}{11}(D + R)$$
$$= \frac{12}{11}(5 + 30)$$
$$= \frac{12}{11} \times 35 = 38\frac{2}{11}$$

$\therefore$ เข็มอยู่ตรงข้ามเวลา 13 นาฬิกา $38\frac{2}{11}$ นาที

**ตัวอย่าง 3** เข็มจะตั้งฉากกันเมื่อไรระหว่างเวลา

(ก) 7 และ 8 นาฬิกา

(ข) 10 และ 11 นาฬิกา

**วิธีทำ** (ก) เวลา 7 น. เข็มอยู่ห่างกัน 35 ช่องนาที

**ครั้งแรก** เข็มจะตั้งฉากกัน เมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น $35 - 15 = 20$ ช่องนาที

**ครั้งหลัง** เข็มจะตั้งฉากกัน เมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น $35 + 15 = 50$ ช่องนาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 20 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 20 = 21\frac{9}{11}$ นาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 50 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 50 = 54\frac{6}{11}$ นาที

(ก) <u>ตอบ</u> เข็มจะตั้งฉากกันเวลา { 7 นาฬิกา $21\frac{9}{11}$ นาที และ
7 นาฬิกา $54\frac{6}{11}$ นาที

(ข) เวลา 10 นาฬิกา เข็มอยู่ห่างกัน 10 ช่องนาที

$\therefore$ เข็มจะตั้งฉากกันครั้งแรกเมื่อเข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 5 ช่องนาที

ครั้งหลัง เมื่อเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 35 ช่องนาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 55 ช่องนาที ในเวลา 60 นาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 5 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 5 = 5\frac{5}{11}$ นาที

เข็มยาวเดินได้มากกว่าเข็มสั้น 35 ช่องนาที ในเวลา $\frac{60}{55} \times 35 = 38\frac{2}{11}$ นาที

(ข) <u>ตอบ</u> เข็มจะตั้งฉากกันเวลา { 10 นาฬิกา $5\frac{5}{11}$ นาที และ
10 นาฬิกา $38\frac{2}{11}$ นาที

**สูตรสำหรับเข็มตั้งฉาก**

$$T_1 = \frac{12}{11}(D \pm R)$$

$$T_2 = \frac{12}{11}(D \pm R + 30)$$

**ยกเว้น** ถ้าเข็มสั้นอยู่ที่ เลข 10 หรือ เลข 11

ใช้สูตร $T_1 = \frac{12}{11}(R - D)$

$$T_2 = \frac{12}{11}(R - D + 30)$$

**ตัวอย่าง 3** ทำแบบใช้สูตร

(ก) $T_1 = \frac{12}{11}(D \pm R)$

เวลา 7 น. $D = 35,\ R = 15$

$\therefore$ $T_1 = \frac{12}{11}(35 - 15)$

$= \frac{12}{11} \times 20 = 21\frac{9}{11}$

$\therefore$ $T_1$ คือ ตงฉากครั้งที่ 1 เวลา 7 นาฬิกา $21\frac{9}{11}$ นาที

$T_2 = \frac{12}{11}(D \pm R + 30)$

$= \frac{12}{11}(35 - 15 + 30)$

$= \frac{12}{11} \times 50 = 54\frac{6}{11}$

$\therefore$ $T_2$ คือ ตงฉากครั้งที่ 2 เวลา 7 นาฬิกา $54\frac{6}{11}$ นาที

(ข) เวลา 10 นาฬิกา $D = 10,\ R = 15$

ใช้สูตร $T_1 = \frac{12}{11}(R - D)$

$= \frac{12}{11}(15 - 10)$

$= \frac{12}{11} \times 5 = 5\frac{5}{11}$

$\therefore$ ตงฉากครั้งที่ 1 เวลา 10 นาฬิกา $5\frac{5}{11}$ นาที

$T_2 = \frac{12}{11}(R - D + 30)$

$= \frac{12}{11}(15 - 10 + 30)$

$= \frac{12}{11} \times 35 = 38\frac{2}{11}$

$\therefore$ ตงฉากครั้งที่ 2 เวลา 10 นาฬิกา $38\frac{2}{11}$ นาที

**ตัวอย่าง 4** เวลา 15 น. ถึง 16 น. เข็มจะตั้งฉากกันเวลาอะไร

**วิธีทำ** สูตร $T_1 = \frac{12}{11}(D \pm R)$

$$T_2 = \frac{12}{11}(D \pm R + 30)$$

เวลา 15 น. $D = 15$, $R = 15$ ในที่นี้ $D = R$ ใช้ $D - R$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{12}{11}(15 - 15)$$

$$= 0$$

คือตั้งฉากกันครั้งแรกเมื่อเวลา 15 นาฬิกา 0 นาที คือเวลา 15 นาฬิกาตรง

$$T_2 = \frac{12}{11}(15 - 15 + 30)$$

$$= 32\frac{8}{11}$$

ตั้งฉากครั้งที่สองเมื่อเวลา 15 นาฬิกา $32\frac{8}{11}$ นาที

## ๒. การคำนวณเกี่ยวกับนาฬิกาหลายเรือน

### 1. หาว่าเมื่อไรนาฬิกาหลายเรือนจึงจะแสดงเวลาตรงกัน

**ตัวอย่าง 5** นาฬิกาสามเรือน เรือนแรกเดินช้าสัปดาห์ละ 5 นาที เรือนที่สองและที่สามเดินเร็วชั่วโมงละ 3 นาทีและ 5 นาทีตามลำดับ เมื่อนาฬิกาทั้งสามเรือนนี้แสดงเวลาเที่ยวกันครั้งหนึ่งแล้ว นานเท่าไรจึงจะแสดงเวลาเที่ยวกันอีก

**วินิจฉัย** การทำโจทย์ข้อนี้ ต้องเอานาฬิกาเรือนที่เร็วที่สุดเป็นหลัก แล้วนำไปเทียบกับนาฬิกาเรือนอื่น ๆ โดยเทียบหาแต่ละครั้งว่า ถ้าให้เรือนที่เดินเร็วที่สุดเดินเร็วกว่าแต่ละเรือนเป็นเวลา 12 ชั่วโมงแล้วจะเป็นเวลานานเท่าไร เอาเวลาเหล่านั้นไปหา ค.ร.น. ค.ร.น. ที่หาได้คือเวลาที่นาฬิกาเหล่านั้นชี้เวลาเที่ยวกัน **แต่โปรดเข้าใจว่าเป็นเวลาที่ชี้ตรงกันเท่านั้น ไม่ใช่เวลาจริง**

**วิธีทำ** เรือนที่หนึ่ง เดินช้าสัปดาห์ละ 5 นาที

เรือนที่สอง เดินเร็วสัปดาห์ละ 3 นาที

เรือนที่สาม เดินเร็วสัปดาห์ละ 5 นาที

$\therefore$ เรือนที่สามเดินเร็วกว่าเรือนที่หนึ่งสัปดาห์ละ $5 + 5 = 10$ นาที

เรือนที่สามเดินเร็วกว่าเรือนที่สองสัปดาห์ละ $5 - 3 = 2$ นาที

เรือนที่สามเดินเร็วกว่าเรือนที่หนึ่ง 10 นาที ในเวลา 1 สัปดาห์

∴ เรือนที่สามเดินเร็วกว่าเรือนที่หนึ่ง 12 ชม. $= 12 \times 60$ นาที ในเวลา $\frac{1}{10} \times 12 \times 60$ $= 72$ สัปดาห์

และเรือนที่สามเดินเร็วกว่าเรือนที่สอง 2 นาที ในเวลา 1 สัปดาห์

∴ เรือนที่สามเดินเร็วกว่าเรือนที่สอง 12 ชม. $= 12 \times 60$ นาที ในเวลา $\frac{1}{2} \times 12 \times 60$ $= 360$ สัปดาห์

ค.ร.น. ของ 72 และ 360 คือ 360

∴ นาฬิกาทั้งสามเรือนจะแสดงเวลาพร้อมกันอีกเมื่อเวลาผ่านไป 360 สัปดาห์

**ตอบ** 360 สัปดาห์

## 2. หาเวลาซึ่งนาฬิกาหลายเรือนแสดงถูกต้องพร้อมกัน

**ตัวอย่าง 6** นาฬิกา 3 เรือน เรือนแรกเดินเร็ววันละ 4 นาที เรือนที่สองเดินช้าวันละ 3 นาที เรือนที่สามเดินเร็ววันละ 5 นาที จงหาว่าเมื่อไรนาฬิกาทั้งสามเรือนนี้ จะชี้เวลาถูกต้องพร้อมกันอีก หลังจากที่ชี้เวลาถูกต้องพร้อมกันแล้ว

**วินิจฉัย** เทียบให้นาฬิกาแต่ละเรือนเดินช้าหรือเร็ว 12 ชั่วโมง จะเป็นเวลาผ่านไปแต่ละเรือนเท่าไร เอาเวลาที่หาได้ไปหา ค.ร.น. คือ เวลาที่นาฬิกาเหล่านั้นแสดงเวลาถูกต้องพร้อมกัน

**วิธีทำ** เรือนแรกเร็ว 4 นาที ในเวลา 1 วัน

∴ เดินเร็ว 12 ชม. $= 12 \times 60$ นาที ในเวลา $\frac{1}{4} \times 12 \times 60 = 180$ วัน

เรือนที่สอง เดินช้า 3 นาที ในเวลา 1 วัน

∴ เดินช้า 12 ชม. $= 12 \times 60$ นาที ในเวลา $\frac{1}{3} \times 12 \times 60 = 240$ วัน

เรือนที่สาม เดินเร็ว 5 นาที ในเวลา 1 วัน

∴ เดินเร็ว 12 ชม. $= 12 \times 60$ นาที ในเวลา $\frac{1}{5} \times 12 \times 60 = 144$ วัน

ค.ร.น. ของ 180, 240 และ 144 คือ 720

∴ นาฬิกาทั้งสามเรือนจะแสดงเวลาถูกต้องพร้อมกันอีกเมื่อเวลาผ่านไป 720 วัน

**ตอบ** 720 วัน

3. การคำนวณเอื่น ๆ

**ตัวอย่าง 7** นาฬิกาเรือนหนึ่งตั้งให้ตรงเมื่อเวลาเที่ยงวัน ครั้นเวลา 20.30 นาฬิกาวันเดียวกันนั้นนาฬิกาเรือนนี้แสดงเวลา 20.47 นาฬิกา ในวันรุ่งขึ้นนาฬิกาเรือนนี้แสดงเวลา 19.00 นาฬิกา อยากทราบว่าเป็นเวลาจริงเท่าไร

วิธีทำ

จากเที่ยงวัน คือ 12 นาฬิกา ถึง 20.30 นาฬิกา เป็นเวลา 8 ชั่วโมง 30 นาที $= 8\frac{1}{2}$ ชม.
แต่นาฬิกาแสดงเวลา 20.47 นาฬิกา คือนาฬิกานี้เดินมาได้ 8 ชั่วโมง 47 นาที $= 8\frac{47}{60}$ ชม.
นาฬิกาเรือนนี้เดินจาก 12 น. ถึง 19 น. วันรุ่งขึ้นเป็นเวลา 31 ชั่วโมง

นาฬิกานี้เดินได้ $8\frac{47}{60}$ ชม. $= \frac{527}{60}$ ชม. เวลาจริงผ่านไป $8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ ชั่วโมง

$\therefore$ นาฬิกานี้เดินได้ 31 ชม. เวลาจริงผ่านไป $\frac{17}{2} \times \frac{60}{527} \times 31 = 30$ ชั่วโมง

จาก 12 น. ไปอีก 30 ชั่วโมง คือ 18.00 น. วันรุ่งขึ้น

ตอบ เวลาจริง คือ 18.00 นาฬิกา

**ตัวอย่าง 8** นาฬิกาแขวน 2 เรือน เรือนแรกเดินเร็วกว่าเวลาจริงชั่วโมงละ 6 นาที เรือนหลังเดินช้ากว่าเวลาจริงชั่วโมงละ 4 นาที, เมื่อตั้งให้ตรงกันเวลาเที่ยงวันแล้ว จงหาว่าเวลาเท่าไรเข็มยาวของแต่ละเรือนจึงจะขนานกัน โดยที่ปลายเข็มทั้งสองอยู่ตรงกันข้าม

**วินิจฉัย** เข็มยาวจะขนานกันโดยปลายอยู่ตรงกันข้ามได้ เมื่อเข็มยาวของเรือนเร็วเดินได้มากกว่าเรือนช้า 30 นาที

วิธีทำ

ในเวลา 1 ชั่วโมง เดินเร็วกว่ากัน $6 + 4 = 10$ นาที
เดินเร็วกว่ากัน 10 นาที ในเวลา 1 ชั่วโมง
$\therefore$ เดินเร็วกว่ากัน 30 นาที ในเวลา $\frac{1}{10} \times 30 = 3$ ชั่วโมง
$\therefore$ เข็มยาวจะขนานกันโดยชี้ตรงกันข้ามเมื่อเวลา 12 น. + 3 ชม. = 15 นาฬิกา

ตอบ 15.00 นาฬิกา

**ตัวอย่าง 9** เวลา 8.00 นาฬิกา นาฬิกาเรือนหนึ่งแสดงเวลา 7.55 นาฬิกา ครั้น 20.00 น. วันเดียวกัน นาฬิกาเรือนนี้แสดงเวลา 20.07 น. อยากทราบว่านาฬิกาเรือนนี้แสดงเวลาถูกต้องเมื่อเวลาเท่าใด

**วิธีทำ** จาก 8.00 น. ถึง 20.00 น. เป็นเวลา 12 ชม.

จาก 7.55 น. ถึง 20.07 น. นาฬิกาเดินไปเป็นเวลา 12 ชม. 12 นาที

$\therefore$ ในเวลา 12 ชั่วโมง นาฬิกานี้เร็วไป 12 นาที

ครั้งแรกนาฬิกานี้ช้ากว่าเวลาจริง $8.00 - 7.55 = 5$ นาที

$\therefore$ มันจะชี้เวลาจริงก็ต่อเมื่อมันเดินเร็วกว่าเวลาจริง 5 นาที

นาฬิกาเร็วไป 12 นาที ในเวลา 12 ชั่วโมง

$\therefore$ เร็วไป 5 นาที ในเวลา $\frac{12}{12} \times 5 = 5$ ชั่วโมง

$\therefore$ นาฬิกานี้แสดงเวลาจริงเมื่อ 8.00 น. + 5 ชั่วโมง = 13.00 น.

**ตอบ** 13.00 นาฬิกา

**ตัวอย่าง 10** เมื่อเวลา 12.00 น. วันจันทร์ นาฬิกาเรือนหนึ่งช้าไป 1 นาที อีกเรือนหนึ่งเร็วไป 2 นาที ครั้นถึงเวลา 8.00 น. วันพุธ เรือนแรกชี้เวลาถูกต้อง แต่เรือนหลังช้าไป 1 นาที อยากทราบว่าเรือนหลังชี้เวลาจริงเมื่อใด และเมื่อใดนาฬิกาทั้งสองจึงจะชี้เวลาเดียวกัน (ข้อสอบได่ 2497 — 98 ร.ว. เตรียมนายร้อย)

**วิธีทำ**

จาก 12.00 น. วันจันทร์ ถึง 8.00 น. วันพุธ เป็นเวลา 44 ชั่วโมง

$\therefore$ ในเวลา 44 ชั่วโมง เรือนหลังเดินช้ากว่าเวลาจริง $2 + 1 = 3$ นาที

แต่เมื่อ 12.00 น. วันจันทร์ เรือนหลังเดินเร็วไป 2 นาที

$\therefore$ เรือนหลังจะชี้เวลาถูกต้องก็ต่อเมื่อเดินช้ากว่าเวลาจริง 2 นาที

แต่นาฬิกาเรือนหลังเดินช้า 3 นาที ในเวลา 44 ชั่วโมง

$\therefore$ ถ้าปล่อยให้ช้า 2 นาที จะสิ้นเวลานาน $\frac{44}{3} \times 2 = \frac{88}{3} = 29\frac{1}{3}$ ชั่วโมง

$= 29$ ชั่วโมง 20 นาที

นั่นคือนาฬิกาเรือนหลังจะชี้เวลาจริงเมื่อเวลาผ่านไป 29 ชั่วโมง 20 นาที

นับจาก 12.00 น. วันจันทร์

∴ นาฬิกาเรือนหลังจะชี้เวลาจริงเมื่อ 12.00 น. วันจันทร์ + 29 ชั่วโมง 20 นาที

= 17.20 น. วันอังคารสัปดาห์เดียวกัน

และ ในเวลา 44 ชั่วโมง เรือนแรกเดินเร็วกว่าเวลาจริง 1 นาที

แต่ ในเวลา 44 ชั่วโมง เรือนหลังเดินช้ากว่าเวลาจริง 3 นาที

∴ ในเวลา 44 ชั่วโมง เรือนแรกเดินเร็วกว่าเรือนหลัง $3 + 1 = 4$ นาที

เมื่อ 12.00 น. วันจันทร์นั้น เรือนแรกช้าไป 1 นาที

เรือนหลังเร็วไป 2 นาที

∴ เวลาของนาฬิกาทั้งสองต่างกันอยู่ $1 + 2 = 3$ นาที

ดังนั้น นาฬิกาทั้งสองจะชี้เวลาเดียวกันได้ก็ต่อเมื่อเรือนแรกเดินเร็วกว่าเรือนหลัง 3 นาที

เรือนแรกเดินเร็วกว่าเรือนหลัง 4 นาที ในเวลา 44 ชั่วโมง

∴ เรือนแรกเดินเร็วกว่าเรือนหลัง 3 นาที ในเวลา $\frac{44}{4} \times 3 = 33$ ชั่วโมง

นั่นคือ นาฬิกาทั้งสองจะชี้เวลาเดียวกันเมื่อเวลาผ่านไป 33 ชั่วโมง

∴ นาฬิกาทั้งสองจะชี้เวลาเดียวกันเมื่อ 12.00 น. วันจันทร์ + 33 ชั่วโมง

= 21.00 น. วันอังคาร สัปดาห์เดียวกัน

**ตอบ** { เรือนหลังชี้เวลาจริงเมื่อ 17.20 นาฬิกา วันอังคาร
นาฬิกาทั้งสองชี้เวลาเดียวกันเมื่อ 21.00 นาฬิกา วันอังคาร

**ตัวอย่างพิเศษ** ชายผู้หนึ่งทำงานตั้งแต่ระหว่างเวลา 4.00 น. และ 5.00 น เมื่อเขาดูนาฬิกาแล้วก็เริ่มทำงาน ปรากฏว่างานเสร็จระหว่างเวลา 7.00น. และ 8.00 น. พอเขาทำงานเสร็จเขาก็ดูนาฬิกาอีกครั้งหนึ่ง เขาสังเกตเห็นว่าเมื่อเขาดูนาฬิกาครั้งแรกกับครั้งหลังนั้น เข็มทั้งสองเปลี่ยนที่กันอยู่พอดี จงหาว่าเขาเริ่มทำงานเมื่อเวลาเท่าไร และงานเสร็จเมื่อเวลาเท่าไร

**หมายเหตุ** การทำโจทย์ชนิดนี้จะใช้สูตรก็ได้ ถ้าไม่ใช้สูตรก็ต้องทำโดยวิธีสมมติ แล้วเข้าสมการ

ให้ F เป็นจำนวนช่องนาที ซึ่งเข็มสั้นอยู่ห่างจากเลข 12 ตามเวลาแรกของการดูครั้งแรก

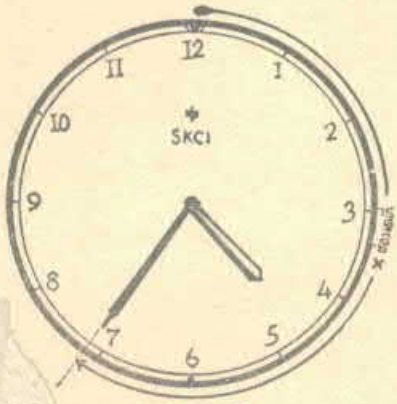
S เป็นจำนวนช่องนาที ซึ่งเข็มสั้นอยู่ห่างจากเลข 12 ตามเวลาแรกของการดูครั้งหลัง

$T_1$ เป็นจำนวนนาทีที่เข็มยาวเดินได้ เมื่อดูครั้งแรก

$T_2$ เป็นจำนวนนาทีที่เข็มยาวเดินได้ เมื่อดูครั้งหลัง

สูตร $$T_1 = \frac{12}{143}(F + 12S) \quad \bigstar$$

$$T_2 = F + \frac{T_1}{12} \quad \bigstar$$




**วิธีทำ** ดูครั้งแรก ระหว่าง 4 และ 5 น.

$\therefore$ เวลาแรกคือ 4 น.

เวลา 4 น. เข็มสั้นอยู่ห่างจากเลข 12 = 20 ช่องนาที

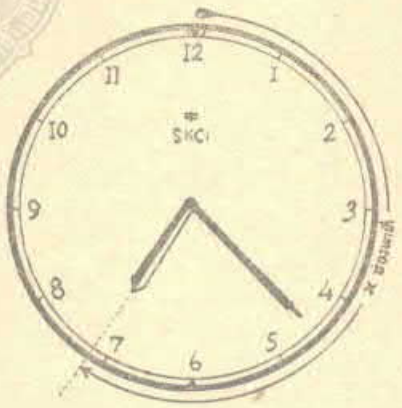
$\therefore$ $F = 20$

ดูครั้งหลัง ระหว่าง 7 และ 8 น.

เวลาแรกคือ 7 น.

เวลา 7 น. เข็มสั้นอยู่ห่างจากเลข 12 = 35 ช่องนาที

$\therefore$ $S = 35$




จากสูตร
$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{12}{143}(F + 12S) \\ &= \frac{12}{143}(20 + 12 \times 35) \\ &= \frac{12}{143} \times 440 \\ &= \frac{480}{13} \\ &= 36\frac{12}{13} \end{aligned}$$

นั่นคือ เวลาที่ดูครั้งแรกเป็นเวลา 4 นาฬิกา กับ $36\frac{12}{13}$ นาที

และ จากสูตร
$$\begin{aligned} T_2 &= F + \frac{T_1}{12} \\ &= 20 + \frac{480}{13 \times 12} \end{aligned}$$

$$= 20 + \frac{40}{13}$$

$$= 23\frac{1}{13}$$

นั่นคือ เวลาที่ดูครั้งหลังเป็นเวลา 7 นาฬิกากับ $23\frac{1}{13}$ นาที

**ตอบ** { เริ่มทำงานเวลา 4 น. $36\frac{12}{13}$ นาที
ทำงานเสร็จเวลา 7 น. $23\frac{1}{13}$ นาที

**ทำแบบวิธีของสมการ**

ครั้งแรก เวลาเริ่มจาก 4 น. ให้เข็มยาวเดินไปได้ x ช่องนาที

∴ เข็มสั้นเดินไปได้ $\frac{5}{60} \times x = \frac{x}{12}$ ช่องนาที

∴ เข็มสั้นอยู่ห่างจากเลข 12 $= 20 + \frac{x}{12}$ ช่องนาที

ครั้งหลัง เวลาเริ่มจาก 7 น. ซึ่งปรากฏว่าเข็มเปลี่ยนที่กันอยู่ นั่นคือ

เข็มยาวจะอยู่ห่างจากเลข 12 เป็นระยะ $20 + \frac{x}{12}$ ช่องนาที (ครั้งแรกเป็นของเข็มสั้น)

และ เข็มสั้นจะอยู่ห่างจากเลข 12 เป็นระยะ x ช่องนาที (ครั้งแรกเป็นของเข็มยาว)

แต่ เข็มยาวเดินได้ 60 ช่องนาที เข็มสั้นเดินได้ 5 ช่องนาที

∴ เข็มยาวเดินได้ $20 + \frac{x}{12}$ ช่องนาที เข็มสั้นเดินได้ $\frac{5}{60}\left(20 + \frac{x}{12}\right)$ ช่องนาที

นั่นคือเข็มสั้นเดินจากเลข 7 ไปเป็นระยะ $= \frac{1}{12}\left(20 + \frac{x}{12}\right)$ ช่องนาที *

เข็มสั้นอยู่ห่างเลข 12 เป็นระยะ x ช่องนาที

∴ เข็มสั้นเดินเลยเลข 7 ไปเป็นระยะ $x - 35$ ช่องนาที

แต่เราหามาได้แล้วว่า เข็มสั้นเดินจากเลข 7 ไปเป็นระยะ $\frac{1}{12}\left(20 + \frac{x}{12}\right)$ ช่องนาที *

ดังนั้น $x - 35 = \frac{1}{12}\left(20 + \frac{x}{12}\right)$

∴ $x = \frac{480}{13} = 36\frac{12}{13}$

นั่นคือดูครั้งแรกเมื่อเข็มยาวเดินไป $36\frac{12}{13}$ ช่องนาที

∴ เขาเริ่มทำงานเวลา 4 น. $36\frac{12}{13}$ นาที

ครั้งหลังเข็มยาวอยู่ห่างจากเลข 12 เป็นระยะ $20 + \frac{x}{12}$ ช่องนาที

คือเวลา 7 น. กับ $23\frac{1}{13}$ นาที

∴ เขาเสร็จงานเวลา 7 น. $23\frac{1}{13}$ นาที

**ข้อควรระวัง** การใช้สูตรนี้รวดเร็วไม่เปลืองสมอง แต่ต้องแม่นสูตร การไม่ใช้สูตรนี้ต้องคิด มีหวังถูกแต่ต้องไม่พลาดเผลอ

## แบบฝึกหัด 18

เวลาเท่าไร เข็มทั้งสองของนาฬิกาเรือนหนึ่งจึงจะ

(ก) ทับกัน (ข) ชิดตรงกันข้าม

(ค) ตั้งฉากกัน (ง) ห่างกัน 10 ช่องนาที

(จ) ห่างกัน 25 ช่องนาที

1. จากเวลา 6.00 นาฬิกา ถึงเวลา 7.00 นาฬิกา
2. จากเวลา 7.00 นาฬิกา ถึงเวลา 8.00 นาฬิกา
3. จากเวลา 10.00 นาฬิกา ถึงเวลา 11.00 นาฬิกา
4. จากเวลา 13.00 นาฬิกา ถึงเวลา 14.00 นาฬิกา
5. จากเวลา 15.00 นาฬิกา ถึงเวลา 16.00 นาฬิกา

[ คำตอบ (เป็นนาที)

1. (ก) $32\frac{8}{11}$ (ข) 00 (ค) $16\frac{4}{11}$; $49\frac{1}{11}$ (ง) $21\frac{9}{11}$; $43\frac{7}{11}$ (จ) $5\frac{5}{11}$; 00
2. (ก) $38\frac{2}{11}$ (ข) $5\frac{5}{11}$ (ค) $21\frac{9}{11}$; $54\frac{6}{11}$ (ง) $27\frac{3}{11}$; $49\frac{1}{11}$ (จ) $10\frac{10}{11}$; 00
3. (ก) $54\frac{6}{11}$ (ข) $21\frac{9}{11}$ (ค) $5\frac{5}{11}$; $38\frac{2}{11}$ (ง) 00; $43\frac{7}{11}$ (จ) $16\frac{4}{11}$; $27\frac{3}{11}$
4. (ก) $5\frac{5}{11}$ (ข) $38\frac{2}{11}$ (ค) $21\frac{9}{11}$; $54\frac{6}{11}$ (ง) $16\frac{4}{11}$; 00 (จ) $32\frac{8}{11}$. $43\frac{7}{11}$
5. (ก) $16\frac{4}{11}$ (ข) $49\frac{1}{11}$ (ค) 00. $32\frac{8}{11}$ (ง) $5\frac{5}{11}$; $27\frac{3}{11}$ (จ) $43\frac{7}{11}$; $54\frac{6}{11}$]

6. นาฬิกา 2 เรือนแต่งเวลาตรงกัน เรือนแรกเดินเร็วสัปดาห์ละ 4 นาที เรือนหลังเดินช้าสัปดาห์ละ 4 นาที อีกนานเท่าไรจึงจะชี้เวลาตรงกันอีก (90 สัปดาห์)
7. นาฬิกา 2 เรือนตั้งให้ตรงกัน เรือนแรกเดินเร็วสัปดาห์ละ 5 นาที เรือนหลังเดินเร็วสัปดาห์ละ 3 นาที อีกนานเท่าไรจะชี้เวลาตรงกันอีก (360 สัปดาห์)

8. นาฬิกาเรือนหนึ่งแสดงเวลาถูกต้องเมื่อ 9.00 นาฬิกา ครั้นเมื่อนาฬิกานั้นบอกเวลา 10.04 นาฬิกานั้น เวลาจริงเป็น 10.00 นาฬิกา อยากทราบว่าถ้านาฬิกาเรือนนี้บอกเวลา 17.00 น. วันเดียวกัน จะเป็นเวลาที่ถูกต้องเท่าไร (16.30 นาฬิกา)

9. นาฬิกา 3 เรือนตั้งให้ตรงกัน เรือนแรกเดินเร็วสัปดาห์ละ 4 นาที เรือนที่สองเดินเร็วสัปดาห์ละ 2 นาที เรือนที่สามเดินช้าสัปดาห์ละ 5 นาที อีกนานเท่าไรจึงจะชี้เวลาตรงกันอีกเป็นครั้งแรก (720 สัปดาห์)

10. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินช้า 192 วินาทีในเวลา 10 ชั่วโมง ตั้งให้ตรงเมื่อ 12.00 น. วันอังคาร ครั้นถึงวันศุกร์นาฬิกานั้นบอกเวลา 14.36 น. จะเป็นเวลาจริงอะไร (15.00น.)

11. นาฬิกาเรือนหนึ่งตั้งให้ตรงเมื่อ 8.00 น. แต่เมื่อ 11.00 น. ปรากฏว่าเร็วไป 5 นาที อยากทราบว่า เมื่อ 15.00 น. นาฬิกานี้จะชี้เวลาอะไร (15.12 น.)

12. เมื่อเที่ยงวันอาทิตย์นาฬิกาเรือนหนึ่งบอกเวลา 12.10 น. ครั้นวันจันทร์เวลาเที่ยงนาฬิกานี้บอกเวลา 12 น. 13 นาที 12 วินาที อยากทราบว่าในวันศุกร์เวลา 10.15 น. นาฬิกานี้จะชี้บอกเวลาอะไร (10 น. 40 นาที 46 วินาที)

13. เมื่อ 12.00 น. วันจันทร์ นาฬิกาเรือนหนึ่งช้าไป 2 นาที 30 วินาที ครั้นวันเสาร์เวลาเที่ยงวัน นาฬิกานี้บอกเวลา 12 น. 3 นาที 30 วินาที อยากทราบว่าเมื่อนาฬิกานี้บอกเวลาได้ถูกต้องนั้น เป็นวันใด เวลาอะไร (พุธ เวลา 12.00 น.)

14. นาฬิกาสองเรือน เรือนแรกเดินเร็ว 1 นาทีในเวลา 15 ชั่วโมง เรือนหลังเดินช้า 5 นาทีใน 1 สัปดาห์ เมื่อวันอังคาร 18.30 น. เรือนแรกช้าไป 5 นาที เรือนหลังเร็วไป 4 นาที อยากทราบว่าเมื่อไรที่นาฬิกาทั้งสองนี้บอกเวลาเดียวกัน (วันเสาร์ 15.50 น.)

15. นาฬิกาสองเรือนตั้งให้ตรงกันเมื่อ 12.00 น. ครั้นเมื่อนาฬิกาเรือนหนึ่งบอกเวลา 12.33 น. อีกเรือนหนึ่งนนปรากฏว่าเข็มชี้ตรงกันข้ามพอดี อยากทราบว่าในวันหนึ่ง เรือนไหนเดินเร็วกว่ากันเท่าไร (เรือนแรกเร็วกว่า 12 นาที)

16. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินช้ากว่าเวลาจริง 100 วินาทีใน 1 ชั่วโมง ข้าพเจ้าได้ตั้งให้ตรงเวลาเมื่อหลายวันมาแล้ว ขณะนี้นาฬิกาชี้บอกเวลา 15.00 น. แต่ข้าพเจ้ารู้ว่าเวลาจริงเป็น

เวลา 17 น. 8 นาที $34\frac{2}{7}$ วินาที วันพฤหัสบดี; จงหาว่าเมื่อข้าพเจ้าตั้งนาฬิกานั้นวันไหน และเวลาใด (วันจันทร์ 12.00 น.)

17. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินเร็ววันละ 12 นาที ตั้งให้ตรงเมื่อเที่ยงวัน วันอังคาร อยากทราบว่าเมื่อ 16.00 น. วันเสาร์ นาฬิกานี้จะบอกเวลาอะไร (14.50)

18. นาฬิกา 3 เรือน เรือนแรกเดินเร็ววันละ 3 นาที เรือนที่สองเดินช้ากว่าเรือนแรกวันละ 7 นาที เรือนที่สามเดินเร็ววันละ 5 นาที เมื่อตั้งให้ตรงกันเวลาเที่ยงวันแล้ว เมื่อไรนาฬิกาทั้งสามเรือนนี้จะแสดงเวลาถูกต้องพร้อมกันทั้งสามเรือนอีกเป็นครั้งแรก (720 วัน)

19. เมื่อ 12.00 น. วันอังคาร นาฬิกาเรือนหนึ่งบอกเวลา 11 น. 58 นาที 20 วินาที ครั้นวันอังคารต่อมาเวลา 20.00 น. นาฬิกาเรือนนี้เร็วกว่าเวลาจริง 2 นาที อยากทราบว่านาฬิกานี้แสดงเวลาถูกต้องเมื่อไร (20.00 น. วันศุกร์)

20. ในวันหนึ่งเข็มทั้งสองของนาฬิกาจะตั้งฉากกัน และผ่านกันกี่ครั้ง (44, 22)

21. นาฬิกาเรือนหนึ่งแสดงเวลา 8.00 น. ซึ่งเป็นเวลาถูกต้อง ครั้นเมื่อ 11.00 น. ปรากฏว่าเร็วไป 5 นาที อยากทราบว่าเมื่อ 15 น. นาฬิกาจะบอกเวลาอะไร (15 น. 11 นาที 40 วินาที)

22. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินช้ากว่าเวลาจริงชั่วโมงละ 5 วินาที เมื่อ 1.00 น. วันจันทร์นาฬิกานี้บอกเวลา 0.59 นาฬิกา จงหาว่า

ก. เมื่อ 12 น. วันอังคาร นาฬิกานี้จะบอกเวลาเท่าไร (11.58)

ข. ถ้านาฬิกานี้บอกเวลา 12 น. วันอังคาร จะเป็นเวลาจริงอะไร ($12\text{ น. }2\frac{2}{719}$ นาที)

ค. เมื่อไรที่นาฬิกานี้แสดงเวลาถูกต้อง (12 น. วันจันทร์)

23. นาฬิกาสองเรือนตั้งให้ตรงกันเมื่อ 12 น. วันที่ 1 เมษายน เรือนหนึ่งเดินเร็วไป 8 วินาที อีกเรือนหนึ่งเดินช้าไป 7 วินาที ต่อ 12 ชั่วโมง จะเป็นเวลาจริงในวันใดและเวลาเท่าไร เมื่อนาฬิกาที่เดินเร็วเดินไปหน้าอีกเรือนหนึ่งเป็นเวลา 5 นาทีในครั้งแรก (ข้อสอบชุด ป. 2491 — วันที่ 11 เมษายน 12.00 น.)

24. เมื่อเวลา 8.00 น. วันอังคาร นาฬิกาเรือนหนึ่งช้าไป 2 นาที อีกเรือนหนึ่งเร็วไป 3 นาที ครั้นวันพุธ 20.00 น. เรือนแรกเร็วไป 1 นาที เรือนหลังช้าไป 2 นาที จงหาว่านาฬิกา

แต่ละเรือนแสดงเวลาได้ถูกต้องเมื่อใด และเมื่อไรที่นาฬิกาทั้งสองแสดงเวลาเดียวกัน (8.00 น. วันพุธ; 5.36 น. วันพุธ และ 6.30 น. วันพุธ)

25. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินเร็วเป็นประจำ ตั้งให้ตรงเมื่อเวลาเที่ยง ปรากฏว่าเข็มทั้งสองซ้อนทับกันพอดีระหว่างเลข 5 และเลข 6 ซึ่งขณะนั้นเป็นเวลา 17.00 น. อยากทราบว่านาฬิกานี้เดินเร็ววันละกี่นาที ($130\frac{10}{11}$)

26. นาฬิกาสามเรือน บางเรือนก็เดินช้า บางเรือนก็เดินเร็ว เมื่อ 10.00 น. วันพุธ เรือนแรกเร็วไป 1 นาที เรือนที่สองช้าไป 1 นาที และเรือนที่สามช้าไป 2 นาที ครั้นถึง 6.00 น. วันพฤหัสบดี เรือนที่สามเร็วไป 1 นาที เรือนแรกช้าไป 3 นาที ต่อมา 6.00 น. วันศุกร์ เรือนที่สองช้ากว่าเรือนที่สาม $2\frac{3}{8}$ นาที จงหาเวลาที่เรือนแรกและเรือนที่สองแสดงเวลาเดียวกัน (18.00 น. วันพุธ)

27. นาฬิกาเรือนหนึ่งเข็มยาวเดินถอยหลัง แต่เข็มสั้นเดินไปข้างหน้าตามปกติ อยากทราบว่า ★★

(ก) ในวันหนึ่งเข็มทั้งสองจะผ่านกันกี่ครั้ง (26)

(ข) หลังจาก 12.00 น. เข็มทั้งสองจะตั้งฉากกันครั้งแรกเมื่อไร ($12\text{น. } 13\frac{11}{13}$ นาที)

(ค) หลังจาก 12.00 น. เข็มทั้งสองจะอยู่ตรงกันข้ามครั้งแรกเมื่อใด ($12\text{น. } 27\frac{9}{13}$ นาที)

28. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินเร็ว 4 นาทีในเวลา 12 ชั่วโมง และอีกเรือนหนึ่งเดินช้าไป 4 นาทีในเวลา 24 ชั่วโมง ถ้าตั้งนาฬิกาทั้งสองเรือนให้ตรงเวลาเมื่อเที่ยงวันอาทิตย์ เมื่อไรนาฬิกาเรือนที่เดินเร็วจะเดินขึ้นหน้านาฬิกาที่เดินช้าเป็นเวลา $16\frac{1}{2}$ นาที เป็นครั้งที่ 2 (ข้อสอบเตรียมอุดม 2492 — ศุกร 12.00 น.)

