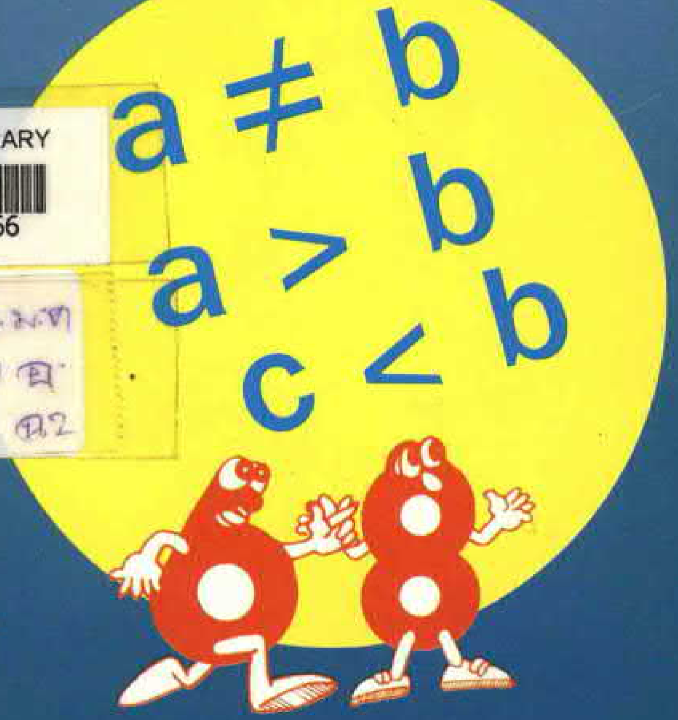
หนังสืออ่านเพิ่มเติมวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง

อสมการ

ระดับมัธยมศึกษา

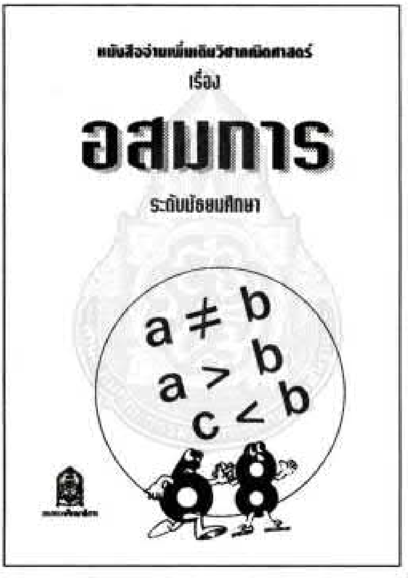


กระทรวงศึกษาธิการ

หนังสืออ่านเพิ่มเติมวิชาคณิตศาสตร์

อสมการ

ระดับมัธยมศึกษา



กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ

หนังสืออ่านเพิ่มเติมวิชาคณิตศาสตร์

อสมการ ระดับมัธยมศึกษา

พิมพ์แจกครั้งที่ 1 พ.ศ. 2540

จำนวนพิมพ์ 15,000 เล่ม

ISBN 974-268-2518

ประกาศกระทรวงศึกษาธิการ
เรื่อง อนุญาตให้ใช้หนังสือในโรงเรียน

ด้วยกรมวิชาการ ได้จัดทำหนังสืออ่านเพิ่มเติมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ระดับมัธยมศึกษา กระทรวงศึกษาธิการพิจารณาแล้ว อนุญาตให้ใช้หนังสือนี้ในโรงเรียนได้

ประกาศ ณ วันที่ 13 มิถุนายน พ.ศ. 2540

(นายพนม พงษ์ไพบูลย์)
รองปลัดกระทรวง รักษาราชการแทน
ปลัดกระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

หนังสืออ่านเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ระดับมัธยมศึกษา เล่มนี้จัดทำขึ้นสำหรับให้นักเรียนใช้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาอสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเรขาคณิต โดยได้สรุปสมบัติสำคัญ ๆ พร้อมนำเสนอตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาอสมการในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนมีมุมมองในการแก้ปัญหาได้กว้างขวางขึ้น อันจะช่วยเสริมการเรียนในห้องเรียนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น หนังสือเล่มนี้คณะกรรมการจัดทำหนังสืออ่านเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา ได้มอบหมายให้นายศักดา บุญโต เป็นผู้เรียบเรียง คณะกรรมการฯ เป็นผู้ตรวจขั้นต้น นายประสาท สอ้านวงศ์ และนางสาวจงดี วงศ์พรภักดี เป็นผู้ตรวจขั้นสุดท้าย

กรมวิชาการหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนเกิดความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น ขอขอบคุณผู้เรียบเรียง และคณะกรรมการทุกท่านผู้มีส่วนร่วมในการจัดทำไว้ ณ ที่นี้

(นายสงบ ลักษณะ)

อธิบดีกรมวิชาการ

10 มิถุนายน 2540

สารบัญ

บทที่ 1
อสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต

ความหมายของอสมการ

บทนิยาม 1 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
a มากกว่า b ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก c ที่ทำให้ $a = b + c$

a มากกว่า b เขียนแทนด้วย $a > b$

บทนิยาม 2 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
b น้อยกว่า a ก็ต่อเมื่อ a มากกว่า b

b น้อยกว่า a เขียนแทนด้วย $b < a$

บทนิยาม 3 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
a มากกว่าหรือเท่ากับ b ก็ต่อเมื่อ a มากกว่า b หรือ a เท่ากับ b

a มากกว่าหรือเท่ากับ b เขียนแทนด้วย $a \geq b$

บทนิยาม 4 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
b น้อยกว่าหรือเท่ากับ a ก็ต่อเมื่อ b น้อยกว่า a หรือ b เท่ากับ a

b น้อยกว่าหรือเท่ากับ a เขียนแทนด้วย $b \leq a$

จากบทนิยามข้างต้น สามารถนำไปพิสูจน์สมบัติเกี่ยวกับอสมการของจำนวนจริงได้ สำหรับสมบัติเกี่ยวกับอสมการที่สำคัญของจำนวนจริงนั้น สรุปไว้ดังนี้

สมบัติของอสมการ

กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
4. ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
5. ถ้า $a > b > 0$ และ $c > 0$ แล้ว $a^c > b^c > 0$
6. ถ้า $a > 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $a^x > a^y > 0$
7. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $0 < a^x < a^y$
8. ถ้า $a > 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $\log_a x > \log_a y$
9. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $\log_a x < \log_a y$
10. $a^{2n} \geq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
11. $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$
12. $a < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} < 0$
13. สำหรับจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a < b$

    $(x - a)(x - b) < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < x < b$
14. สำหรับจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a < b$

    $(x - a)(x - b) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x < a$ หรือ $x > b$

ตัวอย่างวิธีการแก้ปัญหาโจทย์อสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต

> **ข้อตกลง** กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง สำหรับจำนวนที่เขียนโดยไม่เจาะจง จำนวนเหล่านั้น คือ จำนวนจริง

1. จงพิสูจน์ว่า $a^{2n+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่าถ้า $a^{2n+1} > 0$ แล้ว $a > 0$

กำหนดให้ $a^{2n+1} > 0$

จะได้ $a^{2n} \cdot a > 0$

สมมติ $a \leq 0$ จะมีกรณีดังนี้คือ $a < 0$ หรือ $a = 0$

ถ้า $a < 0$ จะได้ $\frac{1}{a} < 0$

ดังนั้น $\frac{a^{2n} \cdot a}{a} < 0$

$a^{2n} < 0$ ขัดแย้งกับ $a^{2n} \geq 0$

$a < 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

ถ้า $a = 0$ จะได้ $a^{2n+1} = 0$ ขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $a^{2n+1} > 0$

$a = 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $a > 0$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^{2n+1} > 0$

กำหนดให้ $a > 0$

จะได้ $a^{2n} > 0$ ดังนั้น $a^{2n} \cdot a > 0$

จึงได้ $a^{2n+1} > 0$

จาก (1) และ (2) จึงสรุปได้ว่า

$a^{2n+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$

2. จงพิสูจน์ว่า $a^{2n+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ การพิสูจน์ทำได้ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ในข้อ 1

3. จงพิสูจน์ว่า $(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq a$ และ $x - b > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่าถ้า $(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} > 0$ แล้ว

$x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

กำหนดให้ $(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} > 0$

พิจารณา $x - a$

ถ้า $x - a = 0$ จะทำให้ $(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} = 0$

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้

ดังนั้น $x - a \neq 0$ ... (1)

จะได้ $(x - a)^{2n} > 0$

ดังนั้น $$\frac{(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1}}{(x - a)^{2n}} > 0$$

แสดงว่า $(x - b)^{2m+1} > 0$

โดยข้อ 1 ที่พิสูจน์มาแล้ว จะได้ $x - b > 0$ ... (2)

จาก (1) และ (2) จึงได้ $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

(2) จะแสดงว่าถ้า $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$ แล้ว

$(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} > 0$

เนื่องจาก $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

จะได้ $(x - a)^{2n} > 0$ และ $(x - b)^{2m+1} > 0$

ดังนั้น $(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} > 0$

จาก (1) และ (2) จึงสรุปได้ว่า

$(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

4. จงพิสูจน์ว่า $(x - a)^{2n} (x - b)^{2m+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x - a \neq 0$ และ $x - b < 0$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทำได้ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ในข้อ 3

5. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

5.1 $(x - 3)^{20} (x + 4)^{33} < 0$

พิสูจน์ $(x - 3)^{20} (x + 4)^{33} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq 3$ และ $x + 4 < 0$

ก็ต่อเมื่อ $x \neq 3$ และ $x < -4$

ก็ต่อเมื่อ $x < -4$

ดังนั้นเซตคำตอบ คือ $\{x \in R \mid x < -4\}$

5.2 $(x - 4)^{21} (x + 2)^{11} > 0$

พิสูจน์ $(x - 4)^{21} (x + 2)^{11} > 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x - 4)^{20} (x + 2)^{10} (x - 4) (x + 2) > 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x - 4) (x + 2) > 0$ และ $x \neq 4$ และ $x \neq -2$

ก็ต่อเมื่อ $x < -2$ หรือ $x > 4$ และ $x \neq 4$ และ $x \neq -2$

ก็ต่อเมื่อ $x < -2$ หรือ $x > 4$

ดังนั้นเซตคำตอบ คือ $\{x \in R \mid x < -2$ หรือ $x > 4\}$

5.3 $\dfrac{(x-3)^{101}(x+7)^4}{(x+3)^{32}} \leq 0$

พิสูจน์ $\dfrac{(x-3)^{101}(x+7)^4}{(x+3)^{32}} \leq 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x-3)^{101}(x+7)^4 \leq 0$ และ $x + 3 \neq 0$

ก็ต่อเมื่อ $x - 3 \leq 0$ หรือ $x = -7$ และ $x \neq -3$

ก็ต่อเมื่อ $x \leq 3$ หรือ $x = -7$ และ $x \neq -3$

ก็ต่อเมื่อ $x < -3$ หรือ $-3 < x \leq 3$

ดังนั้นเซตคำตอบ คือ $\{x \in R \mid x < -3$ หรือ $-3 < x \leq 3\}$

5.4 $\dfrac{(x-1)^{45}}{(x-5)^8(x+4)^{21}} \geq 0$

พิสูจน์ $\dfrac{(x-1)^{45}}{(x-5)^8(x+4)^{21}} \geq 0$

ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{(x-1)^{44}(x-1)}{(x+4)^{20}(x+4)} \geq 0$ และ $x - 5 \neq 0$

ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{x-1}{x+4} \geq 0$ และ $x \neq 5$ และ $x + 4 \neq 0$

ก็ต่อเมื่อ $x < -4$ หรือ $1 < x$ และ $x \neq 5$

ดังนั้นเซตคำตอบ คือ

$\{x \in R \mid x < -4$ หรือ $1 < x < 5$ หรือ $x > 5\}$

6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > 0$ แล้ว $a + \frac{1}{a} \geq 2$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a > 0$

พิจารณา $(a-1)^2 \geq 0$

จะได้ $a^2 - 2a + 1 \geq 0$

หารด้วย a จะได้

$$a - 2 + \frac{1}{a} \geq 0$$

ดังนั้น $a + \frac{1}{a} \geq 2$

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a > 0$ และ $b > 0$

ถ้าให้ $c = \frac{a}{b}$ จะได้ $c > 0$ และ $\frac{1}{c} = \frac{b}{a}$

ดังนั้น $c + \frac{1}{c} \geq 2$ (โดยข้อ 6)