29. นาฬิกาเรือนหนึ่งแบ่งช่องชั่วโมงไว้บนหน้าปัทม์ 24 ช่อง แทนที่จะเป็น 12 ช่องตามปกติ เข็มสั้นเดินรอบหน้าปัทม์นานเวลา 1 วัน แต่เข็มยาวเดินรอบหน้าปัทม์นานเวลา 1 ชั่วโมง เลข 24 เป็นเลขบอกเวลาเที่ยงคืน จงหาว่า ในวันหนึ่ง ๆ นั้นเข็มทั้งสองของนาฬิกานี้จะตั้งฉากกันครั้งแรกเมื่อเวลาอะไร (เวลา 0 นาฬิกา $15\frac{15}{23}$ นาที)

30. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดินไม่สม่ำเสมอ ถ้าอากาศเย็นมันจะเดินเร็ว 51 วินาทีในเวลา 10

ชั่วโมง แต่อากาศร้อนมันจะเดินช้า 17 วินาทีในเวลา 2 ชั่วโมง ฉันตั้งให้นาฬิกาเรือนนี้ตรงเวลาเมื่อ 8.00 น. วันจันทร์ ครั้นวันอังคาร 8.00 น. วันอังคาร นาฬิกานี้ยังแสดงเวลาได้ถูกต้อง จงหาว่าจากวันจันทร์ 8.00 น. ถึง วันอังคาร 8.00 น. เป็นเวลาที่มีอากาศร้อนเท่าไร (9 ชั่วโมง)

31. นาฬิกาเรือนหนึ่งเดิน ๆ หยุด ๆ ข้าพเจ้าตั้งให้ตรงเวลาวันจันทร์เวลา 6.00 น. เมื่อเดินไปได้ 5 นาทีก็หยุดเสีย 1 นาที เมื่อเดินต่อไปอีก 10 นาทีก็หยุดเสีย 2 นาที เมื่อเดินต่อไปอีก 20 นาทีก็หยุดเสียอีก 3 นาที เมื่อเดินต่อไปอีก 40 นาทีก็หยุดเสียอีก 4 นาที เป็นดังนี้เรื่อยไป จงหาว่าเมื่อนาฬิกานี้หยุดครั้งที่ 10 นั้น เป็นเวลาใดวันใด (20.00 น. วันพฤหัสบดี สัปดาห์เดียวกัน)

32. ชายผู้หนึ่งเมื่อเริ่มออกเดินทาง เขาสังเกตเห็นว่าเป็นเวลาระหว่าง 16 และ 17 นาฬิกา ครั้นเขาถึงที่หมายเป็นเวลาระหว่าง 20 และ 21 นาฬิกา เขาสังเกตได้ว่าเข็มทั้งสองของนาฬิกาเปลี่ยนที่กันกับเมื่อเขาออกเดินทาง จงหาว่าเขาเริ่มออกเดินทางเมื่อไร ตอบให้ถูกเพียงนาที (16 น. $41\frac{137}{143}$ นาที คงตอบเพียง 16.41 นาฬิกา)

33. ฉันดูนาฬิกาครั้งหนึ่งระหว่าง 7.00 น. กับ 8.00 น. แล้วดูอีกครั้งหนึ่งระหว่างเวลา 14.00 น. กับ 15.00 น. ปรากฏว่าเข็มสั้นกับเข็มยาวเปลี่ยนที่กันกับเมื่อดูครั้งแรก อยากทราบว่าเมื่อฉันดูนาฬิกาแต่ละครานั้นเป็นเวลาอะไร (ข้อสอบชุด ป.ม. 2495— ครั้งแรกเวลา 7 น. $13\frac{1}{143}$ นาที, ครั้งหลังเวลา 14 น. $36\frac{12}{143}$ นาที)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# ดอกเบี้ย
# INTEREST

# 18

ในการกู้เงิน ผู้ให้กู้จำต้องคิดรายได้จากการที่ให้กู้เงินที่เป็นรายได้นี้เรียกว่าดอกเบี้ย การกำหนดดอกเบี้ยใช้กำหนดให้เป็นร้อยละของเงินที่ให้กู้ เช่นให้กู้ไป 1000 บาท คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ก็หมายความว่าทุก ๆ 100 บาทของเงินที่ให้กู้ ผู้ให้กู้คิดเอารายได้ 5 บาทหรือคิดเอาดอกเบี้ยเป็นเงิน 5 ต่อทุก ๆ 100 ของเงินที่ให้กู้ การกำหนดอัตราดอกเบี้ยนั้น นิยมกำหนดเป็นร้อยละต่อปีเสมอ เมื่อพูดว่าคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 จึงหมายความได้ว่าเงินที่ให้กู้ 100 บาทในเวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย 5 บาท

เงินที่ให้กู้ เรียกกันว่า เงินต้น

เงินรายได้ เรียกว่า ดอกเบี้ย

ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้น 100 ในเวลา 1 ปี เรียกว่า อัตราดอกเบี้ย

เงินรวม คือ เงินต้นรวมกับดอกเบี้ย

ในการคิดดอกเบี้ย มีวิธีคิด 2 วิธี คือ

— ดอกเบี้ยคงต้นหรือที่เรียกกันอีกอย่างหนึ่งว่า ดอกเบี้ยชั้นเดียว (Simple Interest)

— ดอกเบี้ยทบต้น หรือ ดอกเบี้ยสองชั้น (Compound Interest)

ดอกเบี้ยคงต้น คือการคิดดอกเบี้ยซึ่งผู้กู้และผู้ให้กู้ตกลงกันว่า ผู้กู้จะชำระดอกเบี้ยให้เป็นคราวตามกำหนดเวลาที่ตกลงกันไว้ ซึ่งอาจจะเป็น 3 เดือน 6 เดือน หรือ 1 ปีก็ได้ แต่ผู้กู้เงินซึ่งต้องชำระดอกเบี้ยให้นั้น บางคราวก็เกิดขัดสนไม่สามารถจะส่งดอกเบี้ยเมื่อถึงกำหนดส่งได้ เมื่อไม่ส่งดอกเบี้ยให้ตามกำหนด ผู้ให้กู้เสียหาย คือแทนที่จะได้ดอกเบี้ยมาทำผลประโยชน์อย่างอื่นให้งอกเงยก็กลับต้องเสียผลประโยชน์ไป ดังนั้น ตามทางปฏิบัติแล้ว ผู้ให้กู้จะต้องตกลงกับผู้กู้ก่อนเสมอว่า ถ้างวดใดไม่นำดอกเบี้ยมาส่งตามกำหนดเมื่อถึงกำหนดชำระนั้นแล้ว ผู้ให้กู้จะคิดเอาเงินดอกเบี้ยซึ่งผู้กู้ค้างอยู่นั้นรวมเข้ากับเงินต้นเดิม เป็นเงินต้นของงวดต่อไป เมื่อเป็นดังนี้ เงินต้นของการคิดแบบนี้จึงเพิ่มขึ้นเสมอ และนี่แหละที่เรียกว่า **ดอกเบี้ยทบต้น**

ในการศึกษาต่อไปนี้ จะกล่าวถึงเรื่องดอกเบี้ยคงต้นก่อน เมื่อนักศึกษาเข้าใจเรื่องนี้อยู่แล้วก็ข้ามไปดูเรื่องดอกเบี้ยทบต้นได้ทันที

## ดอกเบี้ยคงต้น (Simple Interest)

ได้กล่าวแล้วว่า ดอกเบี้ยคงต้นนั้น ผู้กู้จะชำระดอกเบี้ยให้เป็นคราวตามกำหนดเวลา ซึ่งโดยมากมักกำหนดกันเป็น 1 ปีเสมอ ด้วยเหตุนี้เงินต้นของการคิดแบบนี้จึงเท่าเดิมอยู่ตลอดไป ไม่มีการเพิ่มขึ้นเหมือนอย่างเรื่องดอกเบี้ยทบต้น

**ตัวอย่าง 1** เงินต้น 1000 บาท ให้กู้ไปสามปี คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 จะได้ดอกเบี้ยคงต้นเท่าไร

**วิธีทำ** เงินต้น 100 เวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย 5

∴ เงินต้น 1000 บาท เวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย $\frac{5}{100} \times 1000$ บาท

เงินต้น 1000 บาท เวลา 3 ปี ได้ดอกเบี้ย $\frac{5}{100} \times 1000 \times 3 = 150$ บาท

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 2** ให้เขากู้เงินไป 5 ปี คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี ได้ดอกเบี้ย 200 บาท จงหาว่าให้กู้ไปเท่าไร

วิธีทำ ให้กู้ไป 100 เวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย 4

∴ ได้ดอกเบี้ย 4 เวลา 1 ปี ให้กู้ไป 100

ได้ดอกเบี้ย 4 เวลา 5 ปี ให้กู้ไป $\frac{100}{5}$

∴ ได้ดอกเบี้ย 200 เวลา 5 ปี ให้กู้ไป $\frac{100}{5} \times \frac{200}{4} = 1000$ บาท

ตอบ 1000 บาท

**สูตรของดอกเบี้ยคงต้น** $I = \frac{Prt}{100}$

ถ้าเราสมมติให้ P เป็นเงินต้น (Principal)

t เป็นเวลา (time)

r เป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละ (Ratepercent)

I เป็นดอกเบี้ยทั้งหมด (Interest)

ดังนั้นเราจึงตั้งโจทย์ได้ใหม่ว่า

**ให้เขากู้ไปเป็นเงินต้น P เวลา t ปี คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ r จงหาดอกเบี้ยคงต้น**

เราดำเนินวิธีทำตามแบบตัวอย่างที่ 1 (ดูตัวอย่างที่ 1 ประกอบ)

วิธีทำ เงินต้น 100 เวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย r

∴ เงินต้น P เวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย $\frac{r}{100} \times P$

∴ เงินต้น P เวลา t ปี ได้ดอกเบี้ย $\frac{r}{100} \times P \times t$

∴ ดอกเบี้ย $= \frac{Prt}{100}$

ดังนั้นจึงตั้งเป็นสูตรได้ว่า $I = \frac{Prt}{100}$

ซึ่งคือ ดอกเบี้ยคงต้น $= \frac{\text{เงินต้น} \times \text{อัตราดอกเบี้ย} \times \text{จำนวนปี}}{100}$

จากสูตร $I = \frac{Prt}{100}$ (1) ★

เราได้ $P = \frac{100I}{rt}$ (2)

$$r = \frac{100\,I}{P\,t} \quad (3)$$

$$t = \frac{100\,I}{P\,r} \quad (4)$$

และถ้าเราสมมติให้ A เป็นเงินรวม (Amonnt)

เราได้สูตรใหม่ว่า $A = \frac{Prt}{100} + P$

$$A = P\left(\frac{rt}{100} + 1\right)$$

$$\therefore \quad A = P\left(\frac{rt+100}{100}\right) \quad (5)$$

หรือ $A = I\left(\frac{rt+100}{rt}\right) \quad (6)$

รวมสูตรที่นักศึกษาต้องจำ (ถ้าต้องการทำโดยใช้สูตร)

| | |
|---|---|
| (1) $I = \frac{Prt}{100}$ | I = ดอกเบี้ย (Interest) |
| (2) $P = \frac{100\,I}{rt}$ | P = เงินต้น (Principal) |
| (3) $r = \frac{100\,I}{rt}$ | r = อัตราดอกเบี้ย (Ratepercent) |
| (4) $t = \frac{100\,I}{Pr}$ | t = เวลา (ปี) (time) |
| (5) $A = P\left(\frac{rt+100}{100}\right)$ | A = เงินรวม (Amount) |
| (6) $P = \frac{100\,A}{rt+100}$ | $A = I\left(\frac{rt+100}{100}\right)$ |

เมื่อเราเข้าใจสูตรและจำได้แล้ว ก็ไม่จำเป็นต้องเทียบตามที่ทำไว้ในตัวอย่างที่ 1, 2 เราใช้สูตรแทนได้เลย

ตัวอย่างต่อไปนี้ จะมีวิธีทำสองแบบ คือแบบใช้เทียบตามธรรมดาและแบบใช้สูตร

**ตัวอย่าง 3** เงินต้น 400 บาท คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ได้ดอกเบี้ยคงต้น 60 บาท ให้กู้ไปนานกี่ปี

**วิธีทำ** เงินต้น 100 ได้ดอกเบี้ย 5 ในเวลา 1 ปี

เงินต้น 400 บาท ได้ดอกเบี้ย 5 ในเวลา $\frac{1}{400} \times 100$ ปี

เงินต้น 400 บาท ได้ดอกเบี้ย 60 บาท ในเวลา $\frac{1}{400} \times 100 \times \frac{60}{5} = 3$ ปี

**ตอบ** 3 ปี

**ทำแบบใช้สูตร**

เพราะว่า เวลา (ปี) $= \frac{100 \times \text{ดอกเบี้ย}}{\text{เงินต้น} \times \text{อัตราดอกเบี้ย}}$ $\left[T = \frac{100\,I}{Pr}\right]$

(ในที่นี้ ดอกเบี้ย = 60 บาท, เงินต้น = 400 บาท, อัตราดอกเบี้ย = 5)

$\therefore$ เวลา $= \frac{100 \times 60}{400 \times 5} = 3$ ปี

**ตัวอย่าง 4** ให้เงินเขากู้ไปจำนวนหนึ่ง คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ในเวลา 2 ปี ได้เงินรวม 530 บาท จงหาว่าให้กู้ไปเท่าไร

**วิธีทำ** เงินต้น 100 เวลา 1 ปี ได้ดอกเบี้ย 3

$\therefore$ เวลา 2 ปี ได้ดอกเบี้ย $3 \times 2 = 6$

$\therefore$ เงินต้น 100 เวลา 2 ปี ได้เงินรวม $100 + 6 = 106$

ได้เงินรวม 106 เป็นเงินต้น 100

$\therefore$ ได้เงินรวม 530 บาท เป็นเงินต้น $\frac{100}{106} \times 530 = 500$ บาท

**ตอบ** 500 บาท

**ทำแบบใช้สูตร**

$$P = \frac{100\,A}{100 + rt}$$

ในที่นี้ A (เงินรวม) = 530 บาท, r (อัตราดอกเบี้ย) = 3, t (ปี) = 2

แทนค่า $\therefore \quad P = \frac{100 \times 530}{100 + (3 \times 2)}$

$= \frac{100 \times 530}{106}$

$= 500$

## ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)

ดอกเบี้ยทบต้น คือการคิดดอกเบี้ยซึ่งเงินต้นเพิ่มขึ้นทุกคราวที่ถึงกำหนดชำระดอกเบี้ย เช่น นาย ก. ยืมเงินนาย ข. มา กำหนดกันว่าจะชำระดอกเบี้ย 6 เดือนครั้ง หรือปีละครั้ง (ส่วนมากนิยมคิดกันปีละครั้ง) ครั้นครบปี นาย ก. หาเงินมาให้เป็นค่าดอกเบี้ยแก่นาย ข. ไม่ได้ หรือว่านาย ก. ไม่มาชำระดอกเบี้ยให้นาย ข. นาย ข. ก็จะคิดเอาดอกเบี้ยซึ่งนาย ก. ไม่มาชำระนั้นรวมกับเงินต้นที่นาย ก. กู้ไป เงินทั้งรวมกันเข้านี้กลายเป็นเงินต้นของคราวต่อไป หรือปีต่อไป ถ้านาย ก. ไม่มาชำระอีก นาย ข. ก็เอาเงินที่ นาย ก. ไม่มาชำระนั้นรวมเข้ากับเงินต้นเป็นเงินต้นคราวต่อไปอีก ดังนี้จะเห็นได้ว่า เงินต้นของนาย ข. ที่ให้นาย ก. ยืมไปจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตราบเท่าที่นาย ก. ยังไม่จัดการส่งดอกเบี้ยให้ตามกำหนดเวลา วิธีการคิดดอกเบี้ยอย่างนี้เรียกว่า คิดอย่างดอกเบี้ยทบต้น

**กรณีที่ 1** จงหาเงินรวมของเงินต้น 1000 บาท เวลา 3 ปี อัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 10

เงินต้นของปีแรก คือ 1000 บาท

**ปีที่หนึ่ง** เงินต้น 100 ได้ดอกเบี้ย 10

$\therefore$ เงินต้น 1000 บาท ได้ดอกเบี้ย $\frac{10}{100} \times 1000 = 100$ บาท

$\therefore$ เป็นเงินต้นปีที่สอง $1000 + 100 = 1100$ บาท

**ปีที่สอง** เงินต้น 100 ได้ดอกเบี้ย 10

$\therefore$ เงินต้น 1100 บาท ได้ดอกเบี้ย $\frac{10}{100} \times 1100 = 110$ บาท

$\therefore$ เป็นเงินต้นปีที่สาม $1100 + 110 = 1210$ บาท

ปีที่สาม เงินต้น 100 ได้ดอกเบี้ย 10

∴ เงินต้น 1210 บาท ได้ดอกเบี้ย $\frac{10}{100} \times 1210 = 121$ บาท

∴ เป็นเงินรวมปีที่สาม $1210 + 121 = 1331$ บาท

กรณีที่ 2 จงหาดอกเบี้ยทบต้นของเงินต้น 2000 บาท เวลา 2 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 คิดดอกเบี้ยกัน 6 เดือนครั้ง

ก่อนอื่นต้องดูความหมายของคำว่า **อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10**

อัตราดอกเบี้ยนั้นนิยมคิดกันต่อปีเสมอ ดังนั้น เมื่อพูดว่า อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 เฉย ๆ ก็ต้องเข้าใจว่า **ร้อยละ 10 ต่อปี** เสมอไป

แต่การคิดดอกเบี้ย คิด 6 เดือนต่อ 1 ครั้ง ดังนั้น ใน 1 ปีจึงคิดกันสองครั้ง

ปีหนึ่งร้อยละ 10 ดังนั้นครึ่งปีก็เหลือร้อยละ 5

ด้วยเหตุนี้กำหนดการชำระดอกเบี้ยจึงมีทั้งหมด 4 คราวด้วยกัน คราวละ 6 เดือน รวมเป็น 2 ปีพอดี

อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อครึ่งปีนั้น ก็ย่อมหมายความว่า

ได้ดอกเบี้ย 5 ในเมื่อเงินต้นเป็น 100

ดังดอกเบี้ยที่จะได้ในคราวหนึ่ง ๆ จะเป็น $\frac{5}{100}$ ของเงินต้นนั้น ๆ เสมอ ไม่ว่าเงินต้นจะเป็นเท่าใด

**เพราะฉะนั้นถ้าเราเอา $\frac{5}{100}$ คูณเงินต้นจำนวนใด ก็ย่อมได้เป็นดอกเบี้ยของเงินต้นนั้นในคราวนั้น**

| | | |
|---|---|---|
| เงินต้นคราวที่ 1 | = | 2000 บาท |
| $\frac{5}{100} \times 2000$ ได้เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 1 | = | 100 บาท |
| รวมเป็นเงินต้นคราวที่ 2 | = | 2100 บาท |
| $\frac{5}{100} \times 2100$ ได้เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 2 | = | 105 บาท |
| รวมเป็นเงินต้นคราวที่ 3 | = | 2205 บาท |

$\frac{5}{100} \times 2205$ ได้เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 3 = 110.25 บาท

รวมเป็นเงินต้นคราวที่ 4 = 2315.25 บาท

$\frac{5}{100} \times 2315.25$ ได้เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 4 = 115.7625 บาท

∴ เป็นเงินรวมเมื่อครบ 2 ปี 2431.0125 บาท

∴ ดอกเบี้ยทบต้น $2431.0125 - 2000 = 431.0125$ บาท

$= 431.01$ บาท

**ตัวอย่าง 1** จงหาเงินรวมของเงินต้น 10000 บาท เวลา 4 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10

**วิธีทำ** อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 คือเป็น $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ของเงินต้นทุก ๆ คราว

เงินต้นปีที่ 1 = 10000 บาท

$\frac{1}{10} \times 10000$ ได้เป็นดอกเบี้ยปีที่ 1 = 1000 บาท

รวมเป็นเงินต้นของปีที่ 2 = 11000 บาท

$\frac{1}{10} \times 11000$ ได้เป็นดอกเบี้ยปีที่ 2 = 1100 บาท

รวมเป็นเงินต้นของปีที่ 3 = 12100 บาท

$\frac{1}{10} \times 12100$ ได้เป็นดอกเบี้ยปีที่ 3 = 1210 บาท

รวมเป็นเงินต้นของปีที่ 4 = 13310 บาท

$\frac{1}{10} \times 13310$ ได้เป็นดอกเบี้ยปีที่ 4 = 1331 บาท

∴ เป็นเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 4 = 14641 บาท

**ตอบ** 14641 บาท

**ตัวอย่าง 2** จงหาเงินรวมของเงินต้น 6000 บาท เวลา 2 ปี คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ $2\frac{1}{2}$ คิดดอกเบี้ยทบต้น 6 เดือนครั้ง

**วิธีทำ** อัตราดอกเบี้ยร้อยละ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ คือเป็น $\frac{5}{2 \times 100}$ ของเงินต้นทุก ๆ คราว

เวลา 2 ปี คิดดอกเบี้ยปีละ 2 ครั้ง ∴ คิดดอกเบี้ย 4 คราว

| | | | |
|---|---|---|---|
| เงินต้นคราวที่ 1 | = | 6000 | บาท |
| $\frac{5}{2\times100}\times 6000$ เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 1 | = | 150 | บาท |
| เป็นเงินต้นคราวที่ 2 | = | 6150 | บาท |
| $\frac{5}{2\times100}\times 6150$ เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 2 | = | 153.75 | บาท |
| เป็นเงินต้นคราวที่ 3 | = | 6303.75 | บาท |
| $\frac{5}{2\times100}\times 6303.75$ เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 3 | = | 157.59375 | บาท |
| เป็นเงินต้นคราวที่ 4 | = | 6461.34375 | บาท |
| $\frac{5}{2\times100}\times 6461.34375$ เป็นดอกเบี้ยคราวที่ 4 | = | 161.53359375 | บาท |
| ∴ เป็นเงินรวมทั้ง 2 ปี | = | 6622.87734375 | |
| | = | 6622.88 (ปัดทศนิยมทิ้ง) | |

**ตอบ** 6622.88 บาท

## สูตรของดอกเบี้ยทบต้น

ถ้าเราให้ P เป็นเงินต้น

r เป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละ เราก็อาจหาสูตรได้ดังนี้

อัตราดอกเบี้ยร้อยละ r หมายความว่า

เงินต้น 100 ได้ดอกเบี้ย r

คือ ไม่ว่าเงินต้นจะเป็นเท่าใด จะได้ดอกเบี้ย $\frac{r}{100}$ ของเงินต้นนั่นเอง

(เราดำเนินวิธีเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1, 2)

เงินต้นปีที่ 1 = P

$\frac{r}{100}\times P$ เป็นดอกเบี้ยปีที่ 1 = $\frac{Pr}{100}$

∴ เป็นเงินต้นปีที่ 2 หรือเงินรวม 1 ปี = $P+\frac{Pr}{100}=P\left(1+\frac{r}{100}\right)$ [แยกแฟคเตอร์เอาตัวร่วม P ออก]

$\frac{r}{100} \times (P + \frac{Pr}{100})$ เป็นดอกเบี้ยปีที่ 2 $= \frac{Pr}{100} + \frac{Pr^2}{100^2}$

$\therefore$ เป็นเงินต้นปีที่ 3 หรือเงินรวม 2 ปี $= P + \frac{2Pr}{100} + \frac{Pr^2}{100^2}$

$= P\left(1 + \frac{2r}{100} + \frac{r^2}{100^2}\right)$

$= \underline{\underline{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}}$

$\frac{r}{100} \times \left(P + \frac{2Pr}{100} + \frac{Pr^2}{100^2}\right)$ เป็นดอกเบี้ยปีที่ 3 $= \frac{Pr}{100} + \frac{2Pr^2}{100^2} + \frac{Pr^3}{100^3}$

$\therefore$ เป็นเงินรวม 3 ปี $= P + \frac{3Pr}{100} + \frac{3Pr^2}{100^2} + \frac{Pr^3}{100^3}$

$= P\left(1 + \frac{3r}{100} + \frac{3r^2}{100^2} + \frac{r^3}{100^3}\right)$

$= \underline{\underline{P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3}}$

จะเห็นได้ว่าเงินรวมของเงินต้น P เวลา 1 ปี ก็คือ $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

เวลา 2 ปี คือ $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$

เวลา 3 ปี คือ $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$

ในทำนองเดียวกันเราก็หาได้ว่า

เวลา 4 ปี ได้เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^4$

เวลา 5 ปี ได้เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5$

$\therefore$ เวลา t ปี ได้เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

นั่นคือ ถ้า P เป็นเงินต้น (Principal)

r เป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละ (ในเวลาที่คิดดอกเบี้ย เช่น 3 เดือนหรือ 6 เดือน

ไม่ใช่ 1 ปี เช่นโจทย์บอกว่าอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 คิดดอกเบี้ย 3 เดือน ครั้ง หมายความว่าอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี $r$ ต้องเท่ากับ $8 \times \frac{3}{12}$)

$t$ เป็นจำนวนครั้งที่คิดดอกเบี้ย (ไม่ใช่จำนวนปี) เช่นเวลา 2 ปี คิดดอกเบี้ย 3 เดือนครั้ง $t = 2 \times \frac{12}{3} = 8$ (ไม่ใช่ $t = 2$)

และ $A$ เป็นเงินรวม (Amount)

สูตร $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

$C.I. = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - P$ (C.I. = Compound Interest)

**เมื่ออัตราดอกเบี้ยไม่เท่ากัน** เช่นอัตราดอกเบี้ยปีแรกร้อยละ 3 ปีที่สองร้อยละ 4 ปีที่สามร้อยละ 5 เราจะใช้สูตรดังกล่าวไม่ได้ ต้องใช้สูตรใหม่ดังนี้

ให้ $r_1$ เป็นอัตราดอกเบี้ยปีที่หนึ่ง

$r_2$ เป็นอัตราดอกเบี้ยปีที่สอง

$r_3$ เป็นอัตราดอกเบี้ยปีที่สาม

**สูตร**

ดอกเบี้ยคงต้น $I = \frac{P(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots)}{100}$

ดอกเบี้ยทบต้น $A = P\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)\left(1 + \frac{r_3}{100}\right)\cdots$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะทำให้เข้าใจสูตรต่าง ๆ นี้ดียิ่งขึ้น

**ตัวอย่าง 3** จงหาเงินรวมของเงินต้น 10000 บาท เวลา 3 ปี อัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 5

**วิธีทำ** สูตร $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

ในที่นี้ $P = 10000$ บาท, $r = 5$, $t = 3$

$\therefore A = 10000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 10000\,(1.05)^3$

$= 10000 \times 1.157625$

$= 11576.25$

**ตอบ** 11576.25 บาท

**ตัวอย่าง 4** จงหาเงินรวมของเงินต้น 1000 บาท เวลา 4 ปี อัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 10

**วิธีทำ** สูตร $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

ในที่นี้ $P = 1000$ บาท, $r = 10$, $t = 4$

แทนค่า $A = 1000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4$

$= 1000\,(1.1)^4$

$= 1000 \times 1.4641$

$= 1464.10$

$\therefore$ เงินรวม 1464.10 บาท

**ตอบ** 1464.10 บาท

**ตัวอย่าง 5** จงหาเงินรวมของเงินต้น 10000 บาท เวลา 2 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 คิดดอกเบี้ย 6 เดือนครั้ง

**วิธีทำ** (อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี

$\therefore$ ครึ่งปีอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5

เวลา 2 ปี คิดดอกเบี้ย 6 เดือนครั้ง $\therefore$ มีการคิดดอกเบี้ย 4 ครั้ง)

สูตร $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

ในที่นี้ $P = 10000$ บาท, $r = 5$ (ไม่ใช่ 10), $t = 4$ (ไม่ใช่ 2)

แทนค่า

$\therefore$ $A = 10000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^4$

$= 10000\,(1.05)^4$

$= 10000 \times 1.21550625$

$= 12155.0625$

$\therefore$ เงินรวม 12155.0625 บาท

$= 12155.06$ บาท

**ตอบ** 12155.06 บาท

**ตัวอย่าง 6** จงหาดอกเบี้ยทบต้นของเงินต้น 1000 บาท เวลา 2 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5

**วิธีทำ** สูตร $C.I. = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$

ในที่นี้ $P = 1000$ บาท $r = 5$, $t = 2$

แทนค่า $\therefore \quad C.I. = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 - P$

$= 1000\,(1.05)^2 - P$

$= 1000 \times 1.1025 - 1000$

$= 1102.50 - 1000$

$= 102.50$

$\therefore$ ดอกเบี้ย 102.50 บาท

**ตอบ** 102.50 บาท

**ตัวอย่าง 7** จงหาเงินรวมของเงินต้น 10000 บาท เวลา 3 ปี คิดอัตราดอกเบี้ยปีแรกร้อยละ 3 ปีที่สองร้อยละ 4 ปีที่สามร้อยละ 5

**วิธีทำ** สูตร $A = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)$

ในที่นี้ $P = 10000$ บาท, $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 5$

แทนค่า $A = 10000\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$

$= 10000\,(1.03)\,(1.04)\,(1.05)$

$= 10000 \times 1.124760$

$= 11247.60$

$\therefore$ เงินรวม 11247.60 บาท

**ตอบ** 11247.60 บาท

**ตัวอย่าง 8** ให้เขากู้เงินไปจำนวนหนึ่ง เวลา 3 ปี คิดอัตราดอกเบี้ยปีแรกร้อยละ 5 ปีที่สองร้อยละ 6 ปีที่สามร้อยละ 7 ได้ดอกเบี้ยทบต้น 190.91 บาท จงหาว่าให้เขากู้ไปเท่าไร

**วิธีทำ** สูตร $C.I. = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)-P$

ในที่นี้ P ยังไม่ทราบ, $C.I. = 190.91$ บาท, $r_1 = 5$, $r_2 = 6$, $r_3 = 7$

แทนค่า

$$\therefore \quad 190.91 = P\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)\left(1+\frac{7}{100}\right)-P$$

$$190.91 = P\,(1.05)\,(1.06)\,(1.07)-P$$

$$190.91 = P \times 1.190910 - P$$

$$190.91 = 1.19091\,P - P$$

$$190.91 = .19091\,P$$

$$\therefore \quad P = \frac{190.91}{.19091} = 1000$$

$\therefore$ ให้เขากู้ไป 1000 บาท

**ตอบ** 1000 บาท

**ตัวอย่าง 9** ให้เงินเขากู้ไปจำนวนหนึ่ง เวลา 3 ปี อัตราดอกเบี้ยปีแรกร้อยละ 2 ปีที่สองร้อยละ 5 ปีที่สามร้อยละ 10 ซึ่งถ้าคิดอย่างดอกเบี้ยทบต้น จะได้ดอกเบี้ยมากกว่าคิดอย่างดอกเบี้ยคงต้นอยู่ 4.05 บาท จงหาเงินจำนวนนั้น

**วิธีทำ** สูตร $I = P\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{100}\right)$

$$C.I. = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)-P$$

ในที่นี้ $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $r_3 = 10$

แทนค่า

$$\therefore \quad \text{ดอกเบี้ยทบต้น} = \frac{P\,(2+5+7)}{100}$$

$$= \frac{17P}{100} \text{ ---------- (1)}$$

$$\text{ดอกเบี้ยทบต้น} = P\left(1+\frac{2}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{10}{100}\right) - P$$

$$= P\,(1.02)\,(1.05)\,(1.10) - P$$

$$= 1.1781\,P - P$$

$$= 0.1781\,P \text{ ------ (2)}$$

แต่ดอกเบี้ยทบต้นมากกว่าดอกเบี้ยทบต้นอยู่ 4.05 บาท

$$\therefore \quad 0.1781\,P - \frac{17P}{100} = 4.05$$

$$17.81\,P - 17\,P = 405$$

$$0.81\,P = 405$$

$$P = \frac{405}{0.81}$$

$$= 500$$

$\therefore$ เงินจำนวนนั้น 500 บาท

**ตอบ** 500 บาท

**วิธีหาเวลา**

**ตัวอย่าง 10** ให้เงินเขากู้ไปหมื่นบาท อย่างดอกเบี้ยทบต้น อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ได้เงินรวม 12597.12 บาท อยากทราบว่าให้กู้ไปนานกี่ปี

**วิธีทำ** สูตร $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

$$\therefore \quad 12597.12 = 10000\,(1.08)^t$$

$$1.259712 = (1.08)^t$$

$$\therefore \quad (1.08)^t = 1.259712$$

(ขั้นต่อไปก็คือ หาดูว่า 1.08 ยกกำลังเท่าไรจึงจะได้ 1.259712
โดยมากโจทย์แบบนี้จะต้องเป็นคำตอบที่ลงตัวเป็นตัวเต็มเสมอ
ดังนั้นจึงมีวิธีง่าย ๆ ที่จะรู้ว่า 1.08 ยกกำลังเท่าไรจึงจะได้ 1.259712

วิธีสังเกตก็คือ

1.259712 มีทศนิยมอยู่ 6 ตำแหน่ง

1.08 มีทศนิยมอยู่ 2 ตำแหน่ง ดังนั้นถ้าจะให้เป็น 6 ก็ต้องคูณกันเอง 3 ครั้ง แล้วจึงทดลองดู โดยเอา 1.08 คูณกันเอง 3 ครั้งก็ปรากฏว่าได้ 1.259712 พอดี)

$\therefore \quad (1.08)^3 = 1.259712$

$\therefore \quad t \quad = 3$

$\therefore$ ให้เขากู้ไปนาน 3 ปี

ตอบ 3 ปี

---

## แบบฝึกหัด 19

1. จงหาดอกเบี้ยของเงินต้น 300 บาท เวลา 9 เดือน คิดอัตราดอกเบี้ยคงต้นร้อยละ 5 (11.25)
2. จงหาเงินรวมของเงินต้น 1200 บาท เวลา 90 วัน คิดอัตราดอกเบี้ยคงต้นร้อยละ 6 (1218)
3. จงหาดอกเบี้ยของเงินต้น 825 บาท เวลา 2 ปี 3 เดือน คิดอัตราดอกเบี้ยคงต้นร้อยละ 4 (74.25)
4. ให้เงินเขากู้ไปจำนวนหนึ่งคิดอย่างดอกเบี้ยคงต้น เวลา 3 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ $2\frac{1}{2}$ ได้เงินรวม 8050 บาท จงหาเงินจำนวนนั้น (8000)
5. จงหาเงินรวมของเงินต้น 1200 บาท เวลา 2 ปี 6 เดือน คิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 4 คิดดอกเบี้ยครึ่งปีครั้ง (1324.90)

6. เงินต้น 3000 บาท ดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี ให้กู้เป็นเวลา $2\frac{1}{2}$ ปี ถ้าให้กู้อย่างคิดดอกทบต้น จะได้ดอกเบี้ยมากกว่าคิดอย่างคงต้นเท่าไร ★ (5.4405)

7. เงิน £ 1000 แบ่งให้กู้ดังนี้ £ 200 ให้กู้คิดดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี £ 400 คิดดอกเบี้ยร้อยละ $3\frac{1}{2}$ £ 250 คิดดอกเบี้ยร้อยละ 5 ส่วนที่เหลือจะต้องคิดดอกเบี้ยร้อยละเท่าไร จึงจะทำให้รายเฉลี่ยของดอกเบี้ยเป็นร้อยละ £ 3, 17 s. ★ (4)

8. ชายคนหนึ่งกู้เงินฉันไป 12000 บาท เสียดอกเบี้ยชนิดทบต้นร้อยละ 5 พอสิ้นปีเขานำเงินมาให้ 3000 บาททุกที เมื่อสิ้นปีที่สี่เขายังจะเป็นหนี้ฉันอีกเท่าไร ★ (1655.70)

9. เงินต้น 8000 บาท ฝากธนาคารไว้อย่างดอกเบี้ยทบต้น 3 ปี ได้เงินรวม 9261 บาท จงหาอัตราร้อยละต่อปี ★ (5)

10. เงินจำนวนหนึ่งฝากไว้ 3 ปี อัตราดอกเบี้ย 5 % ถ้าคิดอย่างดอกเบี้ยทบต้นและคงต้นจะได้ดอกเบี้ยต่างกัน 366 บาท จงหาเงินจำนวนนั้น ★★ (48000)

11. เงินต้นเท่าไรในเวลา 3 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 จึงจะได้เงินรวม 463 บาท 5 สตางค์ ★ (400)

12. จงหาดอกเบี้ยทบต้นของเงิน 2500 บาท ให้กู้ไป 3 ปี คิดดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี ★ (827.50)

13. ฉันเอาเงินฝากธนาคารไว้ 1800 บาท ชั่วเวลา 3 ปี ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นในอัตราร้อยละ 5 ในปลายปีที่สามฉันจะมีเงินในธนาคารเท่าไร ★ (2083.73)

14. ดอกเบี้ยคงต้นกับดอกเบี้ยทบต้นของเงิน £ 2343, 15 s ฝากไว้ 2 ปีได้ดอก 4 % ผิดกันเท่าใด ★★ (£ 3, 15 s)

15. จงหาดอกเบี้ยจากทุน £ 346, $10\frac{3}{4}$ s. ให้ดอกเบี้ยร้อยละ $1\frac{1}{2}$ ต่อปี ฝากไว้เป็นเวลา 146 วัน ★★ (£ 2, 1 s. 7 d)

16. จงหาดอกเบี้ยจากทุน 350 บาท ให้ดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี ฝากไว้เป็นเวลา 150 วัน ★★ (7.19)

17. ถ้าเราฝากเงิน 10.000 บาทไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง เขาคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ 3 ถามว่าเราจะได้รับเงินเท่าไร เมื่อถอนเงินออกภายหลังสามปี และเขาคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ ★★ (10927.27)

18. จงหาดอกเบี้ยทบต้นเป็นส่วนร้อยของเงินทุน £ 8000 ซึ่งฝาก 3 ปี เป็นเงินรวม £ 9261 และถ้าเงินทุนเท่าเดิมฝาก 3 ปี คิดดอกเบี้ยคงต้นตามอัตราที่คำนวณได้นั้น จะได้เงินรวมทั้งต้นทุนด้วยเท่าไร ★★ (5, 9200)

19. เงินจำนวนหนึ่งฝากไว้ในธนาคารได้ดอกเบี้ยชนิดเดียว เมื่อถึงปลายปีที่ 3 ทุนกับดอกเบี้ยรวมกันได้ 220 บาท 50 สตางค์ และเมื่อถึงปลายปีที่ห้าทุนกับดอกเบี้ยรวมกันได้ 236 บาท 25 สตางค์ จงคำนวณว่าทุนเดิมและอัตราดอกเบี้ยนั้นเท่าไร ★★ (196.875, 4)

20. ชายคนหนึ่งเป็นลูกหนี้เขา 100 บาท เมื่อครบปีหนึ่ง ๆ ก็นำเงิน 25 บาทไปชำระดอกเบี้ยของเงินที่คนเป็นลูกหนี้ และผ่อนต้น สำหรับดอกเบี้ยนั้นคิด 5 % เมื่อลูกหนี้ได้นำเงินไปใช้ดังที่กล่าวแล้วนั้น 3 ครั้ง เขาจะยังคงเป็นลูกหนี้อยู่เท่าใด ★★ (36.95)

21. ชายคนหนึ่งขอยืมเงินเขาไป 1000 บาท เมื่อครบปีหนึ่ง ๆ ก็นำเงิน 250 บาท ไปชำระดอกเบี้ยของเงินที่คนเป็นลูกหนี้ระหว่างปีและผ่อนต้น สำหรับดอกเบี้ยนั้นคิด 4 % ถ้าเขานำเงินไปใช้ดังเช่นที่กล่าวนั้นแล้วสามครั้ง เขาจะยังคงเป็นลูกหนี้อยู่เท่าใด ★★ (344.46)

22. คนหนึ่งขอยืมเงินจากธนาคาร 5000 บาท โดยเสียดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี ภายหลังเวลา 3 เดือน อัตราดอกเบี้ยขึ้นเป็นร้อยละ $4\frac{1}{2}$ ต่อปี และต่อมาอีก 4 เดือน ดอกเบี้ยขึ้นอีกเป็นร้อยละ 5 ต่อปี จนครบรอบปีที่เขาขอยืมเงิน เมื่อสิ้นปีเขาจะต้องเสียค่าดอกเบี้ยเป็นจำนวนเงินเท่าใด ★★ ($229\frac{1}{6}$)

23. ข้าพเจ้าลงทุน 1800 บาทไปในงานที่ได้ผลประโยชน์ $4\frac{1}{2}$ % แล้วเพิ่มทุนทุก ๆ ปี ปีละเท่า ๆ กัน ปรากฏว่าเงินทุนซึ่งประกอบด้วยทุนเดิมกับส่วนที่เพิ่มขึ้นนั้น ในปีที่สี่เดียว เมื่อปลายปีได้รับผลประโยชน์ 153 บาท จงหาจำนวนทุนที่เพิ่มไปในปีหนึ่ง ๆ ★★ ($533\frac{1}{3}$)

24. ฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้ ได้ดอกเบี้ยตามอัตราที่กำหนดให้ เมื่อคิดอย่างดอกเบี้ยทบต้น แทนที่จะคิดอย่างดอกเบี้ยทบต้น ในสองปีแรกดอกเบี้ยจะน้อยไป 13 s. 4 d. และในสามปีแรกดอกเบี้ยจะน้อยไป £ 2 0 s. 4 d. จงหาจำนวนเงินที่ฝากนั้น ★★ (£ 1066, 13 s. 4 d.)

25. ให้เขากู้เงินไปจำนวนหนึ่ง เวลา 3 ปี คิดอัตราดอกเบี้ยปีแรกคิดร้อยละ 4 ปีที่สองร้อยละ 5 ปีที่สามร้อยละ 10 ซึ่งถ้าคิดดอกเบี้ยอย่างดอกเบี้ยทบต้นจะได้ดอกเบี้ยมากกว่าคิดอย่างดอกเบี้ยทบต้น 14 บาท จงหาเงินจำนวนนั้น (1250)

26. เงินต้น 8000 บาท ฝากธนาคารไว้อย่างดอกเบี้ยทบต้น 3 ปี ได้เงินรวม 9261 บาท ถามว่าถ้าฝากเงินจำนวนเดียวกันนั้นไว้อย่างดอกเบี้ยทบต้นเวลา 2 ปี ค่าร้อยละเท่าเดิมจะได้ดอกเบี้ยเท่าไร (ข้อสอบชุด ป.ป. 2491 — 820 บาท)

27. จงแบ่งเงิน 10000 บาทออกเป็นสองส่วน ให้เขากู้โดยคิดอัตราดอกเบี้ยต่างกัน; เมื่อสิ้นปีดอกเบี้ยของเงินส่วนหนึ่งมากกว่าอีกส่วนหนึ่ง 42.75 บาท ซึ่งถ้าจำนวนแรกคิดอัตราดอกเบี้ยอย่างจำนวนหลังแล้วจะได้ดอกเบี้ย 295.65 บาท และถ้าจำนวนหลังคิดอัตราดอกเบี้ยอย่างจำนวนแรกก็จะได้ดอกเบี้ย 102.90 บาท จงหาว่าส่วนแบ่งจำนวนไหนเท่าไร และอัตราดอกเบี้ยเท่าไร (6570 บาท คิด 3 % และ 3430 บาท คิด $4\frac{1}{2}$ %)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# เงินลด
# DISCOUNT

# 19

## เงินลดแท้ (TRUE DISCOUNT)

เงินลดแท้ จะเกิดมีขึ้น ได้ก็ต่อเมื่อ มีบุคคล สองฝ่าย ฝ่ายหนึ่งมีหน้าที่จะต้องใช้เงินให้แก่อีกฝ่ายหนึ่ง ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปจะเกิดขึ้นจากการกู้ยืม เช่น ก. ยืมเงิน ข. 1000 บาท โดย ข. คิดเอาดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี ดังนั้น ก. จึงต้องทำหนังสือสำคัญให้ไว้แก่ ข. ถ้าตกลงกันว่า ก. จะนำเงินมาใช้คืนให้ ข. ในเวลา 6 เดือน ข. ก็จะคิดดอกเบี้ยรวมเข้ากับเงินต้นไปเลย

กล่าวคือ เงิน 100 เวลา 1 ปี คิดดอกเบี้ย 10

∴ เงิน 100 เวลา 6 เดือน คิดดอกเบี้ย 5

∴ เงิน 1000 บาท เวลา 6 เดือน คิดดอกเบี้ย 50 บาท

ดังนั้นในหนังสือสำคัญก็จะระบุเป็นจำนวนเงิน 1000 + 50 = 1050 บาท เงิน 1050 บาท เป็นเงินซึ่ง ก. จะต้องนำไปชำระให้ ข. ในอีก 6 เดือนข้างหน้า คือ **เมื่อถึงกำหนด 6 เดือน ก. จะต้องนำเงิน 1050 บาทไปชำระแก่ ข.** เขาเรียกเงิน 1050 บาทนี้ว่า **เงินถึงกำหนด** (Sum due)

แต่ ก. คงได้รับเงินจาก ข. ไปเพียง 1000 บาทถ้วน ๆ เท่านั้น เงิน 1000 บาทนี้

เรียกว่า **เงินปัจจุบัน** (Present Value) คือถ้าหาก ก. จะใช้คืนให้ ข. ในทันทีนี้ก็คง ใช้ให้เพียง 1000 บาท ไม่ต้องชำระถึง 1050 บาท ตามที่ปรากฏในหนังสือสำคัญซึ่ง ได้ลดลงมา $1050 - 1000 = 50$ บาท

เงิน 50 บาทนี้ เรียกว่า **เงินลดแท้** (True Discount) จากที่กล่าวมานี้จะเห็นได้ว่า

เงินปัจจุบัน คือ เงินต้น
เงินลดแท้ คือ ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินปัจจุบัน
เงินถึงกำหนด คือ เงินรวม (=เงินต้น+ดอกเบี้ย=เงินปัจจุบัน+เงินลดแท้)
∴ เงินปัจจุบัน = เงินถึงกำหนด − เงินลดแท้

**ตัวอย่าง 1** จงหาเงินลดแท้และเงินปัจจุบันของเงิน 420 บาท ถึงกำหนดชำระ 6 เดือน คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี

**วิธีทำ** อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ∴ 6 เดือนอัตราดอกเบี้ยร้อยละ $\frac{10}{2} = 5$

คือเงินปัจจุบัน 100 ดอกเบี้ย 5 ∴ เป็นเงินถึงกำหนด $100 + 5 = 105$

เงินถึงกำหนด 105 ได้ลดแท้ 5

∴ เงินถึงกำหนด 420 บาท เป็นเงินลดแท้ $\frac{5}{105} \times 420 = 20$ บาท

∴ เป็นเงินปัจจุบัน $420 - 20 = 400$ บาท

**ตอบ** เงินลดแท้ 20 บาท
เงินปัจจุบัน 400 บาท

**ตัวอย่าง 2** เงินจำนวนหนึ่งถึงกำหนดชำระอีก 2 ปีข้างหน้า คิดอัตราดอกเบี้ย ร้อยละ 5 มีราคาปัจจุบันเป็นเงิน 2000 บาท เงินจำนวนนั้นเท่าไร

**วิธีทำ**

เงินปัจจุบัน 100 เวลา 1 ปี ดอกเบี้ย 5
∴ เงินปัจจุบัน 100 เวลา 2 ปี ดอกเบี้ย $5 \times 2 = 10$
∴ เงินปัจจุบัน 100 เวลา 2 ปี เป็นเงินถึงกำหนด $100 + 10 = 110$
∴ เงินปัจจุบัน 2000 บาท เวลา 2 ปี เป็นเงินถึงกำหนด $\frac{110}{100} \times 2000 = 2200$ บาท
∴ เงินจำนวนนั้น 2200 บาท

**ตอบ** 2200 บาท

**ตัวอย่าง 3** เงินจำนวนหนึ่งถึงกำหนดชำระในเวลา 3 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 คิดเป็นเงินลดแท้ได้ 30 บาท จงหาเงินจำนวนนั้น

**วิธีทำ** เวลา 12 เดือน ดอกเบี้ยร้อยละ 12 $\therefore$ 3 เดือน ร้อยละ 3

คือเงินปัจจุบัน 100 ได้ลด 3 $\therefore$ เป็นเงินถึงกำหนด $100 + 3 = 103$

เงินลดแท้ 3 เป็นเงินถึงกำหนด 103

$\therefore$ เงินลดแท้ 30 บาท เป็นเงินถึงกำหนด $\frac{103}{3} \times 30 = 1030$ บาท

$\therefore$ เงินจำนวนนั้นคือ 1030 บาท

**ตอบ** 1030 บาท

**ตัวอย่าง 4** เงินลดแท้ของเงิน 525 บาท เป็นเงิน 25 บาท ซึ่งถึงกำหนดชำระในเวลาอีก 6 เดือน จงหาอัตราดอกเบี้ย

**วิธีทำ** เงินถึงกำหนด 525 บาท เป็นเงินลดแท้ 25 บาท

$\therefore$ เงินปัจจุบัน $= 525 - 25 = 500$ บาท

เงินปัจจุบัน 500 บาท เวลา 6 เดือน ได้ดอกเบี้ย 25 บาท

$\therefore$ เงินปัจจุบัน 100 เวลา 6 เดือน ได้ดอกเบี้ย $\frac{25}{500} \times 100$

เงินปัจจุบัน 100 เวลา 12 เดือน ได้ดอกเบี้ย $\frac{25}{500} \times 100 \times \frac{12}{6} = 10$

(อัตราดอกเบี้ยคิดจากเงินปัจจุบัน 100 ในเวลา 1 ปีเสมอ)

$\therefore$ คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10

**ตอบ** 10

**ตัวอย่าง 5** เงิน 460 บาท คิดเป็นเงินลดแท้ได้ 60 บาท ถ้าคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 จงหาว่าเงินจำนวนนั้นถึงกำหนดชำระในเวลาเท่าไร

**วิธีทำ** เงินถึงกำหนด 460 บาท เป็นเงินลดแท้ 60 บาท

$\therefore$ เงินปัจจุบัน $460 - 60 = 400$ บาท

ซึ่งคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5

เงินปัจจุบัน 100 บาท ได้ดอกเบี้ย 5 บาท ในเวลา 1 ปี

เงินปัจจุบัน 100 บาท ได้ดอกเบี้ย 60 บาท ในเวลา $\frac{1\times60}{5}$ ปี

เงินปัจจุบัน 400 บาท ได้ดอกเบี้ย 60 บาท ในเวลา $\frac{1\times60}{5}\times\frac{100}{400}=3$ ปี

$\therefore$ ถึงกำหนดชำระในเวลา 3 ปี

**ตอบ** 3 ปี

## สูตรของเงินลดแท้

ให้ T เป็นเงินลดแท้ (True Discount)

S เป็นเงินถึงกำหนด (Sum due)

r เป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละต่อปี (rate percent)

t เป็นเวลาคิดเป็นปี (time in years)

สูตร $T=\frac{Srt}{100+rt}$

**ตัวอย่างการใช้สูตร 1** จงหาเงินลดแท้และเงินปัจจุบันของเงิน 1320 บาท ถึงกำหนดชำระในเวลา 2 ปี คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5

**วิธีทำ** จากสูตร $T=\frac{Srt}{100+rt}$

ในที่นี้ $S=1320$ บาท, $r=5$, $t=2$ ปี

$\therefore$ $T=\frac{1320\times5\times2}{100+5\times2}$

$=\frac{1320\times5\times2}{110}$

$=120$

$\therefore$ เงินลดแท้ของเงิน 1320 บาท คือ 120 บาท

$\therefore$ เป็นเงินปัจจุบัน $1320-120=1200$ บาท

**ตอบ** เงินลดแท้ 120 บาท
เงินปัจจุบัน 1200 บาท

**ตัวอย่างการใช้สูตร 2** เงินลดแท้ของเงิน 748 บาท เป็นเงิน 68 บาท คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ $2\frac{1}{2}$ ต่อปี ถึงกำหนดชำระเมื่อไร

**วิธีทำ** $T = \frac{Srt}{100 + rt}$

ในที่นี้ $S = 748$ บาท, $r = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $T = 68$ บาท

$$\therefore \quad 68 = \frac{748 \times \frac{5}{2} \times t}{100 + \frac{5}{2}t}$$

$$t = 4$$

$\therefore$ ถึงกำหนดชำระ 4 ปี

**ตอบ** 4 ปี

**คำแนะนำ** การคำนวณเรื่องเงินลดแท้ เหมือนกับเรื่องดอกเบี้ยคงต้นทุกประการ เพียงแต่เปลี่ยนคำว่า

เงินปัจจุบัน เป็น เงินต้น
เงินถึงกำหนด เป็น เงินรวม
และ เงินลดแท้ เป็น ดอกเบี้ย (คงต้น) เท่านั้น

ต่อไปนี้เป็นแบบฝึกหัดให้ทดลองความเข้าใจ

1. จงหาเงินลดแท้ของ
   ก. เงินถึงกำหนด 1025 บาท อัตราร้อยละ 5 ต่อปี กำหนดชำระ 6 เดือน (25)
   ข. เงินปัจจุบัน 5600 บาท อัตราร้อยละ $3\frac{1}{2}$ กำหนดชำระ 9 เดือน (5747)
2. จงหา เงินถึงกำหนด ของ
   ก. เงินปัจจุบัน 500 บาท อัตราร้อยละ 5 กำหนด 6 เดือน (512.50)
   ข. เงินลดแท้ 14.70 บาท อัตราร้อยละ 3 กำหนด 2 ปี (259.70)
3. จงหาเงินปัจจุบันของ
   ก. เงินถึงกำหนด 787.50 บาท อัตราร้อยละ 5 กำหนด 1 ปี (750)
   ข. เงินลดแท้ 20 บาท อัตราร้อยละ 10 กำหนด 6 เดือน (400)

4. หนี้ 4972.50 บาท คิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ได้เงินลดแท้ 147.50 บาท เป็นเวลาถึงกำหนดเท่าไร (3)
5. จงหาอัตราดอกเบี้ยของเงินถึงกำหนด 408 บาท ได้ลดแท้ 8 บาท ถึงกำหนดชำระในเวลา 6 เดือน (4)

## เงินลดธนาคาร (BANKER'S DISCOUNT)

เงินลดธนาคารนี้ มีชื่อเรียกอีกหลายอย่าง คือ

- เงินลดทางปฏิบัติ (Practical Discount)
- เงินลดพาณิชย์ (Commercial Discount)
- เงินลดไม่แท้ (False Discount)

ชื่อของเงินลดต่าง ๆ ที่กล่าวนี้มีวิธีคิดเหมือนกันทั้งสิ้น แต่ก่อนที่จะได้ศึกษาเรื่องนี้ต่อไป ใคร่ขอทำความเข้าใจเรื่องตั๋วเงินไว้เสียก่อน เพราะการศึกษาเรื่องเงินลดจำต้องศึกษาเรื่องตั๋วเงินควบคู่ไปด้วย

## ตั๋วเงิน

คำว่า **ตั๋วเงิน** ย่อมหมายความได้ถึง

- ตั๋วแลกเงิน (Bill of Exchange)
- ตั๋วสัญญาใช้เงิน (Promissory note)
- เช็ค (Cheque)
- ดร๊าฟท์ (Draft)

อย่างไรก็ตาม ตั๋วเงิน ตามประมวลกฎหมายแพ่งและพาณิชย์ของไทยซึ่งได้ใช้มาตั้งแต่ พ.ศ. 2472 จนกระทั่งปัจจุบันนี้ กำหนดว่าตั๋วเงินตามกฎหมายนี้ได้แก่ ตั๋วแลกเงิน ตั๋วสัญญาใช้เงิน และ เช็ค เท่านั้น

**ตั๋วแลกเงิน** ป.พ.พ. ม. 908 กล่าวไว้ว่า "อันว่าตั๋วแลกเงินนั้น คือหนังสือตราสารซึ่งบุคคลคนหนึ่งเรียกว่าผู้สั่งจ่าย สั่งบุคคลอีกคนหนึ่งเรียกว่า

ผู้จ่ายให้ใช้เงินจำนวนหนึ่งแก่บุคคลคนหนึ่ง หรือให้ใช้ตามคำสั่งของบุคคลคนหนึ่ง เรียกว่า ผู้รับเงิน"

จะเห็นว่า ไม่มีการแลกเงินกันเหมือนกับซื้อเลย การที่มีชื่อว่าตั๋วแลกเงินก็เพราะในสมัยโบราณพ่อค้าใช้สำหรับส่งเงินจากประเทศหนึ่งไปยังอีกประเทศหนึ่ง ซึ่งแต่ละประเทศใช้เงินตราไม่เหมือนกัน การที่ไปสั่งจ่ายเงินในอีกประเทศหนึ่งจึงเป็นการ **แลกเงิน** ไปในตัว ครั้นต่อมาบรรดาพ่อค้าเห็นว่าวิธีนี้มีประโยชน์มากก็เลยใช้กันทั่วไป แต่ก็คงเรียกชื่อ **ตั๋วแลกเงิน** เหมือนเดิม

ขอยกตัวอย่าง **วิธีการของตั๋วแลกเงิน** ไว้พอเข้าใจดังนี้

สมมติว่า เราเป็นหนี้นาย ก. อยู่ 100 บาท แต่เราอยากจะให้นาย ก. ไปเอาเงิน 100 บาทนี้จากนาย ข. ซึ่งเป็นลูกหนี้ของเรา เราก็เขียนหนังสือขึ้น ซึ่งเรียกว่าตั๋วแลกเงินดังนี้

| | |
|---|---|
| **ตั๋วแลกเงิน** | บาท 100 $\frac{\times\times}{\times\times}$ |
| ถึง นาย ข. ธนบุรี | |
| ให้จ่ายเงินจำนวนหนึ่งร้อยบาทถ้วนแก่นาย ก. เมื่อถึงกำหนดสามเดือนนับจากวันที่ระบุไว้นี้ | |
| นายแดง กรุงเทพ ฯ | |
| วันที่ 1 มกราคม 2499 | |

เมื่อเรามอบตั๋วแลกเงินนี้ให้นาย ก. ไป เราก็ยังไม่หมดหน้าที่ เพราะถ้าหากว่านาย ก. ไปเอาเงินจากนาย ข. ไม่ได้ เราก็ยังคงต้องรับใช้อยู่เช่นเดิม ครั้นนาย ก. ได้ตั๋วเงินฉบับนี้ไปแล้ว เขาอาจรอรับเงินตามกำหนด หรืออาจไม่รอเพราะต้องการเงิน เขาก็สามารถนำตั๋วแลกเงินนี้ไปขึ้นเงินยังธนาคารซึ่งเรามีเครดิตอยู่ แต่ธนาคารก็ได้จ่ายให้นาย ก. ครบ 100 บาทตามที่ระบุในตั๋วแลกเงินไม่ เพราะธนาคารคิดเอาค่าบริการไว้ด้วย ซึ่งธนาคารคิดจากจำนวนเงินที่ระบุไว้อย่างตอกเบี้ยคงต้น

เช่น ถ้าคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4

ก็คงหักเอาไว้ $100 \times \frac{3}{12} \times \frac{4}{100} = 1$ บาท

คงจ่ายให้เพียง 99 บาท

เงิน 1 บาทนี้ เรียกว่า **เงินลดธนาคาร**

**ตั๋วสัญญาใช้เงิน** ป.พ.พ. ม. 982 ระบุว่า "อันว่าตั๋วสัญญาใช้เงินนั้น คือหนังสือตราสารซึ่งบุคคลคนหนึ่งเรียกว่าผู้ออกตั๋วให้คำมั่นสัญญาว่า จะใช้เงินจำนวนหนึ่งให้แก่บุคคลอีกคนหนึ่ง หรือใช้ให้ตามคำสั่งของบุคคลอีกคนหนึ่ง เรียกว่าผู้รับเงิน"

จากมาตรานี้พอเอาความได้ว่า ตั๋วสัญญาใช้เงินคือหนังสือซึ่งถูกหนี้เขียนขึ้น เพื่อกำหนดแน่นอนว่าจะใช้หนี้ให้แก่เจ้าหนี้เมื่อใด แล้วมอบหนังสือนี้ให้แก่เจ้าหนี้ ครั้นเจ้าหนี้ได้ไป เมื่อมีเหตุต้องใช้เงินก็เอาหนังสือนี้แทนเงินได้อีกด้วย โดยผู้รับหนังสือจากเจ้าหนี้สามารถไปขอรับเงินจากลูกหนี้คนนั้นได้

ในกรณีเช่นนี้ถ้าผู้ทรง (ศัพท์กฎหมายเอาความได้ว่า ผู้ที่มีตั๋วเงินอยู่ในครอบครอง) ไม่อยากจะรอไปจนถึงกำหนดเวลาใช้เงินตามที่ระบุไว้ในตั๋ว ก็มีทางที่จะให้ได้เงินมาใช้ก่อนกำหนด โดยนำไปขายให้แก่ธนาคาร (หรือแก่นายหน้าแล้วแต่กรณี) ซึ่งธนาคารจะซื้อก็ต่อเมื่อรู้ว่าฐานะการเงินของผู้ออกตั๋วนั้นใช้ได้

การได้เงินก่อนกำหนดนี้ เป็นการได้เปรียบของผู้ทรง ดังนั้นจึงควรจะต้องช่วยเหลือธนาคารผู้ซึ่งออกเงินให้ก่อนบ้าง ซึ่งธนาคารจะคิดหักออกจากจำนวนเงินซึ่งปรากฏในตั๋วเงิน

เงินที่ธนาคารหักออกนี้เรียกว่า **เงินลดธนาคาร**

**เช็ค** ป.พ.พ. ม. ๙๗๗ กล่าวกำหนดไว้ว่า "อันว่าเช็คนั้น คือหนังสือตราสารซึ่งบุคคลคนหนึ่งเรียกว่า ผู้สั่งจ่ายสั่งธนาคารให้ใช้เงินจำนวนหนึ่ง เมื่อทวงถามให้แก่บุคคลอีกคนหนึ่งหรือให้ใช้ตามคำสั่งของบุคคลอีกคนหนึ่ง อันเรียกว่าผู้รับเงิน"

จากมาตรานี้ เอาความได้ว่า เช็คคือหนังสือซึ่งเป็นคำสั่งของบุคคลคนหนึ่งซึ่งมีเงินอยู่ในธนาคาร สั่งให้ธนาคารนั้นจ่ายเงินของตนแก่บุคคลคนหนึ่งหรือผู้ถือเช็คนั้น (อาจไม่ใช่บุคคลที่มีชื่อปรากฏในเช็คก็ได้)

**ตั๋วสัญญาใช้เงิน**

ข้าพเจ้าสัญญาจ่ายเงินให้แก่นาย ก. หรือตามคำสั่งของนาย ก. เมื่อถึงกำหนด 6 เดือน นับจากวันที่ออกตั๋วนี้ เป็นจำนวนเงินหนึ่งพันบาทถ้วน

(ลงชื่อ) นายแดง กรุงเทพ ฯ

วันที่ 8 มกราคม พ.ศ. 2499

เช็ค เลขที่ 1234

**ธนาคารประชาชนจำกัด กรุงเทพ ฯ**

วันที่ 25 มกราคม พ.ศ. 2499

จ่าย นาย ก. หรือผู้ถือ

บาท หนึ่งพันบาทถ้วน

บาท 1000 $\frac{\times\times}{\times\times}$

นายแดง

ตามธรรมดาตั๋วเงินจะต้องมีรายการอันหนึ่ง เรียกว่า **วันถึงกำหนดใช้เงิน** วันถึงกำหนดนี้แต่ก่อนเป็นประเพณีซึ่งกฎหมายยอมรับรู้กันอยู่ในหลายประเทศว่า ยอมให้ผ่อนออกไปให้ยาวกว่านี้ได้อีก ซึ่งภาษาอังกฤษเรียกว่า "Day of grace" ซึ่งมีความหมายทำนองว่า **"วันผ่อน"** อย่างไรก็ตามปรากฏว่า **วันผ่อน** นี้ แต่ละประเทศหาได้กำหนดเหมือนกันไม่ ประเทศหนึ่งก็กำหนดวันผ่อนไว้อย่างหนึ่ง อีกประเทศหนึ่งก็กำหนดวันผ่อนไว้อีกอย่างหนึ่ง ซึ่งเป็นเรื่องยุ่งยาก ดังนั้นบรรดาประเทศต่าง ๆ จึงออกกฎหมายเลิกธรรมเนียม **วันผ่อน** นี้เสียหมด คงยังเหลืออยู่ทุกวันนี้เฉพาะอังกฤษ และรัฐบางรัฐในสหรัฐอเมริกาเท่านั้น สำหรับประเทศไทยเราเพิ่งมีกฎหมายออกใหม่ ดังนั้นจึง **ไม่มีวันผ่อน**

**กำหนดวันผ่อนของอังกฤษ** กำหนดให้ 3 วัน เช่น ตั๋วเงินถึงกำหนดชำระวันที่ 1 มกราคม ก็คงยอมให้ชำระได้ถึงวันที่ 4 มกราคม เป็นต้น เมื่อคิดโจทย์เลขทำนองนี้ ต้องเข้าใจว่า **ธนาคารเอาวันผ่อนรวมเข้าไปด้วย** แล้วจึงคิดเงินลด

## การคำนวณเรื่องเงินลดธนาคาร

คิดเหมือนเรื่องดอกเบี้ยคงต้นทุกประการ

ถ้าเราให้ B เป็นเงินลดธนาคาร (Banker's Discount)

[เงินลดทางปฏิบัติ หรือ ลดพาณิชย์ ก็ใช้สูตรเดียวกัน]

F เป็นเงินที่ระบุไว้ในตัวเงิน (Face Value)

r เป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละต่อปี (rate percent)

t เป็นเวลาคิดเป็นปี (time in years)

สูตร $B = \frac{Frt}{100}$

**ตัวอย่าง 6** จงหาเงินลดธนาคารของตั๋วเงิน 1000 บาท ถึงกำหนดชำระในเวลา 6 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5

**วิธีทำ**

เงิน 100 บาท เวลา 1 ปี เป็นเงินลดธนาคาร 5 บาท

เงิน 100 บาท เวลา $\frac{1}{2}$ ปี เป็นเงินลดธนาคาร $5 \times \frac{1}{2}$ บาท

เงิน 1900 บาท เวลา $\frac{1}{2}$ ปี เป็นเงินลดธนาคาร $5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1000}{100} = 25$ บาท

**ตอบ** เงินลดธนาคาร 25 บาท

สูตร $B = \frac{Frt}{100}$

ในที่นี้ $F = 1000$ บาท, $r = 5$, $t = \frac{1}{2}$

$$\therefore B = \frac{1000 \times 5 \times \frac{1}{2}}{100}$$

$$= 25$$

**ตัวอย่าง 7** จงหา ผลต่าง ระหว่าง เงินลดแท้ และเงินลด ธนาคาร ของ ตั๋วเงิน ราคา 4200 บาท อัตราร้อยละ 10 ต่อปี ถึงกำหนดชำระ 6 เดือน

**วิธีทำ**

หาเงินลดแท้

เงินปัจจุบัน 100 เวลา 1 ปี = 12 เดือน เป็นเงินลดแท้ 10

∴ เงินปัจจุบัน 100 เวลา 6 เดือน เป็นเงินลดแท้ $10 \times \frac{6}{12} = 5$

∴ เป็นเงินถึงกำหนด $100 + 5 = 105$

เงินถึงกำหนด 105 เป็นเงินลดแท้ 5

∴ เงินถึงกำหนด 4200 บาท เป็นเงินลดแท้ $\frac{5}{105} \times 4200 = 200$ บาท

∴ **เป็นเงินลดแท้ 200 บาท**

หาเงินลดธนาคาร

เงิน 100 เวลา 12 เดือน เป็นเงินลดธนาคาร 10

เงิน 100 เวลา 6 เดือน เป็นเงินลดธนาคาร $10 \times \frac{6}{12} = 5$

∴ เงิน 4200 บาท เวลา 6 เดือน เป็นเงินลดธนาคาร $\frac{5}{100} \times 4200 = 210$ บาท

∴ **เป็นเงินลดธนาคาร 210 บาท**

∴ ผลต่าง $210 - 200 = 10$ บาท

**ตอบ** 10 บาท

**ทำอย่างใช้สูตร**

$$T = \frac{Srt}{100 + rt}$$

$S = 4200,\ r = 10,\ t = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad T = \frac{4200 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100 + (10 \times \frac{1}{2})}$$

$$= 200$$

เป็นเงินลดแท้ 200 บาท

$$B = \frac{Frt}{100}$$

$F = 4200,\ r = 10,\ t = \frac{1}{2}$

$$F = \frac{4200 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100}$$

$$= 210$$

เป็นเงินลดธนาคาร 210 บาท

∴ ผลต่างเงินลดแท้และลดธนาคาร $210 - 200 = 10$

**ตัวอย่าง 8** ตั๋วเงินฉบับหนึ่ง เงิน 1275 บาท ลงวันที่ 4 มีนาคม พ.ศ. 2498 ถึงกำหนดชำระ 10 เดือน แต่คิดเงินลดกันเมื่อวันที่ 11 สิงหาคม พ.ศ. 2498 ในอัตราร้อยละ 5 การลดนี้เป็นการลดทางปฏิบัติ จงหาว่าเป็นเงินลดเท่าไร

(การคิดเวลาว่าจะเป็นวันถึงกำหนด วันที่เท่าไร เดือนอะไร คิดดังนี้

ตั๋วเงินออกวันที่ 4 มีนาคม ถึงวันที่ 4 เมษายน ครบ 1 เดือน
„ 4 พฤษภาคม „ 2 เดือน
„ 4 มิถุนายน „ 3 เดือน
„ 4 กรกฎาคม „ 4 เดือน
„ 4 สิงหาคม „ 5 เดือน
„ 4 กันยายน „ 6 เดือน
„ 4 ตุลาคม „ 7 เดือน
„ 4 พฤศจิกายน „ 8 เดือน
„ 4 ธันวาคม „ 9 เดือน
„ 4 มกราคม „ 10 เดือน)

**วิธีทำ** ตั๋วเงินออกวันที่ 4 มีนาคม 2498 กำหนด 10 เดือน

∴ วันถึงกำหนดคือวันที่ 4 มกราคม 2499

แต่คิดเงินลดกันเมื่อวันที่ 11 สิงหาคม 2498

จาก 11 สิงหาคม 98 ถึง 4 มกราคม 99 มีจำนวนวันอยู่

11 สิงหาคม→ กันยายน→ ตุลาคม→ พฤศจิกายน→ ธันวาคม→ มกราคม

(31−11) + 30 + 31 + 30 + 31 + 4 (เพราะถึงกำหนดวันที่ 4)

รวมได้ 146 วัน

สูตร $B = \frac{Frt}{100}$

ในที่นี้ F (ค่าที่ปรากฏในตั๋ว) = 1275 บาท, r = 5, $t = \frac{146}{365}$ (คิด 1 ปี 365 วัน)

$$\therefore \quad B = \frac{1275 \times 5 \times \frac{146}{365}}{100}$$

$$= \frac{1275 \times 5 \times 146}{100 \times 365}$$

$$= 25.50$$

∴ เบี้ยเงินลดทางปฏิบัติ 25.50 บาท

**ตอบ** 25.50 บาท

**ตัวอย่าง 9** ตั๋วเงินฉบับหนึ่งเงิน 4000 บาท ออกเมื่อวันที่ 3 พฤษภาคม 2498 ถึงกำหนดจ่าย 4 เดือน นำไปขึ้นเงินที่ธนาคารเมื่อวันที่ 22 มิถุนายน 2498 ในอัตราร้อยละ 4 อยากทราบว่าธนาคารจ่ายเงินให้เท่าไร

**วิธีทำ** ตั๋วเงินออกวันที่ 3 พฤษภาคม 98 กำหนด 4 เดือน

∴ ถึงกำหนดวันที่ 3 กันยายน 98

คิดลดวันที่ 22 มิถุนายน 98

จากวันที่ 22 มิถุนายน 98 ถึง 3 กันยายน 98 คิดจำนวนวันได้

22 มิถุนายน → กรกฎาคม → สิงหาคม → 3 กันยายน

(30−22) + 31 + 31 + 3 = 73 วัน

**สูตร** $B = \frac{Frt}{100}$

$$= \frac{4000 \times 4 \times \frac{73}{365}}{100}$$

$$= \frac{4000 \times 4 \times 73}{100 \times 365}$$

$$= 32$$

F = 4000 บาท

r = 4

$t = \frac{73}{365}$

∴ เงินลดธนาคาร = 32 บาท

ดังนั้นธนาคารจ่ายเงินให้เพียง 4000 − 32 = 3968 บาท

**ตอบ** 3968 บาท

**ตัวอย่าง 10** ตั๋วเงินใบหนึ่ง ออกเมื่อวันที่ 16 มิถุนายน 2498 ถึงกำหนดชำระ 6 เดือน ครั้นถึงวันที่ 17 กันยายน 2498 คิดเงินลดได้ 60 บาท ในอัตราร้อยละ $3\frac{1}{3}$ จงหาจำนวนเงินที่ระบุไว้ (Face Value) ในตั๋วเงินใบนี้

**วิธีทำ** ตั๋วเงินออกวันที่ 16 มิถุนายน 2498 กำหนด 6 เดือน

$\therefore$ ถึงกำหนดวันที่ 16 ธันวาคม 2498

คิดลดวันที่ 17 กันยายน 2498 นับเวลาได้

17 กันยายน→ ตุลาคม→ พฤศจิกายน→ 16 ธันวาคม

$(30-17) + 31 + 30 + 16 = 90$ วัน

สูตร $B = \frac{Frt}{100}$

ในที่นี้ $B = 60$ บาท, $r = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, $t = \frac{90}{365}$,

$$\therefore \quad 60 = \frac{F \times \frac{10}{3} \times \frac{90}{365}}{100}$$

$$= \frac{F \times 10 \times 90}{100 \times 3 \times 365}$$

$$F = \frac{60 \times 100 \times 3 \times 365}{10 \times 90}$$

$$= 7300$$

$\therefore$ จำนวนเงินที่ระบุไว้ในตั๋วเงิน คือ 7300 บาท

**ตอบ** 7300 บาท

**ตัวอย่าง 11** จงหาเงินลดธนาคารของตั๋วเงินฉบับหนึ่ง ซึ่งมีจำนวนเงิน £ 650 ทำขึ้นเมื่อวันที่ 15 เมษายน กำหนดชำระ 3 เดือน คิดลดเมื่อวันที่ 19 พฤษภาคม ในอัตรา 4 เปอร์เซนต์ ตอบให้ใกล้เคียงเพนนีที่สุด

(โจทย์จากตัวอย่าง Art. 308 หนังสือ A School Arithmetic ของ Hall and Stevens)

**วิธีทำ** ตั๋วเงินออกเมื่อวันที่ 15 เมษายน ถึงกำหนดชำระ 3 เดือน

จาก 15 เมษายน ถึง 15 พฤษภาคม 1 เดือน

จาก 15 พฤษภาคม ถึง 15 มิถุนายน 2 เดือน

จาก 15 มิถุนายน ถึง 15 กรกฎาคม 3 เดือน

∴ ถึงกำหนดชำระในวันที่ 15 กรกฎาคม

คิดลดกันในวันที่ 19 พฤษภาคม

จาก 19 พฤษภาคม ถึง 15 กรกฎาคม เป็นเวลา

19 พฤษภาคม → มิถุนายน → 15 กรกฎาคม

(31—19) + 30 + 15 = 57 วัน

แต่เป็นมาตราเงินอังกฤษ แสดงว่าปฏิบัติกันในประเทศอังกฤษ

ดังนั้น ต้องคิดวันผ่อน 3 วัน (Three extra days) รวมเข้าไปด้วย

รวมเป็น $57 + 3 = 60$ วัน

**สูตร** $B = \frac{Frt}{100}$

$= \frac{650 \times 4 \times \frac{60}{365}}{100}$

$= \frac{312}{73}$

| $F = £650$
| $r = 4$
| $t = \frac{60}{365}$

∴ เงินลดธนาคาร $= £\frac{312}{73}$

$= £4.\ 5s.\ 5\frac{55}{73}d.$

$= £4.\ 5s.\ 6d.$ (ใกล้เคียง)

**ตอบ** £4. 5s. 6d.

**ตัวอย่าง 12** จงหาเงินลดของตั๋วเงิน £3000 ลงวันที่ 4 พฤษภาคม กำหนด 4 เดือน คิดลดเมื่อวันที่ 20 มิถุนายน ในอัตรา 5 เปอร์เซนต์

(โจทย์จากตัวอย่างหน้า 287 Arithmetic ของ C.V. Durell M.A. and R.C. Fawdry M.A., B.Sc.)