จึงได้ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > b > 0$ แล้ว $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a > b > 0$

ถ้าหารด้วย ab

จะได้ $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a < b < 0$ จะได้ $ab > 0$

หารด้วย ab

จะได้ $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

10. จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่มากกว่า 1 แล้ว

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

พิสูจน์ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่มากกว่า 1

เนื่องจาก $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ (เพราะ $0 < 2n - 1 < 2n$)

$\vdots$

$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$ (เพราะ $3 < n + 2 < 2n$)

$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$ (เพราะ $2 < n + 1 < 2n$)

จะได้ $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n}$

แต่ $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

แสดงว่า $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

11. จงพิสูจน์ว่า ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+n+1} < \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+n)^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}$$

พิสูจน์ ให้ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $m^2 + 2mk + k^2 < m^2 + 2mk + k^2 + m + k$

จะได้ $(m + k)^2 < (m + k + 1)(m + k)$

ดังนั้น $$\frac{1}{(m+k+1)(m+k)} < \frac{1}{(m+k)^2} \qquad \text{...(1)}$$

และเนื่องจาก $m^2 + 2mk + k^2 - m - k < m^2 + 2mk + k^2$

จะได้ $(m + k - 1)(m + k) < (m + k)^2$

ดังนั้น $$\frac{1}{(m+k)^2} < \frac{1}{(m+k-1)(m+k)} \qquad \text{...(2)}$$

แต่ $$\frac{1}{(m+k+1)(m+k)} = \frac{1}{m+k} - \frac{1}{m+k+1} \qquad \text{...(3)}$$

และ $$\frac{1}{(m+k+1)(m+k)} = \frac{1}{m+k-1} - \frac{1}{m+k} \qquad \text{...(4)}$$

จาก (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$\frac{1}{m+k} - \frac{1}{m+k+1} < \frac{1}{(m+k)^2} < \frac{1}{m+k-1} - \frac{1}{m+k} \qquad \text{...(5)}$$

กำหนดให้ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

จาก (5) จะได้ $$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} < \frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \qquad \text{...(6)}$$

$$\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} < \frac{1}{(m+2)^2} < \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \qquad \text{...(7)}$$

$$\frac{1}{m+n-1} - \frac{1}{m+n} < \frac{1}{(m+n-1)^2} < \frac{1}{m+n-2} - \frac{1}{m+n-1} \quad ...(n+5)$$

$$\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+n+1} < \frac{1}{(m+n)^2} < \frac{1}{m+n-1} - \frac{1}{m+n} \quad ...(n+6)$$

บวกอสมการ (6) (7) (n+5) และ (n+6) จะได้

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+n+1} < \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+n)^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}$$

12. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$

พิสูจน์ จากข้อ 11 เมื่อ $m = 1$ และแทน n ด้วย $n - 1$

จะได้ $\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+n} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(1+n-1)^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{1+n-1}$

ดังนั้น $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$

จะได้ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$ (เพราะ $1 - \frac{1}{n} < 1$)

13. กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_n$ แล้ว $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 1$

พิสูจน์ ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่

$$2 \le a_1 < a_2 < ... < a_n$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a_2 &\ge a_1 + 1 \\ a_3 &\ge a_2 + 1 \\ &\vdots \\ a_n &\ge a_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

จึงได้

$$\begin{aligned} a_2 &\ge a_1 + 1 \\ a_3 &\ge a_1 + 2 \\ &\vdots \\ a_n &\ge a_1 + n-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \le \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{(a_1+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(a_1+n-1)^2}$$

แต่ $$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{(a_1+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(a_1+n-1)^2} < \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_1+n-1}$$

จากข้อ 11 เมื่อ $m = a_1 - 1$

จะได้ $$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_1+n-1}$$

ดังนั้น $$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{n}{(a_1-1)(a_1+n-1)}$$

เนื่องจาก $a_1 - 1 \geq 1$ และ $a_1 + n - 1 \geq n + 1$

จะได้ $$\frac{1}{(a_1-1)(a_1+n-1)} \leq \frac{1}{n+1}$$

แสดงว่า $$\frac{n}{(a_1-1)(a_1+n-1)} \leq \frac{n}{n+1}$$

แต่ $$\frac{n}{n+1} < 1$$

นั่นคือ $$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 1$$

14. จงพิสูจน์ว่า $(n)^{\frac{1}{2}} \leq (n\,!)^{\frac{1}{n}}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

เนื่องจาก $(n\,!)^2 = n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 \ldots 2^2 \cdot 1^2$

$$= (1\cdot n)\,[2(n-1)]\,[3(n-2)] \ldots [(n-1)2]\,(n\cdot 1)$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $1 \leq k \leq n$

จะเห็นว่า $(n-k)(k-1) \geq 0$

ดังนั้น $nk - k^2 - n + k \geq 0$

$k(n-k+1) \geq n$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $1\cdot n \geq n$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $2(n-1) \geq n$

$\vdots$

เมื่อ $k = n$ จะได้ $n\cdot 1 \geq n$

ดังนั้น $(1\cdot n)\,[2(n-1)] \ldots (n\cdot 1) \geq n^n$

นั่นคือ $(n\,!)^2 \geq n^n$

จะได้ $n\,! \geq n^{\frac{n}{2}}$

ดังนั้น $(n\,!)^{\frac{1}{n}} \geq n^{\frac{1}{2}}$

15. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ x เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง
$a < \sqrt{x} < a + 1$

จงแสดงว่า $a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} < \sqrt{x} < a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} + \dfrac{1}{4(2a + 1)}$

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า $a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} < \sqrt{x}$

ต้องแสดงว่า $\dfrac{(\sqrt{x} + a)(\sqrt{x} - a)}{2a + 1} < \sqrt{x} - a$

โดยใช้เงื่อนไข $a < \sqrt{x} < a + 1$ ดังนี้

เนื่องจาก $a < \sqrt{x} < a + 1$

จึงได้ $\sqrt{x} + a < 2a + 1$

ดังนั้น $\dfrac{\sqrt{x} + a}{2a + 1} < 1$

แต่ $\sqrt{x} - a > 0$

จะได้ $\dfrac{(\sqrt{x} + a)(\sqrt{x} - a)}{2a + 1} < \sqrt{x} - a$

แสดงว่า $\dfrac{x - a^2}{2a + 1} < \sqrt{x} - a$

นั่นคือ $a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} < \sqrt{x}$

(2) จะแสดงว่า $\sqrt{x} < a + \dfrac{x-a^2}{2a+1} + \dfrac{1}{4(2a+1)}$

สำหรับจำนวนจริง y ใดๆ จะได้ $(y - \frac{1}{2})^2 \geq 0$

จะได้ $y^2 - y + \frac{1}{4} \geq 0$

ดังนั้น $y(1-y) \leq \frac{1}{4}$

ให้ $y = \sqrt{x} - a$ และ $y \neq \frac{1}{2}$

จะได้ $(\sqrt{x} - a)(1 - \sqrt{x} + a) < \frac{1}{4}$

แต่ $\sqrt{x} - a > 0$

จะได้

$$1 - \sqrt{x} + a < \frac{1}{4(\sqrt{x} - a)}$$

$$2a - a + 1 - \sqrt{x} < \frac{1}{4(\sqrt{x} - a)}$$

$$(2a+1) - (\sqrt{x} + a) < \frac{1}{4(\sqrt{x} - a)}$$

$$(2a+1)(\sqrt{x} - a) - (x - a^2) < \frac{1}{4}$$

$$(2a+1)(\sqrt{x} - a) < x - a^2 + \frac{1}{4}$$

แต่ $2a + 1 > 0$

จะได้ $\sqrt{x} - a < \dfrac{x-a^2}{2a+1} + \dfrac{1}{4(2a+1)}$

ดังนั้น $\sqrt{x} < a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} + \dfrac{1}{4(2a + 1)}$

จาก (1) และ (2)

จะได้ $a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} < \sqrt{x} < a + \dfrac{x - a^2}{2a + 1} + \dfrac{1}{4(2a + 1)}$

16. จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{65}$, $\sqrt{436}$ และ $\sqrt{1789}$

วิธีทำ การหาค่าประมาณของ $\sqrt{65}$

เนื่องจาก $8 < \sqrt{65} < 9$

จากข้อ 15 จะได้ $8 + \dfrac{65 - 64}{17} < \sqrt{65} < 8 + \dfrac{65 - 64}{17} + \dfrac{1}{4(17)}$

$$8 + \frac{1}{17} < \sqrt{65} < 8 + \frac{1}{17} + \frac{1}{4(17)}$$

$$8.05882 < \sqrt{65} < 8.07352$$

ดังนั้น $\sqrt{65} \approx 8.06$

วิธีทำ การหาค่าประมาณของ $\sqrt{436}$

เนื่องจาก $20 < \sqrt{436} < 21$

จากข้อ 15 จะได้

$$20 + \frac{436 - 400}{41} < \sqrt{436} < 20 + \frac{436 - 400}{41} + \frac{1}{4(41)}$$

$$20.87804 < \sqrt{436} < 20.88414$$

ดังนั้น $\sqrt{436} \approx 20.88$

วิธีทำ การหาค่าประมาณของ $\sqrt{1789}$

เนื่องจาก $42 < \sqrt{1789} < 43$

จากข้อ 15 จะได้

$$42 + \frac{1789 - 1764}{85} < \sqrt{1789} < 42 + \frac{1789 - 1764}{85} + \frac{1}{4(85)}$$

$$42.29411 < \sqrt{1789} < 42.29705$$

ดังนั้น $\sqrt{1789} \approx 42.29$

17. จงพิสูจน์ว่า $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ เนื่องจาก $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad ...(1)$$

จาก $2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

จะได้ $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

ดังนั้นจาก (1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

นั่นคือ $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

เมื่อ $n = 1$ จะได้ $2\sqrt{2} - 2 < 1$

$n = 2$ จะได้ $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vdots$

$n = n$ จะได้ $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

บวกจำนวนด้านซ้ายและขวาของเครื่องหมาย < ของทุกอสมการเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

18. กำหนดให้ $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ เป็นเศษส่วน และ $b_i > 0$ ทุก i เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้ m เป็นค่าน้อยที่สุดในบรรดาเศษส่วนเหล่านี้ และ M เป็นค่ามากที่สุด ในบรรดาเศษส่วนเหล่านี้ จงพิสูจน์ว่า

$$m \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i} \leq M$$

พิสูจน์ เนื่องจาก m และ M เป็นค่าน้อยที่สุด และมากที่สุดตามลำดับในบรรดาเศษส่วนที่กำหนดให้

ดังนั้น $m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M$, ทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

เนื่องจาก $b_i > 0$

จะได้ $m\, b_i \leq a_i \leq Mb_i$

ดังนั้น $$m \sum_{i=1}^{n} b_1 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq M \sum_{i=1}^{n} b_i$$

และเนื่องจาก $$\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$$

จะได้ $$m \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \leq M$$

19. กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ m เป็นค่าน้อยที่สุด และ M เป็นค่ามากที่สุดในบรรดาจำนวนต่อไปนี้

$\sqrt[b_1]{a_1}, \sqrt[b_2]{a_2}, ..., \sqrt[b_n]{a_n}$

จงพิสูจน์ว่า $m \leq \sqrt[b_1+b_2+...+b_n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq M$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก m และ M เป็นค่าน้อยที่สุดและมากที่สุดตามลำดับในบรรดาจำนวนต่อไปนี้

$\sqrt[b_1]{a_1}, \sqrt[b_2]{a_2}, ..., \sqrt[b_n]{a_n}$ ...(1)

พิจารณา $\frac{\log a_1}{b_1}, \frac{\log a_2}{b_2}, ..., \frac{\log a_n}{b_n}$ ...(2)

ให้ n และ N เป็นค่าน้อยที่สุดและมากที่สุดตามลำดับในบรรดาจำนวนใน (2)

จากข้อ 18 จะได้

$$n \leq \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq N$$

ดังนั้น $$n \leq \frac{1}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \log (a_1 a_2 \ldots a_n) \leq N$$

$$n \leq \log (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{b_1+b_2+\ldots+b_n}} \leq N$$