**วิธีทำ** ตั๋วเงินออกวันที่ 4 พฤษภาคม กำหนด 4 เดือน

∴ ถึงกำหนดชำระวันที่ 4 กันยายน

คิดลดวันที่ 20 มิถุนายน นับวันได้

20 มิถุนายน→ กรกฎาคม→ สิงหาคม→ 4 กันยายน

(30—20) + 31 + 31 + 4 = 76 วัน

เป็นเงินอังกฤษต้องคิดวันผ่อน 3 วัน (3 day's grace) เข้าด้วย

รวมเป็น 76 + 3 = 79 วัน

สูตร $B = \frac{Frt}{100}$ | $F = £3000$, $r = 5$, $t = \frac{79}{365}$

$= \frac{3000 \times 5 \times \frac{79}{365}}{100}$

= £ 32, 9 s. 4 d. (ใกล้เคียง)

∴ เงินลดคือ £ 32 9 s. 4 d.

**ตอบ** £ 32, 9 s. 4 d.

**คำแนะนำ** เมื่อโจทย์ให้หา **เงินลด** (Discount) โปรดเข้าใจว่าเป็นเงินลดที่ใช้กันทั่วไป คือ เงินลดทางปฏิบัติ เพราะทางปฏิบัตินั้น เมื่อคิดลดกันเขาจะไม่ยอมคิดอย่างเงินลดแท้ (True Discount) เพราะเงินลดแท้ ผู้ซื้อตั๋วเงินก็ได้ผลประโยชน์น้อย เขาจึงคิดลดอย่างเงินลดทั่ว ๆ ไป ซึ่งเรียกว่า**เงินลดทางปฏิบัติ** (Practical Discount) ซึ่ง**เหมือนกับเงินลดธนาคารนั่นเอง**

อนึ่ง การรวมวันผ่อนนั้นรวมเฉพาะโจทย์ที่คิดเป็นวันเท่านั้น ถ้าบอกเป็นเดือน เช่น 3 เดือน ไม่บอกว่าจากวันที่เท่าไรถึงกำหนดเมื่อใด ไม่ต้องเอาวันผ่อนไปรวมกับ 3 เดือน

# แบบฝึกหัด 20

แบบฝึกหัดนี้ ถ้าเป็นเงินอังกฤษให้คิดวันผ่อน 3 วันรวมเข้าด้วย

จงหาเงินลดแท้และเงินลดธนาคารของ

1. เงิน 3000 บาท ถึงกำหนด 2 ปี อัตราร้อยละ 10 (500, 600)
2. เงิน 2600 บาท ถึงกำหนด 4 เดือน อัตราร้อยละ 12 (100, 104)
3. จงหาเงินลดธนาคารของเงิน £463. 10 s. ถึงกำหนดชำระ $2\frac{1}{2}$ ปี อัตราร้อยละ $2\frac{3}{4}$ (£31. 17 s. $3\frac{3}{4}$ d.)
4. ตั๋วเงินราคา 1700 บาท ถึงกำหนดชำระ 6 เดือน จงหาเงินลดธนาคารในอัตราร้อยละ $12\frac{1}{2}$ (106.25)
5. ตั๋วเงินฉบับหนึ่งราคา 1400 บาท ถึงกำหนดชำระ 1 ปี 6 เดือน จงหาเงินลดธนาคารในอัตราร้อยละ 8 (168)
6. ตั๋วเงิน 8300 บาท กำหนดใช้เงินในเวลา 3 เดือน อัตราลดร้อยละ 15 จงหาเงินลด (311.25)
7. จงหาผลต่างระหว่างเงินลดแท้และเงินลดธนาคารของตั๋วเงินราคา £600. 5 s. กำหนด 4 เดือน อัตราร้อยละ $6\frac{1}{4}$ (7s. $1\frac{1}{4}$d.)
8. จงหาผลต่างระหว่างเงินลดแท้กับเงินลดธรรมดา ของเงิน £257. 8 s. $8\frac{1}{4}$ d. ซึ่งใช้ก่อนกำหนด 210 วัน ในอัตราร้อยละ $4\frac{1}{2}$ (3 s. 4.36 d.)

ข้อต่อไปนี้คอบเพียงใกล้เคียงเพื่อน

9. ตั๋วเงิน £603 ออกเมื่อวันที่ 4 ตุลาคม กำหนด 4 เดือน คิดลดวันที่ 26 พฤศจิกายน ในอัตราร้อยละ $2\frac{1}{2}$ จะเป็นเงินลดเท่าไร (£3. 0 s. 4 d.)
10. ตั๋วเงินฉบับหนึ่งระบุเงิน £952. 15 s. ลงวันที่ 9 มีนาคม ถึงกำหนดชำระอีก 9 เดือนข้างหน้า จึงนำไปขายเงินที่ธนาคารในวันที่ 7 เมษายน ธนาคารหักเงินไว้ในอัตราร้อยละ 5 จงหาว่าธนาคารหักเอาเงินไว้เท่าไร (£28, 11 s. 8 d)

11. ใบเก็บเงินใบหนึ่งมีจำนวนเงินเป็น £2674. 6 s. 0 d. เมื่อคิดตามอัตราดอกเบี้ย $4\frac{3}{5}$ จะได้ลด £324. 6 s. 0 d. จงหาว่าใบเก็บเงินนี้จะถึงกำหนดไปรับเงินได้ในเวลาเท่าใด ★★ (3 ปี)

12. ข้าพเจ้านำตั๋วเงิน 1500 บาทไปขอขึ้นเงินที่ธนาคารเมื่อวันที่ 17 มีนาคม 2498 ตั๋วเงินนี้ลงวันที่ 29 มกราคม 2498 มีกำหนด 4 เดือน ธนาคารคิดอัตราร้อยละ 5 อยากทราบว่าข้าพเจ้าได้รับเงินเท่าไร (1485)

13. ตั๋วเงินฉบับหนึ่งราคา 1225 บาท ออกเมื่อวันที่ 10 มกราคม มีกำหนด 8 เดือน ธนาคารคิดลดในอัตราร้อยละ 12 คิดลดกันเมื่อวันที่ 17 เมษายน จะเป็นเงินลดเท่าไร (58.80)

14. นายแดงนำตั๋วเงินลงวันที่ 4 สิงหาคม ถึงกำหนดชำระ 3 เดือน ไปขอขึ้นเงินจากธนาคารเมื่อวันที่ 20 กันยายน ธนาคารคิดเงินลดเอาในอัตราร้อยละ 10 ปรากฏว่านายแดงได้รับเงินไป 1442 บาท จงหาจำนวนเงินที่ระบุไว้ในตั๋วเงินฉบับนั้น (1460)

15. ตั๋วเงินราคา 3650 บาท ลงวันที่ 9 ธันวาคม 2497 มีกำหนด 4 เดือน คิดลดเมื่อ 12 กุมภาพันธ์ 2498 ธนาคารคิดอัตราร้อยละ $12\frac{1}{2}$ จะเป็นเงินลดเท่าไร กำหนดว่าเดือนกุมภาพันธ์มี 28 วัน (70)

16. ตั๋วเงินราคา 9125 บาท ออกเมื่อวันที่ 15 กุมภาพันธ์ กำหนด 4 เดือน คิดลดเมื่อ 28 พฤษภาคม เมื่อนำไปขึ้นเงินที่ธนาคาร ได้เงินเพียง 9029 บาทเท่านั้น จงหาว่าธนาคารคิดลดในอัตราร้อยละเท่าไร (8)

17. ตั๋วเงินฉบับหนึ่งออกเมื่อวันที่ 7 มีนาคม ระบุจำนวนเงิน 14600 บาท ถึงกำหนดชำระ 6 เดือน ต่อมาผู้ทรงตั๋วเงินนำไปขอขึ้นที่ธนาคาร ธนาคารจ่ายเงินให้ 14310 บาท ในอัตราร้อยละ $8\frac{1}{3}$ อยากทราบว่าที่ไปขึ้นเงินจากธนาคารนั้นเมื่อไร (12 มิถุนายน)

18. ก. ออกตั๋วเงินให้ ข. เมื่อวันที่ 31 มีนาคม เป็นจำนวนเงิน 1825 บาท ข. นำไปขายให้แก่นายหน้าผู้รับซื้อ เมื่อ 8 กันยายนปีเดียวกัน โดยเสียค่าเงินลดร้อยละ 15 คงได้รับเงินเพียง 1750 บาทเท่านั้น จงหาว่า ก. ระบุกำหนดเวลาไว้ในตั๋วเงินเท่าไร (9 เดือน)

19. ตั๋วเงิน £1750 ลงวันที่ 1 กรกฎาคม กำหนด 5 เดือน คิดลดเมื่อวันที่ 30 กันยายน ในอัตราร้อยละ $4\frac{1}{2}$ จะเป็นเงินลดเท่าไร (£ 14, 0 s. 6 d.)

20. นายธนาคารรับซื้อตั๋วเงิน £ 5025 ซึ่งออกวันที่ 18 มีนาคม กำหนด 4 เดือน เมื่อวันที่ 2 เมษายน คิดลดร้อยละ 3 จงหาว่านายธนาคารจะต้องจ่ายเงินเท่าไร (£ 4979, 11 s. 4 d.)

21. ตั๋วเงินฉบับหนึ่งออกเมื่อ 2 กรกฎาคม 2498 กำหนดชำระ 6 เดือน คิดลดเมื่อวันที่ 31 สิงหาคม 2498 ในอัตราร้อยละ 10 เป็นเงินลด 62 บาท ตั๋วเงินฉบับนั้นราคาเท่าไร (1460)

22. ตั๋วเงินฉบับหนึ่งระบุจำนวนเงินในตั๋ว 1773.90 บาท ออกเมื่อวันที่ 5 มิถุนายน พ.ศ. 2499 แต่นำไปคิดลดเมื่อวันที่ 21 พฤศจิกายน พ.ศ. 2499 ในอัตราร้อยละ 10 ปรากฏว่าได้เงินน้อยกว่าที่ระบุไว้ในตั๋วเงิน 60.75 บาท จงหา

ก. กำหนดชำระเงินที่ระบุในตั๋วเงิน

ข. ตั๋วเงินนี้ถึงกำหนดชำระเมื่อใด

กำหนดว่าเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2500 มี 28 วัน

(ตอบ ก. 10 เดือน ข. วันที่ 5 เมษายน พ.ศ. 2500)

---

เครื่องหมาย ★★ คือข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การคำนวณเรื่องสต๊อก

# PROBLEMS ON STOCKS

# 20

ในการตั้งบริษัททำการค้า จำต้องมีเงินทุนเป็นจำนวนมากเพื่อดำเนินการ ผู้ก่อการตั้งบริษัทจึงแบ่งทุนที่ตั้งขึ้นนั้นเป็นส่วน ๆ เช่นบริษัทตั้งทุนไว้ 10 ล้านบาท แบ่งเป็นสองแสนส่วนก็จะได้ส่วนละ 50 บาท เงิน 50 บาทนี้เรียกว่าหุ้น (Share) เมื่อผู้ใดเห็นว่าบริษัทจะดำเนินกิจการรุ่งเรืองก้าวหน้าก็ซื้อหุ้นของบริษัทไว้ จะซื้อกี่หุ้นก็ได้ในราคาหุ้นละ 50 ถ้าซื้อ 10 หุ้นก็เป็นเงิน 500 บาทเป็นต้น ผู้ถือหุ้นของบริษัท เมื่อสิ้นปีก็จะได้รับเงินปันผล ซึ่งคือกำไรของบริษัทนำมาเฉลี่ยให้แก่ผู้ถือหุ้นนั่นเอง

หุ้นของบริษัทจะแบ่งให้มีมูลค่าเท่าไรก็ได้ เช่น หุ้นละ 50, 500, 2000 บาทเป็นต้น แต่ตามกฎหมายไทยเรากำหนดมูลค่าของหุ้นว่า อย่างต่ำที่สุดต้องมีมูลค่า 5 บาท จะออกหุ้น ๆ ละ 5 บาท 6 บาทก็ได้ แต่จะออกหุ้นราคาหุ้นละ 4 บาทไม่ได้

ในต่างประเทศก็เช่นเดียวกัน คือจะออกหุ้นเป็นมูลค่าหุ้นละเท่าไรก็ได้ แต่ถ้าออกเป็นมูลค่าหุ้นละ 100 แล้ว เขาเรียกชื่อหุ้น (Share) นั้นเสียใหม่ว่า สต๊อก (Stock) ดังนั้น

## Stock คือ หุ้น (Share) นั่นเอง

เมื่อเขากำหนดว่าหุ้นทุกมูลค่า 100 เรียกว่าเป็น Stock แล้ว เขายังได้กำหนดให้ Stock แตกต่างจากหุ้นไปบ้างเล็กน้อย คือ

### ข้อแตกต่างระหว่าง Stock และ Share

| Stock | Share |
|---|---|
| 1. ต้องมีมูลค่าใบละ 100 เสมอ | 1. จะมีมูลค่าหุ้นละเท่าไรก็ได้ |
| 2. การซื้อสต๊อกจะซื้อเท่าไรก็ได้ เช่นซื้อ 150, 2560 ไม่จำเป็นต้องซื้อ 100, 200, 1000 | 2. การซื้อหุ้น ต้องซื้อให้ครบเป็นหุ้น ๆ เช่นซื้อ 3 หุ้น 4 หุ้น 100 หุ้น จะซื้อครึ่งหุ้นหรือหุ้นกว่า ๆ ไม่ได้ |

**ข้อสังเกต** ที่ว่า Stock ต้องมีราคา 100 เสมอนั้น

ต้องถือว่า ถ้าเป็น Stock อังกฤษ ต้องมีราคา 100 ปอนด์

ถ้าเป็น Stock อเมริกา ต้องมีราคา 100 ดอลลา

และ ถ้าเป็น Stock ไทย ต้องมีราคา 100 บาท

(แต่ในประเทศไทยทุกวันนี้ไม่มี Stock เลย ถ้ามีใครซื้อสต๊อกเป็นเงินไทย แสดงว่า เป็นใครซื้อสมมติเท่านั้น และต้องคิดราคา 100 บาทด้วย แม้ว่าความจริงจะยังไม่มีก็ตาม)

## การคำนวณเรื่อง STOCKS

ได้ทราบแล้วว่า สต๊อกเกิดจากการซื้อหุ้นซึ่งมีราคา 100 ของบริษัทใด ๆ (หรือของรัฐบาล) และบริษัทนั้นออกหนังสือสำคัญให้ยึดถือไว้ เรียกว่า สต๊อก

ผู้เป็นเจ้าของสต๊อก ก็รอให้ถึงปี เพื่อจะได้รับเงินปันผล (กำไร) จากบริษัท

แต่ถ้าบริษัทนั้นกิจการเสื่อมโทรม มีทางว่าจะเกิดการขาดทุนย่อยยับ หรือมีหวังจะต้องเลิกล้มไป ผู้ถือหุ้นก็ย่อมร้อนใจ เกรงว่าบริษัทจะมีอันเป็นไปต้องล้มละลาย และเงินที่คนลงทุนซื้อสต๊อกก็จะพลอยสูญเสียไปโดยเปล่าประโยชน์ จึงคิดจะขายสต๊อกที่คนถืออยู่ให้

แก่ผู้ถือเสีย นอกจากนี้ยังมีอีกหลายกรณี เช่น การดำเนินงานของบริษัทไม่เป็นผลสำเร็จ ไม่เคยแบ่งเงินปันผลเลย เพราะขาดทุนทุกปี จึงไม่มีกำไรมาแบ่ง ผู้ถือสต๊อกก็เบื่อหน่าย เพราะเงินของตนไปจมอยู่อย่างไม่งอกเงย และมีหวังที่จะไม่ได้คืนถ้าบริษัทล้มละลาย เมื่อเป็นดังนี้จึงมีการขายสต๊อกกันขึ้น โดยผู้ขายคิดว่ายอมขาดทุนดีกว่าที่จะปล่อยให้เงินสูญหายไปเพราะการล้มละลายของบริษัท ฝ่ายผู้ซื้อก็หวังว่า คนยอมสละเงินซื้อในราคาถูก ๆ ประเหมาะเคราะห์ดีบริษัทฟื้นฟูขึ้นมา คนก็จะได้เงินปันผลมากจากราคาที่คนซื้อเพียงเล็กน้อย

โดยทางกลับกัน ถ้าบริษัทเจริญรุ่งเรืองได้กำไรมาก และจ่ายเงินปันผลมาก บรรดาผู้คนก็อยากจะได้สต๊อกของบริษัทไว้ เพราะหวังจะได้เงินปันผลทุก ๆ ปีอย่างสบาย ๆ จึงขวนขวายหาซื้อสต๊อกของบริษัทนั้น ๆ ฝ่ายผู้ถือสต๊อกของบริษัทนั้นก็จะเล่นตัวโก่งราคาสต๊อกขึ้น เช่น ปกติสต๊อกราคา 100 ก็อาจจะขายให้ 110 หรือ 120 แล้วแต่กรณี

จากที่กล่าวมานี้จะเห็นว่า สต๊อกราคา 100 นั้น การซื้อขายในท้องตลาดอาจต่ำกว่าราคาเดิมก็ได้ คืออาจซื้อขายกันในราคา 90 หรือ 95 เช่นนี้เรียกว่าสต๊อกราคาลด (at a discount หรือ below par) แต่ถ้าซื้อกันในราคา 100 เรียกว่าสต๊อกราคาคงเดิม (at par) ถ้าซื้อราคาสูงกว่าเดิม เช่น ราคา 105, 110 หรือ 120 (คือสูงกว่า 100) เรียกว่าสต๊อกราคาขึ้น at a premium หรือ above par)

## การคิดเงินปันผล (Dividend)

เงินปันผลนี้บางทีก็เรียกว่า **เงินรายได้** (income) ได้แก่กำไรของบริษัท ซึ่งหลังจากหักค่าใช้จ่ายแล้ว บริษัทก็จะนำไปเฉลี่ยให้แก่หุ้นหรือสต๊อก **การคิดเงินปันผลของสต๊อก** คิดจากสต๊อก 100 และการที่คิดนี้คิดจาก**ราคาเดิม**ของสต๊อก หาได้คิดจากราคาที่ซื้อขายกันในท้องตลาดไม่ และโปรดเข้าใจว่า **สต๊อกราคาเดิมนั้นต้องเป็น 100 เสมอ**

**กรณีที่ 1** สต๊อก 3 % ราคา 90 หมายความว่า

สต๊อก £ 100 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 90

สต๊อกราคา £ 100 ให้รายได้ £ 3

หรือลงทุน £ 90 ได้เงินปันผล £ 3

กรณีที่ 2 สต๊อก 4 % ราคา 120 หมายความว่า

สต๊อกราคา £ 100 ต้องซื้อด้วยเงิน £ 120

คือลงทุน £ 120 ได้เงินปันผล £ 4

กรณีที่ 3 สต๊อก 4 % ราคาคงเดิม หมายความว่า

สต๊อกราคา £ 100 ก็ซื้อได้ด้วยเงิน £ 100

คือลงทุน £ 100 ได้เงินปันผล £ 4

กรณีที่ 4 ซื้อสต๊อก 5 % ราคา 120 บาท มาเป็นจำนวน £ 1000 หมายความว่า

สต๊อก £ 100 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 120

∴ สต๊อก £ 1000 ซื้อสิ้นเงิน $\frac{120}{100} \times 1000 = £ 1200$

ซึ่งอาจหาเงินปันผลได้ 2 ทาง คือ

ทางที่ 1 สต๊อก £ 100 ให้รายได้ £ 5

∴ สต๊อก £ 1000 ให้รายได้ $\frac{5}{100} \times 1000 = £ 50$

ทางที่ 2 ลงทุน £ 120 ได้ปันผล £ 5

∴ ลงทุน £ 1200 ได้ปันผล $\frac{5}{120} \times 1200 = £ 50$

กรณีที่ 5 ซื้อสต๊อก 3 % ราคา 90 มา £ 1000 ชนิด 4 % ราคา 110 มา £ 2000

และชนิด 5 % ราคาคงเดิมมา £ 3000 หมายความว่า

สต๊อกชนิด 3 % £ 100 ได้เงินปันผล £ 3.

∴ ราคา £ 1000 ได้เงินปันผล £ 30.

ชนิด 4 % £ 100 ได้เงินปันผล £ 4.

∴ ราคา £ 2000 ได้เงินปันผล £ 80.

ชนิด 5 % £ 100 ได้เงินปันผล £ 5.

∴ ราคา £ 3000 ได้เงินปันผล £ 150.

และหมายความได้อีกว่า

สต๊อกชนิด 3 % ราคา £ 100 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 90

∴ ราคา £ 1000 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 900

ชนิด 4 % ราคา £ 100 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 110

∴ ราคา £ 2000 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 2200

ชนิด 5 % ราคา £ 100 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 100

∴ ราคา £ 3000 ซื้อได้ด้วยเงิน £ 3000

## จงพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ให้เข้าใจดี

**ตัวอย่าง 1** ข้าพเจ้าซื้อส่งออก 5 % เมื่อราคา 120 บาท ส่งเงิน 1200 บาท อยากทราบว่าได้ส่งออกราคาเท่าไร

**วิธีทำ** ซื้อส่งเงิน 120 บาท ได้ส่งออกราคา 100 บาท

∴ ซื้อส่งเงิน 1200 บาท ได้ส่งออกราคา $\frac{100}{120} \times 1200 = 1000$ บาท

**ตัวอย่าง 2** ส่งออกชนิด 4 % ซื้อในราคา 90 บาท ส่งไปได้เงินปันผล 42 บาท จงหาว่าส่งออกที่ซื้อมาราคาเท่าไร และซื้อส่งเงินเท่าไร

**วิธีทำ** ส่งออกราคา 100 ได้ปันผล 4 ซื้อได้ด้วยเงิน 90 บาท

∴ ได้ปันผล 4 บาท เป็นราคาส่งออก 100 บาท

∴ ได้ปันผล 42 บาท เป็นราคาส่งออก $\frac{100}{4} \times 42 = 1050$ บาท

ส่งออกราคา 100 บาท ซื้อได้ด้วยเงิน 90 บาท

∴ ส่งออกราคา 1050 บาท ซื้อได้ด้วยเงิน $\frac{90}{100} \times 1050 = 945$ บาท

**ตอบ** ราคาส่งออกที่ซื้อมา 1050 บาท
ซื้อส่งเงิน 945 บาท

**ตัวอย่าง 3** ส่งออก 3 % ราคา 80 บาท ชนิด 5 % ราคาคงเดิม และชนิด 6% ราคา 110 บาท จงหาว่าส่งออกชนิดไหนมีรายได้ดีที่สุด

**วิธีทำ** ชนิด 3 % ลงทุน 80 บาท ให้รายได้ 3 บาท

∴ ลงทุน 100 บาท ให้รายได้ $\frac{3}{80} \times 100 = \frac{15}{4}$ บาท

ชนิด 5 % ลงทุน 100 บาท ให้รายได้ 5 บาท

ชนิด 6 % ลงทุน 110 บาท ให้รายได้ 6 บาท

∴ ลงทุน 100 บาท ให้รายได้ $\frac{6}{110} \times 100 = \frac{60}{11}$ บาท

∴ รายได้ของชนิด 3 % และชนิด 5 % และชนิด 6 % เป็นอัตราส่วน $\frac{15}{4} : 5 : \frac{60}{11}$

$= 3\frac{1}{2} : 5 : 5\frac{5}{11}$

จะเห็นว่าลงทุน 100 เท่ากัน ชนิด 6 % ได้รายได้ $5\frac{5}{11}$ ซึ่งมากที่สุด

∴ สต็อกชนิด 6 % มีรายได้ดีที่สุด

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 4** ข้าพเจ้ามีสต็อก $2\frac{1}{2}$ % อยู่เป็นจำนวน £ 9000 ขายไปเสียครึ่งหนึ่ง เมื่อราคา $112\frac{1}{2}$ จงหาว่าข้าพเจ้าได้เงินเท่าไร

**วิธีทำ** ขายไปครึ่งหนึ่ง ∴ ขายสต็อกไปราคา £ $\frac{9000}{2}$ = £ 4500

สต็อกราคา £ 100 ขายได้เงิน £ $112\frac{1}{2}$ = £ $\frac{225}{2}$

∴ สต็อกราคา £ 4500 ขายได้เงิน £ $\frac{225 \times 4500}{2 \times 100}$

= £ 5062. 10 s.

**ตอบ** £ 5062, 10 s.

**ตัวอย่าง 5** ซื้อสต็อกชนิด $5\frac{1}{2}$ % เมื่อราคาเป็น 110 จงหาว่าได้เงินปันผลร้อยละเท่าไรของเงินทุน

**วิธีทำ** ลงทุน 110 ได้ปันผล $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

∴ ลงทุน 100 ได้ปันผล $\frac{11}{2} \times \frac{100}{110} = 5$

∴ ได้ปันผลร้อยละ 5 ของเงินทุน

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 6** ซื้อสต็อก 3 % สิ้นเงิน 1500 บาท ได้สต็อกราคา 1000 บาท จงหาราคาสต็อกในท้องตลาด

**วิธีทำ** สต็อกราคา 1000 บาท ซื้อสิ้นเงิน 1500 บาท

∴ สต็อกราคา 100 บาท ซื้อสิ้นเงิน $\frac{1500}{1000} \times 100 = 150$ บาท

**ตัวอย่าง 7** (ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ)

ถ้าขายพันธบัตร 1100 บาท ซึ่งได้ดอกเบี้ยร้อยละ $4\frac{1}{2}$ นำไปตามราคา 90 แล้วนำเงินทั้งหมดไปซื้อพันธบัตรอีกอย่างหนึ่ง ซึ่งได้ดอกเบี้ยร้อยละ 6 ด้วยราคา 108 ดอกเบี้ยที่ได้รับใหม่นี้จะมากหรือน้อยกว่าเดิมเท่าใด

**วิธีทำ** พันธบัตร 100 ได้ดอกเบี้ย $4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore$ พันธบัตร 1100 บาท ได้ดอกเบี้ย $\frac{9}{2}\times\frac{1100}{100}=\frac{99}{2}$ บาท

แล้วขายไปราคา 90

พันธบัตร 100 ขายได้เงิน 90

$\therefore$ พันธบัตร 1100 บาท ขายได้เงิน $\frac{90}{100}\times 1100=990$ บาท

นำเงินไปซื้อพันธบัตรราคา 108

เงิน 108 ซื้อพันธบัตรได้ 100

$\therefore$ เงิน 990 บาท ซื้อพันธบัตรได้ $\frac{100\times 990}{108}=\frac{2750}{3}$ บาท

พันธบัตร 100 ได้ดอกเบี้ย 6

$\therefore$ พันธบัตร $\frac{2750}{3}$ บาท ได้ดอกเบี้ย $\frac{6}{100}\times\frac{2750}{3}=55$ บาท

$\therefore$ รายได้มากกว่าเดิม $55-\frac{99}{2}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$ บาท

**ตอบ** รายได้ดีกว่าเดิม 5.50 บาท

**หมายเหตุ** พันธบัตร (Bonds) ก็เช่นเดียวกับหุ้น เช่น พันธบัตรของรัฐบาล ผู้ซื้อก็จะได้เงินปันผลเป็นร้อยละของจำนวนเงินที่ระบุไว้ในพันธบัตรนั้น พันธบัตรไม่เหมือนสต๊อกตรงที่ราคาพันธบัตรอาจไม่ใช่ 100 เสมอไป อาจเป็น 10, 20, 30 ก็ได้ แต่ถ้าไม่ระบุว่าพันธบัตรมีราคาเท่าไร ต้องถือว่าพันธบัตรนั้นมีราคา 100 ซึ่งในกรณีเช่นนี้ พันธบัตรก็เหมือนกับสต๊อกนั่นเอง

**ตัวอย่าง 8** (ข้อสอบไล่ชุด ป. พ.ศ. 2490)

ฉันลงทุน 75250 บาท ซื้อพันธบัตรทองคำชนิด 3% ของรัฐบาลไทยเมื่อราคา 175 ฉันจะมีรายได้ร้อยละเท่าไรของเงินทุน และเมื่อถึงกำหนดไถ่ถอนคืน ฉันขอรับทองคำแทนเงิน โดยรัฐบาลคิดทองคำให้หนักหนึ่งบาทในราคา 86 บาท แล้วฉันนำทองคำไปขายทั้งหมดในอัตราหนักบาทละ 458.20 บาท ฉันจะขายได้เงินเท่าไร

**วิธีทำ** ลงทุน 175 บาท ได้รายได้ 3 บาท

$\therefore$ ลงทุน 100 ได้รายได้ $\frac{3}{175} \times 100 = \frac{12}{7}$

$\therefore$ มีรายได้ร้อยละ $\frac{12}{7}$ ของเงินทุน = ร้อยละ $1\frac{5}{7}$ ของเงินทุน

แต่ลงทุนเงิน 75250 บาท ซื้อเมื่อราคา 175 $\therefore$ หาราคาพันธบัตรได้คือ

ลงทุน 175 บาท เป็นราคาพันธบัตร 100 บาท

$\therefore$ ลงทุน 75250 บาท เป็นราคาพันธบัตร $\frac{100}{175} \times 75250 = 43000$ บาท

ดังนั้น เมื่อไถ่ถอนคืนก็ต้องได้เงินครบ 43000 บาท

ไม่รับเงินแต่รับทองคำ ซึ่งรัฐบาลคิดทองคำหนึ่งบาทราคา 86 บาท

เงิน 86 บาท ได้ทองคำหนัก 1 บาท

$\therefore$ เงิน 43000 บาท ได้ทองคำหนัก $\frac{43000}{86} = 500$ บาท

แล้วขายทองคำไปหนัก 1 บาท ได้เงิน 458.20 บาท

$\therefore$ ทองคำหนัก 500 บาท ได้เงิน $458.20 \times 500 = 229100$ บาท

**ตอบ** มีรายได้ร้อยละ $1\frac{5}{7}$ ของเงินทุน
ขายได้เงิน 229100 บาท

**ตัวอย่าง 9** (ข้อสอบไล่เตรียมอุดมทั้งสองแผนก พ.ศ. 2490)

ชายผู้หนึ่งลงทุน £2000 ซื้อสต๊อกราคา 90 ดอกเบี้ยร้อยละ 3 ภายหลังเขาขายสต๊อกรายนี้ไปราคา 92 แล้วนำเงินไปซื้อสต๊อกราคา 115 ดอกเบี้ยร้อยละ 4 อยากทราบว่ารายได้จากสต๊อก รายไหนจะดีกว่ากันเป็นเงินเท่าไร

**วิธีทำ** ลงทุนเงิน £ 90 ได้ส่วนลด £ 100 ซึ่งให้ดอกเบี้ย £ 3

ลงทุน £ 90 มีรายได้ £ 3

∴ ลงทุน £ 2000 มีรายได้ £ $\frac{3}{90} \times 2000 = £ 66\frac{2}{3}$

แล้วขายส่วนลดไปราคา 92

ลงทุน £ 90 ขายได้เงิน £ 92

∴ ลงทุน £ 2000 ขายได้เงิน £ $\frac{92}{90} \times 2000 = £ \frac{18400}{9}$

นำเงินไปซื้อส่วนลดราคา 115 ได้ดอกเบี้ยร้อยละ 4

∴ ลงทุน £ 115 มีรายได้ £ 4

∴ ลงทุน £ $\frac{18400}{9}$ มีรายได้ £ $\frac{4}{115} \times \frac{18400}{9} = £ 71\frac{1}{9}$

ดังนั้นส่วนลดรายหลังมีรายได้ดีกว่ารายแรก £ $71\frac{1}{9} - £ 66\frac{2}{3}$

$= £ 4\frac{4}{9}$

$= £ 4.\ 8 s.\ 10\frac{6}{9} d.$

$= £ 4.\ 8 s.\ 11 d.$ (ใกล้เคียง)

**ตอบ** รายหลังดีกว่า £ 4. 8 s. 11 d.

**ตัวอย่าง 10** (ข้อสอบชุด ป.ป. ๒๔๙๑)

นันลงทุนเงินจำนวนเท่ากันเพื่อซื้อส่วนลด 4 % รายหนึ่ง และ 3 % อีกรายหนึ่ง และได้รับผลประโยชน์ 5 % ของเงินทุนที่ลงไปทั้งหมด ถ้าส่วนลด 4 % ราคา 90 ถามว่าส่วนลด 3 % จะมีราคาเท่าไร

**วิธีทำ** สมมติให้เขาลงทุนร้อยละ 100 เท่ากัน

∴ รวมเป็นทุน 200

แต่ทุนรวมกัน 100 ได้ผลประโยชน์ 5

∴ ทุนรวมกัน 200 ได้ผลประโยชน์ 10

ซึ่ง 4 % ทุน 90 ได้ปันผล 4

$\therefore$ ทุน 100 ได้ปันผล $\frac{4}{90} \times 100 = \frac{40}{9}$

$\therefore$ เบี้ยเงินปันผลของชนิด $3\% = 10 - \frac{40}{9} = \frac{50}{9}$

ได้เงินปันผล $\frac{50}{9}$ เป็นทุนทุกๆ 100

$\therefore$ ได้เงินปันผล 3 เป็นทุนทุกๆ $100 \times \frac{9}{50} \times 3 = 54$

$\therefore$ สต๊อกชนิด 3% ราคา 54

ตอบ 54

## แบบฝึกหัด 21

1. ซื้อสต๊อกชนิด $3\frac{1}{2}\%$ ราคา 98 สิ้นเงิน 4900 บาท จงหาราคาสต๊อกที่ซื้อมา (5000)
2. สต๊อกราคา 1500 บาท มีผล 3% ขายในราคา 90 จะสิ้นเงินเท่าไร (1350)
3. ซื้อสต๊อกมาในราคา $90\frac{1}{4}$ เบี้ยสต๊อกที่มีผล 4% สิ้นปีได้ปันผล 351 บาท อยากทราบว่าซื้อสต๊อกมาสิ้นเงินเท่าไร (3249)
4. ก. ซื้อสต๊อก $3\frac{1}{4}$ เปอรเซนต์ราคา $97\frac{1}{2}$ สิ้นเงิน 1210 บาท และซื้อชนิด 5 เปอรเซนต์ ราคา $90\frac{3}{4}$ สิ้นเงินเท่ากับรายแรก จงหาว่ารายได้ของ ก. เท่าไร (107)
5. ก. ซื้อสต๊อกชนิด $3\frac{1}{2}\%$ ราคา $101\frac{3}{4}$ สิ้นเงิน £1695. 16 s. 8 d. ข. ซื้อชนิด 3% ราคา $94\frac{1}{4}$ สิ้นเงิน £1767. 3 s. 9 d. จงหาว่ารายได้มากกว่ากันอยู่เท่าไร (£2. 1 s. 8 d.)
6. จะซื้อสต๊อกชนิดไหน ชนิด $5\frac{1}{2}\%$ ราคา 105 หรือชนิด $4\frac{1}{2}\%$ ราคา $87\frac{1}{2}$ (ชนิดแรก)
7. ลงทุน 3424 บาท ซื้อพันธบัตรบริษัทขนส่งแห่งหนึ่งเมื่อราคา 107 พอพันธบัตรราคาสูงขึ้นอีก 9 บาท ก็ขายไปหมด อยากทราบว่าได้เงินสดจากการขายพันธบัตรรวมทั้งสิ้นเท่าไร (3712) ★
8. ข้าพเจ้าถือพันธบัตรบริษัทไฟฟ้าซึ่งให้รายได้ร้อยละ 5 ไว้จำนวนหนึ่ง รายได้ครึ่งปีที่ข้าพเจ้าได้รับภายหลังจากถูกหักเบี้ยเงินช่วยชาติในภาวะคับขันไว้บาทละ 10 สตางค์ แล้วเป็นเงิน 54 บาท ข้าพเจ้าถือพันธบัตรของบริษัทนี้ไว้เท่าไร (2400) ★

9. ฉันลงทุน 6000 บาทเพื่อซื้อสต๊อก โดยแบ่งเอาเงิน $\frac{3}{5}$ ไปซื้อสต๊อกที่มีผล 4% ราคาสต๊อกปัจจุบัน 90 บาท แล้วเอาเงินที่เหลือไปซื้อสต๊อกที่มีผล 5% ราคาสต๊อกปัจจุบัน 80 บาท อยากทราบว่าปีหนึ่ง ๆ ฉันจะมีรายได้คิดเป็นร้อยละเท่าไรของเงินที่ฉันลงทุนไป ($5\frac{1}{6}$) ★

10. ชายผู้หนึ่งมีสต๊อก 3% ราคาประกาศขาย 92 อยู่เป็นจำนวน 3100 บาท เขาขายสต๊อกที่มีอยู่นั้นไปจนหมด แล้วเอาเงินที่ขายได้ไปซื้อสต๊อก 5% ราคาประกาศขาย 115 อยากทราบว่ารายได้ของเขาจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าใด (เพิ่มขึ้น 31 บาท) ★

11. ฉันขายพันธบัตร $3\frac{1}{2}$% ไปจำนวน 5000 บาท เมื่อราคาพันธบัตร 81 แล้วซื้อพันธบัตร 4% เมื่อราคาพันธบัตร 108 ดังนั้นฉันจะได้เงินได้เพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าไร ★ (ลดลง 25 บาท)

12. ชายคนหนึ่งขายสต๊อกชนิดให้รายได้ร้อยละ $3\frac{1}{2}$ เป็นจำนวน 10000 บาท ได้เงิน 9350 บาท เขาเอาเงินนั้นไปซื้อสต๊อกชนิดให้รายได้ร้อยละ 4 และได้เงินเพิ่มจากเมื่อได้อยู่เดิม 10 บาท ถามว่าสต๊อกชนิดหลังราคาเท่าใด (ข้อสอบชุด ป. 2491 — ตอบ $103\frac{8}{9}$)

13. ชายผู้หนึ่งลงทุนซื้อสต๊อกชนิด 3%, 4% และ 5% ไว้อย่างละเท่า ๆ กัน ปีนี้ได้เงินปันผลรวมกัน £240 จงหาทุนที่เขาซื้อ (£6000)

14. ซื้อสต๊อกชนิด 4% ราคาคงเดิม และ 5% ราคา 120 ด้วยเงินเท่า ๆ กัน แต่ถ้าซื้อชนิดแรกด้วยเงิน $\frac{1}{4}$ ของเงินทั้งหมด และเอาที่เหลือไปซื้อชนิดหลังจะมีรายได้เพิ่มขึ้น £5 จงหาว่าซื้อสต๊อกทั้งสองชนิดนั้นด้วยเงินเท่าใด (£12000)

15. มีสต๊อกอยู่สามชนิด คือ (1) สต๊อก 4% ราคา 112 (2) สต๊อก 5% ราคา 120 (3) สต๊อก 3% ราคา 90 จงแบ่งเงิน £1230 ออกเป็นสามส่วน นำไปซื้อสต๊อกทั้งสามชนิดที่กล่าวแล้วข้างบนนั้นชนิดละส่วน แล้วให้เกิดรายได้ส่วนละเท่า ๆ กัน ★★ (420, 360, 450)

16. สต๊อกรัฐบาลเป็นสต๊อก $3\frac{1}{2}$% ราคา 102 และสต๊อกของบริษัทเหมืองแร่เป็นสต๊อก $1\frac{3}{4}$% ราคา 55 เมื่อมีความประสงค์จะให้รายได้มากสำหรับเงินของท่าน ท่านจะซื้ออย่างไหน ★★ (สต๊อกรัฐบาล)

17. ในตลาดหลักทรัพย์ต่าง ๆ ข้างท้ายนี้ ซื้อชนิดไหนจึงจะมีรายได้สูงสุด

(1) ตลาดหลักทรัพย์ 3 % ราคา 93

(2) ตลาดหลักทรัพย์ $3\frac{1}{2}$ % ราคา 98

(3) ตลาดหลักทรัพย์ 4 % ราคา 104

(4) ตลาดหลักทรัพย์ $2\frac{1}{2}$ % ราคา $82\frac{1}{2}$ ★★ (ชนิด 4% ราคา 104)

18. ตลาดหลักทรัพย์ชนิดไหนจะให้รายได้ต่ำกว่ากัน

(ก) ตลาดหลักทรัพย์ 6 %, ราคา 172 หรือ (ข) ตลาดหลักทรัพย์ $3\frac{1}{4}$ % ราคา 88

ถ้ามีเงินอยู่ 2174 บาท และอยากจะซื้อตลาดหลักทรัพย์สองนี้ให้ได้รายได้จากตลาดหลักทรัพย์หนึ่งเท่ากับรายได้จากอีกตลาดหลักทรัพย์หนึ่ง จะต้องซื้อตลาดหลักทรัพย์ชนิดละเท่าไร และรายได้ทั้งหมดจะเป็นเท่าไร ★★

(ชนิด $3\frac{1}{4}$ % ราคา 88 ให้รายได้ต่ำกว่า; ซื้อชนิดแรกราคา 650 บาทด้วยเงิน 1118 บาท, ชนิดหลังราคา 1200 บาทด้วยเงิน 1056 บาท รายได้ทั้งหมด 78 บาท)

19. ชายคนหนึ่งซื้อตลาดหลักทรัพย์ 3% ตามราคาของตลาดหลักทรัพย์ด้วยเงิน 5000 บาท เมื่อราคาตลาดหลักทรัพย์ขึ้นไปอีกร้อยละ $5\frac{1}{2}$ เขาขายและเอาเงินมาซื้อตลาดหลักทรัพย์ 5% ราคา 105 ได้รายได้เพิ่มขึ้น $51\frac{4}{21}$ บาท จงหาราคาตลาดหลักทรัพย์ที่ซื้อมาครั้งแรก ★★ (75)

20. ฉันจะต้องขายพันธบัตรของฉันที่ให้ผลประโยชน์ร้อยละ $2\frac{1}{2}$ ตามราคาตลาด $84\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนเงินเท่าไร จึงจะพอซื้อพันธบัตรที่ให้ผลร้อยละ 3 ตามราคา $97\frac{1}{2}$ เพื่อให้รายได้งอกขึ้นปีละ 30 บาท ★★ (25350 บาท)

21. ชายผู้หนึ่งให้เงินเขายืมไป 8400 บาท เวลา 3 ปี คิดดอกทบต้น 5% แล้วเอาเงินทั้งต้นและดอกไปซื้อตลาดหลักทรัพย์ผล 6 % ราคาตลาดหลักทรัพย์ขณะนั้น 189 บาท อยากทราบว่าชายคนนั้นจะมีรายได้จากการซื้อตลาดหลักทรัพย์นี้ปีละเท่าไร (ข้อสอบชุด ป.ป. — 308.70 บาท)

22. ชายผู้หนึ่งซื้อตลาดหลักทรัพย์ 4 % ราคา 90, 5 % ราคาคงเดิม และชนิด 6 % ราคา 110 มาเป็นอัตราส่วน 1 : 2 : 3 เงินรายได้ซึ่งชนิดที่สองน้อยกว่าชนิดที่สามนั้น มากกว่าที่ชนิดแรกน้อยกว่าชนิดที่สองอยู่ £ 20 จงหาว่าเขาซื้อตลาดหลักทรัพย์เป็นเงินรวมทั้งหมดเท่าไร (ข้อสอบ ร.ร. เตรียมนายร้อย 2497 — £ 6200)

# สต๊อก (ค่านายหน้าและภาษี)

# STOCKS (BROKERAGE & INCOME TAX)

# 21

เนื่องจากสต๊อกมีราคาขึ้นลง ได้ตามที่กล่าวมาแล้ว จึงได้เกิดมีบุคคลขึ้นประเภทหนึ่ง ทำการซื้อขายแลกเปลี่ยนสต๊อก ส่วนมากตั้งขึ้นเป็นบริษัท Stock Exchange บริษัทเหล่านี้จะส่งเจ้าหน้าที่ของบริษัทออกค้นคว้า เพื่อสืบหาว่าสต๊อกของแห่งใดมีรายได้ดี หรือมีรายได้เลว ครั้นแล้วก็รับซื้อสต๊อกของบริษัทที่มีรายได้ดีนั้นไว้ ในราคาสูงพอสมควร และรับซื้อสต๊อกที่มีรายได้เลวไว้ในราคาถูก แล้วนำออกขายอีกทีหนึ่ง

บริษัท Stock Exchange นี้มีประโยชน์มาก เพราะถ้าเรามีเงินอยากจะซื้อสต๊อกไว้เป็นหลักฐาน เราก็ไม่ต้องเสียเวลาไปเที่ยวขอซื้อจากบุคคลต่าง ๆ ตรงไปซื้อที่บริษัทเช่นว่านี้ได้เลย บริษัทแลกเปลี่ยนนี้จะนำสต๊อกของแห่งต่าง ๆ มาให้เราเลือกซื้ออย่างมากมาย พร้อมกับอธิบายโฆษณาว่า ถ้าซื้อชนิดนี้จะได้รายได้มากน้อยเท่าไร หรือบอกว่าต่อไปสต๊อกชนิดนี้จะมีรายได้สูงขึ้นเป็นต้น

ความสะดวกของบริษัทดังกล่าวไม่ใช่มีเฉพาะเมื่อเราอยากซื้อก็ไปซื้อ อยากขายก็ไปขายให้บริษัทเท่านั้น ยังมีความสะดวกในการแลกเปลี่ยนอีกด้วย กล่าวคือ ถ้าเราอยาก

ซื้อสต๊อกซึ่งบังเอิญบริษัทไม่มีอยู่ ทางบริษัทก็ยังรับคิดต่อกับผู้มีสต๊อกชนิดนั้นให้มาขายให้เรา และในการนี้บริษัทจำต้องคิดค่าบำบวยการในการลงแรงครั้งนี้ ค่าบำบวยการนี้เรียกว่า **ค่านายหน้า** (Brokerage)

**การคิดค่านายหน้า** เป็นธรรมดาที่บริษัทนายหน้า (Broker) จะต้องคิดเอาค่าบำบวยการให้ได้มากที่สุด ดังนั้นนายหน้าจึง **คิดค่านายหน้าทั้งจากผู้ซื้อและผู้ขาย** พร้อมกัน

การบอกอัตราค่านายหน้านั้น เป็นอัตราต่อสต๊อก 100 ไม่ใช่ราคาที่ซื้อขายกันในท้องตลาด เช่น

สต๊อกราคา 120 ค่านายหน้า $\frac{1}{8}$ ก็หมายความว่า
ผู้ซื้อจะต้องจ่ายเงิน $120 + \frac{1}{8}$
ไม่ใช่คิดว่า 100 ค่านายหน้า $\frac{1}{8}$
$\therefore$ 120 ค่านายหน้า $\frac{1}{8} \times \frac{120}{100}$

จงจำไว้ว่า ค่านายหน้าเท่าไร ก็ให้บวกเข้ากับราคาเลย

คือ เมื่อขายต้องเอาค่านายหน้าลบออกจากราคาสต๊อก เมื่อซื้อต้องเอาค่านายหน้าบวกกับราคาสต๊อก

จงดังเกตกรณีต่อไปนี้

**กรณีที่ 1** สต๊อกรัฐบาลราคา 110 ค่านายหน้า 2 %

หมายความว่า ผู้ซื้อต้องจ่ายเงิน $110 + 2 = 112$
ผู้ขายได้เงินเพียง $110 - 2 = 108$

**กรณีที่ 2** สต๊อกรัฐบาลราคา 90 ค่านายหน้า 1 %

ผู้ซื้อต้องจ่ายเงิน $90 + 1 = 91$
ผู้ขายได้เงินเพียง $90 - 1 = 89$

**ตัวอย่าง 1** ซื้อสต๊อกราคา £ 1250 เมื่อราคา 110 จะต้องจ่ายเงินเท่าไร ค่านายหน้าคิด 2

วิธีทำ ส่งออกราคา 100 ต้องจ่ายเงิน $110 + 2 = 112$

∴ ส่งออกราคา £ 1250 ต้องจ่ายเงิน $\frac{112}{100} \times 1250 =$ £ 1400

ตอบ 1400 บาท

**ตัวอย่าง 2** ซื้อส่งออกราคา £ 4000 เมื่อราคา 90 แล้วขายไปราคา 96 เสีย ค่านายหน้าในการซื้อขายร้อยละ 1 จะได้กำไรในการซื้อขายนี้เท่าไร

วิธีทำ ซื้อส่งออก 100 จ่ายเงิน $90 + 1 = 91$

∴ ซื้อส่งออก £ 4000 จ่ายเงิน $\frac{91}{100} \times 4000 =$ £ 3640

ขายส่งออก 100 ได้เงินเพียง $96 - 1 = 95$

∴ ขายส่งออก £ 4000 ได้เงินเพียง $\frac{95}{100} \times 4000 =$ £ 3800

∴ ได้กำไร £ $3800 - 3640 =$ £ 160

ตอบ £ 160

**ตัวอย่าง 3** ลงทุนซื้อส่งออก 3 % ราคา $79\frac{7}{8}$ สิ้นเงิน 1040 บาท ครั้นต่อมา ส่งออกขึ้นเป็นราคา $90\frac{1}{8}$ ก็ขายไปทันที แล้วนำเงินที่ขายได้ไปซื้อส่งออก 5 % ราคา $116\frac{7}{8}$ จงหาว่าเขาจะได้เงินปันผลมากขึ้นหรือน้อยลงกว่าเดิมเท่าไร ถ้าต้องเสียค่านายหน้าในการซื้อขาย $\frac{1}{8}$

วิธีทำ ซื้อส่งออก 3 % ราคา $79\frac{7}{8}$ ค่านายหน้า $\frac{1}{8}$

∴ ส่งออกราคา 100 ต้องลงทุน $79\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 80$

ลงทุน 80 ได้ปันผล 3

∴ ลงทุน 1040 บาท ได้ปันผล $\frac{3}{80} \times 1040 = 39$ บาท

แล้วขายไปเมื่อราคา $90\frac{1}{8}$ เสียค่านายหน้า $\frac{1}{8}$

∴ ส่งออกราคา 100 ขายได้เงินเพียง $90\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 90$

∴ ลงทุนซื้อ 80 ขายได้เงิน 90

∴ ลงทุนซื้อ 1040 บาท ขายได้เงิน $\frac{90}{80} \times 1040 = 1170$ บาท

แล้วนำเงิน 1170 บาทนั้นไปซื้อสต็อก 5 % ราคา $116\frac{7}{8}$ เสียค่านายหน้า $\frac{1}{8}$

คือสต็อกราคา 100 ต้องลงทุน $116\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=117$

ลงทุน 117 ได้ปันผล 5

$\therefore$ ลงทุน 1170 บาท ได้ปันผล $\frac{5}{117}\times 1170=50$ บาท

$\therefore$ ได้เงินปันผลมากขึ้น $50-39=11$

ตอบ มากขึ้น 11 บาท

**ตัวอย่าง 4** ข้าพเจ้าลงทุน £2070 ซื้อสต็อกชนิด 4 % ราคา $103\frac{1}{4}$ หลังจากได้รับรายได้ครึ่งปีแล้ว ข้าพเจ้าก็ขายสต็อกนั้นไปในราคา 106 จงหาว่าข้าพเจ้าได้กำไรทั้งสิ้นเท่าไร ค่านายหน้าคิด $\frac{1}{4}$ ทุกครั้งทุกการซื้อขาย

**วิธีทำ** ซื้อสต็อก 4 % ราคา $103\frac{1}{4}$ ค่านายหน้า $\frac{1}{4}$

$\therefore$ สต็อกราคา £100 ต้องลงทุน £$103\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ £$103\frac{1}{2}$

แล้วขายไปในราคา 106 ค่านายหน้า $\frac{1}{4}$

$\therefore$ ขายสต็อกไปราคา £100 ได้เงินเพียง £$106-\frac{1}{4}=$ £$105\frac{3}{4}$

คือซื้อมา £$103\frac{1}{2}$ ขายได้เงิน £$105\frac{3}{4}$

$\therefore$ ได้กำไร £$105\frac{3}{4}-103\frac{1}{2}=\frac{17}{4}$

คือลงทุน £$103\frac{1}{2}=$ £$\frac{207}{2}$ ได้กำไร £$\frac{17}{4}$

$\therefore$ ลงทุน £2070 ได้กำไร £$\frac{17}{4}\times 2070\times\frac{2}{207}=$ £85

ตอบ £85

**ตัวอย่าง 5** จงหาว่ารายได้เปลี่ยนแปลงไปเท่าใด จากการขายสต็อก 3 เปอร์เซนต์ ราคา $86\frac{3}{8}$ ไปเป็นจำนวน £6400 แล้วเอาเงินที่ขายได้นั้นไปซื้อสต็อก 4 เปอร์เซนต์ ราคา $114\frac{7}{8}$ ค่านายหน้าร้อยละ 2 s. 6 d.

(จากตัวอย่างที่ 2 หน้า 249 หนังสืออนุกรมคณิตศาสตร์ ชุดเลขคณิตของเคมบริดจ์)

**วิธีทำ** ครั้งแรกซื้อกราคา 100 ได้รายได้ 3

$\therefore$ ซื้อกราคา £6400 ได้รายได้ $\frac{3}{100} \times 6400 = £192$

ค่านายหน้า 2 s. 6 d. $= £\frac{1}{8}$

ขายไปราคา $86\frac{3}{8}$ ค่านายหน้า $\frac{1}{8}$

$\therefore$ ได้เงินเพียง $86\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{345}{4}$

ซื้อกราคา £100 ขายได้เงิน $£\frac{345}{4}$

$\therefore$ ซื้อกราคา £6400 ขายได้เงิน $\frac{345}{4} \times \frac{6400}{100} = £5520$

แล้วเอาเงิน £5520 นั้นไปซื้อซื้อก 4 % ค่านายหน้า $\frac{1}{8}$ ราคา $114\frac{7}{8}$

$\therefore$ ซื้อกราคา £100 ต้องจ่ายเงิน $114\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = £115$

ลงทุน £115 ได้รายได้ £4

$\therefore$ ลงทุน £5520 ได้รายได้ $\frac{4}{115} \times 5520 = £192$

$\therefore$ รายได้ไม่เปลี่ยนแปลง

ตอบ

## ภาษีเงินได้ (Income Tax)

การคิดภาษีเงินได้ ต้องคิดจากเงินรายได้ เช่น

ซื้อก £100 ได้บันผล £4

ถ้าโจทย์บอกว่าต้องเสียภาษีปอนด์ละ 2 s. ก็แปลว่า

เงินได้ £1 เสียภาษี 2 s.

$\therefore$ £4 เสียภาษี $2 \times 4 = 8$ s เป็นต้น

ดังนั้น การที่เราถือซื้อก £100 หาได้เงินจริง ๆ £4 ไม่

คงได้เพียง £4 − 8 s = £3. 12 s เท่านั้น

เงิน £3. 12 s. นี้เรียกว่า เงินได้สุทธิ (Net Income)

**ตัวอย่าง 6** ข้าพเจ้าซื้อสต็อก 4 % ราคา 110 สิ้นเงิน £ 1155 ถ้ารัฐเก็บภาษีเงินได้ปอนด์ละ 2 s. 6 d. ในปีหนึ่งข้าพเจ้าจะมีรายได้สุทธิเท่าไร

**วิธีทำ** ซื้อสิ้นเงิน £ 110 ได้ปันผล £ 4

∴ ซื้อสิ้นเงิน £ 1155 ได้ปันผล $\frac{4}{110} \times 1155 =$ £ 42

แต่เงินได้ £ 1 รัฐเก็บภาษี 2 s. 6 d. $= \frac{5}{2}$ s.

∴ เงินได้ £ 42 รัฐเก็บภาษี $\frac{5}{2} \times 42 = 105$ s.

$=$ £ 5. 5 s.

∴ ในปีหนึ่งมีรายได้สุทธิ £ 42 − £ 5, 5 s. = £ 36. 15 s.

ตอบ £ 36. 15 s.

---

## แบบฝึกหัด 22

1. ซื้อสต็อกชนิด 5 % เมื่อราคา $51\frac{7}{8}$ มาเป็นจำนวน £ 4450 จะต้องจ่ายเงินเท่าไร ค่านายหน้าคิดร้อยละ $\frac{1}{8}$ (£ 2314)
2. ข้าพเจ้าขายสต็อกเมื่อราคา $88\frac{3}{4}$ จำนวน £ 1500 เสียค่านายหน้า 2s. 6d. จะได้เงินเท่าไร (£ 1329. 7 s. 6 d.)
3. ลงทุนซื้อสต็อก 3 % ราคา $90\frac{5}{8}$ สิ้นเงิน £ 4537. 10 s. อยากทราบว่าเมื่อสิ้นปีข้าพเจ้าจะมีรายได้เท่าไร คิดค่านายหน้าในการซื้อขาย $\frac{1}{8}$ % (£ 150)
4. ลงทุนซื้อสต็อก $3\frac{1}{2}$ % สิ้นเงิน £ 7038 ครั้นปลายปีได้เงินปันผล £ 252 ถ้าในการซื้อขายคิดค่านายหน้า $\frac{1}{8}$ % จงหาราคาสต็อก $(97\frac{5}{8})$
5. ชายผู้หนึ่งตั้งใจจะให้มีรายได้ปีละ £ 100 ด้วยการลงทุนเงิน £ 2666. 13 s. 4 d. ซื้อสต็อกที่มีผล 3 % จะต้องซื้อให้ได้ในราคาเท่าใด (80)
6. ลงทุนซื้อสต็อก $3\frac{1}{2}$ % เมื่อราคา $97\frac{3}{8}$ สิ้นเงิน £ 1950 แล้วขายไปเมื่อราคา 104 เสียค่านายหน้าซื้อขาย $\frac{1}{8}$ % จะขาดทุนหรือได้กำไร (กำไร £ 127, 10 s.)

7. ซื้อสต็อกชนิด $2\frac{1}{2}$% เมื่อราคา 105 สิ้นเงิน £3345 จะเป็นเงินได้สุทธิเท่าไร ถ้ารัฐเก็บภาษีปอนด์ละ 4 s. 3 d. (£62. 14 s. 4.5 d.)

8. A. ลงทุนซื้อสต็อกชนิด 3% เมื่อราคา $90\frac{5}{8}$ สิ้นปี A. มีเงินได้สุทธิอยู่ £470 ถ้ารัฐเก็บภาษีเงินได้ปอนด์ละ 5 d. และค่านายหน้าคิดร้อยละ $\frac{1}{8}$ จงหาว่า A. ลงทุนเท่าไร (£21840)

9. A. ลงทุนซื้อสต็อกชนิด 5% เมื่อราคา $130\frac{1}{4}$ เสียค่านายหน้า $\frac{1}{4}$% และค่าภาษีปอนด์ละ 8 d. ก็ยังมีเงินได้สุทธิ £120 จงหาทุนของ A. (£3240)

10. ข้าพเจ้ามีสต็อกชนิด $2\frac{1}{2}$% อยู่ £4560 เมื่อมีราคา 85 ก็ขายไปทั้งหมด แล้วเอาเงินที่ได้จากการขายไปซื้อชนิด 4% เมื่อราคา 114 ปรากฏว่าเงินได้สุทธิของชนิด 4% ต่ำกว่าเงินได้สุทธิของชนิด $2\frac{1}{2}$ อยู่ £20. 18 s จงหาว่ารัฐเก็บภาษีอย่างไร (ปอนด์ละ 12 d.)

11. ชายผู้หนึ่งลงทุน £7560 ซื้อสต็อก 3% ราคา $94\frac{1}{2}$ เมื่อราคาสต็อกตกลงเป็น 90 เขาก็ขายสต็อกที่มีอยู่ไปเสีย $\frac{1}{4}$ หลังจากนั้นเมื่อราคาสต็อกขึ้นเป็น $94\frac{3}{4}$ เขาก็ขายที่เหลือไปทั้งหมด จงหาว่าเขาจะได้กำไรหรือขาดทุนเท่าไร (ขาดทุน £75)

12. ชายผู้หนึ่งซื้อสต็อกชนิด 3% ราคา 90 ด้วยเงินครึ่งหนึ่งของเขา แล้วด้วยทุนอีกครึ่งหนึ่ง เขาซื้อชนิด 4% ราคาคงเดิม จงหาว่าชนิดไหนให้รายได้ดีกว่า และถ้ารายได้ทั้งสองอย่างรวมกันเป็นเงิน £550 จงหาทุนของเขา (ชนิดหลัง; £15000)

13. ชายผู้หนึ่งขายสต็อกชนิด 5% ไปเป็นจำนวน £5000 แล้วซื้อชนิด $3\frac{1}{2}$% ราคา $87\frac{1}{2}$ ปรากฏว่ามีรายได้เพิ่มขึ้น £5 จงหาว่าเขาขายชนิด 5% ไปราคาเท่าไร ($77\frac{1}{2}$)

14. ชายผู้หนึ่งซื้อสต็อก 6% ราคา 126 และชนิด 9% ราคา 210 ปรากฏว่ารายได้มากกว่ากันอยู่ £22, 10 s. จงหาว่าเขาลงทุนเท่าไร (£4725)

15. ทุนเล่าเรียนอันหนึ่ง เกิดจากรายได้โดยการนำเงิน 2000 บาทไปซื้อสต็อก $4\frac{1}{2}$% ราคา $113\frac{1}{2}$ เมื่อซื้อนั้นต้องเสียค่านายหน้า 1% และเมื่อรายได้เป็นเท่าใดก็ต้องหักเสียภาษี

$4\frac{7}{12}$ % ของรายได้นั้นให้แก่รัฐบาลเสียก่อน แล้วจึงรับรายได้ที่เหลือนั้นไปให้เป็นทุนเล่าเรียน ดังนั้น ทุนเล่าเรียนประจำปีนั้นเป็นเท่าใด ★★ (75)

16. ชายผู้หนึ่งลงทุนซื้อสต๊อกรายได้ร้อยละ 5 และเขาได้รับปีละ 800 ปอนด์ แต่เขาขายสต๊อกรายนี้หมดเมื่อราคาสต๊อกขึ้นถึง 113 และนำเงินไปซื้อสต๊อกรายใหม่ซึ่งมีรายได้ร้อยละ 3 อยากทราบว่าราคาสต๊อกใหม่นี้เท่าไร รวมทั้งค่านายหน้า เขาจึงจะมีรายได้มากกว่าคราวก่อนปีละ 40 ปอนด์ ค่านายหน้าซื้อหรือค่านายหน้าขายคิดร้อยละ $\frac{1}{8}$ (ข้อสอบเตรียมทั้งสองแผนก 2495 — $64\frac{3}{8}$)

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# หุ้น
# SHARES

# 22

ได้กล่าวมาในเรื่องสต๊อกแล้วว่า การตั้งบริษัทนั้น เขาแบ่งทุนออกเป็นส่วน ๆ ขายให้แก่ผู้สนใจ ถ้าแบ่งเป็นส่วนละ 100 ก็เรียกว่าสต๊อก แต่ถ้าไม่แบ่งเป็น 100 ก็อาจแบ่งเป็น 5, 10, 50, 500 ดังนี้เรียกว่าหุ้น (Share)

**ใบหุ้น** เป็นเอกสารซึ่งบริษัทออกให้แก่ผู้ซื้อหุ้นของบริษัท ในใบหุ้นนั้นจะระบุราคาว่าเป็นเท่าไร เป็นหุ้นของบริษัทใดเป็นต้น

**ราคาของหุ้น** เฉพาะหุ้นของบริษัทในประเทศไทยนั้น ต้องบังคับโดยประมวลกฎหมายแพ่งและพาณิชย์ มาตรา 1117 แก้ไขเพิ่มเติม พ.ศ. 2477 ซึ่งบัญญัติว่า "**อันมูลค่าของหุ้น ๆ หนึ่งนั้น มิให้ต่ำกว่าห้าบาท**" ดังนั้น หุ้นของบริษัทในประเทศไทยจะมีราคาต่ำกว่า **ห้าบาทไม่ได้**

**การซื้อหุ้น** ในประมวล กฎหมาย ฉบับ เดียวกัน มาตรา 1118 วรรคหนึ่งบัญญัติว่า "**อันหุ้นนั้น ท่านว่าจะแบ่งแยกหาได้ไม่**"

อธิบายได้ว่า ในการซื้อขายหุ้นนั้น จำเป็นต้องซื้อเต็มหุ้น จะซื้อครึ่งหุ้นไม่ได้ ข้อบัญญัติของกฎหมายไทยนี้สอดคล้องกับของนานาประเทศ กล่าวคือ ทุกประเทศ

ถือว่าการซื้อหุ้นจะต้องซื้อเต็มทั้งใบ และจะซื้อกี่ใบก็ได้ ซึ่งผิดกับสต๊อก เช่น สต๊อก 100 เราอาจซื้อเพียงราคา 50 คือครึ่งหนึ่งก็ได้ แต่ถ้าหุ้นใบหนึ่งราคา 500 เราจะขอซื้อสักครึ่งหนึ่ง คือ 250 นั้นไม่ได้

**การเรียกทุน** การที่บริษัทเริ่มดำเนินการนั้น อาจไม่จำเป็นต้องใช้ทุนมาก ดังนั้นจึงไม่ต้องเรียกเอาเต็มตามราคาหุ้นก็ได้ เช่น หุ้นราคา 50 บริษัทอาจเรียกเอาเพียง 30 ก่อนก็ได้ กฎหมายไทยก็ได้มีข้อยกเว้นไว้ (มาตรา 1119, 1108, 1121)

**การซื้อ, ขาย, โอน, แลกเปลี่ยน, ให้** โดยปกติหุ้นย่อมโอนกันได้ ดังปรากฏใน มาตรา 1129 ว่า

"อันว่าหุ้นนั้นย่อมโอนกันได้ โดยมิต้องได้รับความยินยอมของบริษัท---"

**การแบ่งเงินปันผล** เฉพาะหุ้นที่ยังจ่ายไม่ครบ (เช่น หุ้นราคา 50 บาท แต่บริษัทเรียกทุนเพียงหุ้นละ 30 บาท) การคิดเงินปันผล **คิดจากเงินทุนที่เรียกแล้ว ไม่ใช่คิดจากราคาหุ้น**

การคำนวณเรื่องหุ้นไม่สู้จะยุ่งยาก ขอให้สังเกตจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1** ข้าพเจ้าซื้อหุ้นของบริษัทการประชาชนจำกัด หุ้นหนึ่งๆ มีราคา 50 บาท แต่ราคาท้องตลาดราคาหุ้นละ 60 บาท ข้าพเจ้ามีเงินอยู่ 6000 บาท จะซื้อหุ้นได้ราคาเท่าไร และถ้าสิ้นปีบริษัทการจ่ายเงินปันผลให้ร้อยละ 4 ข้าพเจ้าจะได้เงินปันผลเท่าไร

**วิธีทำ** เงิน 60 บาท ซื้อหุ้นได้ราคา 50 บาท

$\therefore$ เงิน 6000 บาท ซื้อหุ้นได้ราคา $\frac{50}{60} \times 6000 = 5000$ บาท

$\therefore$ หุ้น 100 ได้ปันผล 4

$\therefore$ หุ้น 5000 บาท ได้ปันผล $\frac{4}{100} \times 5000 = 200$ บาท

**ตอบ** ซื้อหุ้นได้ราคา 5000 บาท
ได้เงินปันผล 200 บาท

**ตัวอย่าง 2** นาย ก. ซื้อหุ้นมา 30 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 40 บาท บริษัทเรียกทุนแล้ว 25 บาท สิ้นปีบริษัทจ่ายเงินปันผลร้อยละ 3 นาย ก. จะได้เงินปันผลเท่าไร

**วิธีทำ** 1 หุ้น บริษัทเรียกทุน 25 บาท

∴ 30 หุ้น บริษัทเรียกทุน $25 \times 50 = 750$ บาท

ทุน 100 บริษัทจ่ายเงินปันผล 3

∴ ทุน 750 บาท บริษัทจ่ายเงินปันผล $\frac{3}{100} \times 750 = \frac{45}{2}$ บาท

∴ นาย ก. ได้เงินปันผล 22.50 บาท

**ตอบ** 22.50 บาท

**ตัวอย่าง 3** ข้าพเจ้าซื้อหุ้นมีมูลค่า 200 บาทด้วยเงิน 3600 บาท ในราคาท้องตลาดหุ้นละ 175 บาท เสียค่านายหน้าหุ้นละ 5 บาท ต่อมาบริษัทจ่ายเงินปันผลให้หุ้นละ 4 บาท อยากทราบว่าข้าพเจ้าจะได้เงินปันผลเท่าไร

**วิธีทำ** ราคาขายหุ้นละ 175 บาท เสียค่านายหน้าหุ้นละ 5 บาท

∴ เงิน $175 + 5 = 180$ บาท ซื้อหุ้นได้ 1 หุ้น

∴ เงิน 3600 บาท ซื้อหุ้นได้ $\frac{3600}{180} = 20$ หุ้น

1 หุ้น ได้เงินปันผล 4 บาท

∴ 20 หุ้น ได้เงินปันผล $4 \times 20 = 80$ บาท

**ตอบ** 80 บาท

**ตัวอย่าง 4** ซื้อหุ้นบริษัทเดินอากาศมูลค่าหุ้นละ 200 บาทจำนวน 40 หุ้น บริษัทเรียกทุนแล้ว 25 % และจะได้ปันผล 10 % แต่เมื่อรับเงินปันผลครั้งที่แล้ว ก็ขายหุ้นไปทั้งหมด อยากทราบว่าเงินปันผลเท่าไร