จะได้ $$10^n \leq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{b_1+b_2+\ldots+b_n}} \leq 10^N$$

แสดงว่า $$10^n \leq \sqrt[b_1+b_2+\ldots+b_n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq 10^N \qquad \ldots(3)$$

ให้ $m = \sqrt[b_i]{a_i}$ เป็นค่าน้อยที่สุดใน (1)

จะได้ $m = a_i^{\frac{1}{b_i}}$

ให้ $M = \sqrt[b_j]{a_j}$ เป็นค่าน้อยที่สุดใน (1)

จะได้ $M = a_j^{\frac{1}{b_j}}$

เนื่องจากฟังก์ชัน log ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
ดังนั้น log m เป็นค่าน้อยที่สุด และ log M เป็นค่ามากที่สุด
ตามลำดับในบรรดา $\log a_i^{\frac{1}{b_i}}$ ทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

และ $$\log a_i^{\frac{1}{b_i}} = \frac{\log a_i}{b_i}$$

ดังนั้น log m และ log M เป็นค่าน้อยที่สุด และค่ามากที่สุด ใน (2) ด้วย

จะได้ $n = \log m$ และ $N = \log M$

ดังนั้น $m = 10^n$ และ $M = 10^N$

จาก (3) จะได้ $m \leq \sqrt[b_1+b_2+\ldots+b_n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq M$

20. กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงบวก w เป็นจำนวนจริง และ $x^2 + y^2 = z^2$ จงพิสูจน์ดังต่อไปนี้

20.1 ถ้า $w > 2$ แล้ว $x^w + y^w < z^w$

พิสูจน์ เนื่องจาก x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก

และ $x^2 + y^2 = z^2$

จะเห็นได้ว่า $z > x$ และ $z > y$

ให้ $w > 2$

เนื่องจาก

$$z^w = z^{w-2} \cdot z^2$$

$$= z^{w-2}(x^2 + y^2)$$

$$x^w = x^{w-2} \cdot x^2$$

$$y^w = y^{w-2} \cdot y^2$$

จะได้

$$z^w - (x^w + y^w) = z^{w-2}(x^2 + y^2) - (x^{w-2} \cdot x^2 + y^{w-2} \cdot y^2)$$

$$z^w - (x^w + y^w) = (z^{w-2} - x^{w-2})x^2 + (z^{w-2} - y^{w-2})y^2 \ldots(1)$$

เนื่องจาก $z > x,\ z > y$ และ $w > 2$

จึงได้ $z^{w-2} > x^{w-2}$ และ $z^{w-2} > y^{w-2}$

ดังนั้น $z^{w-2} - x^{w-2} > 0$ และ $z^{w-2} - y^{w-2} > 0$

จะได้ $(z^{w-2} - x^{w-2})x^2 + (z^{w-2} - y^{w-2})\, y^2 > 0$ ...(2)

จาก (1) และ (2) จึงได้ $z^w - (x^w + y^w) > 0$

นั่นคือ $x^w + y^w < z^w$

20.2 ถ้า $w < 2$ แล้ว $x^w + y^w > z^w$

พิสูจน์ ให้ $w < 2$

จาก (1) จะได้

$$z^w - (x^w + y^w) = (z^{w-2} - x^{w-2})x^2 + (z^{w-2} - y^{w-2})y^2$$

$$z^w - (x^w + y^w) = \left(\frac{1}{z^{2-w}} - \frac{1}{x^{2-w}}\right) x^2 + \left(\frac{1}{z^{2-w}} - \frac{1}{y^{2-w}}\right) y \quad ...(3)$$

เนื่องจาก $z > x > 0,\ z > y > 0$ และ $2 - w > 0$

จะได้ $z^{2-w} > x^{2-w} > 0$ และ $z^{2-w} > y^{2-w} > 0$

ดังนั้น $\frac{1}{x^{2-w}} > \frac{1}{z^{2-w}}$ และ $\frac{1}{y^{2-w}} > \frac{1}{z^{2-w}}$

แสดงว่า $\frac{1}{z^{2-w}} - \frac{1}{x^{2-w}} < 0$ และ $\frac{1}{z^{2-w}} - \frac{1}{y^{2-w}} < 0$ ...(4)

จาก (3) และ (4) จึงได้ $z^w - (x^w + y^w) < 0$

นั่นคือ $x^w + y^w > z^w$

21. กำหนดให้ a, b, c, a + b − c, a + c − b และ b + c − a เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) > 0$

$$b^2 \geq b^2 - (c - a)^2 = (b - c + a)(b + c - a) > 0$$

$$c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 = (c - a + b)(c + a - b) > 0$$

จะได้ $a^2b^2c^2 \geq (a + b - c)^2 (a + c - b)^2 (b + c - a)^2 > 0$

เนื่องจากกำหนดให้ a, b, c, a + b − c, a + c − b และ b + c − a เป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $a\,b\,c \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$

22. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

พิสูจน์ ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงบวก

จะแสดงว่า $(a+c)(b+d) \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd}$

เนื่องจาก $(\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2 \geq 0$

จะได้ $bc + ad - 2\sqrt{abcd} \geq 0$

ดังนั้น $bc + ad \geq 2\sqrt{abcd} > 0$

แสดงว่า $ab + cd + bc + ad \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd} > 0$

จึงได้ $(a + c)(b + d) \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd} > 0$

ดังนั้น $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab+cd+2\sqrt{abcd}}$

นั่นคือ $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

23. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

จะได้ $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$

ดังนั้น $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

นั่นคือ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

24. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $b \leq a$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $0 < b \leq a$

(1) จะแสดงว่า $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{2} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

เนื่องจาก $0 < b \leq a$ จึงได้ $\frac{b}{a} \leq 1$

นั่นคือ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \leq 1$

แสดงว่า $1 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \leq 2$

ดังนั้น $(1 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}})^2 \leq 4$

นั่นคือ $1 + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{b}{a} \leq 4$

คูณตลอดด้วย a จะได้

$$a + 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b \le 4a$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \le 4a$$

$$\frac{1}{8}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \le \frac{1}{2}a$$

แต่ $$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$$

จึงได้ $$\frac{1}{8}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \le \frac{1}{2}a\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$$\frac{1}{8}(a - b)^2 \le \frac{a}{2}(a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b)$$

$$\frac{1}{8}\,\frac{(a - b)^2}{a} \le \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab}$$

(2) ในการแสดงว่า $\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{1}{8}\,\frac{(a - b)^2}{b}$

ทำได้โดยใช้ $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ge 1$$

จาก (1) และ (2) จึงสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{8}\,\frac{(a - b)^2}{a} \le \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{1}{8}\,\frac{(a - b)^2}{b}$$

25. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq (\frac{a + b}{2})^3$

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $(a - b)^2 \geq 0$

จึงได้ $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 - ab + b^2 \geq ab$

คูณตลอดด้วย $a + b$ จะได้

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)ab$$

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$$3a^3 + 3b^3 \geq 3a^2b + 3ab^2$$

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$$

$$8(\frac{a^3 + b^3}{2}) \geq (a + b)^3$$

ดังนั้น $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq (\frac{a + b}{2})^3$

26. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

พิสูจน์ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

เพื่อความสะดวก ให้ $a = x^3$, $b = y^3$ และ $c = z^3$

เพราะว่า $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$

จะได้ $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$

ดังนั้น $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$

เนื่องจาก $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$

จึงได้ $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geq 0$

นั่นคือ $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

ดังนั้น $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

27. กำหนดให้ $a_i > 0$ ทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \ldots + \sqrt{a_1a_n} + \sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_2a_4} + \ldots +$

$\sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

พิสูจน์ ให้ $a_i > 0$ ทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

เนื่องจาก $(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2 \geq 0$

จะได้ $a_i - 2\sqrt{a_ia_j} + a_j \geq 0$

จึงได้ $\frac{1}{2}(a_i + a_j) \geq \sqrt{a_ia_j}$

ดังนั้น $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + ... + \sqrt{a_1a_n}$

$$\leq \frac{1}{2}\{(a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + ... + (a_1 + a_n)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(n-1)\,a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\} \qquad ......(1)$$

$$\sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_2a_4} + ... + \sqrt{a_2a_n}$$

$$\leq \frac{1}{2}\{(a_2 + a_3) + (a_2 + a_4) + ... + (a_2 + a_n)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(n-2)\,a_2 + a_3 + ... + a_n\} \qquad ......(2)$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{a_{n-2}a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}a_n} \leq \frac{1}{2}\{(2a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)\} \qquad ......(n-2)$$

$$\sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n) \qquad ......(n-1)$$

นำอสมการ (1) + (2) +...+ (n−1)

จะได้ $\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + ... + \sqrt{a_1a_n} + \sqrt{a_2a_3} + ... + \sqrt{a_{n-1}a_n}$

$$\leq \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

28. กำหนดให้ $a_i > 0$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $a_1 a_2 \dots a_n = 1$
จงพิสูจน์ว่า $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$

พิสูจน์ ให้ $a_i > 0$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

เนื่องจาก $\frac{1 + a_i}{2} \geq \sqrt{a_i}$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

จะได้ $$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2^n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$$

ดังนั้น $$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$$

29. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก
จงพิสูจน์ว่า $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8\,abc$

พิสูจน์ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

จากข้อ 23 จะได้

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},\quad \frac{a + c}{2} \geq \sqrt{ac} \quad \text{และ} \quad \frac{b + c}{2} \geq \sqrt{bc}$$

จะได้ $$\frac{(a + b)(a + c)(b + c)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}$$

นั่นคือ $$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$$

30. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

พิสูจน์ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} - 1$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} - 1$$

$$\frac{b}{a+c} = \frac{b}{a+c} + \frac{a+c}{a+c} - 1$$

$$= \frac{a+b+c}{a+c} - 1$$

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} - 1$$

$$= \frac{a+b+c}{a+b} - 1$$

จึงได้ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} +$

$$\frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \qquad \ldots (1)$$

ให้ $x = b+c,\quad y = a+c$ และ $z = a+b$

จะได้ทางขวาของสมการ (1) ดังนี้

$$= \left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{y+z}{x} + 1 + \frac{x+z}{y} + 1 + \frac{x+y}{z}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}) - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}) - \frac{3}{2}$$

เนื่องจาก $\frac{h}{q} + \frac{q}{h} \geq 2$ สำหรับ $h, q > 0$

จึงได้ $\frac{1}{2}(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}) - \frac{3}{2}$

$$\geq \frac{1}{2}(6) - \frac{3}{2}$$

$$\geq \frac{3}{2}$$

ดังนั้น $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

31. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

พิสูจน์ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

จากข้อ 26 ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

ให้ $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ และ $z = \frac{1}{c}$

จะได้ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$

และเนื่องจาก $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

จึงได้ $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{a+b+c}$

นั่นคือ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

32. กำหนดให้ a, b, c, r, s และ t เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ว่า $\sqrt[3]{(a+r)(b+s)(c+t)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{rst}$

พิสูจน์ ให้ a, b, c, r, s และ t เป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $(a+r)(b+s)(c+t) = abc + rst +$

$(asc + rbc + abt) + (rsc + ast + rbt)$

และ $(\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{rst})^3 = abc + rst + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\,rst} + 3\sqrt[3]{abcr^2s^2t^2}$

จากข้อ 26 จะได้ $\frac{asc + rbc + abt}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2\,rst}$

และ $\frac{rsc + ast + rbt}{3} \geq \sqrt[3]{abcr^2s^2t^2}$

จึงได้ $(a+r)(b+s)(c+t) \geq (\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{rst})^3$

นั่นคือ $\sqrt[3]{(a+r)(b+s)(c+t)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{rst}$

33. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ a เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ในแต่ละข้อดังต่อไปนี้

33.1 $x \leq |x|$

พิสูจน์

กรณีที่ 1 $x \geq 0$

จะได้ $x = |x|$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $0 < -x$ และ $-x = |x|$

แต่ $x < -x$

ดังนั้น $x < |x|$

จากกรณีทั้ง 2 จึงสรุปได้ว่า $x \leq |x|$

33.2 ถ้า $|x| \leq a$ แล้ว $-a \leq x \leq a$

พิสูจน์ ให้ $|x| \leq a$

กรณีที่ 1 $x \geq 0$

จะได้ $x = |x| \leq a$

ดังนั้น $0 \leq x \leq a$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $0 < -x$ และ $-x = |x|$

แต่ $|x| \leq a$

ดังนั้น $0 < -x \leq a$

แสดงว่า $-a \leq x < 0$

จากกรณีทั้ง 2 จึงสรุปได้ว่า $-a \leq x \leq a$

33.3 ถ้า $|x| \geq a$ แล้ว $x \leq a$ หรือ $x \geq a$

พิสูจน์ ให้ $|x| \geq a$

กรณีที่ 1 $x \geq 0$

จะได้ $x = |x|$

ดังนั้น $x \geq a$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $-x = |x|$

ดังนั้น $-x \geq a$

หรือ $x \leq -a$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า

ถ้า $|x| \geq a$ แล้ว $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

33.4 $x + y \leq |x| + |y|$

พิสูจน์ จากข้อ 33.1 จะได้ $x \leq |x|$ และ $y \leq |y|$

ดังนั้น $x + y \leq |x| + |y|$

33.5 $x + y \leq |x+y|$

พิสูจน์ ให้ $x + y = z$ และจากข้อ 33.1 จะได้ $z \leq |z|$

ดังนั้น $x + y \leq |x+y|$

33.6 $|x+y| \le |x| + |y|$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** $x + y \ge 0$

จะได้ $x + y = |x + y|$

จากข้อ 33.4 จะได้ $x + y \le |x| + |y|$

ดังนั้น $|x + y| \le |x| + |y|$

กรณีที่ 2 $x + y < 0$

จะได้ $-(x+y) = |x+y|$

ดังนั้น $(-x) + (-y) = |x+y|$

จากข้อ 33.4 จะได้ $(-x) + (-y) \le |-x| + |-y|$

แต่ $|-x| = |x|$ และ $|-y| = |y|$

ดังนั้น $(-x) + (-y) \le |x| + |y|$

นั่นคือ $|x+y| \le |x| + |y|$

จากกรณีทั้ง 2 จึงสรุปได้ว่า $|x+y| \le |x| + |y|$

33.7 $|x| - |y| \le |x-y|$

พิสูจน์ เนื่องจาก $|x| = |(x-y) + y|$

จากข้อ 33.6 จะได้ $|(x-y) + y| \le |x - y| + |y|$

ดังนั้น $|x| \le |x - y| + |y|$

นั่นคือ $|x| - |y| \le |x-y|$

33.8 $||x| - |y|| \leq |x - y|$

พิสูจน์ จากข้อ 33.7 จะได้ $|x| - |y| \leq |x-y|$ ...(1)

และ $|y| - |x| \leq |y-x|$

ดังนั้น $-(|x|-|y|) \leq |y-x|$

แต่ $|y-x| = |x-y|$

จึงได้ $-(|x|-|y|) \leq |x-y|$

แสดงว่า $-|x-y| \leq |x| - |y|$ ...(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$

นั่นคือ $||x| - |y|| \leq |x-y|$

34. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 3| < 1$ แล้ว $|x^2 - 9| < 7$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริงและ $|x-3| < 1$

จะได้ $-1 < x - 3 < 1$

$2 < x < 4$

$5 < x + 3 < 7$

ดังนั้น $|x + 3| < 7$

จะได้ $|x - 3|\,|x + 3| < 1 \times 7$

นั่นคือ $|x^2 - 9| < 7$

35. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 4| < 2$ แล้ว $|x^2 + x - 20| < 22$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริง และ $|x-4| < 2$

จะได้ $-2 < x - 4 < 2$

$2 < x < 6$

$7 < x + 5 < 11$

ดังนั้น $|x+5| < 11$

จะได้ $|x-4|\,|x+5| < 2 \times 11$

$|(x-4)\,(x+5)| < 22$

นั่นคือ $|x^2 + x - 20| < 22$

36. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 5| < \frac{1}{2}$ แล้ว $\left|\frac{x-3}{x-4} - 2\right| < 1$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริงและ $|x - 5| < \frac{1}{2}$

จะได้ $-\frac{1}{2} < x - 5 < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x - 4 < \frac{3}{2}$

ดังนั้น $\frac{1}{2} < |x - 4| < \frac{3}{2}$

จะได้ $\frac{2}{3} < \frac{1}{|x-4|} < 2$

พิจารณา $$\left|\frac{x-3}{x-4}-2\right| = \left|\frac{x-3-2x+8}{x-4}\right|$$

$$= \left|\frac{-x+5}{x-4}\right|$$

$$= \frac{|-x+5|}{|x-4|}$$

$$= \frac{|x-5|}{|x-4|}$$

จาก $|x-5| < \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{|x-4|} < 2$

ดังนั้น $$\frac{|x-5|}{|x-4|} < \frac{1}{2} \times 2$$

จะได้ $$\frac{|x-5|}{|x-4|} < 1$$

นั่นคือ $$\left|\frac{x-3}{x-4} - 2\right| < 1$$

37. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x^3 - 1| > 1 - x$

วิธีทำ จากอสมการ $|x^3 - 1| > 1 - x$

เห็นได้ชัดว่า $x \neq -1, x \neq 0$ และ $x \neq 1$

เพราะถ้า $x = -1, x = 0$ หรือ $x = 1$ แล้วอสมการไม่เป็นจริง

พิจารณาค่าของ $x^3 - 1$

กรณีที่ 1 $x^3 - 1 < 0$

จะได้ $|x^3 - 1| = -(x^3 - 1)$

$|x^3 - 1| = 1 - x^3$

แสดงว่า $1 - x^3 > 1 - x$

$x^3 - x < 0$

$x(x^2 - 1) < 0$

$x(x + 1)(x - 1) < 0$

นั่นคือ $x < -1$ หรือ $0 < x < 1$

กรณีที่ 2 $x^3 - 1 > 0$

จะได้ $|x^3 - 1| = x^3 - 1$

แสดงว่า $x^3 - 1 > 1 - x$

$x^3 + x - 2 > 0$

$(x - 1)(x^2 + x + 2) > 0$

แต่ $x^2 + x + 2 > 0$

ดังนั้น $x - 1 > 0$

จะได้ $x > 1$

จากกรณีทั้ง 2 จึงสรุปได้ว่า $x < -1$ หรือ $0 < x < 1$ หรือ $1 < x$

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid x < -1$ หรือ $0 < x < 1$ หรือ $1 < x\}$

38. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(\frac{1}{2})^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < (\frac{1}{2})^{1-x}$

วิธีทำ จาก $(\frac{1}{2})^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < (\frac{1}{2})^{1-x}$

เนื่องจากฐาน $\frac{1}{2}$ น้อยกว่า 1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $$(x^6 - 2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} > 1 - x$$

$$\sqrt{(x^3 - 1)^2} > 1 - x$$

$$|x^3 - 1| > 1 - x$$

จากข้อ 37 จะได้เซตคำตอบ คือ $\{x \in R| \ x < -1$ หรือ $0 < x < 1$ หรือ $1 < x\}$

39. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 5} \geq \sqrt{5 - x}$

วิธีทำ จากอสมการ $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 5} \geq \sqrt{5 - x}$

จะเห็นว่าอสมการมีความหมายเมื่อ

$x + 2 \geq 0$ และ $x - 5 \geq 0$ และ $5 - x \geq 0$

นั่นคือ $x \geq -2$ และ $x \geq 5$ และ $5 \geq x$

จาก $x \geq 5$ และ $5 \geq x$ จึงได้ $x = 5$ เท่านั้น

นอกจากนี้ เมื่อ $x = 5$ จะได้ $x \geq -2$ เป็นจริง

ตรวจสอบคำตอบโดยแทน x ด้วย 5 ในสมการ

จะได้ $\sqrt{5 + 2} + \sqrt{5 - 5} \geq \sqrt{5 - 5}$ อสมการเป็นจริง

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{5\}$

40. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{2 + x - x^2} > x - 5$

วิธีทำ จากอสมการ $\sqrt{2 + x - x^2} \quad > \quad x - 5$

จะเห็นว่าอสมการมีความหมาย เมื่อ $2 + x - x^2 \geq 0$

หรือ $\qquad x^2 - x - 2 \quad \leq \quad 0$

$\qquad (x-2)\ (x+1) \quad \leq \quad 0$

นั่นคือ $\qquad -1 \leq x \leq 2$ ทำให้อสมการมีความหมาย

และจะได้ $\qquad -6 \leq x - 5 \quad \leq \quad -3$

เห็นได้ชัดว่า $\sqrt{2 + x - x^2} \quad > \quad x - 5$ เป็นจริง เมื่อ

$-1 \leq x \leq 2$

ดังนั้นเซตคำตอบ คือ $\{x \in R \mid -1 \leq x \leq 2\}$

41. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} \; - \; \sqrt{2 - x} \; > \; 0$

วิธีทำ จากอสมการ $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} \; - \; \sqrt{2 - x} \; > 0$

จะเห็นว่าอสมการมีความหมายเมื่อ

$2 - x \geq 0$ และ $1 - x \geq 0$ และ $4 - \sqrt{1 - x} \geq 0$

นั่นคือ $\qquad x \leq 2$ และ $x \leq 1$ และ $\sqrt{1 - x} \leq 4$

ดังนั้น $\qquad x \leq 1$ และ $0 \leq \sqrt{1 - x} \leq 4$

จะได้ $\qquad x \leq 1$ และ $1-x \leq 16$

นั่นคือ $\qquad -15 \leq x \leq 1$

จากอสมการของโจทย์จะได้ $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} \; > \; \sqrt{2 - x} \; \geq \; 0$

ยกกำลังสองจะได้

$$4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x$$

$x + 2 > \sqrt{1-x}$ ซึ่งมีความหมายเมื่อ $x \geq -2$

ดังนั้น $-2 \leq x \leq 1$

จาก $x + 2 > \sqrt{1-x} \geq 0$

ยกกำลังสองจะได้

$$x^2 + 4x + 4 > 1 - x$$

$$x^2 + 5x + 3 > 0$$

$$(x^2 + 5x + \frac{25}{4}) - (\frac{25}{4} - 3) > 0$$

$$(x + \frac{5}{2})^2 - (\frac{\sqrt{13}}{2})^2 > 0$$

$$(x + \frac{5+\sqrt{13}}{2})(x + \frac{5-\sqrt{13}}{2}) > 0$$

ดังนั้น $x < \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$ หรือ $\frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x$

แต่ $-2 \leq x \leq 1$

ดังนั้นค่า x ที่ทำให้สมการเป็นจริงคือ

$$\frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leq 1$$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leq 1\}$

42. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $a > 1$

และเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $0 < a < 1$

จึงต้องพิจารณา 2 กรณี

จาก $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1$

กรณีที่ 1 $\frac{25-x^2}{16} > 1$ หรือ $x^2 < 9$

จะได้ $\frac{24-2x-x^2}{14} > \frac{25-x^2}{16}$

$x^2 + 16x - 17 < 0$

$(x-1)(x+17) < 0$

$-17 < x < 1$

แต่กรณีนี้ $x^2 < 9$

จะได้ $-3 < x < 3$

ดังนั้น กรณีที่ 1 ค่า x ที่แท้จริง คือ $-3 < x < 1$

กรณีที่ 2 $0 < \frac{25-x^2}{16} < 1$ ......(1)

จะได้ $0 < \frac{24-2x-x^2}{14} < \frac{25-x^2}{16}$ ......(2)

พิจารณาเมื่อ $0 < \frac{25-x^2}{16} < 1$

จะได้ $9 < x^2 < 25$

ดังนั้น $-5 < x < 3$ หรือ $3 < x < 5$ ......(3)

และพิจารณา เมื่อ $0 < \frac{24 - 2x - x^2}{14} < \frac{25 - x^2}{16}$

จะได้สองอสมการ ดังนี้

$$x^2 + 2x - 24 < 0$$

และ $x^2 + 16x - 17 > 0$

ดังนั้น $(x + 6)(x - 4) < 0$

และ $(x + 17)(x - 1) > 0$

จึงได้ $-6 < x < 4$

และ $x < -17$ หรือ $x > 1$

จะได้ $1 < x < 4$ ......(4)

จากกรณีที่ 2 จึงสรุปได้ว่า

$-5 < x < -3$ หรือ $3 < x < 5$ และ $1 < x < 4$

จึงได้ $3 < x < 4$

จากกรณีทั้ง 2 จะได้ $-3 < x < 1$ หรือ $3 < x < 4$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid -3 < x < 1$ หรือ $3 < x < 4\}$

43. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2}$

วิธีทำ $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right)$ มีความหมาย

เมื่อ $x^2 > 0$ และ $\frac{4x-5}{|x-2|} > 0$

พิจารณา $\frac{4x-5}{|x-2|} > 0$

จะได้ $4x - 5 > 0$

$$x > \frac{5}{4}$$

และทำให้ $x^2 > 1$

จากอสมการ $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2}$

จึงได้ $\frac{4x-5}{|x-2|} \geq (x^2)^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $\frac{4x-5}{|x-2|} \geq |x|$

เห็นได้ชัดว่า $x \neq 2$

ถ้า $\mathbf{\frac{5}{4} < x < 2}$ จะได้ $|x| = x$ และ $|x-2| = 2 - x > 0$

จึงได้ $\frac{4x-5}{2-x} \geq x$

$$4x - 5 \geq 2x - x^2$$

$$x^2 + 2x - 5 \geq 0$$

$$(x + \sqrt{6} + 1)(x - \sqrt{6} + 1) \geq 0$$

ดังนั้น $x \leq -\sqrt{6} - 1$ หรือ $\sqrt{6} - 1 \leq x$

แต่ $\frac{5}{4} \leq x < 2$

นั่นคือ $\sqrt{6} - 1 \leq x < 2$

ถ้า $2 < x$ จะได้ $|x| = x$ และ $|x - 2| = x - 2 > 0$

จึงได้

$$\frac{4x - 5}{x - 2} \geq x$$

$$4x - 5 \geq x^2 - 2x$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$(x-1)(x-5) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 5$$

แต่ $2 < x$

นั่นคือ $2 < x \leq 5$

ดังนั้น $\sqrt{6} - 1 \leq x < 2$ หรือ $2 < x \leq 5$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid \sqrt{6} - 1 \leq x < 2$ หรือ $2 < x \leq 5\}$

44. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{3} x > 1$

วิธีทำ $\log_{\frac{1}{2}}x + \log_3 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 x$

$$= \log_3 x \left(\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} + 1\right)$$

$$= \log_3 x \left(\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\right)$$

$$= \log_3 x \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\log_3 x}{-\log_{\frac{3}{2}} 2}$$

แต่ $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$

ดังนั้น $-\dfrac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} 2} > 1$

เนื่องจาก $\log_{\frac{3}{2}} 2 > 0$

ดังนั้น $-\log_3 x > \log_{\frac{3}{2}} 2$

จะได้ $\log_3 x < \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}$

อสมการมีความหมายเมื่อ $x > 0$

จะได้ $0 < x < 3^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}}$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid 0 < x < 3^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}}\}$

45. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^{\log_a x+1} > a^2x$ เมื่อ $a > 1$

วิธีทำ จาก $x^{\log_a x+1} > a^2x$

เห็นได้ชัดว่า $x > 0$

และจะได้ $(x^{\log_a x})x > a^2x$ (เนื่องจาก $(x^{\log_a x})\ x = \log^{\log_a x+1}$)

$$x^{\log_a x} > a^2$$

แต่ $a > 1$

จะได้
$$\log_a x^{\log_a x} > \log_a a^2$$
$$\log_a x^{\log_a x} > 2$$
$$(\log_a x)^2 > 2$$

ให้ $y = \log_a x$

จะได้ $y^2 - 2 > 0$

ดังนั้น $y < -\sqrt{2}$ หรือ $y > \sqrt{2}$

จะได้ $\log_a x < -\sqrt{2}$ หรือ $\log_a x > \sqrt{2}$

$0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ หรือ $x > a^{\sqrt{2}}$

นั่นคือ $0 < x < \dfrac{1}{a^{\sqrt{2}}}$ หรือ $a^{\sqrt{2}} < x$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid 0 < x < \dfrac{1}{a^{\sqrt{2}}}$ หรือ $a^{\sqrt{2}} < x\}$

46. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6)$ เมื่อ $a > 1$

วิธีทำ จาก $\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6)$

จะได้ $\log_a x(x+1) < \log_a (2x+6)$

เนื่องจาก $a > 1$

จะได้
$$x(x+1) < 2x+6$$
$$x^2 + x < 2x+6$$
$$x^2 - x - 6 < 0$$
$$(x-3)(x+2) < 0$$
$$-2 < x < 3$$

แต่อสมการจากโจทย์มีความหมายเมื่อ $0 < x$

ดังนั้น $0 < x < 3$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid 0 < x < 3\}$

47. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

วิธีทำ จาก
$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} = \frac{\log_2 x - 1 - \log_2 x}{(\log_2 x)(\log_2 x - 1)}$$
$$= \frac{-1}{(\log_2 x)(\log_2 x - 1)}$$

จากโจทย์จะได้ $\dfrac{-1}{(\log_2 x)(\log_2 x - 1)} < 1$

$$\frac{-1}{(\log_2 x)(\log_2 x-1)} - 1 \quad < \quad 0$$

$$\frac{-1-(\log_2 x)(\log_2 x-1)}{(\log_2 x)(\log_2 x-1)} \quad < \quad 0$$

$$\frac{1+(\log_2 x)(\log_2 x-1)}{(\log_2 x)(\log_2 x-1)} \quad > \quad 0$$

$$\frac{(\log_2 x)^2 - \log_2 x + 1}{(\log_2 x)(\log_2 x-1)} \quad > \quad 0$$

ให้ $\quad y = \log_2 x$

จะได้ $\quad \dfrac{y^2 - y + 1}{y\,(y-1)} \quad > \quad 0$

ทำเป็นกำลังสมบูรณ์ จะได้

$$\frac{(y^2 - y + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}}{y\,(y-1)} \quad > \quad 0$$

$$\frac{(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{y\,(y-1)} \quad > \quad 0$$

จะเห็นเศษทางด้านซ้ายของอสมการมากกว่า 0

ดังนั้น $\quad y\,(y-1) > 0$

จะได้ $\quad y < 0$ หรือ $y > 1$

แสดงว่า $\quad \log_2 x < 0$ หรือ $\log_2 x > 1$

จะได้ $\quad 0 < x < 1$ หรือ $x > 2$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid 0 < x < 1$ หรือ $x > 2\}$

48. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^{2-(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$

วิธีทำ จากสมการ $x^{2-(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$

จะเห็นว่า $x > 0$

เอา x คูณทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $x^{3-(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x} > 1$

ใส่ log ฐาน 2 ทั้งสองข้างของอสมการ

และให้ $y = \log_2 x$

จะได้ $(3 - (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x)\, y > 0$

$$(3 - y^2 - 2y)\, y > 0$$

$$(y^2 + 2y - 3)\, y < 0$$

$$(y - 1)(y + 3)\, y < 0$$

ดังนั้น $y < -3$ หรือ $0 < y < 1$

จะได้ $\log_2 x < -3$ หรือ $0 < \log_2 x < 1$

กรณีที่ 1 $\log_2 x < -3$

จะได้ $0 < x < \frac{1}{8}$

กรณีที่ 2 $0 < \log_2 x < 1$

จะได้ $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2$

$$1 < x < 2$$

จากกรณีทั้ง 2 จะได้เซตคำตอบคือ

$$\{x \in R \mid 0 < x < \tfrac{1}{8} \text{ หรือ } 1 < x < 2\}$$

49. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_3 (x^2 - 5x + 6) < \log_a \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\log_a \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \log_a \frac{|x|}{x}$

จะเห็นว่าถ้า $x < 0$ จะได้ $\frac{|x|}{x} = -1$

ทำให้ $\log \frac{|x|}{x}$ ไม่มีความหมาย

นอกจากนี้ $x \neq 0$

ดังนั้น $x > 0$

จะได้ $\log_a \frac{|x|}{x} = \log_a \frac{x}{x} = \log_a 1 = 0$

ดังนั้น จากโจทย์จะได้ $\log_3 (x^2-5x+6) < 0$

แสดงว่า $0 < x^2 - 5x + 6 < 1$

จะได้ $0 < x^2 - 5x + 6$ และ $x^2 - 5x + 5 < 0$

$0 < (x-2)(x-3)$ และ $(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}) < 0$

$(x < 2$ หรือ $x > 3)$ และ $(\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2})$

ดังนั้น $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2$ หรือ $3 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

เซตคำตอบคือ

$\{x \in R \mid \frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2$ หรือ $3 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}\}$

50. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) > 0$

วิธีทำ จาก

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) > 0$$

$$0 < \log_4(x^2-5) < 1$$

$$\log_4 1 < \log_4(x^2-5) < \log_4 4$$

$$1 < x^2-5 < 4$$

$0 < x^2 - 6$ และ $x^2 - 9 < 0$

$0 < (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$ และ $(x+3)(x-3) < 0$

$x < -\sqrt{6}$ หรือ $x > \sqrt{6}$ และ $-3 < x < 3$

ดังนั้น $-3 < x < -\sqrt{6}$ หรือ $\sqrt{6} < x < 3$

เซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid -3 < x < -\sqrt{6}$ หรือ $\sqrt{6} < x < 3\}$

บทที่ 2
อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทบทวนสมบัติเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ฟังก์ชันของผลบวกของมุม

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

2. ฟังก์ชันของมุม 2 เท่า และ 3 เท่า

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 3x = 3 \sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3. ผลบวกของฟังก์ชัน

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$

4. ผลคูณของฟังก์ชัน

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x-y) + \sin(x+y)\}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

5. ฟังก์ชัน sin x, cos x และ tan x ในรูป tan $\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

6. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

$y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \arccos x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$

$y = \arctan x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$y = \operatorname{arccot} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ และ $0 < y < \pi$

$$\arcsin x = (-1)^n \arcsin (x + n\pi)$$

$$\arccos x = \pm \arccos (x + 2n\pi)$$

$$\arctan x = \arctan (x + n\pi)$$

$$\operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} (x + n\pi)$$

7. สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมครึ่งและด้านของรูปสามเหลี่ยม

ให้ A, B และ C เป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม a, b และ c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

ตัวอย่างวิธีการแก้ปัญหาโจทย์อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. กำหนดให้ $0 < \theta < \pi$ จงพิสูจน์ว่า $\cot \frac{\theta}{2} \geq 1 + \cot \theta$

พิสูจน์ ให้ $0 < \theta < \pi$

เนื่องจาก
$$\cot \theta = \frac{\cot^2 \frac{\theta}{2} - 1}{2 \cot \frac{\theta}{2}}$$

จึงได้
$$\begin{aligned}1 + \cot \theta - \cot \frac{\theta}{2} &= 1 + \frac{\cot^2 \frac{\theta}{2} - 1}{2 \cot \frac{\theta}{2}} - \cot \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{-1}{2 \cot \frac{\theta}{2}} \left(\cot^2 \frac{\theta}{2} - 2\cot \frac{\theta}{2} + 1\right) \\ &= \frac{-\left(\cot \frac{\theta}{2} - 1\right)^2}{2 \cot \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $0 < \theta < \pi$ จึงได้ $2 \cot \frac{\theta}{2} > 0$

และ $\left(\cot \frac{\theta}{2} - 1\right)^2 \geq 0$

จึงได้
$$\frac{-\left(\cot \frac{\theta}{2} - 1\right)^2}{2 \cot \frac{\theta}{2}} \leq 0$$

ดังนั้น $\quad 1 + \cot\theta - \cot\frac{\theta}{2} \leq 0$

นั่นคือ $\quad \cot\frac{\theta}{2} \geq 1 + \cot\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \pi$

2. กำหนดให้ A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุม C เป็นมุมป้าน จงพิสูจน์ว่า $\tan A \tan B < 1$

พิสูจน์ เนื่องจาก C เป็นมุมป้าน

จะได้ $\quad \tan C < 0$ หรือ $-\tan C > 0$

เนื่องจาก A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

จะได้ $\quad A + B + C = \pi$ หรือ $A + B = \pi - C$

แต่ $$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

และ $$\begin{aligned} \tan(A+B) &= \tan(\pi - C) \\ &= -\tan C > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} > 0$$

จาก C เป็นมุมป้านจะได้ $A < \frac{\pi}{2}$ และ $B < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\quad \tan A + \tan B > 0$