**วิธีทำ** 1 หุ้น มีมูลค่า 200 บาท

∴ 40 หุ้น มีมูลค่า $200 \times 40 = 8000$ บาท

หุ้นมูลค่า 100 เรียกทุนแล้ว 25

∴ หุ้นมูลค่า 8000 บาท เรียกทุนแล้ว $\frac{25}{100} \times 8000 = 2000$ บาท

ทุน 100 ได้ปันผล $\frac{10}{2} = 5$

∴ ทุน 2000 บาท ได้ปันผล $\frac{5}{100} \times 2000 = 100$ บาท

**ตอบ** 100 บาท

# แบบฝึกหัด 23

(ถ้าไม่กำหนดเป็นอย่างอื่น ถือว่าหุ้นเรียกทุนเต็มมูลค่า)

1. หุ้นของ บริษัทนครประกันชีวิต จำกัด มีมูลค่าหุ้นละ 50 บาท แต่ราคาท้องตลาดสูงกว่าราคาเดิมหุ้นละ 25 บาท จงหาว่า
   ก. ถ้าซื้อ 40 หุ้น จะต้องจ่ายเงินเท่าไร (3000 บาท)
   ข. ถ้าซื้อ 50 หุ้น บริษัทจ่ายปันผลร้อยละ $5\frac{1}{2}$ จะได้ปันผลเท่าไร (137.50)
2. ข้าพเจ้าซื้อหุ้นของบริษัทเดินรถ มูลค่าหุ้นละ 50 บาท เรียกทุนแล้ว 50 % เนื่องจากบริษัทได้กำไรมาก ข้าพเจ้าจึงซื้อสูงกว่าราคาทุนที่เรียก หุ้นละ 15 บาท ต่อมาบริษัทจ่ายเงินปันผลให้ร้อยละ 10 ถ้าข้าพเจ้าถือหุ้นอยู่ 10 หุ้น เงินปันผลที่ได้จะเป็นร้อยละเท่าไรของเงินทุน ($6\frac{1}{4}$)
3. สี่อยากขนิดให้รายได้ร้อยละ 3 มีราคา $87\frac{1}{2}$ กับหุ้นขนิดหุ้นละ 100 บาท มีราคา $130\frac{1}{4}$ และให้รายได้ร้อยละ 5 อย่างไหนจะได้รายได้ดีกว่ากันเท่าไร (ข้อสอบชุด ป. 2492 — หุ้นดีกว่าร้อยละ 0.41)
4. ฉันซื้อหุ้น 1000 หุ้น มูลค่าหุ้นละ 20 บาท ราคา $27\frac{1}{2}$ บาท ภายหลังที่ได้รับเงินปันผล 15 % แล้วก็ขายไปราคา $37\frac{1}{2}$ บาท ฉันมีกำไรทั้งหมดเท่าไร ★ (13000)
5. หุ้นเดิมราคาหุ้นละ 100 บาท นายแดงซื้อไว้ 80 หุ้น ในราคาหุ้นละ 160 บาท พอต่อมาบริษัทแบ่งเงินกำไรให้ร้อยละ 20 เมื่อได้รับเงินกำไรมาแล้ว จึงขายไปทั้งหมดเป็นเงิน 14000 บาท อยากทราบว่านายแดงได้กำไรทั้งสิ้นร้อยละเท่าไร (ข้อสอบชุด ป. 2493 — $21\frac{7}{8}$)
6. ซื้อหุ้นมูลค่าหุ้นละ 40 บาท ในราคาท้องตลาดหุ้นละ 45 บาท ซื้อหุ้นได้ราคา 4040 บาท ต่อมาบริษัทจ่ายเงินปันผลให้ร้อยละ 3 ครั้นแล้วก็ขายหุ้นไปทั้งหมดในราคาต่ำกว่าที่ซื้อมาหุ้นละ 10 บาท อยากทราบว่าจะขาดทุนหรือได้กำไรรวมทั้งสิ้นเท่าไร (ขาดทุน888.80)
7. ซื้อหุ้นสิ้นเงิน 16000 บาท ขายไปครึ่งหนึ่งราคาหุ้นละ 48 บาท อีกครึ่งหนึ่งหุ้นละ 44 บาท ซึ่งได้เงินน้อยกว่าก้นอยู่ 800 บาท อยากทราบว่า ซื้อหุ้นมาหุ้นละเท่าไร (40)

8. ข้าพเจ้าถือสัตอก 4 % อยู่จำนวนหนึ่ง แล้วขายไปราคา 90 นำเงินที่ขายได้ทั้งหมดไปซื้อหุ้นราคาหุ้นละ 30 บาท เป็นหุ้นที่มีเงินปันผลหุ้นละ 1 บาท เมื่อคิดดูข้าพเจ้ามีรายได้น้อยกว่าเดิม 100 บาท จงหาว่า เดิมข้าพเจ้าถือสัตอกราคาเท่าใด (10000 บาท)

9. ผู้ถือหุ้นของบริษัทรถไฟแห่งหนึ่ง เมื่อสิ้นปีเขาได้รับเงินปันผลกำไร 6 % ของจำนวนเงินหุ้นของเขา และต้องเสียภาษีรายได้ปอนด์ละ 4 d. ต่อมาอีกหนึ่งปี เขาได้รับเงินปันผลกำไร $6\frac{1}{2}$ % และต้องเสียภาษีรายได้ปอนด์ละ 3 d. ปรากฏว่ารายได้ของเขามากขึ้นกว่าเดิม £ 124. 10 s. อยากทราบว่า เขามีหุ้นอยู่ในบริษัทนั้นเท่าไร (ข้อสอบเข้าเตรียมนายเรือ — £ 24000)

10. เงินทุนของบริษัทรถไฟแห่งหนึ่ง ได้รับจากผู้ถือแชร์เป็นจำนวน 3,700,000 บาท และนอกจากนี้แล้วได้ขอยืมเขามาอีก 2,300,000 บาท โดยต้องเสียดอกเบี้ย $4\frac{1}{4}$ % ต่อปี เมื่อสิ้นปีปรากฏว่าบริษัทมีรายรับเป็นเงิน 635,000 บาท และมีค่าใช้จ่ายสำหรับที่ได้ดำเนินงานตลอดปีนั้นเป็น 45 % ของรายรับ ผู้ถือแชร์จะได้รับส่วนแบ่งกำไร เป็นรายได้กี่เปอร์เซนต์ เมื่อได้คิดหัก 11,000 บาท ออกเป็นทุนสำรองแล้ว ★★ $(6\frac{1}{2})$

11. ชายคนหนึ่งลงทุน 2000 บาท ซื้อหุ้นราคาเต็มหุ้นละ 5 บาท แต่ซื้อได้หุ้นละ 4 บาท 50 สตางค์ เมื่อครบปีเขาจะได้ส่วนแบ่งกำไรเท่าไร ถ้าอัตราส่วนแบ่งกำไรเป็นจำนวนร้อยละ 5 ต่อปี ★★ $(111\frac{1}{9})$

12. นายหน้าคนหนึ่งซื้อแชร์รถไฟไปเป็นจำนวน £ 1875 เขาเก็บไว้เอง 15 แชร์ ส่วนที่เหลืออยู่ขายได้เงิน £ 1740 คิดตามราคาที่ซื้อมามีกำไร £ 4 ต่อ 1 แชร์ นายหน้าซื้อแชร์มากี่แชร์ ★★ (75)

13. บริษัทแห่งหนึ่งเริ่มเปิดขึ้นโดยออกแชร์ เรียกทุนแชร์ละ 100 บาท และเป็นแชร์ชนิดที่เรียกเงินเต็มที่แล้ว ขายคนหนึ่งซื้อแชร์ 40,000 บาท ของบริษัทนั้นไว้ เมื่อราคาเป็น 65 ในจำนวนเงินที่เขาซื้อมาคราวนี้ เขาต้องขอยืมจากธนาคารมา 40 % และธนาคารคิดดอกเบี้ย 4 % เมื่อสิ้นปี และได้รับผลประโยชน์ที่บริษัทให้บรรดาผู้ถือแชร์ $2\frac{1}{4}$ % แล้ว เขาก็ขายไปโดยคิดราคา 70 อยากทราบว่าเขาได้กำไรเท่าใด และกำไรนั้นเป็นกี่เปอร์เซนต์ของเงินที่ลงทุนไป (ตอบให้ถูกเพียงทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง) ★★ (2484, 9.6)

# • รากกำลังที่สองและกำลังที่สาม •
# • SQUARE ROOT & CUBE ROOT •

# 23

รากกำลังที่สองของเลขจำนวนใด คือ เลขจำนวนหนึ่ง ซึ่งคูณด้วยตัวของมันเองแล้ว จะได้เท่ากับเลขจำนวนนั้น

เช่น รากกำลังที่สองของ 144 ได้แก่ 12 (เพราะ $12 \times 12 = 144$)

รากกำลังที่สามของเลขจำนวนใด คือ เลขจำนวนหนึ่ง ซึ่งตัวของมันเอง 3 จำนวนคูณกันจะได้เท่ากับเลขจำนวนนั้น

เช่น รากกำลังที่สามของ 8 ได้แก่ 2 (เพราะ $2 \times 2 \times 2 = 8$)

นอกจากรากกำลังที่สอง รากกำลังที่สามแล้ว ก็ยังมีรากกำลังที่ — ที่ห้า — ที่หก ที่เจ็ด — เรื่อย ๆ ไป แต่ที่จะศึกษากันนี้คงเป็นเรื่องของรากกำลังที่สองและที่สาม เท่านั้น

## เครื่องหมายของราก

รากใช้แทนด้วยเครื่องหมาย $\sqrt{\phantom{x}}$ ซึ่งเรียกว่า เครื่องหมายราก หรือ กรณฑ์ หรือ เครื่องหมายรูต

โดยเหตุที่รากมีหลายกำลัง ดังนั้นจึงต้องเขียนให้แตกต่างกันออกไป ดังนี้

รากกำลังที่สอง — $\sqrt{\phantom{x}}$

รากกำลังที่สาม $-\sqrt[3]{\ }$

รากกำลังที่สี่ $-\sqrt[4]{\ }$

รากกำลังที่ห้า $-\sqrt[5]{\ }$

สำหรับรากกำลังที่สองไม่มีเลขข้างบน เพราะรากกำลังที่สองเป็นรากที่น้อยที่สุด และใช้กันมากที่สุด ดังนั้นจึงไม่ต้องเขียนเลขไว้ เป็นที่เข้าใจกันว่า ถ้าไม่เขียนเลขกำกับไว้ก็ต้องเป็นรากกำลังที่สอง

หางของราก จะยาวหรือสั้น แล้วแต่ความต้องการ ถ้าเป็นรากของจำนวนเลขยาว ๆ ก็ต้องเขียนหางให้ยาวไปจนสุดเลขจำนวนนั้น ถ้ารากของเลขจำนวนเดียวไม่ต้องมีหาง

## การหาค่าของรากโดยวิธีแยกตัวประกอบ

**ตัวอย่าง 1** จงหารากกำลังที่สองของ

(i) 3600 (ii) 3136

**วิธีทำ** (i) $\sqrt{3600} = \sqrt{3\times3\times4\times4\times5\times5}$

$= 3\times4\times5$

$\therefore$ รากกำลังที่สองของ 3600 $= 60$

(ii) $\sqrt{3136} = \sqrt{7\times7\times8\times8}$

$= 7\times8$

$\therefore$ รากกำลังที่สองของ 3136 $= 56$

**อธิบาย** เมื่อต้องการหารากของเลขจำนวนใด ก็เขียนรากลงไปบนเลขนั้น แล้วแยกตัวประกอบออกให้ได้ตัวคล้ายกัน ตัวที่คล้ายกัน 2 ตัวเอาออกมา 1 ตัว แล้วคูณกันเป็นรากของเลขจำนวนนั้น แต่ถ้ามีเลขที่แยกออกมาแล้วไม่มีคู่ จะเอาออกจากเครื่องหมายรูตไม่ได้ คงต้องคิดไว้

เช่น จงหารากกำลังที่สองของ 48

$$\sqrt{48} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times3}$$
$$= 2\times2\times\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

**ตัวอย่าง 2** จงหารากกำลังที่สามของ 9261 และ 970299

**วิธีทำ** $\sqrt[3]{9261} = \sqrt[3]{7\times7\times7\times3\times3\times3}$

$= 7\times3$

$\therefore$ รากกำลังที่สามของ 9261 $= 21$

$\sqrt[3]{970299} = \sqrt[3]{9\times9\times9\times11\times11\times11}$

$= 9\times11$

$\therefore$ รากกำลังที่สามของ 970299 $= 99$

**อธิบาย** เช่นเดียวกับรากกำลังที่สอง คือ แยกตัวประกอบออกไปแล้วจัดตัวที่เหมือนกันไว้เป็นพวก ๆ ตัวที่เหมือนกัน 3 ตัว เอาออกมาได้ 1 ตัว

**ตัวอย่าง 3** จงหาเลขจำนวนซึ่งน้อยที่สุด ซึ่งเมื่อนำมาคูณกับ 3675 แล้วจะหาค่าของรากกำลังที่สองได้ลงตัวพอดี

**วิธีทำ** $3675 = 7\times7\times5\times5\times3$

จะเห็นว่า 3 เป็นเลขซึ่งไม่มีคู่ ถ้าเอา 3 มาคูณเข้าก็จะได้ครบคู่ ซึ่งจะหาค่าของรากกำลังที่สองได้ลงตัวพอดี

$\therefore$ เลขจำนวนนั้นคือ 3

**ตอบ**

**ตัวอย่าง 4** จงหาเลขสองจำนวน ซึ่งจำนวนหนึ่งมีค่าเป็น $\frac{2}{3}$ ของอีกจำนวนหนึ่ง และผลบวกของกำลังสองของเลขสองจำนวนนี้เท่ากับ 325

**วิธีทำ** เลขจำนวนหนึ่งเป็น $\frac{2}{3}$ ของอีกจำนวนหนึ่ง

$\therefore$ ถ้าจำนวนแรกมี 2 ส่วน อีกจำนวนหนึ่งจะมี 3 ส่วน

$\therefore$ กำลังสองของจำนวนแรกจะได้ $2^2 = 4$ ส่วน

กำลังสองของจำนวนหลังจะได้ $3^2 = 9$ ส่วน

รวมส่วน $4 + 9 = 13$ ส่วน

แต่ผลบวกของกำลังสองของเลขสองจำนวนเป็น 325

$\therefore$ กำลังสองของเลขจำนวนแรก $= \frac{325}{13} \times 4 = 100$

กำลังสองของเลขจำนวนหลัง $= \frac{325}{13} \times 9 = 225$

$\therefore$ เลขจำนวนแรก $= \sqrt{100} = \sqrt{10 \times 10} = 10$

เลขจำนวนหลัง $= \sqrt{225} = \sqrt{15 \times 15} = 15$

ตอบ

**ตัวอย่าง 5** จงหาเลขสามจำนวนซึ่งมีค่าเป็น $1 : 2 : 3$ ผลบวกของกำลังสามของเลขสามจำนวนนี้เท่ากับ 288

**วิธีทำ** เลข 3 จำนวน มีค่าเป็น $1 : 2 : 3$

$\therefore$ กำลังสามของเลข 3 จำนวน เป็นอัตราส่วน $1 : 8 : 27$

รวมส่วน $1 + 8 + 27 = 36$

แต่ผลบวกของกำลังสามของเลข 3 จำนวนเป็น 288

$\therefore$ กำลังสามของเลขจำนวนแรก $\frac{288}{36} \times 1 = 8$

กำลังสามของเลขจำนวนที่สอง $\frac{288}{36} \times 8 = 64$

กำลังสามของเลขจำนวนที่สาม $\frac{288}{36} \times 27 = 216$

$\therefore$ เลขจำนวนแรก $= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2$

เลขจำนวนที่สอง $= \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} = 4$

เลขจำนวนที่สาม $= \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} = 6$

ตอบ

# การหาค่าของรากโดยวิธีคล้ายวิธีหาร

## 1. การหาค่ารากกำลังที่สองของเลขตัวเต็ม โดยวิธีคล้ายวิธีหาร (Square Root of an integer)

วิธีการคือ

1. แบ่งเลขจำนวนนั้นออกเป็นคู่ๆ จากข้างหลังมาข้างหน้า
2. หาเลขมาตัวหนึ่ง ซึ่งกำลังสองของมันเท่าหรือเกือบเท่าเลขคู่แรก (ซึ่งอยู่ข้างหน้าอาจมีครบคือ 2 ตัว หรือไม่ครบคือมีตัวเดียวก็ได้) ใส่ไว้ที่ผลลัพธ์ แล้วเอากำลังสองของมันใส่ไว้ใต้เลขคู่แรก แล้วลบกันเหมือนวิธีหาร
3. ชักเลขคู่ต่อไปลงมาหนึ่งคู่เป็นตัวตั้ง
4. เอา 2 คูณผลลัพธ์ แล้วนำมาเป็นตัวหาร
5. หาเลขมาตัวหนึ่ง ซึ่งเมื่อใส่ลงท้ายตัวหารแล้วเอาเลขตัวนั้นคูณตัวหารทั้งหมดจะได้เท่าหรือเกือบเท่าตัวตั้ง เอาเลขตัวที่หานี้เป็นผลลัพธ์ตัวต่อไป แล้วคูณกับตัวหาร ใส่ไว้ใต้ตัวตั้งแล้วลบกันเหมือนวิธีหารธรรมดา
6. ถ้ายังไม่ลงตัว เอาผลลัพธ์ตัวสุดท้ายมาบวกกับตัวหาร เป็นตัวหารตัวต่อไป (ดูตัวอย่างที่ 9) ทำจากข้อ 3 มาใหม่จนกว่าจะลงตัว

**ตัวอย่าง 6** จงหารากกำลังที่สองของ 1444

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| | 14,44 | 38 |
| | 9 | |
| 68 | 544 | |
| | 544 | |

**ตอบ** 38

เราแบ่ง 1444 เป็นคู่ๆ จากท้าย คู่แรกคือ 44 คู่ต่อไปคือ 14' (ต้องแบ่งจากข้างหลัง) คู่หน้าคือ 14 ซึ่งเราจะต้องหาเลขตัวหนึ่งซึ่งกำลังสองของมันเกือบเท่า 14 ซึ่งคือ 3 เอา 3 ใส่ไว้ที่ผลลัพธ์ แล้วเอากำลังสองของมันคือ 9 ใส่ไว้ใต้ตัวตั้งคู่แรก คือ 14 แล้วลบกันเหลือ 5 ชักคู่ต่อไปคือ 44 ลงมาเป็น 544 เอา 2 คูณผลลัพธ์คือ 3 ได้ 6 เอา 6 ใส่ลงเป็นตัวหาร พิจารณาดูว่าจะมีเลขตัวใดซึ่งเมื่อ

ลงที่ผลลัพธ์และใส่เข้าหลัง 6 แล้ว เลขตัวนั้นจะคูณตัวหารซึ่งรวมทั้งเลขตัวนั้นด้วยได้ผลเท่าหรือเกือบเท่า 544 ซึ่งได้แก่เลข 8 เอา 8 ใส่ที่ผลลัพธ์และใส่หลังเลข 6 แล้วจึงเอา 8 คูณ 68 ได้ 544 พอดี

**ตัวอย่าง 7** จงหารากกำลังที่สองของ 253009

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| | 25,30,09 | 503 |
| | 25 | |
| 1003 | 3009 | |
| | 3009 | |

**ตอบ** 503

**อธิบาย**

1. แบ่งเลขเป็นคู่ ๆ จากขวามาซ้าย ได้ 25, 30, 09
2. คู่แรกคือ 25 หาเลขตัวหนึ่งซึ่งกำลังสองของมันเท่าหรือเกือบเท่า 25 คือเลข 5 เอาเลข 5 ใส่ที่ผลลัพธ์ แล้วเอากำลังสองของมันคือ 25 ใส่ลงใต้เลขคู่แรก แล้วลบกันซึ่งหมดไปพอดี
3. ชักคู่ต่อไปลงมา คือชัก 30 ลงมา
4. เอา 2 คูณผลลัพธ์เดิม คือ 5 ได้ 10 เขียน 10 ลงไว้เป็นตัวหาร
5. หาเลขมาตัวหนึ่ง ซึ่งเมื่อใส่ลงท้ายตัวหารแล้วเอาเลขตัวนั้นคูณตัวหารทั้งหมดให้ได้เท่าหรือเกือบได้เท่าตัวตั้ง ในที่นี้ตัวตั้งคือ 30 ตัวหารคือ 10 จะเห็นว่าแม้จะใส่ 1 เข้าท้าย 10 เป็น 101 แล้วเอา 1 คูณ 101 ก็คงได้เกินตัวตั้งคือ 30 เมื่อเป็นเช่นนี้ให้ใส่ 0 เข้าที่ผลลัพธ์และที่ตัวหารแห่งละหนึ่งศูนย์ แล้วชักคู่ต่อไปลงมา ตัวตั้งจึงกลายเป็น 3009 ตัวหารกลายเป็น 100 แล้วจึงหาเลขมาใส่ท้าย 100 แล้วคูณให้ได้เท่า 3009 คือเลข 3 ใส่เลข 3 ที่ผลลัพธ์และที่ 100 เป็น 1003 เอา 3 คูณ 1003 ได้ 3009 ลงตัวพอดี

**ตัวอย่าง 8** จงหารากกำลังที่สองของ 122500

**วิธีทำ**

```
          12,25,00 | 350
             9
          -------
65          325
            325
          -------
              00
          =======
```

**ตอบ** 350

**อธิบาย** เมื่อหารไปแล้ว เหลือตัวตั้งสองศูนย์ (0 0) เช่นนี้ ให้ใส่ 0 ที่ผลลัพธ์ได้ทันทีหนึ่งศูนย์

**ตัวอย่าง 9** จงหารากกำลังที่สองของ 1121481

**วิธีทำ**

```
          1,12,14,81 | 1059
             1
          -------
205          1214
             1025
          -------
2109        18981
            18981
          =======
```

**ตอบ** 1059

**อธิบาย**

1. แบ่งเป็นคู่ๆ ได้ 1, 12, 14, 81
2. คู่แรกคือ 1 ดังนั้นได้ผลลัพธ์ 1 กำลังสองของ 1 คือ 1 เขียนไว้ใต้เลขคู่แรก (คือ 1) แล้วลบกันหมดพอดี
3. ชัก 12 ลงมาเป็นตัวตั้ง
4. เอา 2 คูณผลลัพธ์คือ 1 ได้ 2 ดังนั้น 2 เป็นตัวหารต่อไป

5 ถ้าใส่เลขหลังตัวหาร คือหลังเดช 2 แล้วถึงอย่างไรก็เกิน 12 ดังนั้นจึงต้องชักเลขคู่ต่อไปลงมา แต่ก่อนชักต้องใส่ศูนย์ที่ผลลัพธ์และตัวหารแห่งละหนึ่งศูนย์ ซึ่งได้ลัพธ์ 5 เอา 5 ใส่ที่ผลลัพธ์และที่ตัวหารเป็น 205 เอา 5 คูณ 205 ได้ 1025 ลบกันเหลือ 189 ชัก 81 ลงมาเป็น 18981 เอาผลลัพธ์ครั้งหลังคือ 5 บวกกับตัวหารคือ 205 ได้ 210 เป็นตัวหารครั้งต่อไป ผลลัพธ์ครั้งต่อไปคือ 9 ใส่ 9 ที่ผลลัพธ์และที่ตัวหารเป็น 2109 เอา 9 คูณ 2109 ได้ 18981 ลงตัวพอดี

**ตัวอย่าง 10** จงหารากกำลังที่สองของ 182493081

**วิธีทำ**

```
                1,82,49,30,81 | 13509
                1
              ---------------
23              82
                69
              ---------------
265             1349
                1325
              ---------------
27009           243081
                243081
              ===============
```

ตอบ 13509

## 2. การหาค่ารากกำลังที่สองของทศนิยม

วิธีการ

1. แบ่งเลขเป็นคู่ ๆ จากจุดทศนิยม
2. เขียน 0 เติมลงไปหลังจุดทศนิยมได้โดยไม่จำกัด
3. ก่อนจะชักเลขหลังจุดคู่แรกลงมา ต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์เสียก่อน ถ้าชักเลขหลังจุดลงมาแล้วแต่ยังหารไม่ได้ ให้ใส่ 0 ที่ผลลัพธ์ แล้วจึงชักคู่ต่อไปลงมา
4. ดำเนินวิธีการอื่น ๆ เช่นเดียวกับเรื่องตัวเต็ม และดำเนินไปจนกว่าจะเสร็จสิ้นหรือได้ทศนิยมเท่าที่โจทย์ต้องการ

**ตัวอย่าง 11** จงหารากที่สองของ 28.8369

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| | 28.83,69 | 5.37 |
| | 25 | |
| 103 | 383 | |
| | 309 | |
| 1067 | 7469 | |
| | 7469 | |

**ตอบ** 5.37

**อธิบาย**

1. แบ่งเลขเป็นคู่ ๆ จากจุด คือ นับจากจุดไปทางขวาและซ้ายทีละคู่โดยถือจุดเป็นหลัก ดังนั้นทางซ้ายมือจึงมีคู่เดียว คือ 28 ทางขวาคงได้ 2 คู่ คู่แรก 83 คู่ที่สอง 69
2. หาเลขซึ่งกำลังสองของมันใกล้เคียงเลขคู่แรก (คือ 28) ซึ่งได้แก่เลข 5 ดังนั้นใส่ 5 ลงที่ผลลัพธ์ และเอากำลังสองของมัน (25) ใส่ลงได้ 28 แล้วลบกันคงเหลือ 3
3. ชักเลขคู่ต่อไปลงมาอีกหนึ่งคู่ คู่ต่อไปคือ 83 แต่ 83 อยู่หลังจุด จะชักลงมาไม่ได้ ต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์เสียก่อนจึงชักลงมาได้
4. เอา 2 คูณผลลัพธ์ เป็นตัวหาร (10) แล้วหาผลลัพธ์ตัวต่อไปซึ่งได้ 3 แล้วดำเนินต่อไปตามปกติ

**ตัวอย่าง 12** จงหารากที่สองของ 676.208016

**วิธีทำ**

| | | |
|---|---|---|
| | 6,76.20,80,16 | 26.004 |
| | 4 | |
| 46 | 276 | |
| | 276 | |
| 52004 | 208016 | |
| | 208016 | |

**ตอบ** 26.004

**อธิบาย**

1. แบ่งทีละคู่จากจุด คู่แรกคือ 6
2. ได้ลัพธ์ 2 ; กำลังสองของ 2 = 4 ลบจาก 6 เหลือ 2 ชัก 76 ลงมา
3. เอา 2 คูณผลลัพธ์ (คือ 2) ได้ 4 ดังนั้น 4 เป็นตัวหาร ผลลัพธ์ต่อไปคือ 6 ลบกันแล้วหมดพอดี
4. ชักเลขคู่ต่อไปลงมา แต่เลขคู่ต่อไปอยู่หลังจุด ต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์เสียก่อนจึงชักลงมาได้
5. เอา 2 คูณผลลัพธ์ (ผลลัพธ์คือ 26) ได้ 52 ดังนั้น 52 เป็นตัวหาร แต่ 52 หาร 20 ไม่ได้ ต้อง **ใส่ 0 ที่ผลลัพธ์** (เป็น 26.0) **และใส่ 0 ที่ตัวหาร** (เป็น 520) แล้วชักคู่ต่อไป (80) ลงมา แต่ 520 ก็ยังหาร 2080 ไม่ได้ เพราะถ้าใส่เลขตัวใดลงหลัง 520 ก็เกิน 2080 ซึ่งใช้ไม่ได้ ต้อง **ใส่ 0 ที่ผลลัพธ์อีก** (เป็น 26.00) **และใส่ 0 ที่ตัวหารอีก** (เป็น 5200) แล้วชักคู่ต่อไป (16) ลงมา คงเป็นว่าจะหาเลขตัวใดใส่ข้างท้าย 5200 แล้วคูณด้วยตัวมันเองให้ได้ผลลัพธ์ 208016 ก็ได้แก่เลข 4 ซึ่งลงตัวพอดี

**ตัวอย่าง 13** จงหารากกำลังที่สองของ 0.0000063001

**วิธีทำ**

```
.00,00,06,30,01 | .00251
      4
45    230
      225
501   501
      501
```

**ตอบ** 0.00251

**อธิบาย** คู่แรกอยู่หลังจุด ต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์เสียก่อน

คู่แรกเป็น 0 0 ใส่ 0 ที่ผลลัพธ์ได้หนึ่งศูนย์

คู่ที่สองเป็น 0 0 ใส่ 0 ที่ผลลัพธ์ได้อีกหนึ่งศูนย์

คู่ที่สามคือ 06 ได้ลัพธ์ 2 กำลังสองของ 2 คือ 4

เอา 4 ลบ 6 เหลือ 2 ชักคู่ต่อไปลงมาเป็น 230

เอา 2 คูณผลลัพธ์ (จุดไม่ต้องไปคูณด้วย) ผลลัพธ์คือ 062

คูณแล้วได้ 4 ดังนั้น 4 เป็นตัวหาร

ต่อไปได้ลัพธ์ 5 ใส่ 5 หลัง 4 เป็น 45 เอา 5 คูณ 45 ได้ 225 เอาไปลบ

จาก 230 เหลือ 5 ชักคู่ต่อไปลงมาเป็น 501

เอา 2 คูณผลลัพธ์ (คือคูณ 0025) ได้ 50 เป็นตัวหารครั้งต่อไป

ต่อไปได้ลัพธ์ 1 เอา 1 คูณ 501 ได้ 501 ลงตัวพอดี

**ตัวอย่าง 14** จงหารากที่สองของ 3.256 ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง

**วิธีทำ**

```
                3.25,62,56,25,62 | 1.8045-----
                1
              ------------------
           28 | 225
              | 224
              ------------------
         3604 | 16256
              | 14416
              ------------------
        36085 | 184025
              | 180425
              ------------------
        ----- | --3600
              | -----
              ==================
```

**ตอบ** 1.8045-----

## 3. การหาค่าของรากกำลังที่สามของจำนวนเต็มโดยวิธีคล้ายวิธีหาร

วิธีการ

1. แบ่งเลขออกเป็นหมู่ๆ ละ 3 ตัว จากขวามาซ้าย
2. หาเลขมาตัวหนึ่ง ซึ่งกำลังสามของมันได้เกือบเท่าหรือเท่าเลขหมู่แรก (ต้องไม่มากกว่า) เอาเลขตัวนี้ใส่ที่ผลลัพธ์ เอากำลังสามของมันใส่ไว้ใต้เลขหมู่แรก แล้วลบกัน เหลือเท่าใดชักเลขหมู่ต่อไปลงมาเป็นตัวตั้ง
3. ยกกำลังสองของเลขลัพธ์เดิม แล้วคูณด้วย 300
4. เอาจำนวนที่หาได้ในข้อ 3 หารตัวตั้ง (ไม่จำเป็นต้องลงตัว) ได้กี่ครั้ง เอาจำนวนครั้งที่หาได้นี้เป็นเลขลัพธ์ตัวที่สอง
5. เอาเลขลัพธ์ตัวแรกคูณเลขลัพธ์ตัวที่สอง แล้วคูณด้วย 30
6. ยกกำลังสองของเลขลัพธ์ตัวที่สอง
7. เอาผลที่หาได้จากข้อ 3—5—6 รวมกันเป็นตัวหาร
8. เอาเลขลัพธ์ตัวที่สองคูณกับผลที่ได้ในข้อ 7 แล้วเอาไปลบออกจากตัวตั้ง ถ้ายังไม่หมด ชักเลขหมู่ต่อไปลงมา แล้วดำเนินวิธีการตั้งแต่ข้อ 3 มาใหม่ จนกว่าจะได้คำตอบ

**ตัวอย่าง 15** จงหาค่าของรากกำลังที่สามของ 29791

**วิธีทำ**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 29,791 | 31 |
| | | 27 | |
| $3^2 \times 300$ | $= 2700$ | 2 791 | |
| $3 \times 1 \times 30$ | $= 90$ | | |
| $1^2$ | $= 1$ | | |
| | 2791 | 2791 | |

**ตอบ** 31

อธิบาย

1. แบ่งเลขเป็นหมู่ๆ หมู่ละ 3 ตัว จากขวามาซ้ายได้ 29,791 ∴ หมู่แรกคือ 29
2. หาเลขมาตัวหนึ่ง ซึ่งกำลังสามของมันไม่เกิน 29 ซึ่งได้เลข 3 กำลังสามของ 3 คือ 27 เอา 27 ใส่ได้ 29 ลบกันเหลือ 2 ชักหมู่ต่อไปคือ 791 ลงมา รวมเป็น 2791
3. ยกกำลังสองของเลขตัวที่เดิม คือ 3 กำลังสองซึ่งได้ 9 แล้วคูณด้วย 300 เป็น 2700
4. เอา 2700 ลองหาร 2791 ได้ 1 ครั้ง ใส่ 1 เป็นเลขตัวที่สอง
5. เอาเลขตัวที่หนึ่งคูณเลขตัวที่สองคูณ 30 ซึ่งคือ $3 \times 1 \times 30 = 90$
6. ยกกำลังสองของเลขตัวที่สอง คือ หนึ่งกำลังสองได้ 1
7. เอาข้อ 3, 5, 6 รวมกันคือ $2700 + 90 + 1 = 2791$
8. เอา 1 คูณ 2791 ได้ 2791 ลงตัวหาร

**ตัวอย่าง 16** จงหาค่ารากกำลังที่สามของ 912673

**วิธีทำ**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 912,673 | 97 |
| | | 729 | |
| $9^2 \times 300$ | $= 24300$ | 183 673 | |
| $9 \times 7 \times 30$ | $= 1890$ | | |
| $7^2$ | $= 49$ | | |
| | 26239 | 183673 | |

**ตอบ** 97

**ตัวอย่าง 17** จงหาค่ารากกำลังที่สามของ 186169411

**วิธีทำ**

| | | | 186,169,411 | 571 |
|---|---|---|---|---|
| | | | 125 | |
| $5^2 \times 300$ | = | 7500 | 61169 | |
| $5 \times 7 \times 30$ | = | 1050 | | |
| $7^2$ | = | 49 | | |
| | | 8599 | 60193 | |
| $57^2 \times 300$ | = | 974700 | 976411 | |
| $57 \times 1 \times 30$ | = | 1710 | | |
| $1^2$ | = | 1 | | |
| | | 976411 | 976411 | |

**ตอบ** 571

**อธิบาย** เมื่อทำถึงข้อ 8 แล้ว คงเหลือเศษ คือ 976

ชักหมู่สุดท้ายลงมาเป็น 976411 เป็นตัวตั้ง

บัญหาก็คือต้องการตัวหาร เพราะตัวหารเก่าหมดหน้าที่แล้ว ต้องหาใหม่

การหาตัวหารก็วนเวียนเช่นเดียวกับข้อ 3 เป็นต้นมา คือ

3. ยกกำลังสองของผลลัพธ์เดิม ผลลัพธ์เดิมในที่นี้คือ 57 ดังนั้นต้องยกกำลังสองของ 57 คือ $(57)^2$ แล้วคูณด้วย 300 ได้ 974700
4. เอา 974700 ลองหาร 976411 ได้ 1 ครั้ง ดังนั้นใส่ 1 ไว้เป็นผลลัพธ์ใหม่
5. เอาผลลัพธ์ตัวแรก คือผลลัพธ์เดิม (57) คูณผลลัพธ์ใหม่ (1) แล้วคูณด้วย 30 คือ $57 \times 1 \times 30$ ได้ 1710
6. ยกกำลังสองของผลลัพธ์ใหม่ คือ $1^2$
7. $974700 + 1710 + 1 = 976411$
8. เอา 1 คูณ 976411 ได้ 976411 ลงตัวพอดี

**ตัวอย่าง 18** จงหารากกำลังที่สามของ 28934443

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 28,934,443 | 307 |
| | | | 27 | |
| $3^2 \times 300$ | = | 270000 | 1 934 443 | |
| $3 \times 7 \times 30$ | = | 6300 | | |
| $7^2$ | = | 49 | | |
| | | 276349 | 1 934 443 | |

ตอบ 307

อธิบาย

2. ได้เลข 3 เป็นเลขลัพธ์ตัวแรก

กำลังสามของ 3 คือ 27 ลบจาก 28 เหลือ 1 ชัก 934 ลงมาเป็น 1934

3. ยกกำลังสองของเลข 3 ได้ 9 แล้วคูณด้วย 300 ได้เป็น 2700

จะเห็นว่าตัวตั้งคือ 1934 ตัวหารคือ 2700 ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ต้องชักหมู่ต่อไปลงมา ซึ่งเมื่อชักแล้วต้อง

(1) เติม 0 ที่ผลลัพธ์ หนึ่งศูนย์

(2) เติม 0 ที่ข้อ 3 สองศูนย์ (บรรทัดแรก)

(3) เติม 0 ที่ข้อ 5 หนึ่งศูนย์ (บรรทัดที่สอง)

คือ เติมบรรทัดแรก สอง ศูนย์

บรรทัดที่สอง หนึ่ง ศูนย์

จากนี้ดำเนินเช่นที่ผ่านมาแล้วในตัวอย่างก่อน ๆ

4. การหาค่ารากกำลังที่สามของทศนิยมโดยวิธีคล้ายวิธีหาร

ดำเนินวิธีการเช่นเดียวกับเรื่องจำนวนเต็ม ผิดกันแต่ว่าการแบ่งหมู่ ๆ ละสามตัวนั้น ให้แบ่งจากจุดเป็นหลัก ข้อสำคัญก็คือ

เมื่อจะชักเลขหลักจุดหมู่แรกลงมา ต้องใส่จุดที่ผลลัพธ์เสียก่อน

(หมู่หลัง ๆ ชักลงมาได้เลย)

วิธีการปลีกย่อยอื่น ๆ ไม่มีข้อยกเว้นพิเศษแต่อย่างใด

**ตัวอย่าง 19** จงหารากที่สามของ 12.167

**วิธีทำ**

| | | | 12.167 | 2.3 |
|---|---|---|---|---|
| | | $2^3 = 8$ | 8 | |
| $2^2 \times 300$ | = | 1200 | 4167 | |
| $2 \times 3 \times 30$ | = | 180 | | |
| $3^2$ | = | 9 | | |
| | | 1389 | 4167 | |

$\therefore \quad \sqrt[3]{12.167} = 2.3$

**ตอบ** 2.3

**ตัวอย่าง 20** จงหารากที่สามของ 69.934528

**วิธีทำ**

| | | | 69.934,528 | 4.12 |
|---|---|---|---|---|
| | | $4^3 = 64$ | 64 | |
| $4^2 \times 300$ | = | 4800 | 5934 | |
| $4 \times 1 \times 30$ | = | 120 | | |
| $1^2$ | = | 1 | | |
| | | 4921 | 4921 | |
| $(41)^2 \times 300$ | = | 504300 | 1013528 | |
| $41 \times 2 \times 30$ | = | 2460 | | |
| $2^2$ | = | 4 | | |
| | | 506764 | 1013528 | |

$\therefore \quad \sqrt[3]{69.934528} = 4.12$

**ตอบ** 4.12

## 5. การหาค่ารากกำลังที่สามและรากกำลังที่สองของเศษส่วน

มีวิธีทำดังนี้

1. ถ้าเศษส่วนนั้นสามารถหาค่าของรากได้พอดีทั้งเศษและส่วน ก็ให้หาค่ารากของเศษส่วนนั้นทั้งเศษและส่วน เช่น

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

2. ถ้าเศษส่วนนั้นหาค่าของเศษและส่วนไม่ได้ลงตัวพอดี ให้ทำดังนี้

ก. ทำเศษส่วนนั้นให้เป็นทศนิยม แล้วจึงหาค่าของราก เช่น

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \sqrt{1.44} = 1.2$$

ข. หาตัวมาคูณทั้งเศษและส่วน ให้ส่วนหารากได้ลงตัวพอดี เช่น

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0.5776\text{-----}$$

## การหาค่ารากกำลังที่สองและที่สามด้วยตาเปล่า

### การหาค่ารากกำลังที่สอง (เฉพาะจำนวนที่ลงท้ายด้วยเลข 5)

ถ้าเลขจำนวนนั้นลงท้ายด้วยเลข 5 และเป็นจำนวนซึ่งหาค่าได้ลงตัวพอดีแล้ว วิธีหาค่าด้วยตาเปล่า มีดังนี้

ถ้าเลขจำนวนนั้นหาค่าได้ลงตัวพอดี เลข 2 ตัวสุดท้ายต้องเป็น 25 เสมอไป เช่น $15\times15=225$, $75\times75=5625$, $115\times115=13225$ ดังนั้น วิธีหาค่าของรากกำลังที่สองของมันก็คือ

1. เลขหลักหน่วยของรากที่หาได้จะต้องเป็น 5 เสมอไป
2. ตัด 25 ซึ่งเป็นตัวสุดท้ายของเลขจำนวนนั้นออกไป
3. เหลือเท่าไร พยายามหาเลข 2 จำนวนมาคูณกันให้ได้เท่าจำนวนที่เหลือนั้น มีหลักว่าเลข 2 จำนวนนี้ จำนวนหนึ่งต้องมากกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 1 เสมอไป
4. เอาเลขจำนวนที่น้อยกว่าเขียนลงหน้าเลข 5 เป็นคำตอบ

ตัวอย่าง

ก. หารากกำลังที่สองของ 5625

วิธีคิด 1. เลขตัวสุดท้ายในคำตอบของเราต้องเป็น 5

2. ตัด 25 ทิ้งไป คงเหลือ 56

3. หาเลข 2 ตัวมาคูณกัน ให้เลขตัวหนึ่งมากกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 1 หาได้ $7 \times 8 = 56$ (8 มากกว่า 7 อยู่ 1)

4. เอาเลขตัวที่น้อยกว่า คือ 7 เขียนลงหน้าเลข 5 เป็นคำตอบ คือ 75

∴ รากกำลังที่สองของ 5625 คือ 75

ข. หาค่าของรากกำลังที่สองของ 13225

วิธีคิด 1. เลขตัวสุดท้ายในคำตอบของเราต้องเป็น 5

2. ตัด 25 ทิ้งไป คงเหลือ 132

3. เลข 2 จำนวนที่มากกว่ากัน 1 ซึ่งคูณกันได้ 132 คือ $11 \times 12 = 132$

4. เลขตัวน้อยคือ 11 ดังนั้นคำตอบ คือ 115

ค. หาค่าของรากกำลังที่สองของ 93025

วิธีคิด 1. เลขตัวสุดท้ายในคำตอบ คือ 5

2. ตัด 25 ออกเหลือ 930

3. เลข 2 จำนวนที่มากกว่ากัน 1 ซึ่งคูณกันได้ 930 คือ $30 \times 31 = 930$

4. เลขจำนวนน้อยคือ 30 ดังนั้นคำตอบ คือ 305

การหาค่ารากกำลังที่สาม (เฉพาะจำนวนที่มีเลขอย่างมากไม่เกิน 6 หลัก)

การหาค่ารากกำลังที่สามด้วยตาเปล่านั้น หาได้อย่างมากเพียงจำนวนซึ่งมีเลขไม่เกิน 6 ตัว (6 หลัก) และ หาค่าได้ถูกต้องเฉพาะจำนวนเลขซึ่งสามารถหาค่าลงตัวพอดีเท่านั้น

เช่น 3375 เราหาค่าของรากกำลังที่สาม ด้วยวิธีด้วยคาเปล่าได้

เพราะ 3375 หาค่ารากกำลังที่สามได้ลงตัวพอดี คือ

$3375 = 15 \times 15 \times 15$

## วิธีคิด

### ถ้าเลขมีอย่างมาก 3 หลัก

วิธีคิดให้ดูเลขตัวสุดท้าย ถ้าตัวท้ายลงด้วยเลขอะไร เราก็ลองคิดในใจดูว่า เลขตัวใด (ตัวเดียวเท่านั้นหลักเดียว) ที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้งแล้วลงท้ายด้วยตัวนั้น เลขตัวที่คิดได้คือรากกำลังที่สามของจำนวนนั้น เช่น

1. หาค่ารากกำลังที่สามของ 216

ลงท้ายด้วยเลข 6 เลขตัวที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้ง แล้วลงท้ายด้วย 6 คือเลข 6

∴ รากกำลังที่สามของ 216 คือ 6 $(6 \times 6 \times 6 = 216)$

2. หาค่ารากกำลังที่สามของ 729

ลงท้ายด้วยเลข 9 เลขตัวที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้ง แล้วลงท้ายด้วย 9 คือ เลข 9

∴ รากกำลังที่สามของ 729 คือ 9 $(9 \times 9 \times 9 = 729)$

3. หาค่ารากกำลังที่สามของ 512

ลงท้ายด้วยเลข 2 เลขตัวที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้ง แล้วลงท้ายด้วย 2 คือ เลข 8

∴ รากกำลังที่สามของ 512 คือ 8 $(8 \times 8 \times 8 = 512)$

ต่อไปนี้เป็นตารางสำเร็จ สำหรับดูว่า ลงท้ายด้วยเลขอะไร จะต้องเอาเลขตัวใดคูณตัวมันเอง 3 ครั้งจึงจะลงท้ายเหมือนกัน เลขทั้งหมดมี 9 ตัว คือจาก 1 ถึง 9 ทั้ง 9 ตัวนี้คูณตัวมันเอง 3 ครั้งแล้ว จะลงท้ายไม่ซ้ำกันเลย

## ตารางสำเร็จ

| ลงท้ายด้วย | เลขที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้ง คือ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 7 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 3 |
| 8 | 2 |
| 9 | 9 |

จากตารางนี้ เราจะรู้ค่าของรากกำลังที่สามของเลขที่มีอย่างมากไม่เกิน 3 หลักได้ทันที

เช่น 343 ลงท้ายด้วย 3 รากกำลังที่สามของ 343 คือ 7

125 ลงท้ายด้วย 5 รากกำลังที่สามของ 125 คือ 5

**ถ้าเลขมีอย่างมากไม่เกิน 6 หลัก แต่ไม่ต่ำกว่า 4 หลัก** คำตอบจะมีเลข 2 หลัก

**วิธีคิด** 1. แบ่งเลขออกเป็น 2 หมู่ จากทางด้านหลังมาข้างหน้า หมู่หลังต้องมี 3 หลักเสมอ เช่น 35937 แบ่งได้ 35,937

2. ลองคิดในใจดูว่า เลขตัวใดซึ่งคูณตัวมันเอง 3 ครั้ง แล้วได้เท่าหรือเกือบเท่าเลขหมู่แรก (ต้องให้เป็นเลขที่มากที่สุด แต่กำลังสามของมันต้องไม่เกินเลขหมู่แรก) เป็นคำตอบตัวที่ 1

3. ดูว่าหมู่หลังลงท้ายด้วยเลขอะไร แล้วดูจากตารางสำเร็จหรือจะคิดในใจเอาก็ได้ แล้วใส่ลงหลังเลขที่หาได้ในข้อ 2 เป็นคำตอบ

ตัวอย่าง

1. หาค่ารากกำลังที่สามของ 2744

1. แบ่งได้ 2,744
2. หมู่แรกคือ 2 เลขที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้งได้ไม่เกิน 2 คือ 1
   ดังนั้น 1 เป็นคำตอบตัวแรก
3. 744 ลงท้ายด้วย 4 เลขที่คูณตัวมันเอง 3 ครั้ง แล้วลงท้ายด้วย 4 คือ 4
   (ดูจากตารางสำเร็จประกอบ) 4 เป็นคำตอบตัวที่สอง
   ∴ รากกำลังที่สามของ 2744 คือ 14

2. หาค่ารากกำลังที่สามของ 13824

1. แบ่งเป็น 2 หมู่ได้ 13,824
2. หมู่แรกคือ 13 เลขซึ่งกำลังสามของมันไม่เกิน 13 คือ 2
3. หมู่หลังคือ 824 ลงท้ายด้วย 4 เลขซึ่งกำลังสามของมันลงท้ายด้วย 4 คือ 4
   ดังนั้น รากกำลังที่สามของ 13824 คือ 24

3. หาค่ารากกำลังที่สามของ 35937

1. แบ่งเป็น 2 หมู่ได้ 35,937
2. หมู่แรกคือ 35 เลขซึ่งกำลังสามของมันไม่เกิน 35 คือ 3
3. หมู่หลังคือ 937 ลงท้ายด้วย 7 เลขซึ่งกำลังสามของมันลงท้ายด้วย 7 คือ 3
   ∴ รากกำลังที่สามของ 35937 คือ 33

4. หาค่ารากกำลังที่สามของ 166375

1. แบ่งเป็น 2 หมู่ได้ 166,375
2. หมู่แรกคือ 166 เลขตัวซึ่งมากที่สุด ซึ่งกำลังสามของมันไม่เกิน 166 คือ 5
   $(5 \times 5 \times 5 = 125)$ (ถ้าเอา 6 จะเกิน 166)
3. หมู่หลังคือ 375 ลงท้ายด้วย 5 เลขซึ่งกำลังสามของมันลงท้ายด้วย 5 คือ 5
   ∴ รากกำลังที่สามของ 166375 คือ 55

5. หาค่ารากกำลังที่สามของ 216000

เลขที่กำลังสามของมันได้ไม่เกิน 216 คือ 6 $(6 \times 6 \times 6 = 216$ พอดี)

เลขสุดท้ายเป็น 0 $(0 \times 0 \times 0 = 0)$

$\therefore$ รากกำลังที่สามของ 216000 คือ 60

---

## แบบฝึกหัด 24

1. จงหารากกำลังที่สองของ

585225, 132496, 559504, 736164, 853776, 14837904

(765, 364, 748, 858, 924, 3852)

2. จงหารากกำลังที่สามของ

ก. 19683 และ 970299 (27, 99)

ข. 85184 และ 17576 (44, 26)

ค. 42875 และ 166375 (35, 55)

ง. 438976 และ 12812904 (76, 234)

จ. 1295029 และ 28934443 (109, 307)

ฉ. 186169411 (571)

3. จงหารากกำลังที่สองของ

ก. 331.24 และ 0.042849 (18.2 และ 0.207)

ข. 170.3025 และ 1015.6969 (13.05 และ 31.87)

ค. 0.00010201 และ 676.208016 (0.0101 และ 26.004)

4. จงหารากกำลังที่สามของ

ก. 0.729 และ 1.331 (0.9 และ 1.1)

ข. 12.167 และ 551.368 (2.3 และ 8.2)

ค. 10.218313 และ 444194.947 (2.17 และ 76.3)

5. จงหารากที่สองของ

   ก. $2352\frac{1}{4}$ $(48\frac{1}{2})$

   ข. $37\frac{212}{841}$ $(6\frac{3}{29})$

   ค. $4\frac{5}{21}$ $(2.0586\text{---})$

6. จงหารากที่สามของ

   ก. $3\frac{3}{8}$ $(1\frac{1}{2})$

   ข. $30\frac{265}{512}$ $(3\frac{1}{8})$

   ค. $3\frac{6}{31}$ $(1.472\text{---})$

7. จงหาเลขซึ่งมีค่าน้อยที่สุด เมื่อนำมาคูณ 32500 แล้ว ก็จะหาค่าของรากที่สองได้สมบูรณ์ (Perfect Square) (13)

8. จงหาเลขซึ่งมีค่าน้อยที่สุด เมื่อนำมาคูณ 3136000 แล้วก็จะหาค่าของรากที่สามได้สมบูรณ์พอดี (Perfect Cube) (7)

9. เลข 3 จำนวนมีค่าเป็น 1 : 3 : 6 และเมื่อยกกำลังสองเข้าทั้งสามจำนวนแล้ว จะรวมกันได้ 184 จงหาเลข 3 จำนวนนั้น (2, 6, 12)

10. เลข 4 จำนวนมีค่าเป็น 1 : 2 : 3 : 4 ผลบวกของกำลังสามของเลขทั้งสี่จำนวนเป็น 800 จงหาเลข 4 จำนวนนั้น (2, 4, 6, 8)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การคำนวณพื้นที่
# MENSURATION OF PLANE SURFACES

# 24

## รูปสามเหลี่ยม (TRIANGLES)

1. เมื่อกำหนดความยาวของฐานและส่วนสูง

พื้นที่ $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

สูตร 1 $A = \frac{1}{2} bh$

2. เมื่อกำหนดความยาวของด้านทั้งสามให้

ให้ความยาวของด้านทั้งสามเป็น a, b และ c

และให้ $S = \frac{a+b+c}{2}$ (หรือ S = ครึ่งหนึ่งของผลบวกของด้านทั้งสาม)

สูตร 2 $A = \sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$

3. เมื่อเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มีความยาวด้านละ a

สูตร 3 $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

($\sqrt{3}$ มีค่าประมาณ 1.732)

4. เมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้ฐานยาว b อีกสองด้านยาวด้านละ a

สูตร 4 $A = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ ●

การหาความยาวของเส้นต่าง ๆ ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

5. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก

สูตร 5 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ●

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

ให้ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุม A ยาว a

ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุม B ยาว b

ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุม C ยาว c

6. ความยาวของเส้นตรงที่ลากจากมุมไปตั้งฉากกับด้านตรงข้าม

สูตร 6 เส้นที่ลากจาก A ไปตั้งฉากกับด้าน $a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ●

เส้นที่ลากจาก B ไปตั้งฉากกับด้าน $b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ●

เส้นที่ลากจาก C ไปตั้งฉากกับด้าน $c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ●

7. ความยาวของเส้นตรงที่ลากจากมุมไปแบ่งครึ่งด้านตรงข้าม

สูตร 7 เส้นที่ลากจาก A ไปแบ่งครึ่งด้าน $a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ ●

เส้นที่ลากจาก B ไปแบ่งครึ่งด้าน $b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ ●

เส้นที่ลากจาก C ไปแบ่งครึ่งด้าน $c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ ●

8. ความยาวของเส้นตรงที่ลากแบ่งครึ่งมุมไปยังด้านตรงข้าม

สูตร 8 เส้นที่ลากแบ่งครึ่งมุม A ไปยังด้าน $a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}$ ●

เส้นที่ลากแบ่งครึ่งมุม B ไปยังด้าน $b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)}$ ●

เส้นที่ลากแบ่งครึ่งมุม C ไปยังด้าน $c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}$ ●

**หมายเหตุ** ถ้าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือสามเหลี่ยมด้านเท่าแล้ว เส้นที่ลากไปตั้งฉากกับฐาน แบ่งครึ่งฐาน หรือเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดจะเป็นเส้นเดียวกัน (คือถ้า $b = c$ เส้นที่ลากจากมุม A ในสูตรที่ 6—7—8 จะมีค่าเท่ากัน)

อนึ่ง ถ้าด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีอัตราส่วนเป็น 5 : 4 : 3 สามเหลี่ยมนั้นจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านที่ยาว 5 เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก

9. **เมื่อกำหนดความยาวของด้านทั้งสาม เราอาจหาความยาวของรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมนั้น ๆ ได้**

สูตร 9 $$\text{รัศมี} = \frac{\text{ผลคูณของด้านทั้งสาม}}{4 \times \text{พื้นที่ของสามเหลี่ยมนั้น}}$$

หรือ $$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

## รูปสี่เหลี่ยม

**สี่เหลี่ยมจตุรัส** (Square) คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

สูตร 10 พื้นที่ = ด้าน × ด้าน

**สี่เหลี่ยมผืนผ้า** (Rectangle) คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามเท่ากัน และมุมเป็นมุมฉาก

สูตร 11 พื้นที่ = กว้าง × ยาว

**สี่เหลี่ยมด้านขนาน** (Parallelogram) คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันแต่ไม่มีมุมเป็นมุมฉาก

สูตร 12 พื้นที่ = ฐาน × สูง

**สี่เหลี่ยมคางหมู** (Trapezoid) คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันคู่เดียว

สูตร 13 พื้นที่ = $\frac{1}{2}$ × ผลบวกของด้านที่ขนานกัน × สูง

**สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน** (Rhombus) คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่เท่ากัน แต่ไม่มีมุมเป็นมุมฉากเลย

สูตร 14 พื้นที่ $= \frac{\text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม}}{2}$

**สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า** หาพื้นที่โดยแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูป

## รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า (Regular Polygon)

สูตร 15 พื้นที่ $= \frac{\text{ผลบวกของด้านทั้งหมด} \times \text{รัศมีของวงกลมที่บรรจุภายใน}}{2}$

## วงกลม (Circle)

วงกลมคือรูปแบนราบ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง ซึ่งจะมีจุด ๆ หนึ่งภายใน มีระยะห่างจากเส้นโค้งเป็นระยะเท่า ๆ กัน

นักคณิตศาสตร์พยายามวัดเส้นรอบวงและเส้นผ่าศูนย์กลางนำไปเปรียบเทียบกัน แต่ก็ปรากฏว่าไม่สามารถจะวัดได้อย่างถูกต้องแน่นอนได้ จึงตกลงกันใช้เครื่องหมายแทนอัตราส่วนนั้น โดยใช้อักษรตัวที่ 16 ของกรีก คือ Π (ตัวใหญ่) $\pi$ (ตัวเล็ก) ซึ่งมีชื่อว่า ไพ (Pi)

ดังนั้น $\frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{เส้นผ่าศูนย์กลาง}} = \pi$

ได้มีผู้ค้นคว้าหาค่าของ $\pi$ ให้ได้ใกล้เคียงที่สุด นักคำนวณบางคนหาค่าของ $\pi$ ได้ถึงทศนิยม 700 ตำแหน่ง ตามปกตินั้นในการทำโจทย์ โจทย์จะต้องบอกค่าของ $\pi$ ให้ด้วย ถ้าไม่บอกก็นิยมใช้ $\pi = \frac{22}{7}$

**ค่าของ $\pi$** คิดเพียงทศนิยม 10 ตำแหน่ง

$\pi = 3.1415926536$ ปกติใช้ $\pi = 3.1416$ เท่านี้ก็ละเอียดมากแล้ว

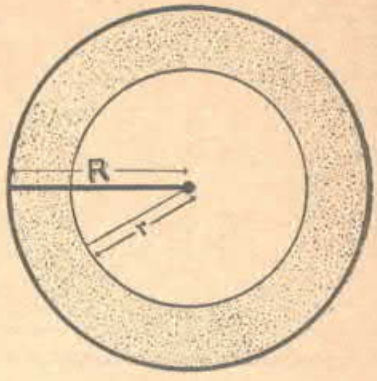
สูตร 16 เส้นรอบวง $= 2\pi r$

สูตร 17 พื้นที่วงกลม $= \pi r^2$

## วงแหวน (CIRCULAR RING)

วงแหวนเกิดจากวงกลมสองวงไม่เท่ากัน ร่วมจุดศูนย์กลางเดียวกัน

**พื้นที่วงแหวน** คือพื้นที่ระหว่างเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง ซึ่งมีรัศมีไม่เท่ากันนั่นเอง




ให้ R เป็นรัศมีวงกลมวงใหญ่

r เป็นรัศมีวงกลมวงเล็ก

$\therefore$ พื้นที่วงใหญ่ $= \pi R^2$

พื้นที่วงเล็ก $= \pi r^2$

สูตร 18 $\therefore$ พื้นที่วงแหวน $= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi (R^2 - r^2)$

$= \pi (R+r)(R-r)$

**ตัวอย่าง 1** จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งด้านทั้งสามยาว 30, 40 และ 50 เมตร ตามลำดับ

**วิธีทำ** สูตร พื้นที่สามเหลี่ยม $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = \frac{a+b+c}{2}$; ในที่นี้ $a = 30$, $b = 40$, $c = 50$

$\therefore s = \frac{30+40+50}{2} = 60$

$\therefore$ พื้นที่สามเหลี่ยม $= \sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$= \sqrt{60 \times 30 \times 20 \times 10}$

$= 600$

**ตอบ** 600 ตารางเมตร

**ตัวอย่าง 2** พื้นที่วงแหวนของวงกลมสองวงเป็น 22 ตารางเซนติเมตร รัศมีทั้งสองรวมกันได้ 7 ซม. จงหารัศมีของแต่ละวง

**วิธีทำ** สูตร พื้นที่วงแหวน $= \pi (R+r)(R-r)$

$= \frac{22}{7} (R+r)(R-r)$

$$(R+r)(R-r) = 7$$

แต่ $R+r = 7$

$\therefore \quad 7(R-r) = 7$

$R-r = 1$ ----- (1)

และ $R+r = 7$ ----- (2)

(1) + (2); $2R = 8$

$\therefore \quad R = 4$

$\therefore \quad r = 3$

**ตอบ** รัศมีทั้งสองยาว 4 และ 3 เซนติเมตร

---

## แบบฝึกหัด 25

1. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 13, 14 และ 15 ฟุตตามลำดับ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้น (84)
2. สี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีฐานยาว 18 ฟุต มีส่วนสูงยาว 10 ฟุต จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมนั้น (180)
3. ถ้าสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีพื้นที่ 60 ตารางฟุต และฐานยาว 15 ฟุต จงหาส่วนสูง (4)
4. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ซึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว 14 และ 16 เมตร ตามลำดับ (112)
5. จงหาพื้นที่ของสามรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งมีด้านคู่ขนานยาว 25 และ 15 วา ส่วนสูงยาว 13 วา (260)
6. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีฐานยาว 45 หลา ด้านอีกสองด้านยาว 39 และ 42 หลา จงหาส่วนสูงของสามเหลี่ยมนั้น (33.6)

7. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 10, 8 และ 12 ฟุต มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง ถ้าด้านประชิดด้านหนึ่งยาว $5\sqrt{7}$ ฟุต จงหาด้านอีกด้านหนึ่ง (6)
8. บันไดอันหนึ่งยาว 50 ฟุต พาดจรดหน้าต่างที่สูง 30 ฟุต ต่อมาฉมพัดทำให้บันไดไถลออกห่างจากกำแพงที่ถนนมา 3 ฟุต อยากทราบว่าปลายบันไดจะอยู่ห่างจากหน้าต่างเท่าไร (4.49)
9. ที่นาแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส วัดเส้นทแยงมุมได้ยาว 1760 หลา จงหาพื้นที่ (1548300)
10. สนามหญ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่ง มีส่วนยาวเป็น 2 เท่าของส่วนกว้าง และวัดโดยรอบได้ 80 เมตร จงหาพื้นที่ของสนามนั้น ★ ($355\frac{5}{9}$)
11. ที่นารูปสี่เหลี่ยมคางหมู ด้านคู่ขนานยาว 10 เส้น 10 วา และ 15 เส้น 10 วา ถ้าที่นามีพื้นที่ 104 ไร่ อยากทราบว่าด้านคู่ขนานห่างกันเท่าไร ★ (8 เส้น)
12. จงหาพื้นที่ของวงแหวนของวงกลมสองวง ซึ่งมีรัศมียาว 5.7 และ 4.3 เซนติเมตร (44)
13. ลวดเส้นหนึ่งขดเป็นวงกลมจะได้รัศมียาว 165 เซนติเมตร ถ้าจะดัดลวดเส้นนี้ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ด้านหนึ่งจะยาวเท่าไร ★ (165)
14. ฉันขี่จักรยานตามทางผ่ากลางวงเวียนกลมแห่งหนึ่ง ด้วยความเร็วสม่ำเสมอวินาทีละ 5 เมตร ฉันเวลา $2\frac{1}{3}$ นาทีกับสุดทางพอดี อยากทราบว่าวงเวียนนั้นมีเนื้อที่กี่ตารางเมตร ★ (385000)
15. ชายคนหนึ่งวิ่งผ่านสนามหญ้าวงกลมแห่งหนึ่ง ไปตามเส้นผ่าศูนย์กลางในอัตราความเร็ววินาทีละ 7 เมตร กินเวลา $\frac{1}{2}$ นาทีก็สุดทาง อยากทราบว่าสนามหญ้าวงกลมแห่งนั้นมีเนื้อที่กี่ตารางเมตร ★ (34650)
16. ลวดเส้นหนึ่งขดเป็นรูปวงกลมได้รัศมียาว 56 เซนติเมตร ถ้าเอาลวดเส้นนี้มาทำเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ให้มีด้านกว้างยาว 22 เซนติเมตร จะได้ด้านยาวเท่าไร ★ (154)
17. ลวดเส้นหนึ่งถ้าขดเป็นวงกลมจะได้รัศมียาว 42 นิ้ว ถ้านำมาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสจะได้ด้านละเท่าไร (66)

18. รถคันหนึ่งเส้นผ่าศูนย์กลางของล้อยาว 28 นิ้ว จงหาว่าเมื่อรถแล่นไปจนล้อหมุนได้ 720 รอบนั้น เป็นระยะทางเท่าไร (1 ไมล์)

19. ก. กับ ข. วิ่งแข่งกันบนเส้นรอบวงของสนามวงกลมซึ่งมีรัศมี 105 หลา เขาตกลงกันจะวิ่งทาง 3 ไมล์ ปรากฏว่า ก. ชนะ จงหาว่า ก. วิ่งกี่รอบ (8)

20. รถจักรยานคันหนึ่งเดินทาง 1 ไมล์ ล้อหมุนได้ 560 รอบ จงหารัศมีของล้อ (1 ฟุต 6 นิ้ว)

21. สามเหลี่ยม ก. ข. ค. มีเนื้อที่ 22 ตารางนิ้ว มี ก. เป็นมุมยอด ข.ค. เป็นฐาน ด้าน ก. ข. ยาว 5 นิ้ว และกำหนดให้เส้นตั้งฉากซึ่งลากจากมุมยอดมายังฐาน ตัดฐานห่างจาก ข. 3 นิ้ว ฐานของสามเหลี่ยมนี้ยาวเท่าไร (ข้อสอบชุด ป. 2491— 11 นิ้ว)

22. ที่ดินแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยม ก. ข. ค. ง. มีด้าน ก. ข. ยาว 53 วา ข. ค. ยาว 75 วา ค. ง. ยาว 65 วา และ ง. ก. ยาว 87 วา ถ้าเส้นทะแยงมุม ก. ค. ยาว 88 วา และเจ้าของจะขายตารางวาละ 8 บาท จะเป็นราคาที่ดินทั้งสิ้นเท่าไร (ข้อสอบชุด ป. 2492 — 36960)

23. ที่ดินแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส มีสนามเด็กเล่นอยู่กึ่งกลาง ซึ่งด้านของสนามเด็กขนานกับด้านของที่ดินนั้น และยาวด้านละ 44 ฟุต ปรากฏว่าพื้นที่เหลือเป็น $\frac{9}{16}$ ของพื้นที่สนามเด็ก จงหาว่าพื้นที่โดยรอบนั้นกว้างเท่าไร ($5\frac{1}{2}$ ฟุต)

24. ลานโรงเรียนแห่งหนึ่งยาว 13 หลา 2 ฟุต 1 นิ้ว กว้าง 4 หลา 2 ฟุต 2 นิ้ว โรงเรียนอยากจะปูลานนี้ด้วยหินรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ถ้าจะใช้หินที่ปูให้มีขนาดใหญ่ที่สุดที่จะหาได้ แต่คงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และเมื่อปูแล้วจะต้องให้เต็มพอดีโดยไม่ต้องตัดหิน จะต้องใช้หินกี่แผ่นจึงจะปูลานนั้นได้พอดี (ข้อสอบเข้าเตรียมจุฬา ๆ — 290)

25. ถนนตรงสายหนึ่ง มีตึกแถวริมถนนทั้งสองข้าง ๆ ละ 50 ห้อง ขนาดห้องเท่ากันหมด ห้องหมายเลขคู่อยู่ข้างหนึ่ง และห้องหมายเลขคี่อยู่อีกข้างหนึ่ง ประตูห้องหมายเลข 1 อยู่ตรงข้ามพอดีกับประตูห้องหมายเลข 2 และอยู่ห่างกัน 40 ฟุต ประตูห้องหมายเลข 1 อยู่ห่างจากประตูห้องหมายเลข 3 ซึ่งอยู่ถัดไปเป็นระยะ 30 ฟุต ห้องอื่น ๆ ก็เป็นไปในทำนองเดียวกันหมดตามลำดับ บุรุษไปรษณีย์มีจดหมายส่งหมดทุกห้อง และตั้งต้นส่ง

ตามลำดับหมายเลขห้องคือ 1, 2, 3, ---100 ส่งเสร็จแล้วเดินตรงกลับมาที่ห้องหมายเลข 2 อยากทราบว่าเขาจะวิ่งระยะทางเดินส่งจดหมายได้เท่าไร ถ้าเขาจะเริ่มส่งทางด้านแถวหมายเลขคี่ก่อน โดยตั้งต้นที่ห้องหมายเลข 1 ไปจนตลอดแถว แล้วข้ามถนนส่งห้องหมายเลขคู่ไปหมดที่ห้องหมายเลข 2 ★★ (ข้อสอบเตรียมทั้งสองแผนก พ.ศ. 2494 — 2940)

26. ก. จงเขียนสูตรหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวของด้านทั้งสามให้

ข. ที่ดินสี่เหลี่ยมแปลงหนึ่ง มีมุมเป็นมุมฉากอยู่มุมเดียว ด้านทั้งสองที่ประกอบมุมฉากยาว 36 วา และ 15 วา ส่วนอีกสองด้านยาวเท่ากันด้านละ $32\frac{1}{2}$ วา จงหาพื้นที่ของที่ดินสี่เหลี่ยมแปลงนี้ ★★ (ข้อสอบเตรียมอุดมทั้งสองแผนก พ.ศ. 2497 ข้อ ข. คอบ 777 ตารางวา)

27. กระดานเป้ารูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ยาวด้านละ 50 เซนติเมตร จากจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมด้วยรัศมีจดขอบกระดานทั้งสี่ด้าน และจากจุดเดียวกันเขียนวงกลมในอีกวงหนึ่งด้วยรัศมี $\frac{1}{2}$ ของรัศมีวงนอก พื้นวงในทาสีแดง พื้นวงนอกทาสีขาว พื้นมุมกระดานทาสีดำ ถามว่าเนื้อที่พื้นแดง พื้นขาว และพื้นดำอย่างละเท่าไร ★★ (490.625, 1471.875, 537.50)

28. ผ้าเช็ดตัวผืนหนึ่งยาว 6 ฟุต วางพาดบนราวไม้กลมเส้นผ่าศูนย์กลาง 2.8 นิ้ว ชายผ้าข้างหนึ่งห้อยขนานและจดพื้นห้องพอดี ชายผ้าอีกข้างหนึ่งห้อยอยู่เหนือพื้นห้อง 1 ฟุต 6 นิ้ว อยากทราบว่าเส้นระดับศูนย์กลางของราวไม้นั้นสูงจากพื้นห้องเท่าไร ★★ (ข้อสอบเตรียมทั้งสองแผนก พ.ศ. 2493 — 42.8 นิ้ว)

29. โลหะแผ่นหนึ่งมีรูปเป็นวงกลมหนาสม่ำเสมอตลอดกัน มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 2 ฟุต ถ้าเจาะรูทะลุแผ่นโลหะ 20 รู โตเท่ากันหมด จะทำให้น้ำหนักลดลงร้อยละ $1\frac{1}{4}$ อยากทราบว่าเส้นผ่าศูนย์กลางของรูยาวเท่าไร ★★ (ข้อสอบเตรียมทั้งสองแผนก พ.ศ. 2495 — $\frac{1}{20}$ ฟุต)

30. เมื่อฉันเอาลวดเส้นหนึ่งมางอเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแล้ว ก็ยังเหลือลวดพอที่จะทำวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้นได้พอดี ถ้าด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว 14 นิ้ว ถามว่าลวดเส้นนี้ยาวเท่าใด (ข้อสอบชุด ป.ป. — 92.805 นิ้ว)

31. จงหาพื้นที่ของวงกลมซึ่งล้อมรอบสามเหลี่ยมด้านเท่า ยาวด้านละ 4 นิ้ว ($12\frac{4}{7}$)

32. ให้รูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีด้านยาว 10 นิ้ว จงหาพื้นที่ของรูปวงแหวนที่เกิดขึ้นจากวงกลมบรรจุ [และวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสนั้น พื้นที่ของรูปวงแหวนนั้นเป็นร้อยละเท่าไรของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสนั้น (ข้อสอบเข้าเตรียมนายร้อย 2498 — $78\frac{4}{7}$, $78\frac{4}{7}$%)

---

เครื่องหมาย ★ ★ คือข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การคำนวณพื้นที่และบริมาตรของรูปตัน

## MENSURATION OF SURFACES AND VOLUMES OF SOLIDS

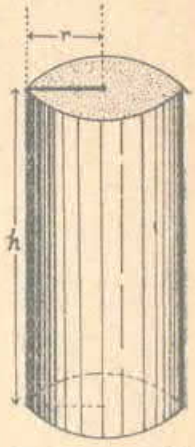
# 25

## รูปทรงกระบอก (RIGHT CYLINDER)

รูปทรงกระบอก คือรูปแท่งกลมสม่ำเสมอ มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม

ให้ส่วนสูงของทรงกระบอกเป็น h

รัศมีของฐานเป็น r




สูตร พื้นที่ผิวข้าง $= 2\pi r h$

บริมาตร $= \pi r^2 h$

[พื้นที่ผิวรอบทั้งหมด $= 2\pi r (r+h)$]

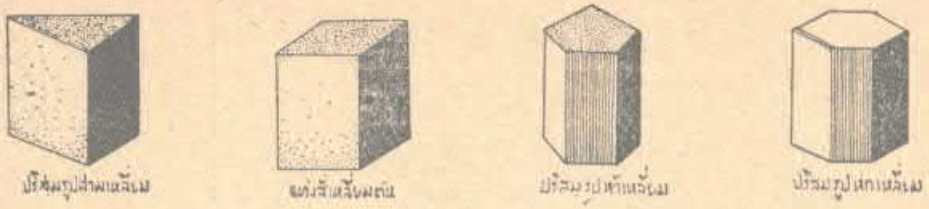
## รูปปริสม (RIGHT PRISM)

รูปปริสม คือ รูปตัน ซึ่งหน้าตัดทั้งสองข้างมีรูปลักษณะอย่างเดียวกัน และมีพื้นที่เท่ากัน หน้าตัดด้านหนึ่งนิยมเรียกกันว่า ฐาน ฐานของปริสม จะมีรูปเป็นรูปเหลี่ยมก็เหลี่ยมก็ได้ ถ้าฐานของปริสมเป็นรูปวงกลม ปริสมนั้นก็จะกลายเป็นรูปทรงกระบอก