แสดงว่า $1 - \tan A \ \tan B > 0$

นั่นคือ $\tan A \tan B < 1$

3. กำหนดให้ $\tan \theta = n \tan \alpha$ เมื่อ $n > 0$

จงพิสูจน์ว่า $\tan^2 (\theta - \alpha) \leq \frac{(n-1)^2}{4n}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \ \tan \alpha}$

$$= \frac{n \tan \alpha - \tan \alpha}{1 + n \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{(n-1) \tan \alpha}{1 + n \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{n - 1}{\cot \alpha + n \tan \alpha}$$

จึงได้ $\tan^2 (\theta - \alpha) = \frac{(n-1)^2}{(\cot \alpha + n \tan \alpha)^2}$

$$= \frac{(n-1)^2}{\cot^2 \alpha + 2n + n^2 \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{(\cot^2 \alpha - 2n + n^2 \tan^2 \alpha) + 4n}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{(\cot \alpha - n \tan \alpha)^2 + 4n}$$

$$\leq \frac{(n-1)^2}{4n} \text{ (เพราะ } (\cot\alpha - n\tan\alpha)^2 \geq 0)$$

นั่นคือ $\tan^2(\theta - \alpha) \leq \dfrac{(n-1)^2}{4n}$

4. จงแสดงว่า ถ้า $\dfrac{1}{\cos A \cos B} + \tan A \tan B = \tan C$ แล้ว $\cos 2C \leq 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\cos 2C = \dfrac{1 - \tan^2 C}{1 + \tan^2 C}$

และ $1 + \tan^2 C > 0$

ถ้าแสดงได้ว่า $1 - \tan^2 C \leq 0$

ก็จะได้ $\cos 2C \leq 0$

เนื่องจาก $\tan C = \dfrac{1}{\cos A \cos B} + \tan A \tan B$

ดังนั้น $1 - \tan^2 C = \dfrac{\cos^2 A \cos^2 B - (1 + \sin A \sin B)^2}{\cos^2 A \cos^2 B}$

จึงเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า

$$\cos^2 A \cos^2 B - (1 + \sin A \sin B)^2 \leq 0$$

พิจารณา $\cos^2 A \cos^2 B - (1 + \sin A \sin B)^2$

$$= (1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B) - (1 + \sin A \sin B)^2$$

$$= 1 - \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - 1$$

$$- 2\sin A \sin B - \sin^2 A \sin^2 B$$

$$= -(\sin A + \sin B)^2$$

$$\leq 0$$

นั่นคือ $\cos 2C \leq 0$

5. กำหนดให้ $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\tan\theta_1 < \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \dots + \sin\theta_n}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \dots + \cos\theta_n} < \tan\theta_n$$

พิสูจน์ ให้ $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_n < \frac{\pi}{2}$

ในจตุภาคที่ 1 ฟังก์ชัน tan เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้น ถ้า $\theta_1 < \theta_i < \theta_n$

จะได้ $\tan\theta_1 < \tan\theta_i < \tan\theta_n$

ในจตุภาคที่ 1 จะได้ $\cos\theta_i > 0$ ทุก $i \in \{2, 3 \dots, n\}$

ดังนั้น

$\tan\theta_1 \cos\theta_i < \sin\theta_i < \tan\theta_n \cos\theta_i$ ทุก $i \in \{2, 3 \dots, n\}$ ...(1)

จาก $\tan\theta_1 < \tan\theta_n$

และ $\cos\theta_1 > 0$

จะได้ $\tan\theta_1 \cos\theta_1 < \tan\theta_n \cos\theta_1$

$$\tan\theta_1 \cos\theta_1 = \sin\theta_1 < \tan\theta_n \cos\theta_1 \qquad \text{...(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$\tan\theta_1 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 +...+ \cos\theta_n) < \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + ...+$
$\sin\theta_n < \tan\theta_n (\cos\theta_1+\cos\theta_2+...+\cos\theta_n)$

จึงได้ $$\tan\theta_1 < \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 +... + \sin\theta_n}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2 +... + \cos\theta_n} < \tan\theta_n$$

6. กำหนดให้ $A + B + C = \pi$
จงพิสูจน์ว่า $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1$

พิสูจน์ ให้ $A + B + C = \pi$

จะได้ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$

ให้ $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$ และ $z = \tan\frac{C}{2}$

จะได้ $xy + xz + yz = 1$

ต่อไปจะแสดงว่า $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$

เนื่องจาก $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$

จึงได้ $2[(x^2+y^2+z^2) - (xy+xz+yz)] \geq 0$

ดังนั้น $x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0$

แสดงว่า $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$

นั่นคือ $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1$

7. กำหนดให้ A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงพิสูจน์โจทย์อสมการของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

7.1 จงพิสูจน์ว่า $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

พิสูจน์ ให้ a, b และ c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

และให้ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

เนื่องจาก $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

และ $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

จึงได้ $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2} = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

แต่ $s-a = \dfrac{b+c-a}{2}$, $s-b = \dfrac{c+a-b}{2}$ และ $s-c = \dfrac{a+b-c}{2}$

ดังนั้น $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2} = \dfrac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{8abc}$

จากข้อ 21 หน้า 22 จะได้

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

ดังนั้น $\dfrac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{8abc} \leq \dfrac{abc}{8abc}$

นั่นคือ $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

7.2 จงพิสูจน์ว่า $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

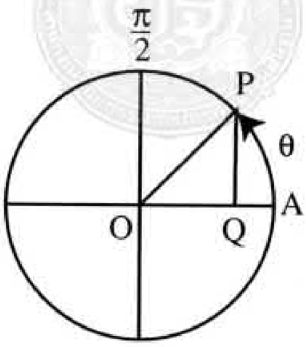
พิสูจน์ เนื่องจาก $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

จากข้อ 7.1 จะได้ $\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + \frac{4}{8}$

นั่นคือ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

8. กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จงพิสูจน์ว่า $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$

พิสูจน์ ให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย

P เป็นจุดบนเส้นรอบวง และส่วนโค้ง PA มีความยาว θ หน่วย

จะเห็นได้ว่า $PQ = \sin\theta$ และ $0 \leq \sin\theta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$OQ = \cos\theta$ และ $0 \leq \cos\theta \leq 1 < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\sin(\cos\theta) \leq \cos\theta$

พิจารณา $\cos(\sin\theta)$

เนื่องจาก $0 \leq \sin\theta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

และถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ แล้ว $\cos x$ มีค่าลดลง

จะได้ $\cos\theta \leq \cos(\sin\theta)$

นั่นคือ $\sin(\cos\theta) \leq \cos\theta \leq \cos(\sin\theta)$

จึงได้ $\sin(\cos\theta) \leq \cos(\sin\theta)$

แต่ $\sin(\cos\theta) \neq \cos(\sin\theta)$

เพราะถ้า $\sin(\cos\theta) = \cos(\sin\theta)$

จะได้ $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\pi}{4}$

ขัดแย้งกรณีที่ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ถ้า $\cos\theta = \sin\theta$ แล้ว

$\theta = \frac{\pi}{4}$ และ $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\sin(\cos\theta) < \cos(\sin\theta)$

9. จงพิสูจน์ว่า $(1-\tan^2 x)(1-3\tan^2 x)(1+\tan 2x \tan 3x) > 0$ ทุกจำนวนจริง x ที่ทำให้อสมการมีความหมาย

พิสูจน์ ให้ $\tan x = y$

จาก $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

จะได้ $\tan 2x = \dfrac{2y}{1-y^2}$

และ

$$\begin{aligned}
\tan 3x &= \tan(x+2x) \\
&= \frac{\tan x + \tan 2x}{1-\tan x \tan 2x} \\
&= \frac{y + \dfrac{2y}{1-y^2}}{1 - \dfrac{2y^2}{1-y^2}} \\
&= \frac{y - y^3 + 2y}{1 - y^2 - 2y^2} \\
&= \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(1-\tan^2 x)(1-3\tan^2 x)(1+\tan 2x \tan 3x)$

$$= (1-y^2)(1-3y^2)\left\{1+\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)\left(\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\right)\right\}$$

$$= (1-y^2)(1-3y^2) + 2y(3y - y^3)$$

$$= 1 - 4y^2 + 3y^4 + 6y^2 - 2y^4$$

$$= y^4 + 2y^2 + 1$$

$$= (y^2+1)^2$$

เนื่องจาก $y^2 + 1 > 0$ จะได้ $(y^2+1)^2 > 0$

นั่นคือ $(1-\tan^2 x)(1-3\tan^2 x)(1+\tan 2x \tan 3x) > 0$

10. จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$

พิสูจน์ จะพิสูจน์ว่า $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x} \geq 0$

พิจารณา $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$

$$= \frac{-2\sin^2 x + 8\sin x - 6 - \sin^2 x + 5\sin x - 6 + 2\sin x^2 - 8\sin x + 8}{2(\sin x-2)(3-\sin x)}$$

$$= \frac{-\sin^2 x + 5\sin x - 4}{2(\sin x-2)(3-\sin x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 5\sin x + 4}{2(2-\sin x)(3-\sin x)}$$

$$= \frac{(\sin x-1)(\sin x-4)}{2(2-\sin x)(3-\sin x)}$$

เนื่องจาก $(2-\sin x)(3-\sin x) > 0$

$\sin x - 4 < 0$ และ $\sin x - 1 \leq 0$

จึงสรุปได้ว่า $\dfrac{(\sin x-1)(\sin x-4)}{2(2-\sin x)(3-\sin x)} \geq 0$

นั่นคือ $\dfrac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x} \geq 0$

แสดงว่า $\dfrac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$

11. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $0 < x < \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$

พิสูจน์ $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} = \dfrac{1}{\sin^2 x(1-\tan x)}$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x(1-\tan x))}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{\tan x(\tan x(1-\tan x))}$$

$$= \left(\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\right)\left(\frac{1}{\tan x(1-\tan x)}\right)$$

เนื่องจาก $0 < x < \frac{\pi}{4}$ จะได้ $0 < \tan x < 1$

ให้ $t = \tan x$ จะได้ $0 < t < 1$

พิจารณา $\dfrac{1+t^2}{t} = \dfrac{1}{t} + t > 2$ (จากข้อ 2 ข้อย่อย 6 และ $t \neq 1$)

$$t(1-t) = t - t^2$$

$$= \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$$

$$\leq \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $$\frac{1}{t(1-t)} \geq 4$$

จะได้ $$(\frac{1+t^2}{t})(\frac{1}{t(1-t)^2}) > 4 \times 2$$

นั่นคือ $$(\frac{1+\tan^2 x}{\tan x})(\frac{1}{\tan x(1-\tan^2 x)}) > 8$$

จึงได้ $$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$$

12. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha < \frac{1}{7}$ และ $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ แล้ว $\alpha + 2\beta < \frac{\pi}{4}$

พิสูจน์ ให้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha < \frac{1}{7}$ และ $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

จะแสดงว่า $\tan(\alpha + 2\beta) < 1$

ก็จะได้ $\alpha + 2\beta < \frac{\pi}{4}$

พิจารณา $\tan(\alpha + 2\beta) = \dfrac{\tan \alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan \alpha \tan 2\beta}$

แต่ $\tan 2\beta = \dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \dfrac{2\sin \beta \cos \beta}{\cos 2\beta}$

ต่อไปจะหาค่าของ $\cos \beta$ และ $\cos 2\beta$

เนื่องจาก $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $\tan 2\beta = \dfrac{2 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$$\tan\alpha + \tan 2\beta \;<\; \frac{1}{7} + \frac{3}{4} \;=\; \frac{25}{28}$$

$$\tan\alpha \tan 2\beta \;<\; \frac{1}{7} \times \frac{3}{4} \;=\; \frac{3}{28}$$

$$-\tan\alpha \; \tan 2\beta \;>\; -\frac{3}{28}$$

$$1 - \tan\alpha \tan 2\beta \;>\; 1 - \frac{3}{28} \;=\; \frac{25}{28}$$

$$\frac{1}{1-\tan\alpha \tan 2\beta} \;<\; \frac{28}{25}$$

จะได้ $$\frac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1-\tan\alpha \tan 2\beta} \;<\; \frac{25}{28} \times \frac{28}{25} \;=\; 1$$

ดังนั้น $$\tan(\alpha + 2\beta) \;<\; 1$$

นั่นคือ $$\alpha + 2\beta \;<\; \frac{\pi}{4}$$

13. จงหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย

$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

วิธีทำ ให้ $a = \sin^2 x$ และ $b = \cos^2 x$ จะได้ $a + b = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + \cos^6 x = a^3 + b^3 \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] \\ &= 1(1^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x) \\ &= 1 - 3(\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 3(\tfrac{1}{2} \sin 2x)^2 \\ &= 1 - \tfrac{3}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

เนื่องจาก $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$

จะได้ $0 \leq \frac{3}{4} \sin^2 2x \leq \frac{3}{4}$

$$-\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 0$$

$$1 - \frac{3}{4} \leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$$

ค่าต่ำสุดของ $f(x) = \frac{1}{4}$ และค่าสูงสุดของ $f(x) = 1$

14. กำหนดให้ A และ B เป็นค่าคงตัวที่ไม่เท่ากับ 0 และ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = A \sin x + B \cos x$ จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f

วิธีทำ $$f(x) = A \sin x + B \cos x$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A \sin x}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B \cos x}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

เนื่องจาก $$0 < |A| = \sqrt{A^2} < \sqrt{A^2+B^2}$$

ดังนั้น $$0 < \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1$$

จะได้ $$-1 < \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1$$

ให้ $$\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

จะได้ $$\cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ดังนั้น $$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos \theta \sin x + \sin \theta \cos x)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+\theta)$$

เนื่องจาก $$-1 \leq \sin(x+\theta) \leq 1$$

และ $\sqrt{A^2+B^2} > 0$

จะได้ $-\sqrt{A^2+B^2} \leq \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\theta) \leq \sqrt{A^2+B^2}$

ดังนั้น $-\sqrt{A^2+B^2} \leq f(x) \leq \sqrt{A^2+B^2}$

ค่าต่ำสุดของ $f(x)$ คือ $-\sqrt{A^2+B^2}$

ค่าสูงสุดของ $f(x)$ คือ $\sqrt{A^2+B^2}$

15. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย

$f(x) = 2\sin^2x + 4\cos^2x + 6\sin x\cos x$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\sin^2x + 4\cos^2x + 6\sin x\cos x \\
&= (1-\cos 2x) + 2(1+\cos 2x) + 3\sin 2x \\
&= 3 + \cos 2x + 3\sin 2x
\end{aligned}
$$

ให้ $g(x) = 3\sin 2x + \cos 2x$

จากข้อ 14 จะได้ $-\sqrt{3^2+1^2} \leq g(x) \leq \sqrt{3^2+1^2}$

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{10} &\leq g(x) \leq \sqrt{10} \\
3-\sqrt{10} &\leq 3+g(x) \leq 3+\sqrt{10} \\
3-\sqrt{10} &\leq f(x) \leq 3+\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

ค่าต่ำสุดของ $f(x)$ คือ $3-\sqrt{10}$

ค่าสูงสุดของ $f(x)$ คือ $3+\sqrt{10}$

16. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\sin x > \cos^2 x$

วิธีทำ ให้ $\sin x > \cos^2 x$

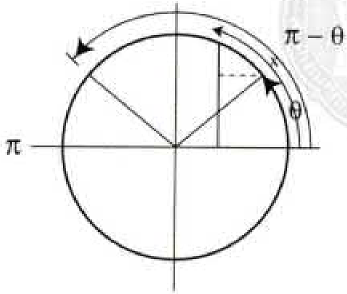
จะได้ $\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$

$$(\sin x + \frac{\sqrt{5}+1}{2})(\sin x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}) > 0$$

เนื่องจาก $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$ จะได้ $\sin x + \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 0$

ดังนั้น $\sin x - \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$

จะได้ $\sin x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



ให้ $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

จะเห็นว่า $\theta < x < \pi - \theta$

นั่นคือ $\theta + 2k\pi < x < \pi - \theta + 2k\pi$

$$\theta + 2k\pi < x < (2k+1)\pi - \theta$$

เมื่อ $k \in I$

เซตคำตอบ คือ $\{x \in R \mid \theta + 2k\pi < x < (2k+1)\pi - \theta$

เมื่อ $k \in I$ และ $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$

17. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $4\sin^2 x + 3\tan x - 2\sec^2 x > 0$

วิธีทำ ให้ $4\sin^2 x + 3\tan x - 2\sec^2 x > 0$

จะเห็นว่า $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ เมื่อ $n \in I$

เพราะถ้า $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

จะทำให้ $4\sin^2 x + 3\tan x - 2\sec^2 x$ ไม่มีความหมาย

เมื่อ $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ จะได้ $\cos^2 x > 0$

ดังนั้น $4\sin^2 x\cos^2 x + 3\tan x\cos^2 x - 2\sec^2 x\cos^2 x > 0$

$$\sin^2 2x + \frac{3}{2}\sin 2x - 2 > 0$$

$$\left(\sin 2x + \frac{3+\sqrt{41}}{4}\right)\left(\sin 2x - \frac{3-\sqrt{41}}{4}\right) > 0$$

จะได้ $\sin 2x < \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ หรือ $\sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}$

แต่ $\frac{-3-\sqrt{41}}{4} < -1$ จึงเป็นไปไม่ได้ที่ $\sin 2x < \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$

ดังนั้น $\sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}$

จึงได้

$$\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4} + 2k\pi < 2x < -\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4} + (2k+1)\pi$$

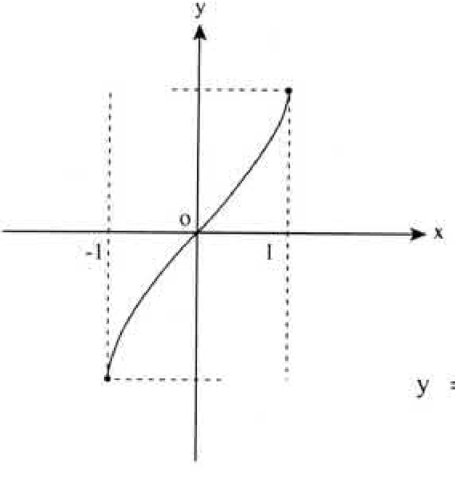
เอา $\frac{1}{2}$ คูณตลอด

$$\frac{\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}}{2} + k\pi < x < -\frac{\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

เซตคำตอบคือ

$$\left\{x \in R \mid \frac{\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}}{2} + k\pi < x < -\frac{\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ เมื่อ } k \in I\right\}$$



$$y = \arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}$$

จากกราฟ ถ้าให้ arcsin $\frac{\sqrt{41}-3}{4}$ = a จะได้ a < 2x < π − a

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์มีคาบเท่ากับ 2π จึงได้

$a + 2k\pi < 2x < -a + (2k+1)\pi$ เมื่อ $k \in I$

18. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$

วิธีทำ ให้ $$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$$

เนื่องจาก

$$|\sin x + \cos x| = |\sqrt{2}\ (\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cos x)| \leq \sqrt{2}$$

$$|\sin x + \cos x| = |\sqrt{2}\ (\cos\tfrac{\pi}{4} \sin x + \sin\tfrac{\pi}{4} \cos x)| \leq \sqrt{2}$$

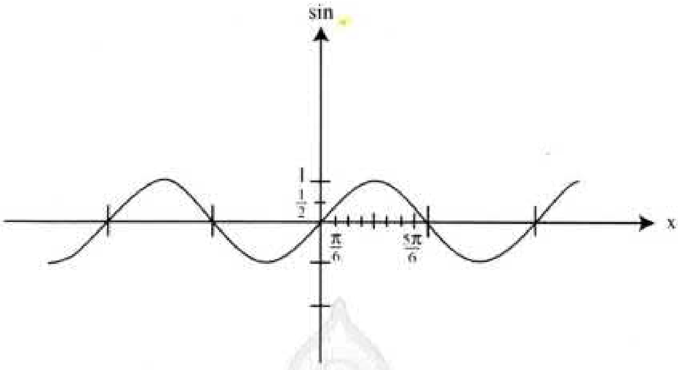
$$|\sin x + \cos x| = |\sqrt{2}\ \sin (x + \tfrac{\pi}{4})| \leq \sqrt{2}$$

ดังนั้น $\sqrt{3} - (\sin x + \cos x) > 0$

จึงได้ $\sin^2 x - \frac{1}{4} > 0$

$$(\sin x - \tfrac{1}{2})(\sin x + \tfrac{1}{2}) > 0$$

นั่นคือ $\sin x < -\frac{1}{2}$ หรือ $\sin x > \frac{1}{2}$



จากกราฟ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

พบว่า $\sin x < -\frac{1}{2}$ ก็ต่อเมื่อ $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$ ...(1)

$\sin x > \frac{1}{2}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{\pi}{6} < x < 5\frac{\pi}{6}$ ...(2)

เนื่องจากฟังก์ชัน sin เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีคาบเป็น 2π

จาก (1) จึงได้ $-\frac{5\pi}{6} + 2n\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ เมื่อ $n \in I$

$\frac{\pi}{6} + (2n-1)\pi < x < \frac{5\pi}{6} + (2n-1)\pi$ ...(3)

จาก (2) จึงได้

$\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ เมื่อ $n \in I$ ....(4)

จาก (3) หรือ (4) จะเห็นว่า $2n - 1$ เป็นจำนวนคี่ $2n$ เป็นจำนวนคู่ ถ้าให้ k เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ใดๆ

นั่นคือ k เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi\}$ เมื่อ $k \in I$

19. กำหนดให้ $0 < x < 2\pi$ จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$

วิธีทำ ให้ $0 < x < 2\pi$ และ $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$

พิจารณา $\cos x - \sin x - \cos 2x$

$$= (\cos x - \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= (\cos x - \sin x)\,[1 - (\cos x + \sin x)]$$

$$= (\cos x - \sin x)\,(1 - 1 + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2}\,\cos \frac{x}{2})$$

$$= (\cos x - \sin x)\,(2\sin \frac{x}{2})\,(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})$$

เนื่องจาก $0 < x < 2\pi$ จะได้ $0 < \frac{x}{2} < \pi$

ดังนั้น $2\sin \frac{x}{2} > 0$

จะได้ $(\cos x - \sin x)\,(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) > 0$

จึงมีกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $\cos x - \sin x > 0$ และ $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} > 0$

จาก $\cos x - \sin x > 0$

จะได้ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$

และจาก $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} > 0$

จะได้ $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$

นั่นคือ $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$

กรณีที่ 2 $\cos x - \sin x < 0$ และ $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} < 0$

จาก $\sin x - \cos x < 0$

จะได้ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

และจาก $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} < 0$

จะได้ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

จากกรณีทั้งสองจะได้ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{x \in R \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi\}$

20. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\tan\frac{x}{2} > \frac{\tan x - 2}{\tan x + 2}$

วิธีทำ ให้ $$\tan\frac{x}{2} > \frac{\tan x - 2}{\tan x + 2}$$

ให้ $$t = \tan\frac{x}{2}$$

จะได้ $$t > \frac{\frac{2t}{1-t^2} - 2}{\frac{2t}{1-t^2} + 2}$$

$$t > \frac{2t - 2 + 2t^2}{2t + 2 - 2t^2}$$

$$-t < \frac{t^2 + t - 1}{t^2 - t - 1}$$

$$\frac{t^2 + t - 1}{t^2 - t - 1} + t > 0$$

$$\frac{t^2 + t - 1 + t^3 - t^2 - t}{t^2 - t - 1} > 0$$

$$\frac{(t - 1)(t^2 + t + 1)}{t^2 - t - 1} > 0$$

แต่ $t^2+t+1 > 0$ ทุก $t \in R$

ดังนั้น $\dfrac{t-1}{t^2-t-1} > 0$

จึงมีกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $t-1 > 0$ และ $t^2-t-1 > 0$

จะได้ $t > 1$ และ $(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 0$

เมื่อ $t > 1$ จะได้ $t - \frac{1-\sqrt{5}}{2} > 0$

ดังนั้น $t > 1$ และ $t - \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

จะได้ $t > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

กรณีที่ 2 $t-1 < 0$ และ $t^2-t-1 < 0$

จะได้ $t < 1$ และ $(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) < 0$

เมื่อ $t < 1$ จะได้ $t - \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$

ดังนั้น $t < 1$ และ $t - \frac{1-\sqrt{5}}{2} > 0$

จะได้ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < t < 1$

จากกรณีทั้งสองจะได้ $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < t$ หรือ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < t < 1$

แสดงว่า $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \tan\frac{x}{2}$ หรือ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \tan\frac{x}{2} < 1$