ดังนั้น ในการคำนวณหาบริมาตรของทรงกระบอกก็ดี ปริสมก็ดี จึงมีหลักอย่างเดียวกัน คือ

บริมาตร = พื้นที่ฐาน × สูง

ด้วยเหตุนี้ ในการคำนวณเราจึงจำเป็นต้องหาพื้นที่ฐานและส่วนสูงให้ได้ ส่วนผิวข้างของรูปปริซึมนั้นต้องมีด้านเท่ากับจำนวนด้านของรูปที่เป็นฐานและมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเสมอ



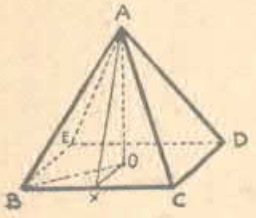

เมื่อพิจารณารูปของแท่งปริซึมเหล่านี้แล้ว จะเห็นได้ว่าถ้าเราทราบความยาวของด้านของฐานแต่ละด้านแล้ว เราก็อาจหาพื้นที่ผิวข้างของปริซึมได้

สูตร พื้นที่ผิวด้านข้างของปริซึม = เส้นรอบฐาน × สูง

บริมาตรปริซึม = พื้นที่ฐาน × สูง

(พื้นที่ผิวรอบแท่งปริซึมทุกด้าน = 2 × พื้นที่ฐาน + เส้นรอบฐาน × สูง)

## รูปกรวยเหลี่ยม (PYRAMID)



พีระมิด 4 เหลี่ยม

ตามรูป AO คือส่วนสูงของกรวยเหลี่ยม (มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก) AB หรือ AC หรือ AE หรือ AD เรียกว่า สัน

AX คือเส้นที่ลากไปแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC เรียก AX ว่าเป็นส่วนสูงเอียง

ถ้าพิจารณาให้ดีจะเห็นว่า

AOX เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

AOB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ABX เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

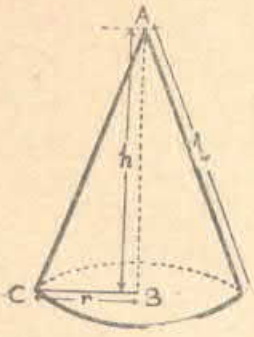
และ BX = XC

เมื่อเห็นดังนี้แล้ว การคำนวณต่าง ๆ ก็ทำได้โดยง่าย โดยอาศัย ท.บ. 29 เป็นหลัก

สูตร บริมาตร $= \frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน $\times$ สูง

พื้นที่ผิวด้านข้างหาได้โดยหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านข้างเหล่านั้นแล้วนำมารวมกัน

## รูปกรวยกลม (CONE)




เส้นที่ลากจากจุดยอดมายังเส้นขอบฐานเรียกว่า สูงเอียง เส้นสูงเอียงทุกเส้นจะมีความยาวเท่ากันหมด แทนด้วย l

เส้นที่ลากจากจุดยอดมาตั้งฉากกับฐาน คือส่วนสูง แทนด้วย h

รัศมีของฐานแทนด้วย r

ตามรูปจะเห็นได้ว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุมฉากที่ C ดังนั้น $AB^2 = BC^2 + AC^2$

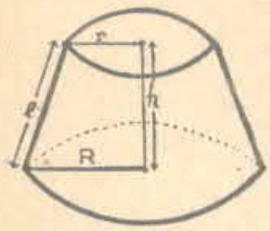
หรือ $l^2 = r^2 + h^2$

สูตร พื้นที่ผิวด้านข้าง $= \pi rl$

บริมาตร $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

## รูปกรวยตัด (FRUSTUM)

คือรูปกรวยกลมที่ตัดปลายออก เช่นรูปโคมตะเกียงเป็นต้น




ให้ R เป็นรัศมีของขอบใหญ่

r เป็นรัศมีของขอบเล็ก

l เป็นสูงเอียง

h เป็นสูงฉาก (ดูรูป)

สูตร พื้นที่ผิวด้านข้างของกรวยตัด $= \pi (R+r) l$

บริมาตรกรวยตัด $= \frac{\pi h}{3(R-r)} (R^3 - r^3)$

หรือ $= \pi \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$

## รูปทรงกลม (SPHERE)

รูปทรงกลมคือรูปตัน ซึ่งมีผิวโค้งและมีจุด ๆ หนึ่งภายใน มีระยะห่างจากผิวเท่า ๆ กัน จุด ๆ นั้นเรียกว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม เส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางมายังผิว เรียกว่า รัศมี

สูตร พื้นที่ผิวรอบรูปทรงกลม $= 4\pi r^2$

บริมาตรทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$

**ตัวอย่าง 1** ถังรูปทรงกระบอกใบหนึ่ง มีรัศมีของใบยาว 8 นิ้ว บรรจุน้ำอยู่ เมื่อเอาแท่งเหล็กรูปทรงกระบอกตัน ซึ่งสูงกว่าถังจุ่มลงไปจนหน้าตัดของมันจดก้นถังสนิท ทำให้ระดับน้ำสูงขึ้นจาก 24 นิ้วเป็น 25 นิ้ว จงหารัศมีของแท่งเหล็ก

**วิธีทำ** ระดับน้ำสูงขึ้นจาก 24 นิ้วเป็น 25 นิ้ว คือสูงขึ้น 1 นิ้ว

$\therefore$ บริมาตรของแท่งเหล็กที่จุ่มอยู่ในน้ำ $= \pi \times 8 \times 8 \times 1$ ลบ. นิ้ว

แต่บริมาตรเหล็กทรงกระบอก $= \pi r^2 h$

ในที่นี้ $h = 25$ นิ้ว (คิดสูงเท่าระดับน้ำ)

$\therefore \quad \pi r^2 \times 25 = \pi \times 8 \times 8 \times 1$

$r^2 = \frac{8 \times 8}{25}$

$\therefore \quad r = \frac{8}{5}$

$\therefore$ รัศมี $= \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ นิ้ว

**ตัวอย่าง 2** กรวยเหล็กอันหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ยาวด้านละ 6 นิ้ว กรวยเหล็กนี้สูง 2 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวข้างของกรวยและบริมาตรทั้งแท่ง

**วิธีทำ** กรวยสูง 2 นิ้ว

ครึ่งหนึ่งของฐาน $= \frac{6}{2} = 3$ นิ้ว

$\therefore$ สูงเอียง $= \sqrt{3^2 + 2^2}$

$= 5$

$\therefore$ พื้นที่ 1 ด้าน $= \frac{1}{2} \times 6 \times 5$

$= 15$

$\therefore$ พื้นที่รอบกรวย $= 15 \times 4 = 60$ ตารางนิ้ว

ปริมาตร $= \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 2$

$= 24$ ลูกบาศก์นิ้ว

**ตัวอย่าง 8** กรวยกลมรูปหนึ่งมีปริมาตร $37\frac{5}{7}$ ลบ. เซนติเมตร สูง 4 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ด้านข้าง

**วิธีทำ** ปริมาตร $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

ในที่นี้ h $= 4$ ซม.

$\therefore \frac{1}{3} \pi r^2 \times 4 = 37\frac{5}{7}$

$\frac{4}{3} \pi r^2 = \frac{264}{7}$

$r^2 = \frac{264}{7} \times \frac{7}{22} \times \frac{3}{4}$

$= 9$

$\therefore r = 3$

$\therefore$ สูงเอียง $= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= 5$

**สูตร** พื้นที่ผิวข้าง $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 3 \times 5$

$= \frac{330}{7} = 47\frac{1}{7}$

$\therefore$ พื้นที่ผิวข้าง $= 47\frac{1}{7}$ ตารางเซนติเมตร

**ตัวอย่าง 4** โคมตะเกียงรูปกรวยกลมตัด มีเส้นผ่าศูนย์กลางของขอบทั้งสองยาว 6 และ 8 นิ้ว วัดตามแนวของโคมตะเกียง เส้นขอบอยู่ห่างกัน 5 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวด้านข้าง

**วิธีทำ** สูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวยตัด $= \pi (R+r)l$

$= \frac{22}{7}(\frac{8}{2}+\frac{6}{2})5$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 5$

$= 110$

$\therefore$ พื้นที่ผิวด้านข้าง $= 110$ ตารางนิ้ว

**ตัวอย่าง 5** เหล็กรูปทรงกลม 27 ลูก มีรัศมีลูกละ 2 เซนติเมตร นำไปหลอมเป็นลูกเดียวจะมีรัศมีเท่าไร

**วิธีทำ** ปริมาตรทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ปริมาตรลูกเหล็ก 27 ลูก $= 27 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2 \times 2 \times 2$ ลบ. ซม.

$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 27 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2 \times 2 \times 2$

$r^3 = 27 \times 2 \times 2 \times 2$

$\therefore \quad r = 6$

$\therefore$ รัศมีของลูกกลมที่หลอมใหม่ยาว 6 เซนติเมตร

**หมายเหตุ** การทำแบบฝึกหัดเรื่องพื้นที่และปริมาตรนั้น นักเรียนควรเขียนรูปประกอบด้วย จะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น และในการทำไม่ควรทำให้ยืดยาวเกินไป ตัวอย่างที่ผ่านมานั้น นักเรียนควรพิจารณาให้ดีก่อนทำแบบฝึกหัด

---

## แบบฝึกหัด 26

1. จะต้องใช้ผ้าใบกี่ตารางฟุต เพื่อทำกระโจมรูปกรวย ซึ่งมีส่วนสูงเอียง 10 ฟุตและเส้นผ่าศูนย์กลางของปากกระโจมยาว 14 ฟุต ให้ $\pi = \frac{22}{7}$ ★ (220)
2. ถังน้ำใบหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีฝาปิด หนา $\frac{5}{8}$ นิ้ว วัดรอบนอกได้ส่วนยาว 3 ฟุต 6 นิ้ว กว้าง 2 ฟุต 9 นิ้ว สูง 2 ฟุต 3 นิ้ว อยากทราบว่าถังใบนี้จุน้ำได้กี่แกลลอน ถ้าน้ำหนึ่งลูกบาศก์ฟุตหนัก 1000 เอานซ์ และ 160 เอานซ์ หนักเท่ากับหนึ่งแกลลอน ★ (120.49)

3. พื้นที่ผิวโค้งของรูปทรงกระบอกรูปหนึ่งเท่ากับ 2640 ตารางนิ้ว และปริมาตรเป็น 26400 ลูกบาศก์นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวโค้งของรูปกรวยกลม ซึ่งมีฐานและส่วนสูงเท่ากับฐานและส่วนสูงของรูปทรงกระบอกนั้น ★ ($1822\frac{6}{7}$)

4. ถังน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใบหนึ่ง มีส่วนกว้างเป็นสองเท่าของส่วนสูง และส่วนยาวเป็นห้าเท่าของส่วนสูง จุน้ำได้ $6\frac{1}{8}$ ตัน จงหาส่วนกว้าง ยาว และสูง เป็นฟุตของถังใบนี้ ถ้าน้ำ 1 ลบ. ฟุตหนัก $62\frac{1}{2}$ ปอนด์ (1 ตันเท่ากับ 2240 ปอนด์) ★ ($5\frac{3}{5}$, 14, $2\frac{4}{5}$)

5. เอาลูกบีนเหล็กทรงกลมลูกหนึ่งรัศมียาว 3 นิ้ว หย่อนลงไปในถังน้ำรูปทรงกระบอก ซึ่งมีน้ำขังอยู่ลึก 6 นิ้ว เมื่อลูกบีนจมลงไปถึงก้นถังแล้ว ปรากฏว่าน้ำในถังนั้นขึ้นมาถึงปากถังพอดี ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางภายในของถังเท่ากับ 1 ฟุต อยากทราบว่าถังใบนี้จุน้ำเท่าไร (ใช้ $\pi = \frac{22}{7}$) (ข้อสอบชุด ป. 2490 — 792 ลบ. นิ้ว)

6. จงหาพื้นที่บนผิวเอนของรูปกรวยเหลี่ยมตรง (Right pyramid) ซึ่งสูง 6 ฟุต และตั้งอยู่บนฐานรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 16 ฟุต (ข้อสอบชุด ป. 2490 — 320 ตร. นิ้ว)

7. โรงเรียนแห่งหนึ่งทำลูกโลกลูกใหญ่รัศมี 7 ฟุตไว้กลางโรงเรียน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนภูมิศาสตร์ดีขึ้น และครูใหญ่คิดทาสีส่วนที่เป็นทะเลและมหาสมุทรด้วยสีน้ำเงิน ส่วนที่เป็นทวีปด้วยสีเหลือง ส่วนที่เป็นแถบขั้วโลกเหนือและใต้ด้วยสีขาว ถ้ากำหนดให้ส่วนที่เป็นแถบขั้วโลกมีเนื้อที่ขั้วละ 8 ตารางฟุต ส่วนที่เหลือจากนี้เป็นดินและน้ำ มีเนื้อที่อัตราส่วน 1 : 3 ตามลำดับ ให้หาราคาค่าทาสีสีขาวคิดตารางฟุตละ 50 สตางค์ สีน้ำเงินตารางฟุตละ 70 สตางค์ สีเหลืองตารางฟุตละ 80 สตางค์ (กำหนดให้ใช้ $\pi = \frac{22}{7}$) (ข้อสอบชุด ป. 2491 — 443 บาท)

8. รูปกรวยตันอันหนึ่งมีรัศมียาว 28 เซนติเมตร สูงตามแนวเอียง 20 เซนติเมตร ถ้าจะทาสีจากฐานขึ้นมาโดยรอบสูงตามแนวเอียง 10 เซนติเมตร ส่วนที่ทาสีนั้นมีพื้นที่เท่าไร (กำหนด $\pi = \frac{22}{7}$) (ข้อสอบชุด ป. 2492 — 1320 ตารางเซนติเมตร)

9. เอาลูกตะกั่วกลมลูกหนึ่ง ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว 3 นิ้ว มาหลอมเป็นลูกกลม 3 ลูก ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางของลูกกลมสองลูกยาวนิ้วครึ่งและสองนิ้ว อีกลูกหนึ่งจะมีเส้นผ่าศูนย์กลางยาวเท่าไร ★ ★ (สองนิ้วครึ่ง)

10. ลูกกลมตะกั่วกลวงมีรัศมีขอบในยาว 3 นิ้ว และขอบนอกยาว 6 นิ้ว ถ้าจะตะลายลูกกลมนี้หลอมเป็นรูปทรงกระบอกสูง 5 นิ้ว รัศมีของรูปทรงกระบอกนี้จะเป็นเท่าใด ★ ★ (7.1)

11. ค่าบุตะกั่วสำหรับถังรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ถังหนึ่งซึ่งไม่มีฝาปิด เป็นเงิน 112.50 บาท ค่าจ้างบุนี้คิด 1 ตารางฟุตต่อ 2.50 บาท จงหาความจุของถัง ★ ★ (27 ลบ. ฟุต)

12. โคมตะเกียงรูปกรวยตัด เส้นผ่าศูนย์กลางขอบล่างยาว 8 นิ้ว ขอบบนยาว 6 นิ้ว สูงเอนยาว 4 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวข้าง (88)

13. ถังรูปทรงกระบอกสูง 3 ฟุต และรัศมียาวครึ่งฟุต มีน้ำอยู่ในถังวัดส่วนสูงของระดับได้ $1\frac{3}{4}$ ฟุต ถ้าเอาโลหะแท่งหนึ่งรูปทรงกระบอก มีส่วนสูงสูงกว่าถังใบนั้นหย่อนลงไปในถัง รัศมีของโลหะแท่งนี้เท่าไร ถ้าระดับน้ำสูงขึ้นจนเต็มถังพอดี ★ ★ (0.32274 ฟุต)

14. ถ้าสมมติว่าหยดน้ำทุกหยดมีรูปทรงกลม เส้นผ่าศูนย์กลาง $\frac{1}{10}$ นิ้ว หยดน้ำ 500 หยด ลงในถ้วยแก้วรูปกรวย ซึ่งมีส่วนลึกเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางปากถ้วย จะมีระดับน้ำสูงเท่าไร (ข้อสอบเตรียมอุดมทั้งสองแผนก 2491 — 1 นิ้ว)

15. ถังน้ำมันถังหนึ่งรูปทรงกระบอก ปิดทั้งสองข้างเป็นรูปกรวยขนาดเท่ากันทั้งสองปิด ความยาวของถังวัดสุดปิด 20 ฟุต ความยาวเฉพาะทรงกระบอก 15 ฟุต ถ้าถังนี้จุน้ำมัน 308 ลูกบาศก์ฟุต จงหาความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลางของหน้าตัดทรงกระบอก (กำหนด $\pi = \frac{22}{7}$) (ข้อสอบเตรียมอุดมทั้งสองแผนก 2496 — 4.8496)

16. ก. สามเหลี่ยมลูกหนึ่งมีด้านยาว 9, 12 และ 15 นิ้วตามลำดับ จงหาพื้นที่วงกลมที่ล้อมรอบ ($113\frac{1}{7}$)

ข. จงหาผลต่างของพื้นที่วงกลมที่บรรจุและล้อมรอบหกเหลี่ยมด้านเท่า ยาวด้านละ 2 เซนติเมตร ($3\frac{1}{7}$)

17. แท่งเหล็กรูปทรงกระบอกกลวงหนา 1 นิ้ว สูง 10 นิ้ว มีปริมาตร 220 นิ้ว จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของขอบนอกและใน (4, 3)

18. จงหาด้านฐานแต่ละด้านของพิรามิด 2 แท่ง ซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส สูง 5 นิ้ว เท่ากัน แต่ปริมาตรของแท่งหนึ่งเป็นสองเท่าของอีกแท่งหนึ่ง ซึ่งถ้าเอาพิรามิดทั้งสองนั้นไปหลอมทำพิรามิดใหม่ให้สูงเท่าเดิม จะมีพื้นที่ฐาน 25 ตารางนิ้ว (3, 4)

19. โลหะรูปทรงกลม 3 ลูก มีรัศมีลูกละ 7 เซนติเมตร เมื่อทิ้งลงในถังรูปทรงกระบอกซึ่งมีน้ำบรรจุอยู่พอสมควร ทำให้ระดับน้ำสูงขึ้น 7 เซนติเมตร จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางขอบในของถังใบนี้ (28 ซม.)

20. แท่งเหล็กรูปทรงกระบอกมีรูปครึ่งทรงกลมปิดสนิทที่หัวและท้าย วัดความยาวตลอดได้ 114 เซนติเมตร ความยาวเฉพาะทรงกระบอก 1 เมตร ถ้าจะพ่นสีรอบแท่งเหล็กนี้ โดยเสียค่าจ้างพ่นสี 12 ตารางเซนติเมตรต่อ 1 บาท และเสียค่าขัดเงาอีก 3 ตารางเซนติเมตรต่อ 1 บาท จะต้องเสียเงินค่าพ่นสีและขัดเงารวมเท่าไร (2090)

---

เครื่องหมาย ★★ ข้อสอบ ม. 8

★ ข้อสอบ ม. 6 ของกระทรวงศึกษาธิการ

# การคำนวณเพิ่มเติม
# APPENDIX

## 26

**ตัวอย่าง 1** จงหาเลขจำนวนค่ามากที่สุด ซึ่งเมื่อนำไปหาร 1306 และ 1935 แล้วจะเหลือเศษ 11 เท่ากัน

**วิธีทำ** หักเอาเศษออกจาก 1306 และ 1935 แล้วเหลือ

$1306 - 11 = 1295$ และ $1935 - 11 = 1924$

$\therefore$ เลขจำนวนค่ามากที่สุดคือ ห.ร.ม. ของ 1295 และ 1924 ซึ่งหาได้เท่ากับ 37

ดังนั้นเลขจำนวนค่ามากที่สุด ซึ่งเมื่อนำไปหาร 1306 และ 1935 แล้วจะเหลือเศษ 11 เท่ากัน คือเลข 37

**ตัวอย่าง 2** จงหาเลขสองจำนวนซึ่งมี ห.ร.ม. เป็น 123 และ ค.ร.น. เป็น 8856

★★

**วิธีทำ** กฎ เลขจำนวนที่หนึ่ง × เลขจำนวนที่สอง = ห.ร.ม. × ค.ร.น.

$= 123 \times 8856$

$= 123 \times 123 \times 8 \times 9$

$= (123 \times 8)(123 \times 9)$

$= 984 \times 1107$

$\therefore$ เลขสองจำนวนนั้นคือ 984 และ 1107

**อธิบาย** พยายามแยกผลคูณของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ออกเป็นเลข 4 จำนวน สองจำนวนแรกให้เท่ากับ ห.ร.ม. สองจำนวนหลังจะต้องไม่ให้มีตัวร่วมกันเลย เอาจำนวนแรกคูณกับจำนวนหลังตัวใดตัวหนึ่ง ก็ได้เลขจำนวนที่ต้องการ

**หรือจะทำอีกอย่างหนึ่งก็ได้ คือ**

เอา ค.ร.น. ตั้ง เอา ห.ร.ม. หาร เอาผลที่ได้แยกออกเป็นสองจำนวน ซึ่งไม่มีตัวร่วมกันเลย เอา ห.ร.ม. คูณตัวที่แยกออกนั้นก็จะได้คำตอบ

$$\frac{8856}{123} = 72$$

$$72 = 8 \times 9$$

$\therefore$ เลขจำนวนแรก $= 8 \times 123 = 984$; จำนวนที่สอง $= 9 \times 123 = 1107$

**ตัวอย่าง 3** จงหาเลขจำนวนหนึ่งซึ่งมีค่ามากที่สุด เมื่อนำไปหาร 401, 689 และ 1073 แล้วจะเหลือเศษเท่ากันทุกจำนวน และเศษนั้นเท่าไร

**วิธีทำ** เศษทุกจำนวนนั้นเท่ากัน ดังนั้นทำให้เศษหมดไปเสียก่อน

โดยเอาเลขทั้งสามจำนวนผลัดกันลบ ผลที่เหลือสามจำนวนนั้นคือผลต่างของเลขจำนวนต่าง ๆ ซึ่งตัวที่หารจะต้องหารได้ทุกจำนวนเหมือนกัน ดังนั้น จำนวนที่ต้องการก็คือ ห.ร.ม. ของจำนวนเหล่านั้น

$$1073 - 689 = 384$$

$$1073 - 401 = 672$$

$$689 - 401 = 288$$

ห.ร.ม. ของ 384, 672, 288 คือ 96

$\therefore$ เลขจำนวนซึ่งมีค่ามากที่สุด เมื่อนำไปหาร 401, 689 และ 1073 แล้วเหลือเศษเท่ากัน คือ 96

และเศษนั้น คือ $\frac{401}{96}$ = เศษ 17

**ตัวอย่าง 4** (ข้อสอบโรงเรียนเตรียมนายร้อย)

เบ้ยกองหนึ่ง ถ้าแบ่งเป็นกอง ๆ กองละ 55 ตัว จะลงตัวพอดี ถ้าแบ่งเป็นกอง ๆ ละ 18 ตัวหรือ 27 ตัว หรือ 30 ตัว จะเหลือเศษ 10 ตัวทุกครั้ง เบ้ยกองนั้นอย่างน้อยที่สุดต้องมีกี่ตัว

**วิธีทำ** ค.ร.น. ของ 18, 27, 30 คือ 270

ฉะนั้นเบ็ดจำนวนนั้นจะต้องเป็นจำนวนที่ 270 หารได้เหลือเศษ 10 แต่ถ้าแบ่งกองละ 55 ก็จะลงตัวพอดี คือหารด้วย 55 ได้ลงตัว ดังจะต้องหาเลขซึ่งน้อยที่สุดมาคูณ 270 แล้วบวกด้วย 10 แล้วเอา 55 หารได้ลงตัวพอดี จากการทดลองจะได้ดังนี้

$$\frac{(270 \times 2) + 10}{55} = \frac{550}{55} \text{ ลงตัวพอดี}$$

∴ เบ็ดกองนั้นอย่างน้อยที่สุดจะต้องมี 550 ตัว

**ตัวอย่าง 5** (ข้อสอบชุด ป.ม. 2494)

ในการสอบไล่วิชาเลขคณิต ครูให้คูณ 34625 ด้วย 1921 นักเรียนคนหนึ่งลอกเลขตัวคูณผิดไปหนึ่งตัว จึงได้ผลลัพธ์เป็น 56127125 อยากทราบว่านักเรียนผู้นั้นลอกเลขตัวไหนผิด

**วิธีทำ** 1. ทำแบบคูณ

| | |
|---|---|
| 34625 | เด็กลอกเลขตัวคูณผิดไปหนึ่งตัว เราจึงลองเอาตัวคูณ คือ 1921 ลองคูณตัวตั้งดู จากผลลัพธ์ที่เราคูณได้หลักหน่วยคือ 5 ถูกต้องกับที่เด็กคูณได้ หลักสิบคือ 2 ก็ยังคงถูกต้องกับที่เด็กคูณได้ ต่อมาดูที่หลักร้อยคือ 6 ปรากฏว่าผิดกับที่เด็กคูณได้ แสดงว่าตัวคูณนั้นเด็กลอกผิดตัวที่เป็นหลักร้อย คือลอกเลข 9 ผิดไป เราทราบว่าผลคูณที่ถูกต้อง 3 ตัวสุดท้ายต้องเป็น 625 แต่เด็กคนนี้คูณได้ 125 |
| 1921 | |
| 34625 --- (1) | |
| 69250 ---- (2) | |
| 312625 ----- (3) | |
| 34625 ------ (4) | |
| 66614625 | |

ดังนั้น บรรทัดที่สามซึ่งเด็กคูณได้จะต้องเป็นเลข 0 (เพราะบรรทัดที่ 1 คือ 6 บรรทัดที่สอง คือ 5 รวมกันได้ 11 ดังนั้นบรรทัดที่ 3 จึงต้องเป็น 0 มิฉะนั้นเด็กก็คงจะไม่ได้ผลลัพธ์ 1)

เลขซึ่งคูณ 5 ได้ลัพธ์ 0 ได้แก่เลข 0 และเลขคู่ทุกตัว ดังเอาเลขคู่มาคูณดู (เลขคู่ได้แก่ 2, 4, 6, 8) ก็จะปรากฏว่าเด็กคนนี้ตอกเลข 9 เป็นเลข 6

**ทำแบบหาร** ตัวตั้งคือ 34625

เด็กคูณกันได้ 56127125

$\therefore$ ตัวคูณของเด็กคือ $\frac{56127125}{34625} = 1621$

ดังนั้นแสดงว่าเด็กตอกเลข 1921 เป็น 1621 คือ ตอก 9 เป็น 6

**ตัวอย่าง 6** จงหาผลคูณของ 99999 และ 12345

**วิธีทำ** $99999 \times 12345 = (100000 - 1) \times 12345$

$= 1234500000 - 12345$

$= 1234487655$

**ตัวอย่าง 7** เด็ก 9 คน ผู้ใหญ่ 6 คนทำงานอย่างหนึ่งแล้วใน 10 วัน ถ้าให้เด็ก 6 คนผู้ใหญ่ 4 คนทำงานนั้นกันจึงจะแล้ว

**วิธีทำ** เด็ก 9 คน ผู้ใหญ่ 6 คน ทำแล้วใน 10 วัน

$\therefore$ เด็ก $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ คน ผู้ใหญ่ $\frac{2}{3} \times 6 = 4$ คน ทำแล้วใน $\frac{3}{2} \times 10 = 15$ วัน

**ตอบ** 15 วัน

**ตัวอย่าง 8** เลขจำนวนหนึ่ง เมื่อหารด้วย 600 จะเหลือเศษ 125 อยากทราบว่าถ้าเอา 30 และ 25 ไปหารเลขจำนวนนั้นจะเหลือเศษเท่าไร

**วิธีทำ** เมื่อเลขจำนวนนั้นหารได้ด้วย 600 เหลือเศษ 125

แต่ 30 หาร 600 ได้ลงตัว ดังนั้นเศษของมันจะเป็นเท่าไร

ก็ลองเอา 30 ไปหาร 125 ซึ่งเหลือเศษ 5

และ 25 ก็หาร 600 และ 125 ลงตัว ดังนั้นจึงไม่มีเศษ

**ตัวอย่าง 9** จงเติมตัวเลขหมู่เครื่องหมาย *



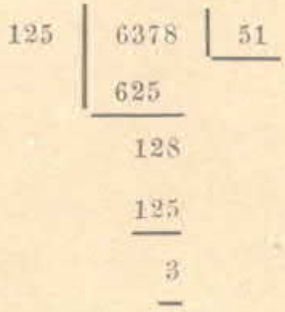
**วิธีทำ** เขียนอักษรแทนลงไปก่อนดังนี้



แล้วพิจารณาดังนี้

N คือเลขที่ชักลงมา ดังนั้น N คือ 8 เขียน 8 แทน N ลงไปได้ Q ลบ 8 เหลือ 3 Q จึงเท่ากับ 5 และ P ลบ 2 ได้ศูนย์ P จึงเท่ากับ 2 และ M = 1 ฉะนั้นบรรทัดรองสุดท้ายจึงเป็น 125

ต่อไปพิจารณาตัวตั้ง มี 3 หลัก เธอ 3 หลักนี้เมื่อคูณกับ G แล้วได้ 125 ดังนั้น G จะต้องเท่ากับ 1 แน่ ๆ เพราะถ้าเป็นเลขตัวอื่นแล้ว ผลจะไม่ได้ 125 เช่นถ้า G เท่ากับ 2 ก็คงจะได้เป็นสองร้อยกว่า ๆ ถ้า G เท่ากับ 3 ก็คงได้สามร้อยกว่า ๆ ที่จะเป็น 125 นั้นไม่มี ดังนั้นจึงแน่ว่า G = 1 เมื่อ G = 1 ตัวตั้ง ABC ก็ต้อง = 125 เอา 5 คูณ 125 ได้ 625 ดังนั้น HKL = 625 ดังนั้น F = 7, E = 3 และ D = H คือ = 6 จึงเป็นผลดังนี้



**ตัวอย่าง 10** จงเติมเลขให้ถูก

6 )_____

5 )_____ เศษ 3

79 เศษ 2

**วิธีคิด** เอา 5 × 79 ได้ 395 บวกกับเศษ 2 ได้ 397 ใส่บรรทัดกลาง แล้วเอา 6 × 397 ได้ 2382 บวกกับเศษ 3 ได้ 2385 ดังนี้

6 ) 2385

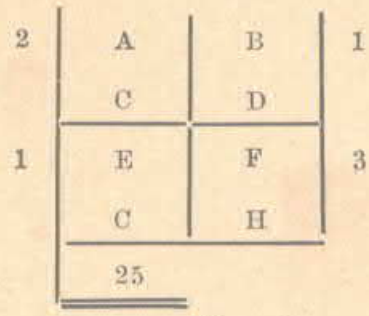
5 ) 397 เศษ 3

79 เศษ 2

**ตัวอย่าง 11** จงเติมตัวเลขแต่ละช่องหา ห.ร.ม. ให้ถูก




**วิธีคิด** เขียนอักษรแทนจำนวนเลขลงไปดังนี้




เอา 25 คูณ 3 ได้ 75 ดังนั้น H คือ 75 ดังนั้น F = 75 ด้วย

แต่ F หาร E ได้ 1 ดังนั้น G = 75 และ E − 75 = 25

ดังนั้น E = 100 และ E หาร B ได้ 1 ดังนั้น D = 100 ด้วย

แต่ B − D = F คือ B − 100 = 75 ดังนั้น B = 175

และ B หาร A ได้ 2 ดังนั้น C = 2 × 175 = 350

แต่ A − C = E คือ A − 350 = 100 ดังนั้น A = 450

เติมแล้วเป็นดังนี้

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 450 | 175 | 1 |
| | 350 | 100 | |
| 1 | 100 | 75 | 3 |
| | 75 | 75 | |
| | 25 | | |

TABLES

## มาตราอังกฤษ

### มาตราเงิน

| | | |
|---|---|---|
| 4 farthings | make | 1 penny (1 d.). |
| 12 pence | ..... | 1 shilling (1 s.). |
| 20 shillings | ..... | 1 pound (£ 1.). |

### มาตราน้ำหนัก

| | | |
|---|---|---|
| 16 drams | make | 1 ounce (1 oz.). |
| 16 ounces | ..... | 1 pound (1 lb.). |
| 28 pounds | ..... | 1 quarter (1 qr.). |
| 4 quarters or 112 pounds | ..... | 1 hundredweight (1 cwt.). |
| 20 hundredweights | ..... | 1 ton. |

### มาตราความยาว

| | | |
|---|---|---|
| 12 inches | make | 1 foot (1 ft.). |
| 3 feet | ..... | 1 yard (1 yd.). |
| 22 yards | ..... | 1 chain. |
| 10 chains | ..... | 1 furlong (1 fur.). |
| 8 furlongs or 1760 yards | ..... | 1 mile (1 mi.). |

---

| | | |
|---|---|---|
| 100 links | make | 1 chain (1 ch.). |
| $5\frac{1}{2}$ yards | ..... | 1 rod or pole. |
| 4 poles | ..... | 1 chain. |

## มาตราพนที

| | | |
|---|---|---|
| 144 sq. inches | make | 1 sq. foot (1 sq. ft.). |
| 9 sq. feet | ..... | 1 sq. yard (1 sq. yd.). |
| 484 sq. yarbs | ..... | 1 sq. chain. |
| 10 sq. chains | ..... | 1 acre. |
| 640 acres | ..... | 1 sq. mile (1 sq. mi.). |

---

| | | |
|---|---|---|
| 4840 sq. yards | make | 1 acre. |
| $30\frac{1}{4}$ sq. yards | ..... | 1 sq. pole or perch. |
| 40 perches | ..... | 1 rood. |
| 4 roods | ..... | 1 rere. |

## มาตราตวงของเหลว

| | | |
|---|---|---|
| 4 gills | make | 1 pint (1 pt.). |
| 2 pints | ..... | 1 quart (1 qt.). |
| 4 quarts | ..... | 1 gallon (1 gall.). |
| 36 gallons | ..... | 1 barrel. |

## มาตราตวงของแห้ง

| | | |
|---|---|---|
| 4 gills | make | 1 pint (1 pt.). |
| 2 pints | ..... | 1 quart (1 qt.). |
| 4 quarts | ..... | 1 gallon (1 gall) |
| 2 gallons | ..... | 1 peck (1 pk.). |
| 4 pecks | ..... | 1 bushel (1 bush.). |
| 8 bushels | ..... | 1 quarter (1 qr.). |
| 4 quarters | ..... | 1 ton (cargo measurement). |

## มาตราเมตริก

### มาตราน้ำหนัก

| | | |
|---|---|---|
| 10 milligrams (mg.) | = | 1 centigram (cg.) |
| 10 centigrams (cg.) | = | 1 decigram (dg.) |
| 10 decigrams (dg.) | = | 1 GRAM (g.) |
| 10 grams (g.) | = | 1 decagram (Dg.) |
| 10 decagrams (Dg.) | = | 1 hectogram (Hg.) |
| 10 hectograms (Hg.) | = | 1 kilogram (Kg.) |
| 100 kilogram, or $10^5$ grams | = | 1 quintal (q.) |
| 1000 kilograms | = | 1 tonne (t.) (เมตริกตัน) |

### มาตราความยาว

| | | |
|---|---|---|
| 10 millimetres (mm.) | = | 1 centimetre (cm.) |
| 10 centimetres | = | 1 decimetre (dm.) |
| 10 decimetres | = | 1 METRE (m.) |
| 10 metres | = | 1 decametre (Dm.) |
| 10 decametres | = | 1 hectometre (Hm.) |
| 10 hectometres | = | 1 kilometre (Km.) |

### มาตราพื้นที่

| | | |
|---|---|---|
| 100 sq. millimetres (sq. mm.) | = | 1 sq. centimetre (sq. cm). |
| 100 sq. centimetres | = | 1 sq. decimetre (sq. dm.) |
| 100 sq. decimetres | = | 1 sq. metre (sq. m.) = 1 centiare. |
| 100 sq. metres | = | 1 sq. decametre (sq. Dm.) = 1 are. |
| 100 sq. decametres | = | 1 sq. hectometre (sq. Hm.) = 1 hectare. |
| 100 sq. hectometres | = | 1 sq. kilometre (sq. Km.) |

## มาตราที่ดิน

100 centiares = 1 ARE

100 ares = 1 hectare.

100 hectares = 1 sq. kilometre.

## มาตราจำนวน

12 units make 1 dozen.

20 units ..... 1 score.

12 dozen ..... 1 gross.

12 gross ..... 1 great gross.

24 sheets of paper ..... 1 quire.

20 quires ..... 1 ream.

10 reams ..... 1 bale.

พิมพ์ที่โรงพิมพ์อักษรเจริญทัศน์ ๑๕๑—๑๕๕ ถนนบำรุงเมือง เสาชิงช้า พระนคร
นายรวล รุ่งเรืองธรรม ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา ๒๔๕๘