จะได้ $\arctan\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\arctan\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

$2\arctan\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi$ หรือ $2\arctan\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ

$\{x \in R \mid 2k\pi + 2\arctan\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < (2k+1)\pi$

หรือ $2k\pi + 2\arctan\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ เมื่อ $k \in I\}$

บทที่ 3
อสมการที่เกี่ยวกับเรขาคณิต

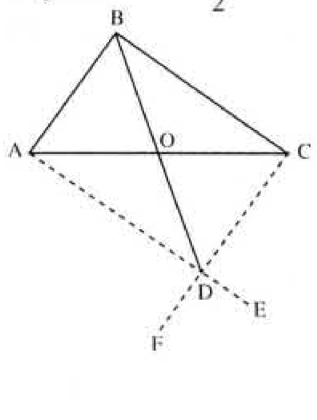
ทบทวนสมบัติเกี่ยวกับเรขาคณิต

1. ผลบวกของความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ยาวกว่าความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมนั้น
2. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
3. สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวกว่าด้านประกอบมุมฉาก
4. จากจุดภายนอกวงกลมสามารถลากเส้นสัมผัสวงกลมได้สองเส้นและเส้นสัมผัสทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน

ตัวอย่างวิธีการแก้ปัญหาโจทย์อสมการที่เกี่ยวกับเรขาคณิต

1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง BO เป็นเส้นที่ลากจากมุมยอด B ไปแบ่งครึ่งด้าน AC ที่จุด O

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{AB + BC}{2} - \dfrac{AC}{2} < BO < \dfrac{AB + BC}{2}$



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม B0 เป็นเส้นที่ลากจากจุดยอด B ไปแบ่งครึ่งด้าน AC ที่จุด O

ต้องการพิสูจน์ว่า $\frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2} < BO < \frac{AB + BC}{2}$

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก AE ขนาน BC

ลาก CF ขนาน AB ตัด AE ที่ D

ลาก OD

พิสูจน์ จากการสร้างจะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน BD และ AC เป็นเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O

จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ $BD < AB + AD$

เนื่องจาก $BD = 2BO$ และ $AD = BC$

จึงได้ $2BO < AB + BC$

นั่นคือ $BO < \frac{AB + BC}{2}$

จากรูปสามเหลี่ยม ABO และรูปสามเหลี่ยม CBO

$$BO + AO > AB$$

$$BO + OC > BC$$

แต่ $AO = OC = \frac{1}{2} AC$

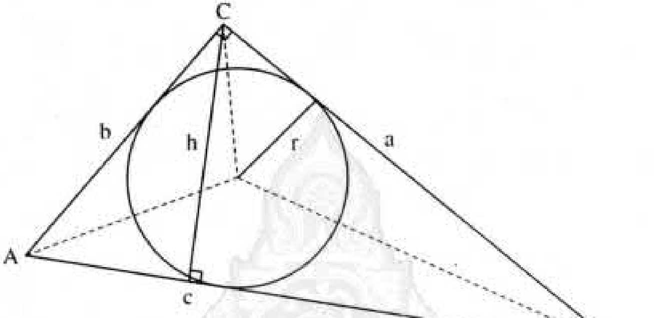
จะได้ $2BO + AC > AB + BC$

ดังนั้น $BO > \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2}$

นั่นคือ $\frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2} < BO < \frac{AB + BC}{2}$

2. กำหนดให้ r เป็นความยาวของรัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง h เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ โดยมีด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นฐาน

จงพิสูจน์ว่า $0.4 < \frac{r}{h} < 0.5$



กำหนดให้ r เป็นความยาวของรัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACB โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก

h เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ACB โดยมี AB เป็นฐาน

ต้องการพิสูจน์ว่า $0.4 < \frac{r}{h} < 0.5$

พิสูจน์ ให้ a,b และ c เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

จะแสดงว่า $\frac{r}{h} < 0.5$

ให้ S เป็นพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

จะได้ $S = \frac{1}{2} hc$

นอกจากนี้ $S = \frac{1}{2} r (a+b+c)$

จึงได้ $\frac{1}{2} hc = \frac{1}{2} r (a+b+c)$

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a + b + c}$$

เนื่องจาก $a + b > c$ จึงได้ $a + b + c > 2c$

ดังนั้น $\frac{c}{a + b + c} < \frac{c}{2c}$

นั่นคือ $\frac{r}{h} < 0.5$

ต่อไปจะแสดงว่า $0.4 < \frac{r}{h}$

เนื่องจาก a, b และ c เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี c เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

ดังนั้น $a^2 + b^2 = c^2$

แต่ $(a-b)^2 \geq 0$

จะได้ $a^2 + b^2 \geq 2ab$

แสดงว่า $c^2 \geq 2ab$

ดังนั้น $2c^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab$

นั่นคือ $2c^2 \geq (a+b)^2$

จะได้ $\sqrt{2}\,c \geq a + b$

$$\sqrt{2}\,c + c \geq a + b + c$$

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{2}{\sqrt{2}\,c + c}$$

จาก $\frac{r}{h} = \frac{c}{a + b + c}$

จะได้ $\frac{r}{h} \geq \frac{c}{\sqrt{2}\,c + c}$

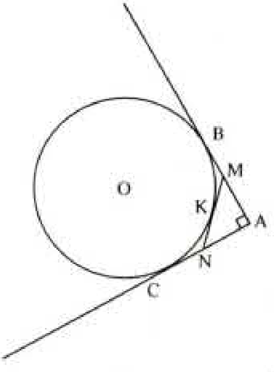
ดังนั้น $\frac{r}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

จะได้ $\frac{r}{h} > 0.4$ (เพราะ $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} > 0.4$)

นั่นคือ $0.4 < \frac{r}{h} < 0.5$

3. วงกลม O สัมผัสแขนของมุมฉากที่มี A เป็นจุดยอดมุม ที่จุด B และ C ตามลำดับ MN เป็นส่วนของเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม O และ ตัด AB และ AC ที่ M และ N ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{2}$ (AB+AC) < MN < $\frac{1}{2}$ (AB + AC)



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมที่สัมผัสแขนของมุมฉาก ที่มี A เป็นจุดยอดมุม ที่จุด B และ C ตามลำดับ

MN เป็นส่วนของเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม O และตัด AB และ AC ที่ M และ N ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\frac{1}{3}$ (AB+AC) < MN < $\frac{1}{2}$ (AB+AC)

พิสูจน์ ให้ K เป็นจุดที่ MN สัมผัสวงกลม O

จะได้ BM = MK และ CN = NK

ดังนั้น MK + NK = BM + CN

แสดงว่า MN = BM + CN

แต่ MN < AM + AN

จะได้ 2MN < AM + BM + AN + CN

2MN < AB + AC

MN < $\frac{1}{2}$ (AB+AC)

นอกจากนี้ MN > AN และ MN > AM (MN เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก)

จะได้ $2MN > AM + AN$

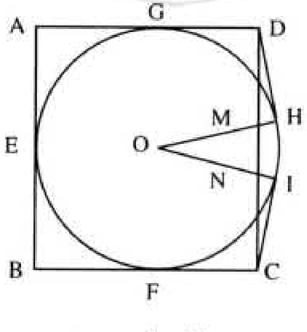
ดังนั้น $3MN > AM + BM + AN + CN$

$3MN > AB + AC$

$MN > \frac{1}{3}(AB + AC)$

นั่นคือ $\frac{1}{3}(AB+AC) < MN < \frac{1}{2}(AB+AC)$

4. วงกลม O สัมผัสด้านสามด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งและตัดด้านที่สี่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้น จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของความยาวของด้านที่สี่ของรูปสี่เหลี่ยมกับด้านตรงข้ามมากกว่าผลบวกของความยาวของด้านสองด้านที่เหลือ



กำหนดให้ ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม มีด้าน AB, BC และ AD สัมผัสวงกลม O ที่จุด E, F และ G ตามลำดับ ด้าน CD ตัดวงกลม O

ต้องการพิสูจน์ว่า $CD + AB > AD + BC$

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก DH และ CI สัมผัสวงกลม O ที่ H และ I ตามลำดับ

ลาก OH และ OI ตัด CD ที่ M และ N ตามลำดับ

พิสูจน์ เนื่องจาก DHM และ CIN เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มีด้าน DM และ CN เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของ ΔDHM และ ΔCIN ตามลำดับ

จะได้ $DM > DH$ และ $CN > CI$

ดังนั้น $CD = CN + NM + DM > DH + CI$

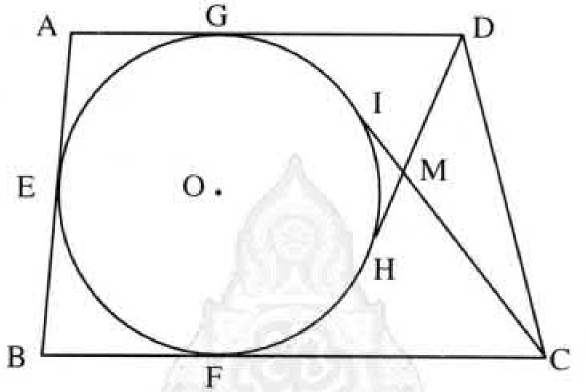
แต่ $GD = DH$ และ $CF = CI$

แสดงว่า $CD > GD + CF$ ....(1)

และเนื่องจาก $AE = AG$ และ $BE = BF$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จึงได้ $CD + AB > AD + BC$

5. วงกลม O สัมผัสด้านสามด้านของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง แต่วงกลมไม่ตัดด้านที่สี่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้น จงพิสูจน์ว่าผลบวกของความยาวของด้านที่สี่ของรูปสี่เหลี่ยมกับด้านตรงข้ามน้อยกว่าผลบวกของความยาวด้านสองด้านที่เหลือ



กำหนดให้ ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม มีด้าน AB, BC และ AD สัมผัสวงกลม O ที่จุด E, F และ G ตามลำดับ ด้าน CD ไม่ตัดวงกลม O

ต้องการพิสูจน์ว่า $AD + BC > CD + AB$

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก DH และ CI สัมผัสวงกลม O ที่ H และ I ตามลำดับ

พิสูจน์ ให้ M เป็นจุดตัดของ DH และ CI

เนื่องจาก $DM + CM > CD$

จะได้ $DH + CI > CD$

แต่ $DH = DG$ และ $CI = CF$

ดังนั้น $DG + CF > CD$ ....(1)

และเนื่องจาก $AE = AG$ และ $BE = BF$. ....(2)

จาก (1) และ (2) จึงได้ $AD + BC > CD + AB$

คณะผู้จัดทำ

นางจารุนี สูตะบุตร	ที่ปรึกษา
ผู้อำนวยการศูนย์พัฒนาหนังสือ (นางสาวพรเพ็ญ ปทุมสิริ)	ที่ปรึกษา
นางสาวเอิบบุญ สุทธิประภา	ประธานกรรมการ
นายประสาท สอ้านวงศ์	รองประธานกรรมการ
นางชับ กาญจนพิทักษ์	กรรมการ
นายกมล เอกไทยเจริญ	กรรมการ
นายศักดา บุญโต	กรรมการ
นางสาวจงดี วงศ์พรภักดี	กรรมการ
นายทรงวิทย์ สุวรรณธาดา	กรรมการ
นางมาลินี ผโลประการ	กรรมการ
นางสาววิณา อัครธรรม	กรรมการและเลขานุการ

ผู้เรียบเรียง

นายศักดา บุญโต

ผู้ตรวจขั้นสุดท้าย

นายประสาท สอ้านวงศ์

นางสาวจงดี วงศ์พรภักดี

บรรณาธิการที่ปรึกษา

นางสาวเอิบบุญ สุทธิประภา

นายประสาท สอ้านวงศ์

บรรณาธิการ

นางสาววิณา อัครธรรม

ผู้ออกแบบปก

นายชูเกียรติ เกิดอุดม

ผู้วาดภาพประกอบ

นางสาวพรรณมณี ชูเชาวน์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์การศาสนา
314-316 ถ.บำรุงเมือง บ้านบาตร เขตป้อมปราบฯ กรุงเทพฯ 10100 โทร. 223-3351
นายปกรณ์ ตันสกุล ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา ปีที่พิมพ์ 2539


$a \neq b$
$a > b$
$c < b$